DELPHI CLASSICS

Sir Isaac Newton

Collected Works

Series Six

The Collected Works of

SIR ISAAC NEWTON

(1642-1726/7)

Contents

Scientific Works

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA
THE MATHEMATICAL PRINCIPLES OF NATURAL PHILOSOPHY (MOTTE TRANSLATION)
OPTICKS

Theological Works

THE CHRONOLOGY OF ANCIENT KINGDOMS AMENDED
OBSERVATIONS ON DANIEL AND THE APOCALYPSE OF ST. JOHN
AN HISTORICAL ACCOUNT OF TWO NOTABLE CORRUPTIONS OF SCRIPTURE

The Biographies

MEMOIRS OF SIR ISAAC NEWTON'S LIFE by William Stukeley
SIR ISAAC NEWTON by Sarah K. Bolton
SIR ISAAC NEWTON by Henry Martyn Taylor

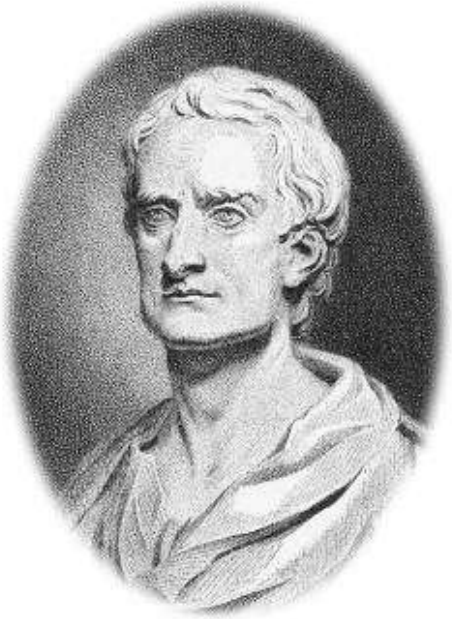
The Delphi Classics Catalogue

© *Delphi Classics 2016*

Version 1

The Collected Works of

SIR ISAAC NEWTON



By Delphi Classics, 2016

With new introductions by
Professor Kenneth Richard Seddon, OBE
(QUILL, The Queen's University of Belfast)

COPYRIGHT

Collected Works of Sir Isaac Newton First published in the United Kingdom in 2016 by Delphi Classics.

© Delphi Classics, 2016.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form other than that in which it is published.

Delphi Classics

is an imprint of

Delphi Publishing Ltd Hastings, East Sussex United Kingdom

Contact: sales@delphiclassics.com www.delphiclassics.com

Scientific Works

Isaac Newton was born on Christmas Day, 1642 at Woolsthorpe Manor in Woolsthorpe-by-Colsterworth, a hamlet in the county of Lincolnshire.

Another view of Newton's birthplace

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA

Outside the new British Library building (Euston Road, London) stands a large statue of Sir Isaac Newton (1642-1727), sculpted by the Scottish artist, Sir Eduardo Paolozzi, in 1995 (see Figure 1). This powerful evocation of Newton was inspired by a rare watercolour of Newton, painted by William Blake at the end of the eighteenth century (see Figure 2), and now displayed as one of the prize acquisitions of Tate Britain. Why, of all the multitude of authors collected in the British Library (the largest library in the world), was Sir Isaac Newton, a scientist, selected for this unique honour? Perhaps because he is, arguably, the greatest British scientist that ever lived, and wrote perhaps the most important book ever written, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. This book, originally published in Latin (see Figure 3), first appeared in 1687, and is most commonly referred to as Newton's *Principia*. A second edition was published in 1713, and the definitive (third) edition was published in 1726, thirty-nine years after the first edition. It first appeared in English translation (Andrew Motte), under the title *The Mathematical Principles of Natural Philosophy* in 1729 (see Figure 4), and it is a modern update of this translation which is published here alongside the original Latin edition.

The work contains three books, and describes, *inter alia*, Newton's Laws of Motion, Newton's Law of Universal Gravitation, and the derivation of Kepler's empirical Laws of Planetary Motion. It also develops arguments and methods that evolved into modern calculus. From this monumental work sprang all of modern physics, and as a description of the classical world, it remains unchallenged. Only the revolutions of Einstein's theory of relativity and quantum mechanics have induced a rethinking of Newtonian mechanics, and it has stood the test of time for nearly four centuries. It remains the definitive description of the macroscopic world. With the discovery, in February 2016 (see weblink) of the first evidence for the existence of gravitational waves (obtained by colliding two black holes in

the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, LIGO), it is both timely and fascinating to return to this revolutionary account from Newton of universal gravitation. As he said himself, in a letter to Robert Hooke (see the extract in Figure 5), “If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants.” Einstein stood on Newton’s shoulders and the LIGO team stood on the shoulders of Einstein.

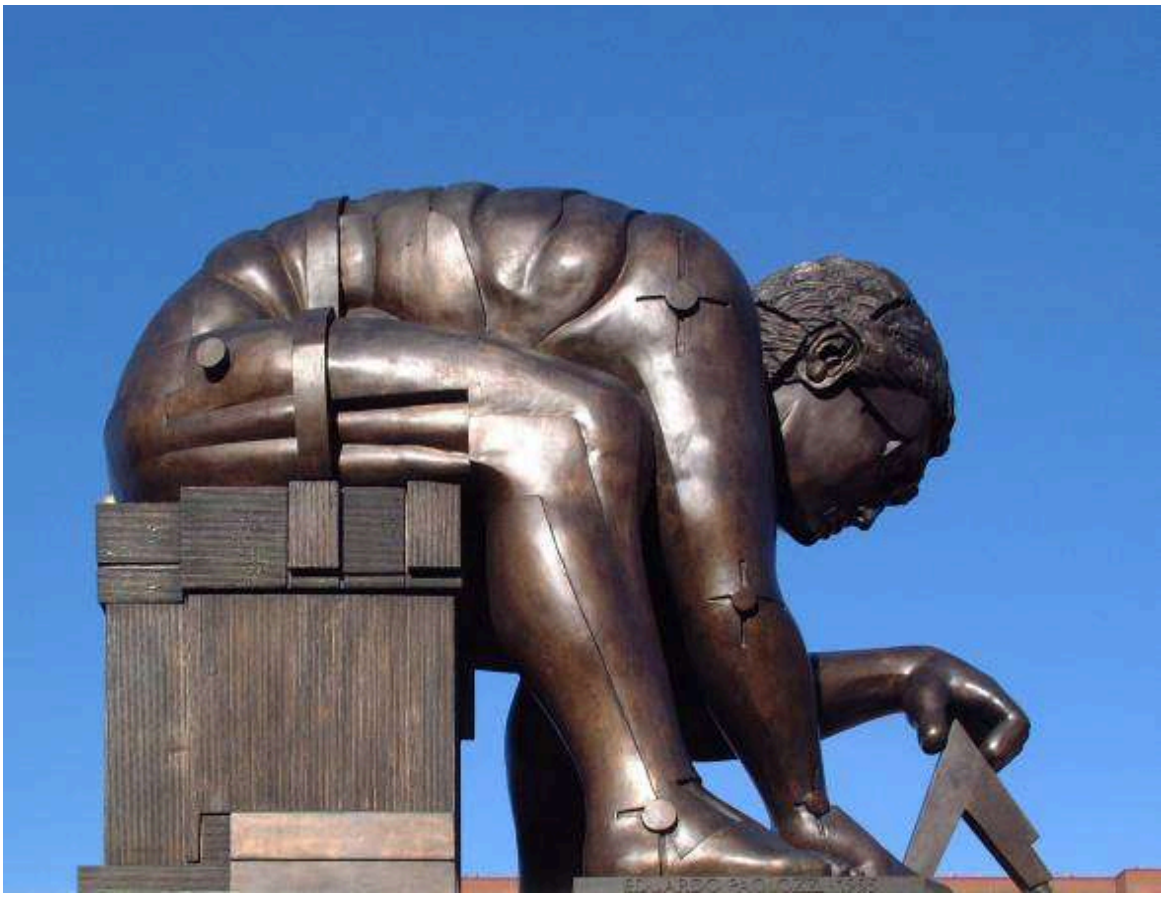


Figure 1: The bronze statue of Sir Isaac Newton by Sir Eduardo Paolozzi (1995), outside the British Library (© K.R. Seddon, 2001)

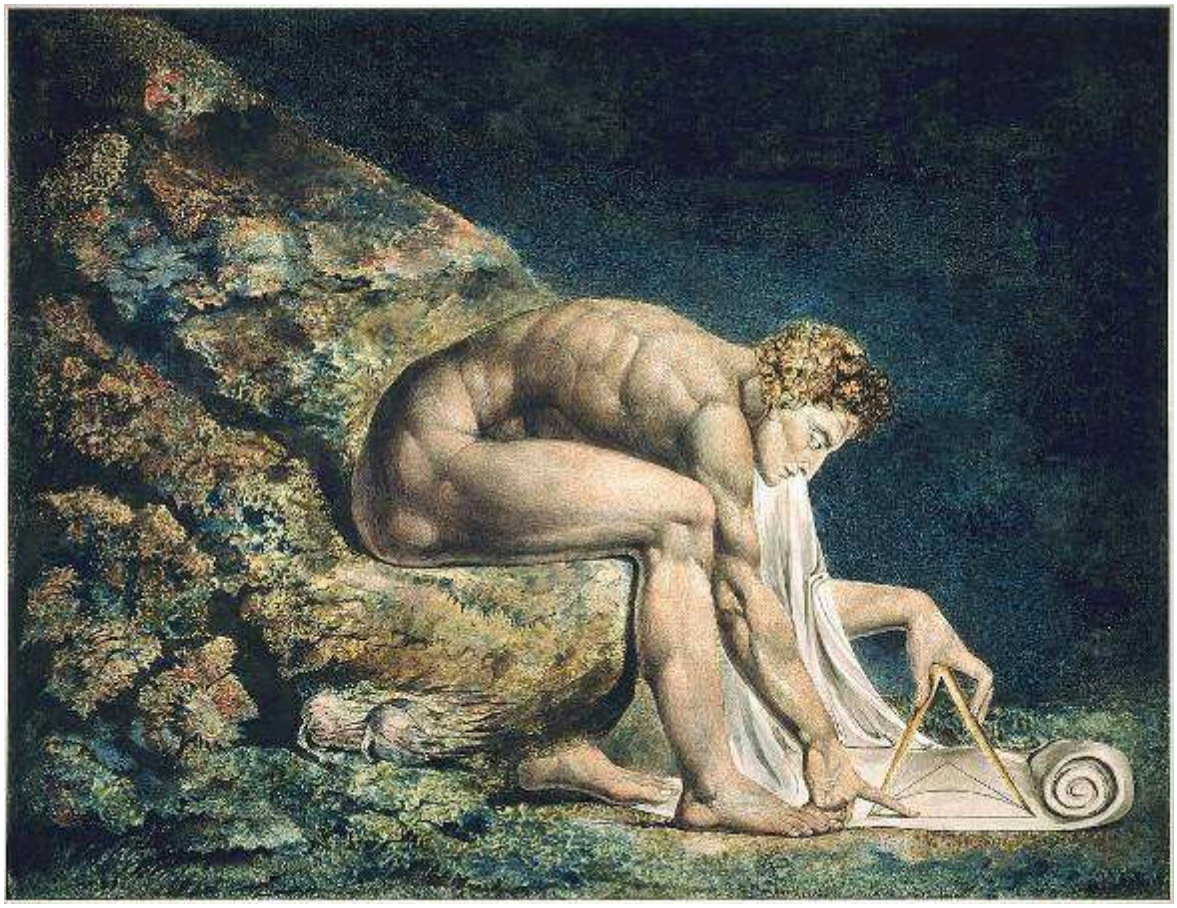
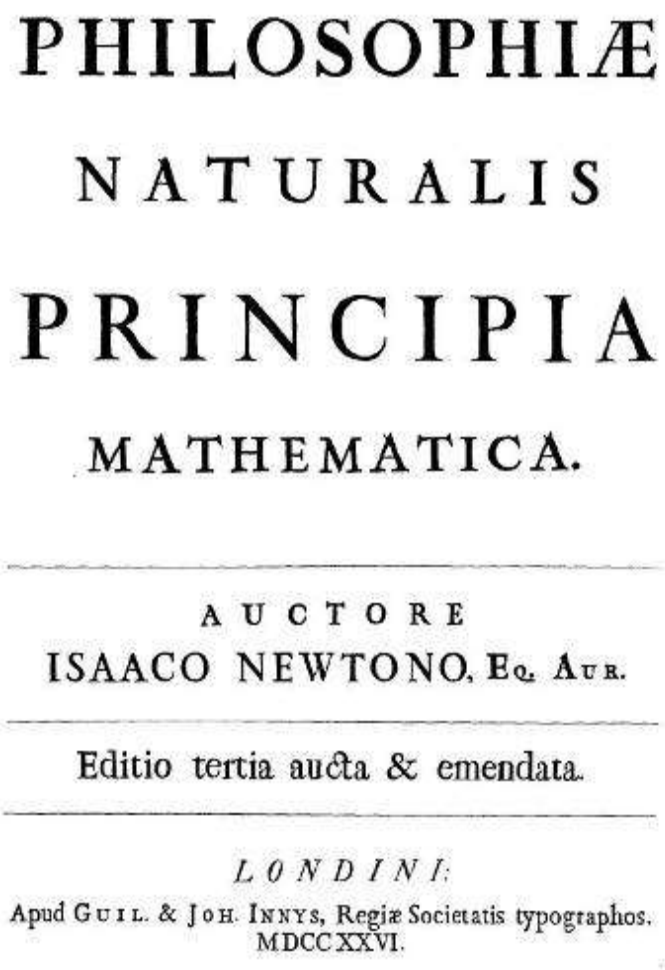


Figure 2: A painting of Sir Isaac Newton by William Blake (1795), currently displayed in Tate Modern



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, Eq. Aur.

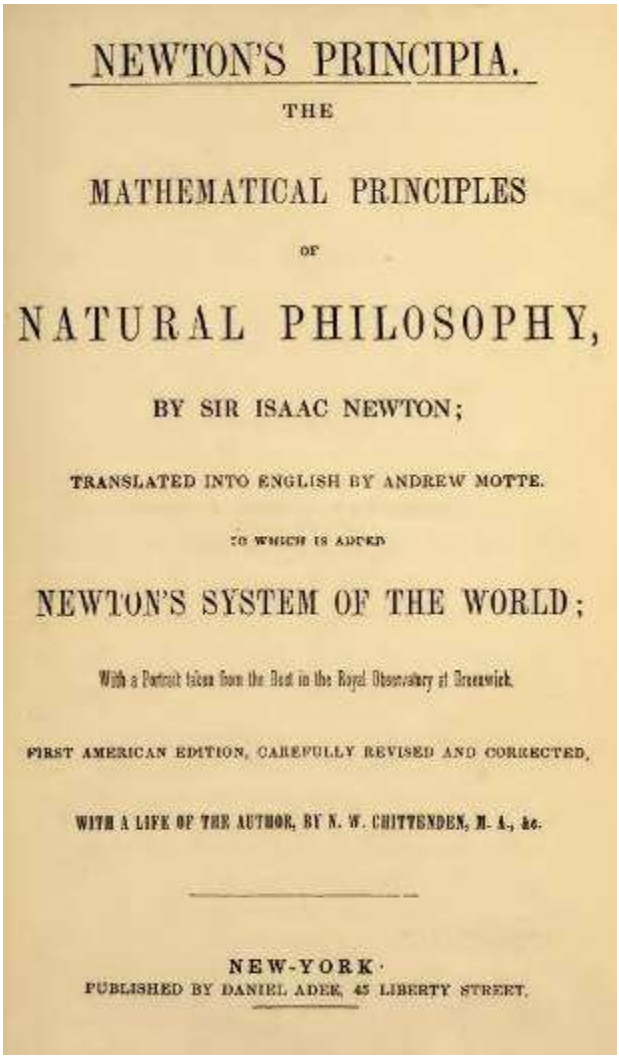
Editio tertia aucta & emendata.

LONDINI:

Apud Guil. & Joh. Innys, Regiæ Societatis typographos.

MDCCXXVI.

Figure 3: The title page of the third (amended) edition (1726) of Newton's landmark book



NEWTON'S PRINCIPIA.

THE

MATHEMATICAL PRINCIPLES

OF

NATURAL PHILOSOPHY,

BY SIR ISAAC NEWTON;

TRANSLATED INTO ENGLISH BY ANDREW MOTTE.

TO WHICH IS ADDED

NEWTON'S SYSTEM OF THE WORLD;

With a Portrait taken from the Bust in the Royal Observatory at Greenwich.

FIRST AMERICAN EDITION, CAREFULLY REVISED AND CORRECTED,

WITH A LIFE OF THE AUTHOR, BY N. W. CHITTENDEN, M. A., &c.

NEW-YORK:
PUBLISHED BY DANIEL ADEE, 45 LIBERTY STREET.

Figure 4: The title page of the English translation of the third (amended) edition (1846) of Newton's landmark book, published in New York

Figure 5: "If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants", from a letter from Sir Isaac Newton to Robert Hooke (15th February, 1676)

CONTENTS

PRÆFATIO AD LECTOREM.
IN VIRI PRÆSTANTISSIMI D. ISAACI NEWTONI OPUS HOCCE MATHEMATICO-PHYSICUM
AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS
DE MOTU CORPORUM
LIBER PRIMUS
LIBER SECUNDUS
DE MUNDI SYSTEMATE
LIBER TERTIUS

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

a Serenissimo

REGE CAROLO II.

AD

PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET AUSPICIIS

POTENTISSIMI MONARCHÆ

JACOBI II.

FLORENTI.

Tractatum hunc humillime *D.D.D.*

IS. NEWTON.

PRÆFATIO AD LECTOREM.

Cum Veteres Mechanicam *(uti Author est* Pappus*) in verum Naturalium investigatione maximi fecerint, & recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, Phænomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc Tractatu* Mathesin *excolere quatenus ea ad* Philosophiam *spectat.* Mechanicam *vero duplicem Veteres constituerunt:* Rationalem *quæ per Demonstrationes accurate procedit, &* Practicam*. Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utiq;* Mechanica *nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam*. Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas describere* Geometria *non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro easdem accurate describere prius didicerit quam limen attingat* Geometriæ*; dein, quomodo per has operationes Problemata solvantur, docet. Rectas & circulos describere Problemata sunt sed non Geometrica. Ex* Mechanica *postulatur horum solutio, in* Geometria *docetur solutorum usus. Ac gloriatur* Geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur* Geometria *in praxi Mechanica, & nihil aliud est quam* Mechanicæ universalis *pars illa quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut* Geometria *ad magnitudinem,* Mechanica *ad motum vulgo reseratur. Quo sensu* Mechanica rationalis *erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuscunq; resultant, & virium quæ ad motus quoscunq; requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. Pars hæc* Mechanicæ *a Veteribus in* Potentiis quinque *ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non Artibus sed Philosophiæ consulentes, deq; potentiis non manualibus sed*

naturalibus scribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, levitatem, vim Elasticam, resistentiam Fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Et ea propter hæc nostra tanquam Philosophiæ principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a Phænomenis motuum investigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et hac spectant Propositiones generales quas Libro primo & secundo pertractavimus. In Libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem Systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœlestibus, per Propositiones in Libris prioribus Mathematice demonstratas, derivantur vires gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propositiones etiam Mathematicas deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitas vel in se mutuo impelluntur & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philosophi hactenus Naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philosophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic posita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, Vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec solum Typothetarum Sphalmata correxit & Schemata incidi curavit, sed etiam Author fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonstratam a me figuram Orbium cœlestium impetraverat, rogare non destitit ut eadem cum* Societate Regali *communicarem, Quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At postquam Motuum Lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpissem quæ ad leges mensuras Gravitatis & aliarum virium, ad figuras a corporibus secundum datas quascunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in Mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares spectant, (imperfecta cum sint,) in Corollariis Propositionis* LXVI. *simul complexus*

sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum Propositionum interrumpere. Nonnulla sero inventa locis minus idoneis inserere malui, quam numerum Propositionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus investigentur, & benigne suppleantur, enixe rogo.

IN VIRI PRÆSTANTISSIMI D. ISAACI NEWTONI OPUS HOCCE MATHEMATICO-PHYSICUM

Sæculi Gentisque nostræ Decus egregium.

En tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus atque Jovis; quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens Leges violare Creator
Noluit, æternique operis fundamina fixit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ Vis circumrotat Orbes.
Sol solio residens ad se jubet omnia prono
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula Gyris.
Jam patet horrificis quæ sit via flexa Cometis;
Jam non miramur barbati Phænomena Astri.
Discimus hinc tandem qua causa argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fræna recuset:
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.
Discimus & quantis refluum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellit, dum fractis fluctibus Ulvam
Deserit, ac Nautis suspectas nudat arenas;
Alternis vicibus suprema ad littora pulsans.
Quæ toties animos veterum torsere Sophorum,
Quæque Scholas frustra rauco certamine vexant
Obvia conspicimus nubem pellente Mathesi.
Jam dubios nulla caligine prægravat error
Queis Superum penetrare domos atque ardua Cœli
Scandere sublimis Genii concessit acumen.
Surgite Mortales, terrenas mittite curas
Atque hinc cœligenæ vires dignoscite Mentis

A pecudum vita longe lateque remotæ.
Qui scriptis jussit Tabulis compescere Cædes
Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis; Quive vagis populis circumdare mœnibus Urbes
Autor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen pressit ab Uva;
Vel qui Niliaca monstravit arundine pictos
Consociare sonos, oculisque exponere Voces;
Humanam sortem minus extulit; utpote pauca
Respiciens miseræ solummodo commoda vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cœcæ
Claustra patent Terræ rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt sæcula mundi.
Talia monstrantem mecum celebrate Camænis,
Vos qui cœlesti gaudetis nectare vesci,
NEWTONVM clausi reserantem scrinia Veri, *NEWTONVM* Musis charum, cui pectore puro Phœbus adest, totoque incessit Numine mentem:
Nec fas est propius Mortali attingere Divos.
EDM. HALLEY.

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

Aer duplo densior in duplo spatio quadruplus est. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunq; diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusq; pondus. Nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

Def. II.

Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis, adeoq; in corpore duplo majore æquali cum Velocitate duplus est, et dupla cum Velocitate quadruplus.

Def. III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodq;, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neq; differt quicquam ab inertia Massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis inertiæ dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta, estq; exercitium ejus sub diverso respectu et Resistentia et Impetus: Resistentia quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; Impetus quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus Resistentiam quiescentibus et Impetum moventibus tribuit; sed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem, neq; semper vere quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

Def. IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neq; post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripeta.

Def. V.

Vis centripeta est qua corpus versus punctum aliquod tanquam ad centrum trahitur, impellitur, vel utcunq; tendit.

Hujus generis est gravitas, qua corpus tendit ad centrum Terræ: Vis magnetica, qua ferrum petit centrum Magnetis, et vis illa, quæcunq; sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in lineis curvis revolvi coguntur. Est autem vis centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix et motrix.

Def. VI.

Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Uti virtus Magnetica major in uno magnete, minor in alio.

Def. VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus Magnetis ejusdem major in minori Distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in Vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium (ut experimento pendulorum constat) atq; adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis a Terra; in æqualibus autem distantiis eadem undiq; propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

Def. VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majori corpore, minus in minore; inq; corpore eodem majus prope terram, minus in cælis. Hæc vis est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum & (ut ita dicam) pondus, & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires absolutas, acceleratrices & motrices, & distinctionis gratia referre ad corpora, ad corporum loca, & ad centrum virium: Nimirum vim motricem ad corpus,

tanquam conatum & propensionem totius in centrum, ex propensionibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis Magneticæ vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus saltem est hic conceptus. Nam virium causas & sedes physicas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem Materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiæ. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta Superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritq; semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones et impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulsus vel propensionis cujuscunq; in centrum, indifferenter et pro se mutuo promiscue usurpo, has vires non physice sed Mathematice tantum considerando. Unde caveat lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo in sensu in sequentibus accipiendæ sunt, explicare visum est. Nam tempus, spatium, locum et motum ut omnibus notissima non definio. Dicam tamen quod vulgus quantitates hasce non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipit. Et inde oriuntur præjudicia

quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, Mathematicas et vulgares distingui.

I. Tempus absolutum verum & Mathematicum, in se & natura sua absq; relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioq; nomine dicitur Duratio; relativum apparens & vulgare est sensibilis & externa quævis Durationis per motum mensura, (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

II. Spatium absolutum natura sua absq; relatione ad externum quodvis semper manet similare & immobile; relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aerei vel cælestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine, sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, movetur, spatium Aeris nostri quod relative & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aer transit, nunc alia pars ejus, & sic absolute mutabitur perpetuo.

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat, estq; pro ratione spatii vel absolutus vel relativus. Partem dico spatii, non situm corporis vel superficiem ambientem. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neq; tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de ipsius loco eadem cum summa translationum partium de locis suis, adeoq; locus totius idem cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, relativus de relativo in relativum. Sic in Navi quæ velis passis fertur, relativus corporis locus est navis regio illa in qua corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæq; adeo movetur una cum Navi; & Quies relativa est permansio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At Quies vera est permansio corporis in eadem parte spatii illius immoti in qua Navis ipsa una cum cavitate sua & contentis universis movetur. Unde si Terra vere quiescit, corpus quod relative quiescit in Navi, movebitur vere et absolute ea cum Velocitate qua Navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur, orietur verus et absolutus corporis motus

partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex Navis motu relativo in Terra; et si corpus etiam movetur relative in Navi, orietur verus ejus motus partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum Navis in Terra, tum corporis in Navi, et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut si Terræ pars illa ubi Navis versatur moveatur vere in Orientem, cum Velocitate partium 10010, et velis ventoq; feratur Navis in Occidentem cum Velocitate partium decem, Nauta autem ambulet in Navi Orientem versus cum Velocitatis parte una, movebitur Nauta vere et absolute in spatio immoto cum Velocitatis partibus 10001 in Orientem, et relative in Terra Occidentem versus cum Velocitatis partibus novem.

Tempus absolutum a relativo distinguitur in Astronomia per Æquationem Temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro Mensura Temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi ut ex veriore Tempore mensurent motus cælestes. Possibile est ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus Temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiæ rerum, sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli; proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex ijsdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii oscillatorii, tum etiam per Eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæ de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam Tempora & Spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum Essentia est ut sint loca, & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta loca, & solæ translationes de his locis sunt absoluti motus.

Verum quoniam hæ spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui, earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantiis rerum a corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa; deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis

utimur, nec incommode in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusq; referantur.

Distinguuntur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per eorum proprietates, causas & effectus. Quietis proprietas est, quod corpora vere quiescentia quiescunt inter se. Ideoq; cum possibile sit ut corpus aliquod in regionibus fixarum, aut longe ultra, quiescat absolute; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, utrum horum aliquod ad longinquum illud datam positionem servet, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere de axe motus, et progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Igitur motis corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus et absolutus definiri nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros, et sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur; sunt enim ambientia ad inclusa ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, absq; translatione de vicinia corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto loco movetur una locatum, adeoq; corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Igitur motus omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum et absolutorum, et motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, et motu loci hujus de loco suo, et sic deinceps, usq; dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri et absoluti non nisi per loca immota definiri possunt, et propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli: Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem, atq; adeo semper manent immota, spatiumq; constituunt quod immobile appello.

Causæ, quibus motus veri et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari et mutari potest absq; viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut ijs cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursus motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur, at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in qua motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, et conservari ubi verus mutatur; et propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus quibus motus absoluti et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem et absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturq; perpetuo in orbem donec filum a contorsione admodum rigescat, dein impleatur aqua, et una cum aqua quiescat; tum vi aliqua subitanea agatur motu contrario in orbem, et filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu: superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis, at postquam, vi in aquam paulatim impressa, effecit vas, ut hæc quoq; sensibiliter revolvi incipiat, recedet ipsa paulatim e medio, ascendetq; ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) et incitatiore semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relative. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum & innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuiq; relativo hic omnino contrarius. Initio ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: Aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Postea vero ut aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe, atq; hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relative. Igitur conatus iste non pendet a

translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusq; revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens; motus autem relativi pro varijs relationibus ad externa innumeri sunt, & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus de vero illo & unico motu participant. Unde & in Systemate eorum qui Cælos nostros infra Cælos fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas secum deferre; Planetæ & singulæ Cælorum partes, qui relative quidem in Cælis suis proximis quiescunt, moventur vere. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam fit in vere quiescentibus) unaq; cum cælis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non sunt eæ ipsæ quantitates quarum nomina præ se ferunt, sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatij, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ mensuræ; & sermo erit insolens & pure Mathematicus si quantitates mensuratæ hic subintelligantur. Proinde vim inferunt Sacris literis qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neq; minus contaminant Mathesin & Philosophiam qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est; propterea quod partes spatij illius immobilis in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta partim ex motibus apparentibus, qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur, id est facies

posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile, quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus nostris: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum & inveniretur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret; concludere liceret motum esse globorum, & tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus & apparentibus differentijs colligere, & contra, ex motibus seu veris seu apparentibus, eorum causas & effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa suerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

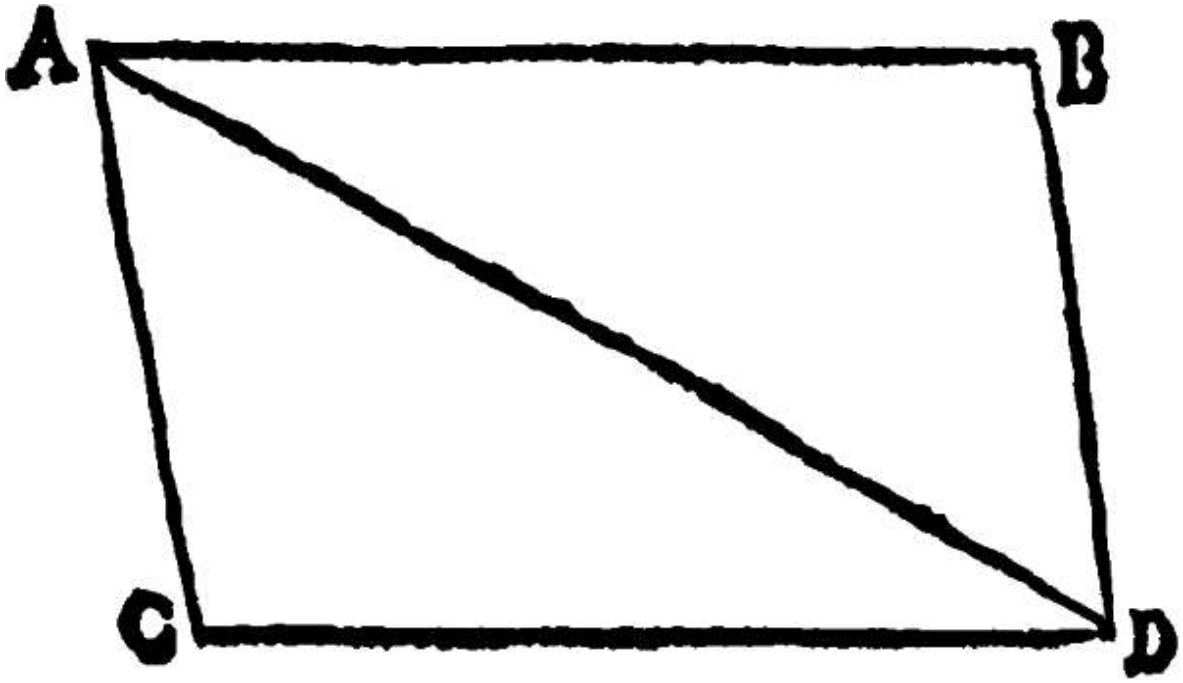
Lex. III.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; distentus eodem relaxandi se conatu urgebit Equum versus lapidem, ac lapidem versus equum, tantumq; impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod

in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunq; mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum sed motuum, (scilicet in corporibus non aliunde impeditis:) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

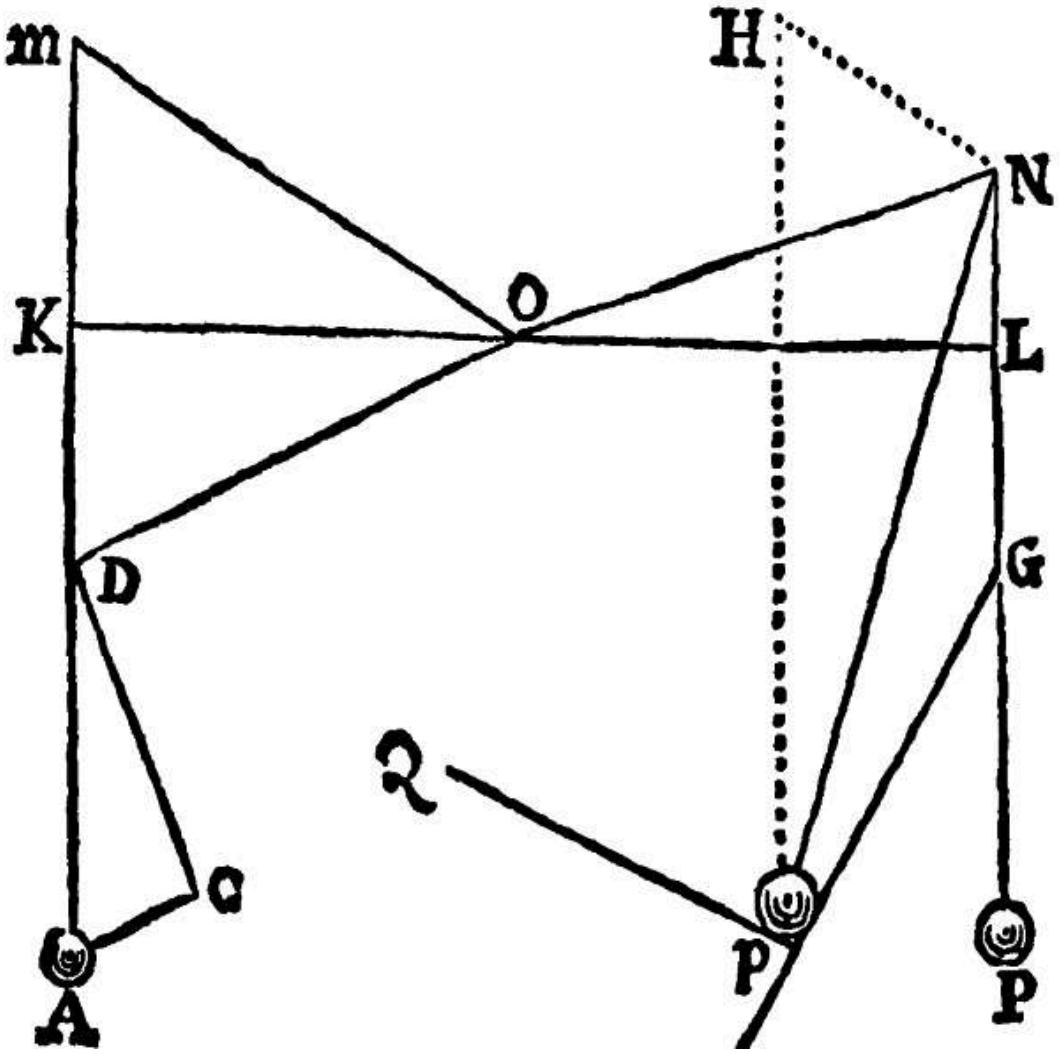


Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi sola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi sola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD* sive vis *N* imprimatur, sive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriusq; lineæ concursu *D* reperiri necesse est.

Corol. II.

Et hinc patet compositio vis directæ AD *ex viribus quibusvis obliquis* AB *&* BD*, & vicissim resolutio vis cujusvis directæ* AD *in obliquas quascunq;* AB *&* BD. *Quæ quidem Compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanica.*



Ut si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radij inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* sustineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: per centrum *O* agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroq; *O* & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* describatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallela sit *AC* & perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa sint vel non affixa ad planum rotæ, pondera idem valebunt ac si suspenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis

tota per lineam *AD*, & hæc resolvetur in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium *OL* ipsi *OD* æqualem; hoc est idem atq; pondus *P*, quod sit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id est (ob similia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* seu *OL*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ sunt reciproce ut radii in directum positi *OK* & *OL*, idem pollebunt & sic consistent in æquilibrio: (quæ est proprietas notissima Libræ, Vectis & Axis in Peritrochio:) sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod si pondus *p* ponderi *P* æquale partim suspendatur silo *Np*, partim incumbat plano obliquo *pG*: agantur *pH*, *NH*, prior horizonti, posterior plano *pG* perpendicularis; & si vis ponderis *p* deorsum tendens, exponatur per lineam *pH*, resolvi potest hæc in vires *pN*, *HN*. Si filo *pN* perpendiculare esset planum aliquod *pQ* secans planum alterum *pG* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *pQ*, *pG* solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *pN*, *HN* perpendiculariter, nimirum planum *pQ* vi *pN* & planum *pG* vi *HN*. Ideoque si tollatur planum *pQ* ut pondus tendat filum, quoniam filum sustinendo pondus, jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eadem vi *pN*, qua planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis *PN*, ut *pN* ad *pH*. Ideoq; si pondus *p* sit ad pondus *A* in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum *AM*, *pN* a centro rotæ, & ratione directa *pH* ad *pN*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atq; adeo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem *p* planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis qua pondus *p* urget planum *pQ* sit ad vim, qua idem vel gravitate sua vel ictu mallei impellitur secundum lineam *pH* in plano, ut *pN* ad *pH*; atq; ad vim qua urget planum alterum *pG* ut *pN* ad *NH*. Sed & vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. Usus igitur Corollarij hujus latissime patet, & late patendo veritatem ejus evincit, cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Authoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, radijs volubilibus, nervis tensis & ponderibus directe vel oblique

ascendentibus, cæterisq; potentijs Mechanicis componi solent, ut & vires Nervorum ad animalium ossa movenda.

Corol. III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eiq; contraria reactio æquales sunt per Legem 3, adeoq; per legem 2, æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant, æqualis erit subductio de motu utriusq;, adeoq; differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphæricum *A* sit triplo majus corpore sphærico *B*, habeatq; duas velocitatis partes, et *B* sequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, adeoq; motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B* ut sex ad decem; ponantur motus illis esse partium sex & decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinq; corpus *B* amittet partes totidem, adeoq; perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim; & *B* cum partibus septem vel sex vel quinq; existente semper summa partium sexdecim ut prius. Sin corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoq; progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim; corpus *B* amittendo, tot partes quot *A* lucratur, vel progredietur cum una parte, amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel regredietur cum una parte amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atq; ita summæ motuum conspirantium 15 + 1 vel 16 + 0, differentiæ contrariorum 17 - 1 & 18 - 2 semper erunt partium sexdecim ut ante concursum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusq; velocitas ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem ut motus post ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex

ante reflexionem; partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem, cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus; dein corporis utriusq; motus (per Corol. 2.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atq; antea, & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

Corol. IIII.

Commune gravitatis centrum ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis, & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis & distantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quiescet vel progredietur uniformiter in linea recta, Hoc postea in Lemmate xxiii demonstratur in plano, & eadem ratione demonstrari potest in loco solido. Ergo si corpora quotcunq; moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis, vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod linea horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data: similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis

tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem, alijsq; omnibus in se extrinsecus impressis, omnino vacant, adeoq; moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiæ centrorum utriusq; a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora, erunt motus relativi corporum eorundem vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atq; adeo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur, a communi corporum omnium centro, in partes summis totalibus corporum, quorum sunt centra, reciproce proportionales, adeoq; centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum; manifestum est quod commune illud omnium centrum, ob actiones binorum corporum inter se, nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se, vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ, & propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel Quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter, perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum, nisi a viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de hoc statu. Est igitur systematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

Corol. V.

Corporum dato spatio inclusorum ijdem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum absq; motu circulari.

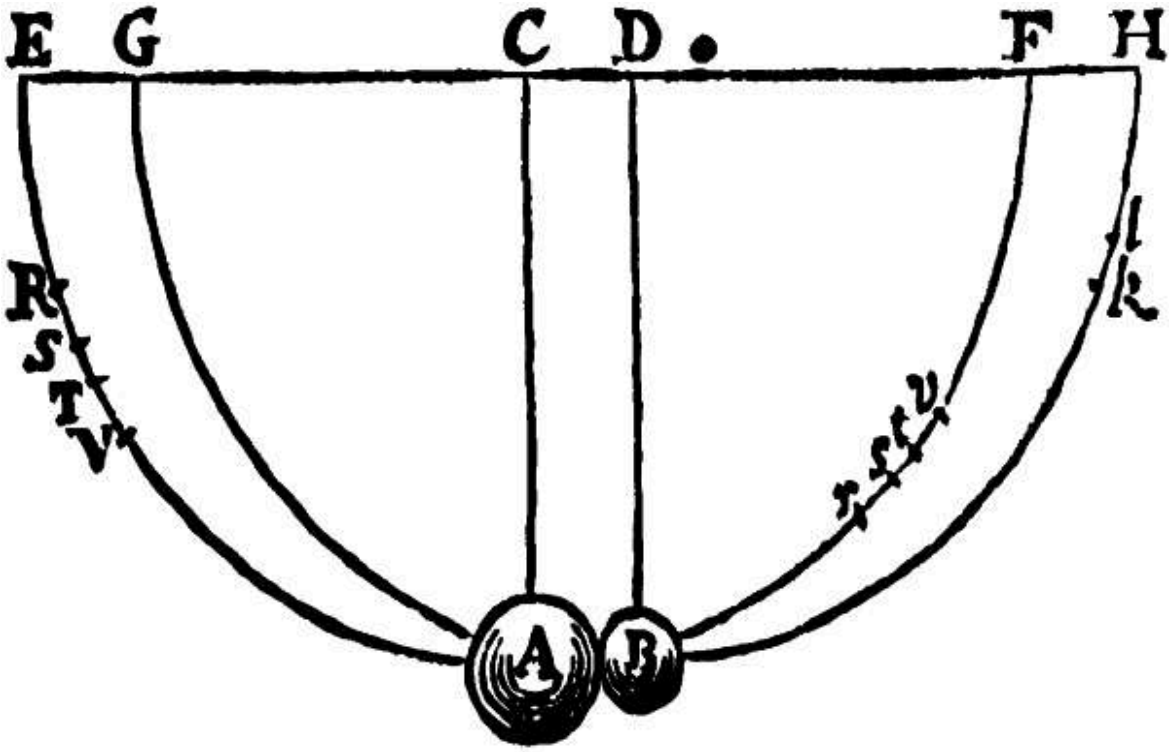
Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & summæ tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroq; casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem 2 æquales erunt congressuum effectus in utroq; casu, & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

Corol. VI.

Si corpora moveantur quomodocunq; inter se & a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt (per Legem 2.) adeoq; nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Scholium



Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & Corollaria duo prima adinvenit *Galilæus* descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in Parabola, conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aeris resistentiam aliquantulum retardantur. Ab ijsdem Legibus & Corollariis pendent demonstrata de temporibus oscillantium Pendulorum, suffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his ijsdem & Lege tertia *D. Christopherus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Wallisius S.T.D.* & *D. Christianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile Principes, regulas congressuum & reflexionum duorum corporum seorsim adinvenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes; Et primus quidem *D. Wallisius* dein *D. Wrennus* & *D. Hugenius* inventum prodidit. Sed & veritas comprobata est a *D. Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum, quod etiam *Clarissimus Mariottus* Libro integro exponere mox dignatus est. Verum ut hoc experimentum cum Theorijs ad amussim congruat, habenda est ratio tum resistentiæ aeris, tum etiam vis Elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora *A*, *B* filis parallelis *AC*, *BD* a centris *C*, *D*. His centris & intervallis describantur semicirculi *EAF*, *GBH* radijs *CA*, *DB* bisecti. Trahatur corpus *A* ad arcus

EAF punctum quodvis *R*, & (subducto corpore *B*) demittatur inde, redeatq; post unam oscillationem ad punctum *V*. Est *RV* retardatio ex resistentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta sita in medio, & hæc exhibebit retardationem in descensu ab *S* ad *A* quam proxime. Restituatur corpus *B* in locum suum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A*, absq; errore sensibili, tanta erit ac si in vacuo cecidisset de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *TA*. Nam velocitatem Penduli in puncto infimo esse ut chorda arcus quem cadendo descripsit, Propositio est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*, a quo si corpus *A* demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum *r*, sit *st* pars quarta ipsius *rv* sita in medio, & per chordam arcus *tA* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus ad quem corpus *A*, sublata aeris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam arcus *TA* (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem, deinde in chordam arcus *tA* ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcus *Bl*, ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusq; tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idq; in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo, duodecim vel sexdecim concurrerent, reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directe occurrebant quod in partes contrarias mutatio motus erat corpori utriq; illata, atq; adeo quod actio & reactio semper erant æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus, corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum sex & redibat *A* cum duabus, redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur

partes duodecim & restabit nihil; subducantur aliæ partes duæ & fiet motus duarum partium in plagam contrariam. & sic de motu corporis *B* partium sex subducendo partes quatuordecim, fiunt partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim & *B* tardius cum partibus quinq; & post reflexionem pergebat *A* cum quinq; partibus, pergebat *B* cum quatuordecim, facta translatione partium novem de *A* in *B*. Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus quæ ex summa motuum conspirantium & differentia contrariorum colligebatur. Namq; errorem digiti unius & alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accurate. Difficile erat tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in loco infimo *AB*, tum loca *s*, *k*, notare ad quæ corpora ascendebant post concursum. Sed & in ipsis pilis inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

Porro nequis objiciat Regulam ad quam probandam inventum est hoc experimentum præsupponere corpora vel absolute dura esse, vel saltem perfecte elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; addo quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam si conditio illa in corporibus non perfecte duris tentanda est, debebit solummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elasticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenij* corpora absolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congressus. Certius id affirmabitur de perfecte Elasticis. In imperfecte Elasticis velocitas reditus minuenda est simul cum vi Elastica; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur,) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatq; corpora redire ab invicem cum velocitate relativa quæ sit ad relativam velocitatem concursus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter constricta sic tentavi. Primum demittendo Pendula & mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, & respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore. In vitreis autem proportio erat

15 ad 16 circiter. Atq; hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata est, quæ cum experientia plane congruit.

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis *A*, *B* se mutuo trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur versus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obstaculum magis urgebitur pressione corporis *A* quam pressione corporis *B*; proindeq; non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietq; systema corporum duorum & obstaculi moveri in directum in partes versus *B*, motuq; in spatiis liberis semper accelerato abire in infinitum. Quod est absurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debebit systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, proindeq; corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aqua stagnante juxta fluitent, neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinq; sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Ut corpora in concursu & reflexione idem pollent, quorum velocitates sunt reciproce ut vires insitæ: sic in movendis Instrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oscillante Libra, sunt reciproce ut eorum velocitates sursum & deorsum: hoc est pondera, si recta ascendunt & descendunt, æquipollent, quæ sunt reciproce ut punctorum a quibus suspenduntur distantiæ ab axe Libræ; sin planis obliquis aliisve admotis obstaculis impedita ascendunt vel descendunt oblique, æquipollent quæ sunt ut ascensus & descensus quatenus facti secundum perpendiculum: id adeo ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in Trochlea seu Polyspasto vis manus funem directe trahentis, quæ sit ad pondus vel directe vel oblique ascendens ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus. In horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissus constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum si sunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus est ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas Manubrii ea in parte ubi a

manu urgetur, ad velocitatem progressivam Cochleæ versus corpus pressum. Vires quibus cuneus urget partes duas ligni fissi est ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio Machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere Problema; *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi data superandi. Nam si Machinæ ita formentur ut velocitates Agentis & Resistentis sint reciproce ut vires, Agens resistentiam sustinebit, & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certe si tanta sit velocitatum disparitas ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni ea resistentia, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus Machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum Mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere quam late pateat, quamq; certa sit Lex tertia motus. Nam si æstimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & Resistentis reactio ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

DE MOTU CORPORUM

LIBER PRIMUS

SECT. I.

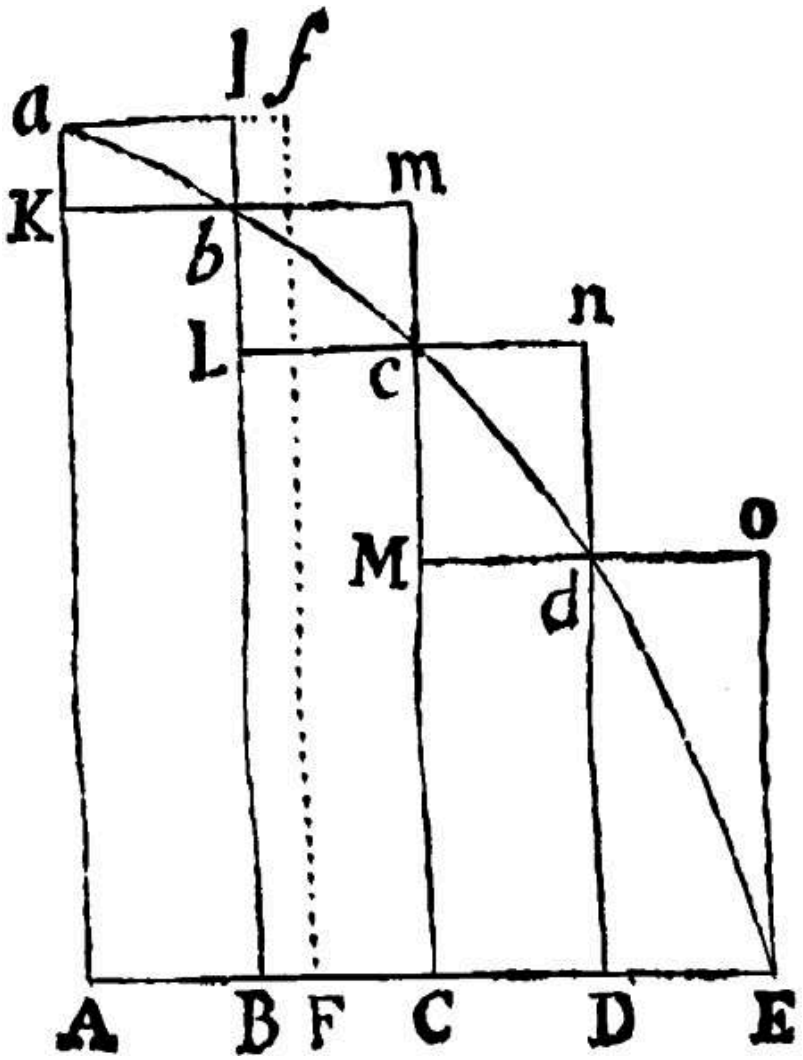
De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore constanter tendunt & eo pacto propius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia; fiunt ultimo æquales.

Si negas, sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypothesin.

Lemma II.



Si in figura quavis AacE *rectis* Aa*,* AE*, & curva* acE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunq;* Ab*,* Bc*,* Cd*, &c. sub basibus* AB*,* BC*,* CD*, &c. æqualibus, & lateribus* Bb*,* Cc*,* Dd*, &c. figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl*,* bLcm*,* cMdn*, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD*, circumscripta* AalbmcndoE*, & curvilinea* AabcdE*, sunt rationes æqualitatis.*

Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl* + *Lm* + *Mn* + *Do*, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi *Kb* & altitudinum summa *Aa*, id est rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, sit minus quovis dato. Ergo, per Lemma I, figura

inscripta & circumscripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

Lemma III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB*,* BC*,* CD*,* &c. *sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscripta, at latitudine sua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum.

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

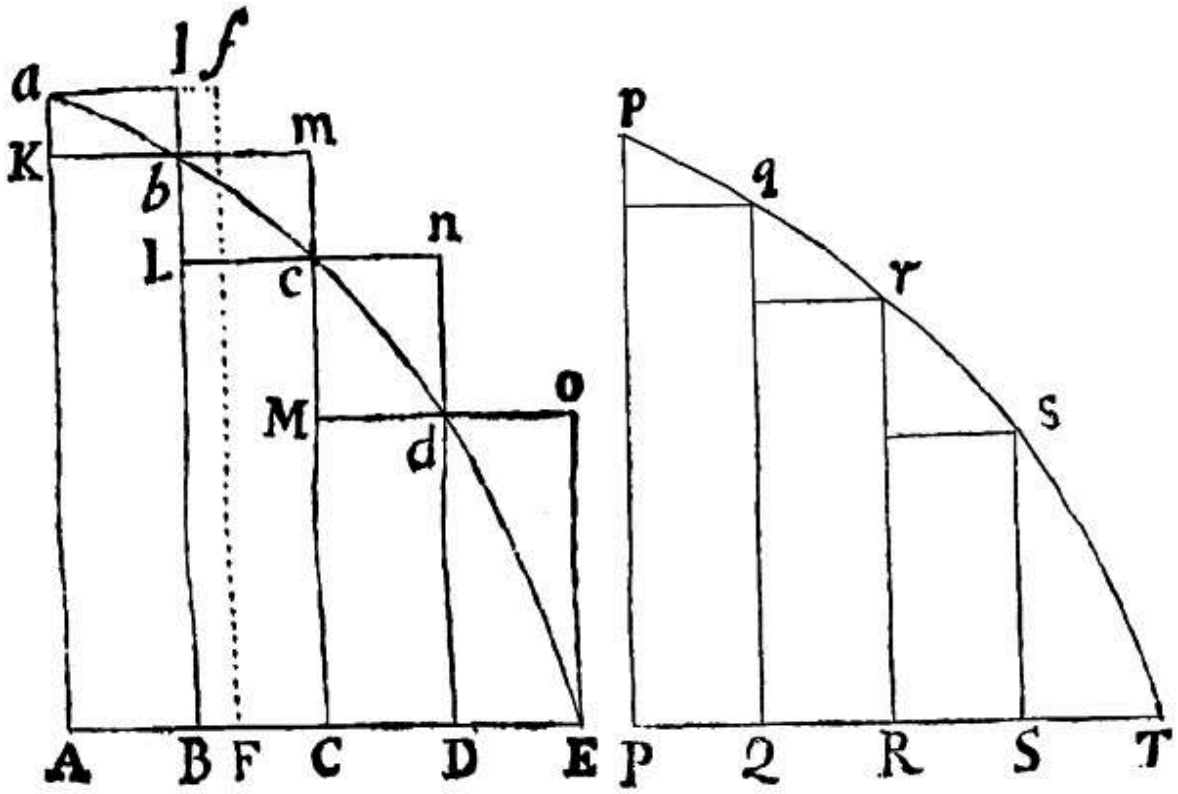
Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, *&c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea quæ tangentibus eorundem arcuum circumscribitur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

Lemma IV.

Si in duabus figuris AacE*,* PprT*, inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitq; idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuitur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ* AacE*,* PprT*, sunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figura priore (per Lemma III.) ad summam priorem, & posteriore figura ad summam posteriorem in ratione æqualitatis.

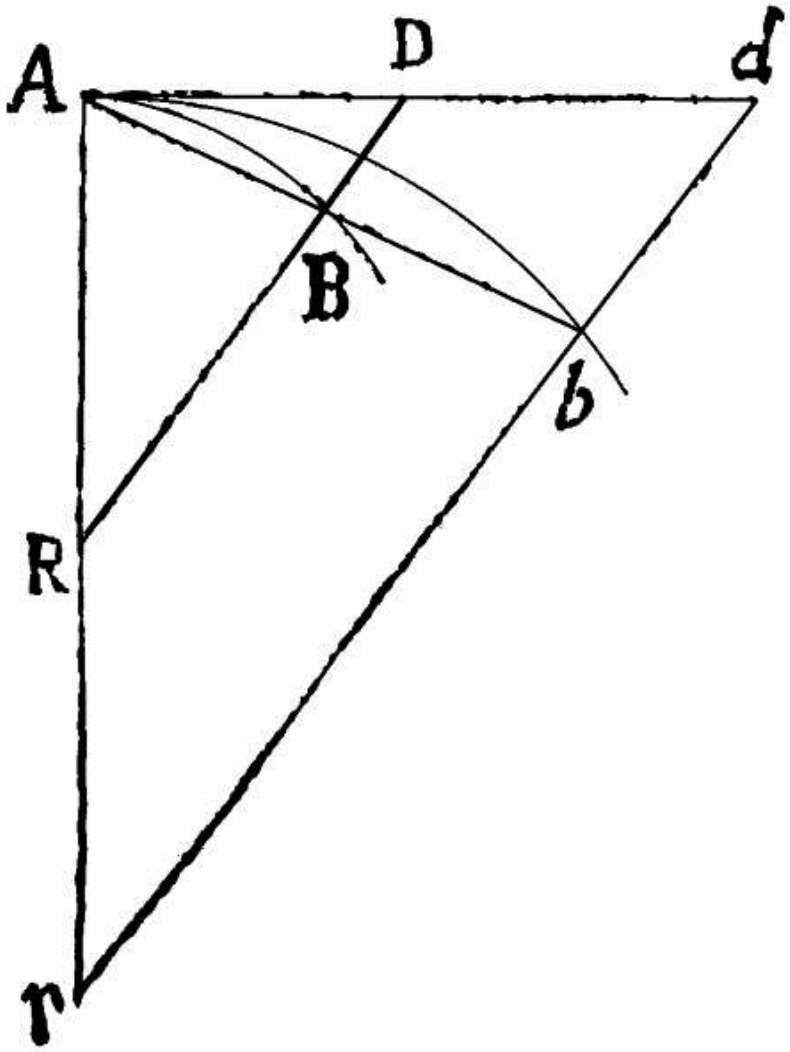
Corol. Hinc si duæ cujuscunq; generis quantitates in eundem partium numerum utcunq; dividantur, & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam cæteræq; suo ordine ad cæteras; erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atq; adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

Lemma V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ sunt in duplicata

ratione laterum.

Lemma VI.



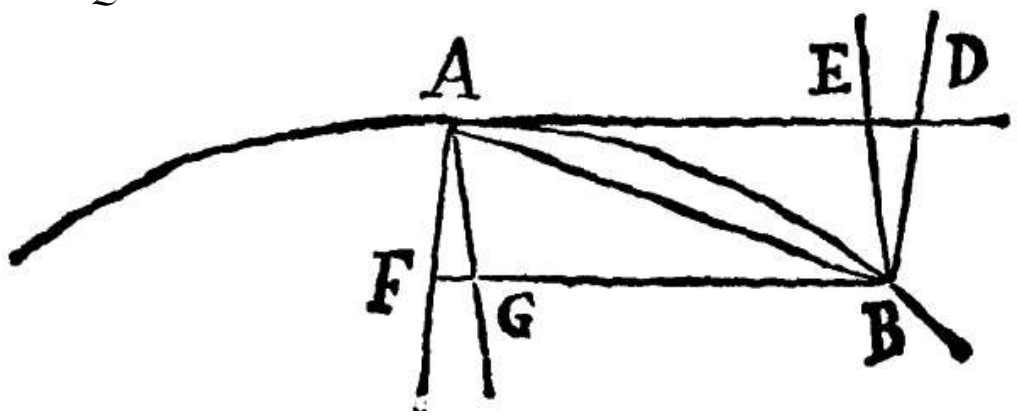
Si arcus quilibet positione datus AB *subtendatur chorda* AB*, & in puncto aliquo* A*, in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinq; producta* AD*; dein puncta* A, B *ad invicem accendant & coeant; dico quod angulus* BAD *sub chorda & tangente contentus minuetur in infinitum & ultimo evanescet.*

Nam producatur *AB* ad *b* & *AD* ad *d*, & punctis *A*, *B* coeuntibus, nullaq; adeo ipsius *Ab* parte *AB* jacente amplius intra curvam, manifestum esi quod hæc recta *Ab*, vel coincidet cum tangente *Ad*, vel ducetur inter tangentem & curvam. Sed casus posterior est contra naturam Curvaturæ, ergo prior obtinet. *Q. E. D.*

Lemma VII.

Iisdem positis, dico quod ultima ratio arcus, chordæ & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis. Vide Fig. *Lem. 6 & 8 vi.*

Nam producantur *AB* & *AD* ad *b* & *d* secanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitq; arcus *Ab* similis arcui *AB*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *dAb*, per Lemma superius, evanescet; adeoq; rectæ *Ab*, *Ad* arcus intermedius *Ab* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *AB*, *AD*, & arcus intermedius *AB* rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

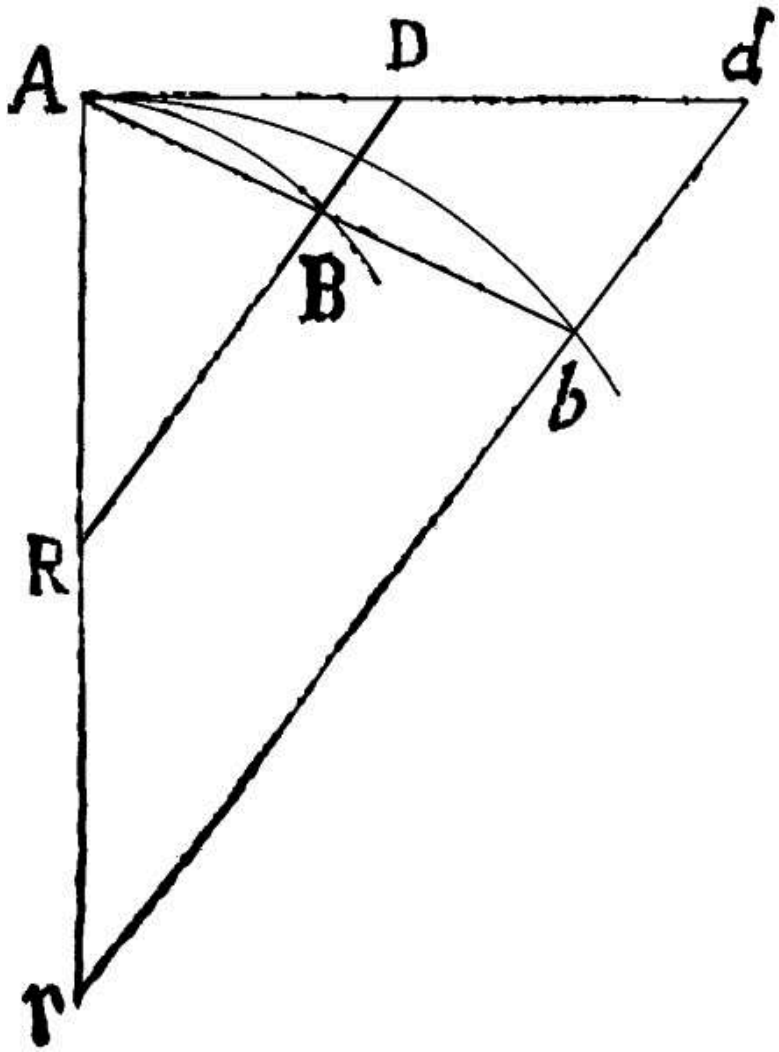


Corol. 1. Unde si per *B* ducatur tangenti parallela *BF* rectam quamvis *AF* per *A* transeuntem perpetuo secans in *F*, hæc ultimo ad arcum evanescentem *AB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD*, rationem semper habet æqualitatis ad *AD*.

Corol. 2. Et si per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, secantes tangentem *AD* & ipsius parallelam *BF*, ratio ultima abscissarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæq; & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ in omni de rationibus ultimis argumentatione pro se invicem usurpari possunt.

Lemma VIII.

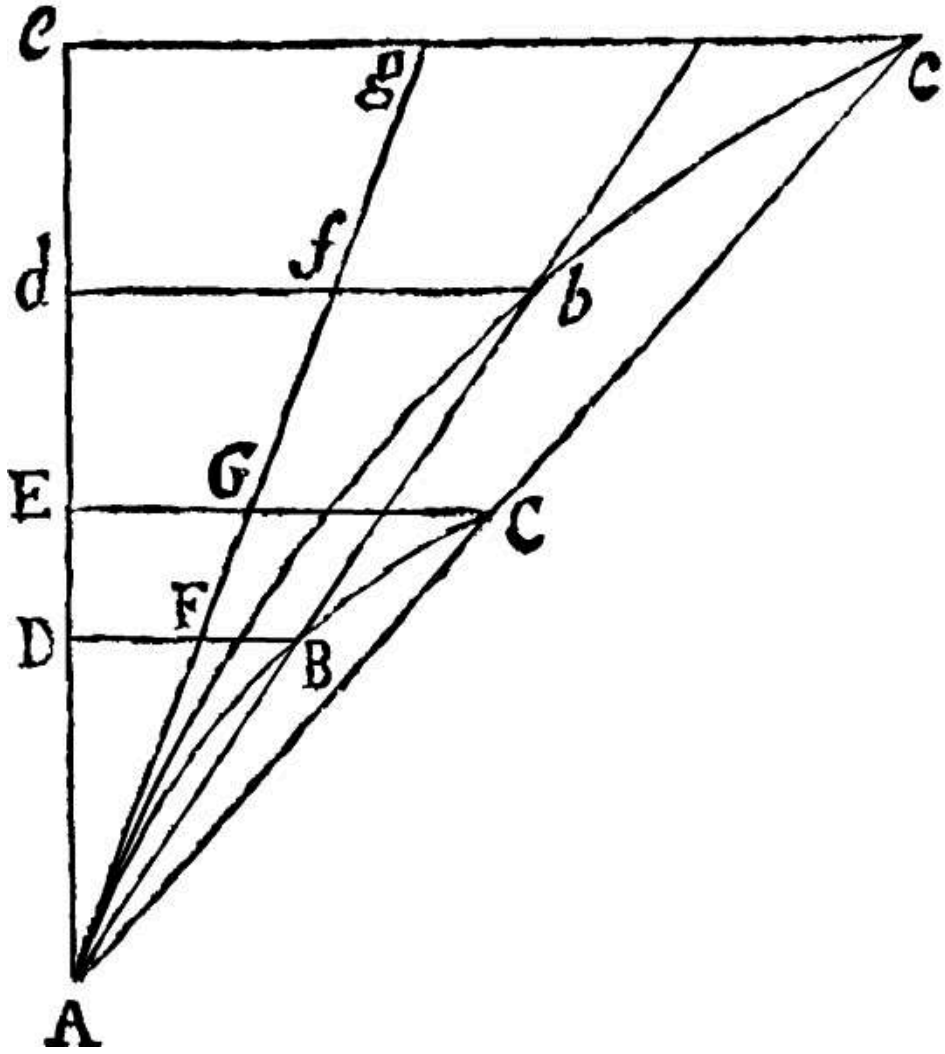


Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* AB, *chorda* AB *& tangente* AD, *triangula tria* ARB, ARB, ARD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam producantur *AB*, *AD*, *AR* ad *b*, *d* & *r*. Ipsi *RD* agatur parallela *rbd*, & arcui *AB* similis ducatur arcus *Ab*. Coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evanescet, & propterea triangula tria *rAb*, *rAb*, *rAd* coincident, suntq; eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *RAB*, *RAB*, *RAD* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*

Corol. Et hinc triangula illa in omni de rationibus ultimis argumentatione pro se invicem usurpari possunt.

Lemma IX.



Si recta AE *& Curva* AC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A*, & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD*,* EC*, curvæ occurrentes in* B*,* C*; dein puncta* B*,* C *accedant ad punctum* A*: dico quod areæ triangulorum* ADB*,* AEC *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*

Etenim in *AD* producta capiantur *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ & proportionales. Producatur *AC* ad *c*, ducatur curva *Abc* ipsi *ABC* similis, & recta *Ag* tangatur curva utraq; in *A*; & secantur ordinatim applicatæ in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*, & angulo *cAg* evanescente, coincident areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*, adeoq; per Lemma V, erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales

semper sunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Lemma X.

Spatia, quæ corpus urgente quacunq; vi regulari describit, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum.

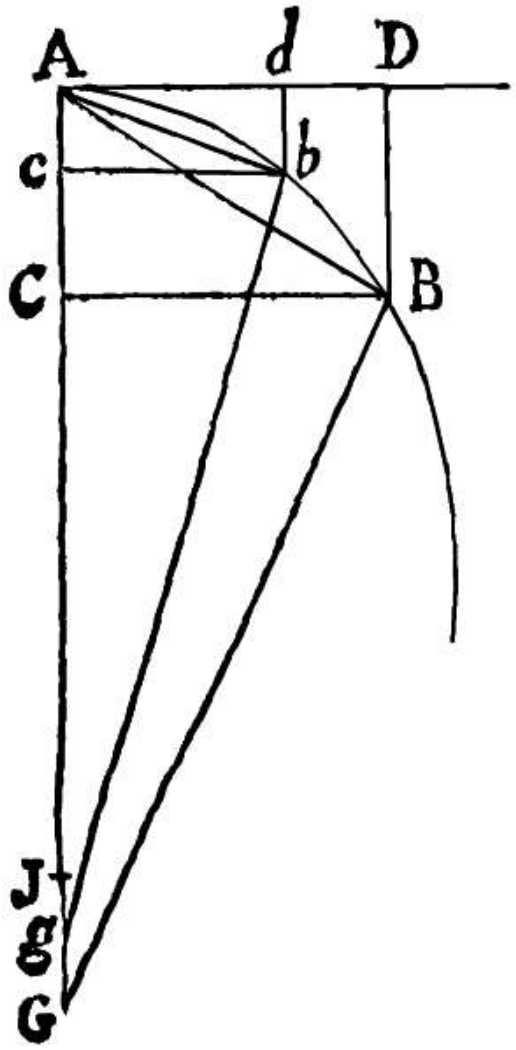
Exponantur tempora per lineas *AD*, *AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*, & spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ *ABD*, *ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est ipso motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus æqualibus in partibus istis ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur a locis figurarum, ad quæ corpora temporibus ijsdem proportionalibus absq; viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Lemma XI.

Subtensa evanescens anguli contactus est ultimo in ratione duplicata subtensæ arcus contermini.



Cas. 1. Sit arcus ille *AB*, tangens ejus *AD*, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, subtensa arcus *AB*. Huic subtensæ *AB* & tangenti *AD* perpendiculares erigantur *AG*, *BG*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, sitq; *J* intersectio linearum *BG*, *AG* ultimo facta ubi puncta *D*, *B* accedunt usq; ad *A*. Manifestum est quod distantia *GJ* minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta *ABG*, *Abg* transeuntium) *AB quad.* æquale *AG* × *BD* & *Ab quad.* æquale *Ag* × *bd*, adeoq; ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* componitur ex rationibus *AG* ad *Ag* & *BD* ad *bd*. Sed quoniam *JG* assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio *AG* ad *Ag* minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ut ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* minus differat a ratione *BD* ad *bd* quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per Lemma I, ratio ultima *AB quad.* ad *Ab quad.* æqualis rationi ultimæ *BD* ad *bd. Q. E. D.*

Cas. 2. Inclinetur jam *BD* ad *AD* in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima *BD* ad *bd* quæ prius, adeoq; eadem ac *AB quad.* ad *Ab quad. Q. E. D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, tamen anguli *D*, *d* ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ultimo æquales erunt, per Lem. I. & propterea lineæ *BD*, *bd* in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes *AD*, *Ad*, arcus *AB*, *Ab* & eorum sinus *BC*, *bc* fiant ultimo chordis *AB*, *Ab* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ *BD*, *bd*.

Corol. 2. Triangula rectilinea *ADB*, *Adb* sunt ultimo in triplicata ratione laterum *AD*, *Ad*, inq; sesquiplicata laterum *DB*, *db*: Utpote in composita ratione laterum *AD* & *DB*, *Ad* & *db* existentia. Sic & triangula *ABC*, *Abc* sunt ultimo in triplicata ratione laterum *BC*, *bc*.

Corol. 3. Et quoniam *DB*, *db* sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum *AD*, *Ad*; erunt areæ ultimæ curvilineæ *ADB*, *Adb* (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *ADB*, *Adb*, & segmenta *AB*, *Ab* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium *AD*, *Ad*; tum chordarum & arcuum *AB*, *Ab*.

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est curvaturam ad punctum *A*, nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum *AJ* finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest *DB* ut *AD*: quo in casu circulus nullus per punctum *A* inter tangentem *AD* & curvam *AB* duci potest, proindeq; angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat *DB* successive ut *AD*, *AD*, *AD*, *AD*, &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat *DB* successive ut *AD*, $AD/_2$, $AD/_3$, $AD/_4$, $AD/_5$, $AD/_6$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinq; in

infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major priore. Ut si inter terminos *AD* & *AD* inseratur series $AD/_6$, $AD/_5$, $AD/_4$, $AD/_3$, $AD/_2$, $AD/_3$, $AD/_4$, $AD/_5$, $AD/_6$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neq; novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deq; superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & contenta. Præmisi vero hæc Lemmata ut effugerem tædium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium Hypothesis; & propterea Methodus illa minus Geometrica censetur, malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasq; nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere, & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui breuitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium, & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim indivisibilia sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi, vimq; talium demonstrationum ad methodum præcedentium Lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum pergentis velocitatem ultimam. Hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attigit, nullam esse. Et responsio facilis est. Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neq; antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neq; postea, sed tunc cum attingit, id est illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium intelligendam esse rationem quantitatum non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est

quacum esse (vel augeri & minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumq; hic limes sit certus & definitus, Problema est vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

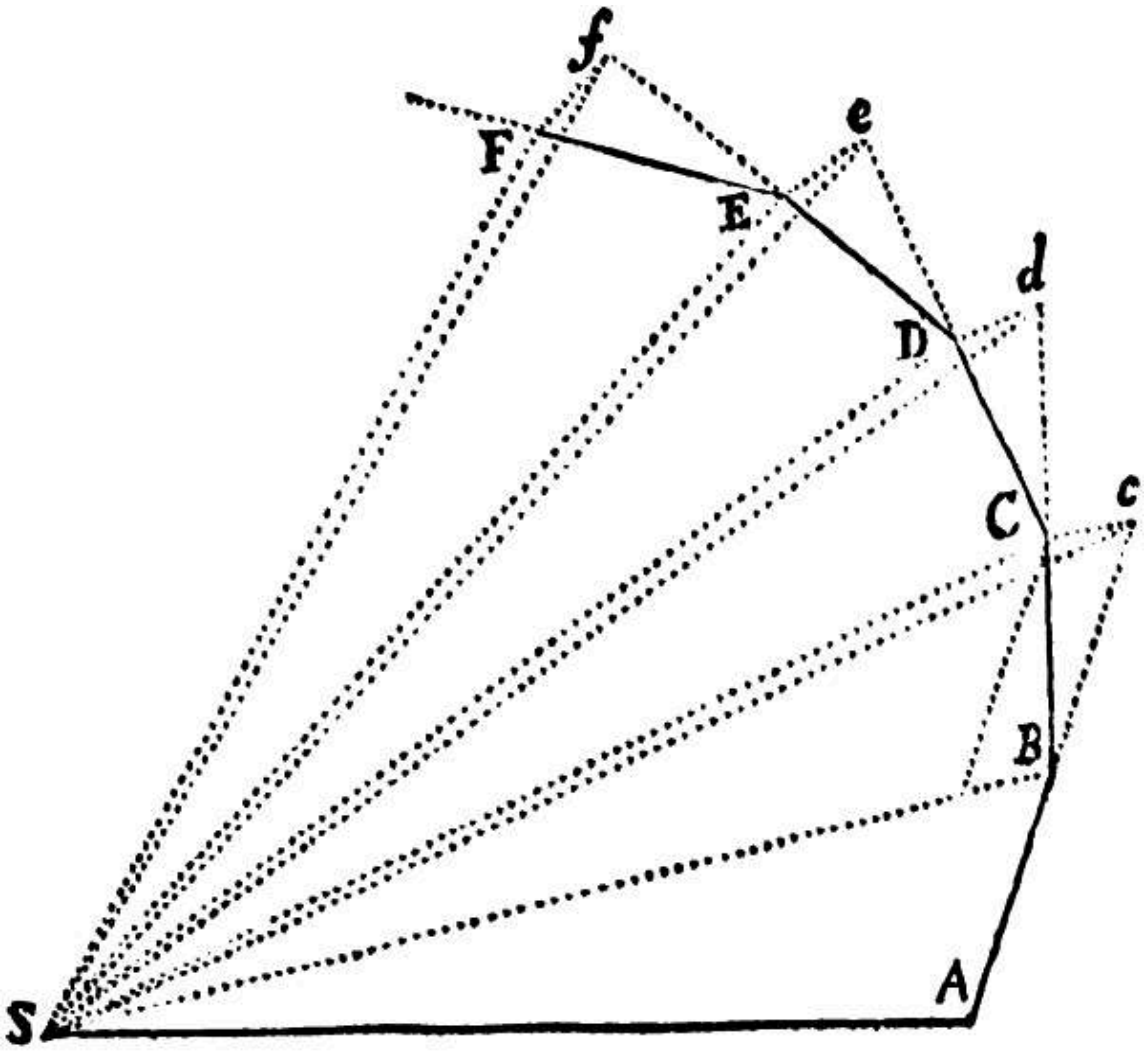
Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines; & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonstravit. Verum hæc Objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neq; prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Igitur in sequentibus, siquando facili rerum imaginationi consulens, dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

SECT. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.



Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*, adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, consectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatq; corpus a recta *Bc* deflectere & pergere in recta *BC*. Ipsi *BS* parallela agatur *cC* occurrens *BC* in *C*, & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. I) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas *SB*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis centripeta successive agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ in eodem plano, & triangulum *SCD* triangulo *SBC* & *SDE* ipsi *SCD* & *SEF* ipsi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano

immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis *SADS*, *SAFS* inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter *ADF*, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva; adeoq; vis centripeta qua corpus de tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; areæ vero quævis descriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. In mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum.

Corol. 2. In mediis omnibus, si arearum descriptio acceleratur, vires non tendunt ad concursum radiorum, sed inde declinant in consequentia.

Pro. II. Theor. II.

Corpus omne quod, cum movetur in linea aliqua curva, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem. (per Leg. I.) Et vis illa qua corpus de cursu rectilineo detorquetur & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD* &c. circa punctum immobile *S*, temporibus æqualibus æqualia describere, agit in loco *B* secundum lineam parallelam ipsi *cC* (per Pro Lib. I Elem. & Leg. II.) hoc est secundum lineam *BS* & in loco *C* secundum lineam ipsi *dD* parallelam, hoc est secundum lineam *CS*, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est sive quiescat superficies in qua corpus describit figuram curvilineam, sive moveatur eadem una cum corpore, figura descripta & puncto suo *S* uniformiter in directum.

Scholium.

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus. In hoc casu sensus Propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro si vis aliqua agat secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem, hæc faciet corpus deflectere a plano sui motus, sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

Prop. III. Theor. III.

Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utcunq; moti ducto, describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum & ex vi omni acceleratrice, qua corpus alterum urgetur.

Nam (per Legum Corol. 6.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi qua corpus alterum urgetur, urgeatur corpus utrumq; secundum lineas parallelas, perget corpus primum describere circa corpus alterum areas easdem ac prius: vis autem qua corpus alterum urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam, & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, & corpus primum, urgente differentia virium, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum describere. Tendit igitur (per Theor. 2.) differentia virium ad corpus illud alterum ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum radio ad alterum ducto describit areas temporibus proportionales, atq; de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium secundum, composita,) qua corpus prius urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur; vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum ut centrum.

Corol. 2. Et si areæ illæ sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus radio ad alterum corpus ducto describit areas quæ, cum temporibus collatæ, sunt valde inæquales, & corpus illud alterum vel quiescit vel movetur uniformiter in directum; actio vis centripetæ ad corpus illud alterum tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum

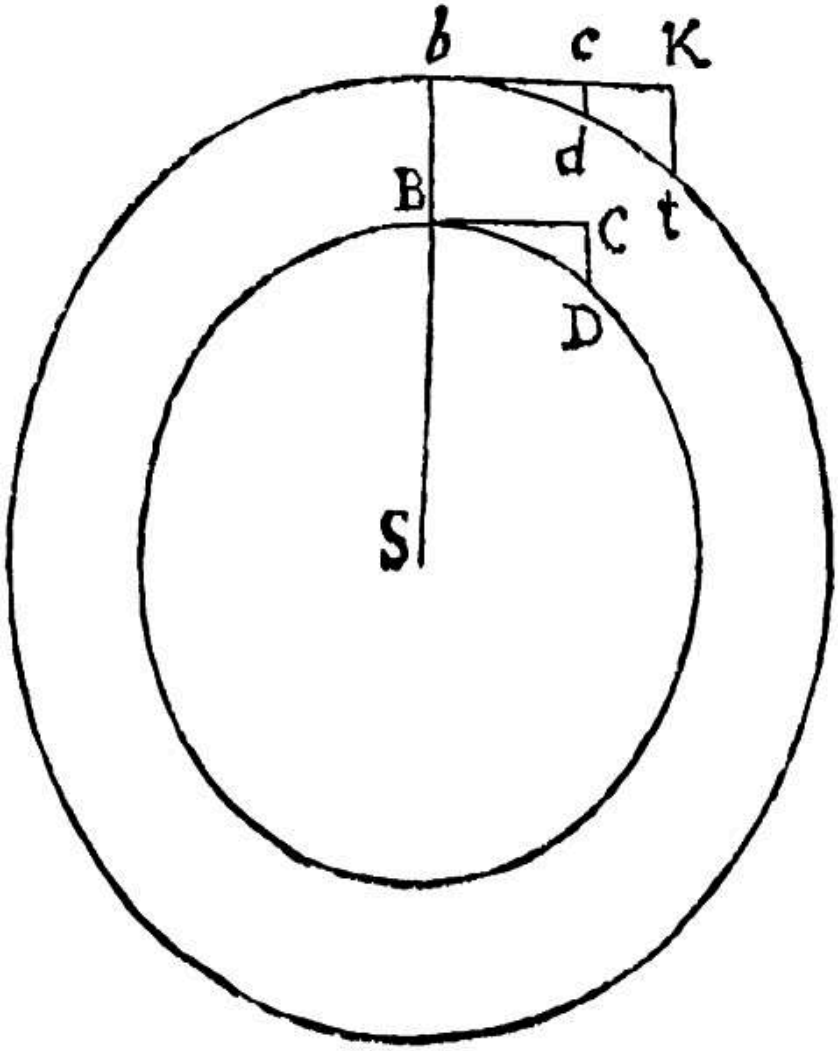
actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visq; tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur, circum quod æquabilis est arearum descriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocunq; movetur, si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

Scholium

Quoniam æquabilis arearum descriptio Index est centri quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, corpus autem vi ad hoc centrum tendente retinetur in orbita sua, & motus omnis circularis recte dicitur circa centrum illud fieri, cujus vi corpus retrahitur de motu rectilineo & retinetur in Orbita: quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut Indicem centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

Prop. IV. Theor. IV.

Corporum quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere, & esse inter se ut arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.



Corpora *B*, *b* in circumferentiis circulorum *BD*, *bd* gyrantia, simul describant arcus *BD*, *bd*. Quoniam sola vi insita describerent tangentes *BC*, *bc* his arcubus æquales, manifestum est quod vires centripetæ sunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atq; adeo hæ sunt ad invicem in ratione prima spatiorum nascentium *CD*, *cd*: tendunt vero ad centra circulorum per Theor. II, propterea quod areæ radiis descriptæ ponuntur temporibus proportionales. Fiat figura *tkb* figuræ *DCB* similis, & per Lemma V, lineola *CD* erit ad lineolam *kt* ut arcus *BD* ad arcum *bt*: nec non, per Lemma XI, lineola nascens *tk* ad lineolam nascentem *dc* ut *bt quad.* ad *bd quad.* & ex æquo lineola nascens *DC* ad lineolam nascentem *dc* ut $BD \times bt$ ad *bd quad.* seu quod perinde est, ut $BD \times bt \div Sb$ ad *bd quad.* $\div Sb$, adeoq; (ob æquales rationes $bt \div Sb$ & $BD \div SB$) ut *BD quad.* $\div SB$ ad *bd quad.* $\div Sb$ *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum.

Corol. 2. Et reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad radios ita sunt hæ vires inter se. Id est (ut cum Geometris loquar) hæ vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse: necnon in ratione composita ex ratione simplici radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverse.

Corol. 3. Unde si tempora periodica æquantur, erunt tum vires centripetæ tum velocitates ut radii, & vice versa.

Corol. 4. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut radii, vires centripetæ sunt æquales, & velocitates in dimidiata ratione radiorum: Et vice versa.

Corol. 5. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut quadrata radiorum, vires centripetæ sunt reciproce ut radii, & velocitates æquales; Et vice versa.

Corol. 6. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut cubi radiorum, vires centripeta: sunt reciproce ut quadrata radiorum; velocitates autem in radiorum dimidiata ratione: Et vice versa.

Corol. 7. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunq; similium, centraq; similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex Demonstratione præcedentium ad hosce casus applicata.

Scholium.

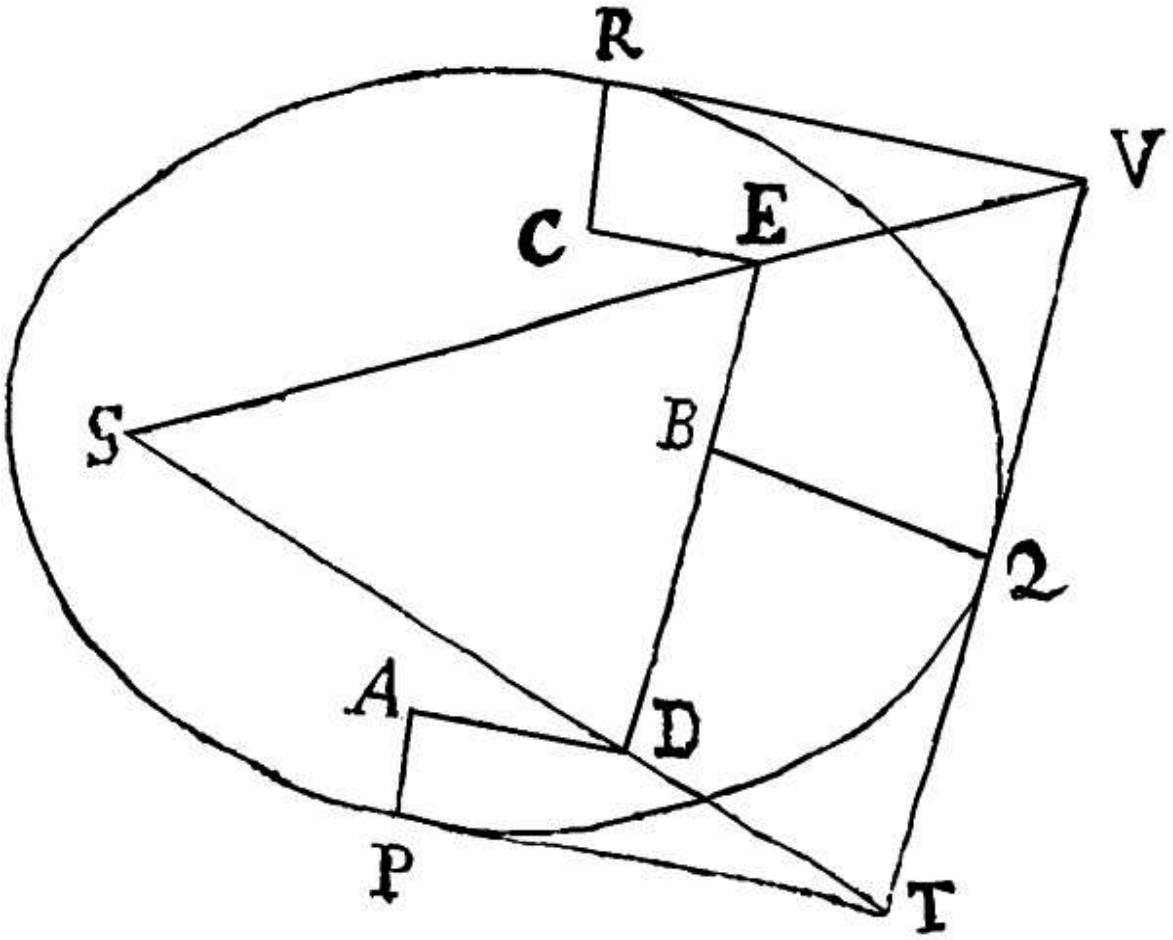
Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cælestibus (ut seorsum colligerunt etiam nostrates *Wrennus, Hookius & Halleus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicata ratione distantiarum a centris decrevi fusius in sequentibus exponere.

Porro præcedentis demonstrationis beneficio colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam cum vis illa, quo tempore corpus percurrit arcum *BC*, impellat ipsum per spatium *CD*, quod ipso motus initio æquale est quadrato arcus illius *BD* ad circuli diametrum applicato; & corpus omne vi eadem in eandem semper plagam continuata, describat spatia in duplicata ratione temporum: Vis illa, quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum describit, efficiet ut corpus

idem recta progrediens describat spatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato æquale; adeoq; est ad vim gravitatis ut spatium illud ad spatium quod grave cadendo eodem tempore describit. Et hujusmodi Propositionibus *Hugenius*, in eximio suo Tractatu de Horologio oscillatorio, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur Polygonum laterum quotcunq; Et si corpus in Polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis qua singulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas, adeoq; summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim, hoc est (si Polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli, id est ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium; adeoq; si Polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis qua corpus urget circulum, & huic æqualis est vis contraria qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

Prop. V. Prob. I.



Data quibuscunq; in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

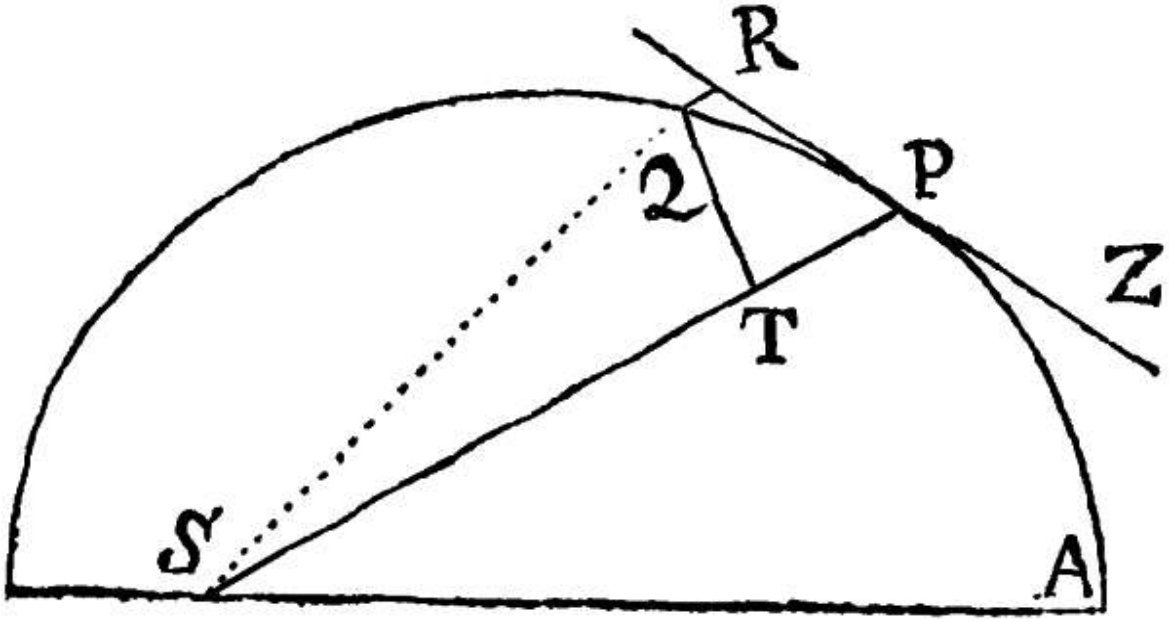
Figuram descriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA*, *QB*, *RC*, velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R* a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id est ita ut sit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentia in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæsito *S*.

Nam cum corpus in *P* & *Q* radiis ad centrum ductis areas describat temporibus proportionales, sintq; areæ illæ simul descriptæ ut velocitates in *P* & *Q* ductæ respective in perpendicula a centro in tangentes *PT*, *QT* demissa: Erunt perpendicula illa ut velocitates reciproce, adeoq; ut perpendicula *AP*, *BQ* directe, id est ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* sunt in una recta. Et

simili argumento puncta *S*, *E*, *V* sunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD*, *VE* versatur. *Q. E. D.*

Pro. VI. Theor. V.

Si corpus P *revolvendo circa centrum* S*, describat lineam quamvis curvam* APQ*, tangat vero recta* ZPR *curvam illam in puncto quovis* P*, & ad tangentem ab alio quovis curvæ* Q *agatur* QR *distantiæ* SP *parallela, ac demittatur* QT *perpendicularis ad distantiam* SP*: Dico quod vis centripeta sit reciproce ut solidum* SP quad. × QT quad. ÷ QR*, si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas quæ ultimo fit ubi coeunt puncta* P *&* Q.

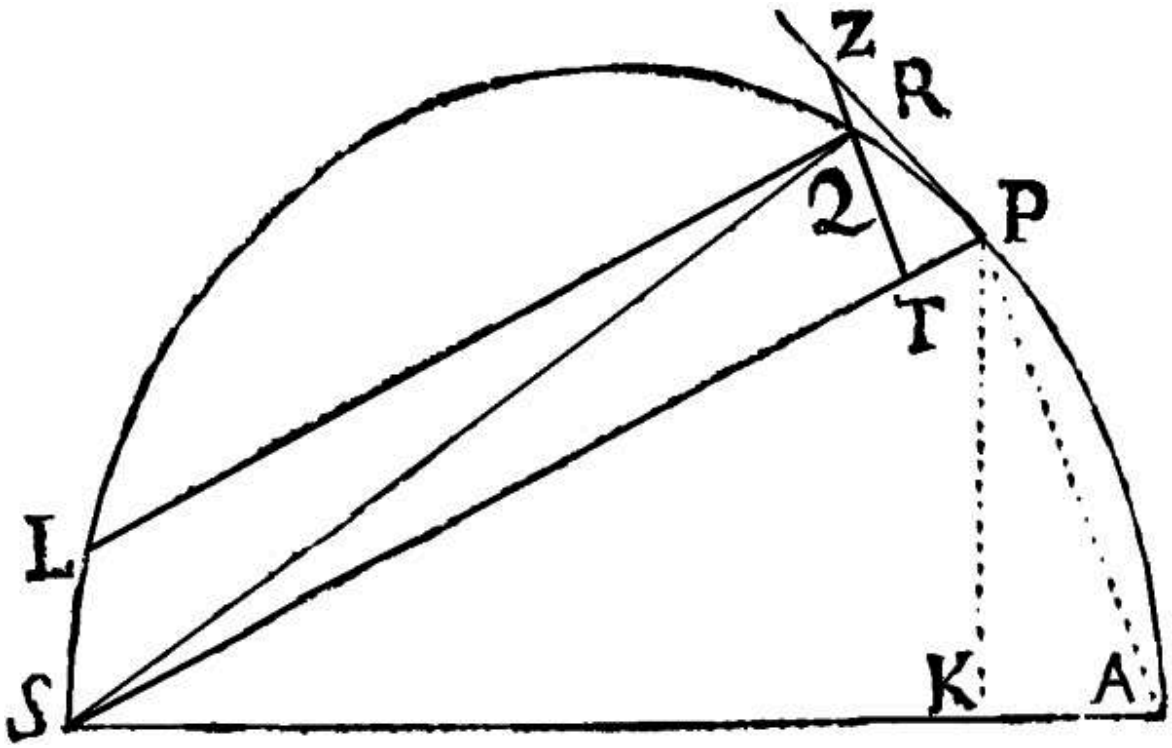


Namq; in figura indefinite parva *QRPT* lineola nascens *QR*, dato tempore, est ut vis centripeta (per Leg. II.) & data vi, ut quadratum temporis (per Lem. X.) atq; adeo, neutro dato, ut vis centripeta & quadratum temporis conjunctim, adeoq; vis centripeta ut lineola *QR* directe & quadratum temporis inverse. Est autem tempus ut area *SPQ*, ejus dupla *SP* × *QT*, id est ut *SP* & *QT* conjunctim, adeoq; vis centripeta ut *QR* directe atq; *SP quad.* in *QT quad.* inverse, id est ut *SP quad.* × *QT quad.* ÷ *QR* inverse. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si detur figura quævis, & in ea punctum ad quod vis centripeta dirigitur; inveniri potest lex vis centripetæ quæ corpus in figuræ illius perimetro gyrari faciet. Nimirum computandum est solidum *SP quad.*

× *QT quad.* ÷ *QR* huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

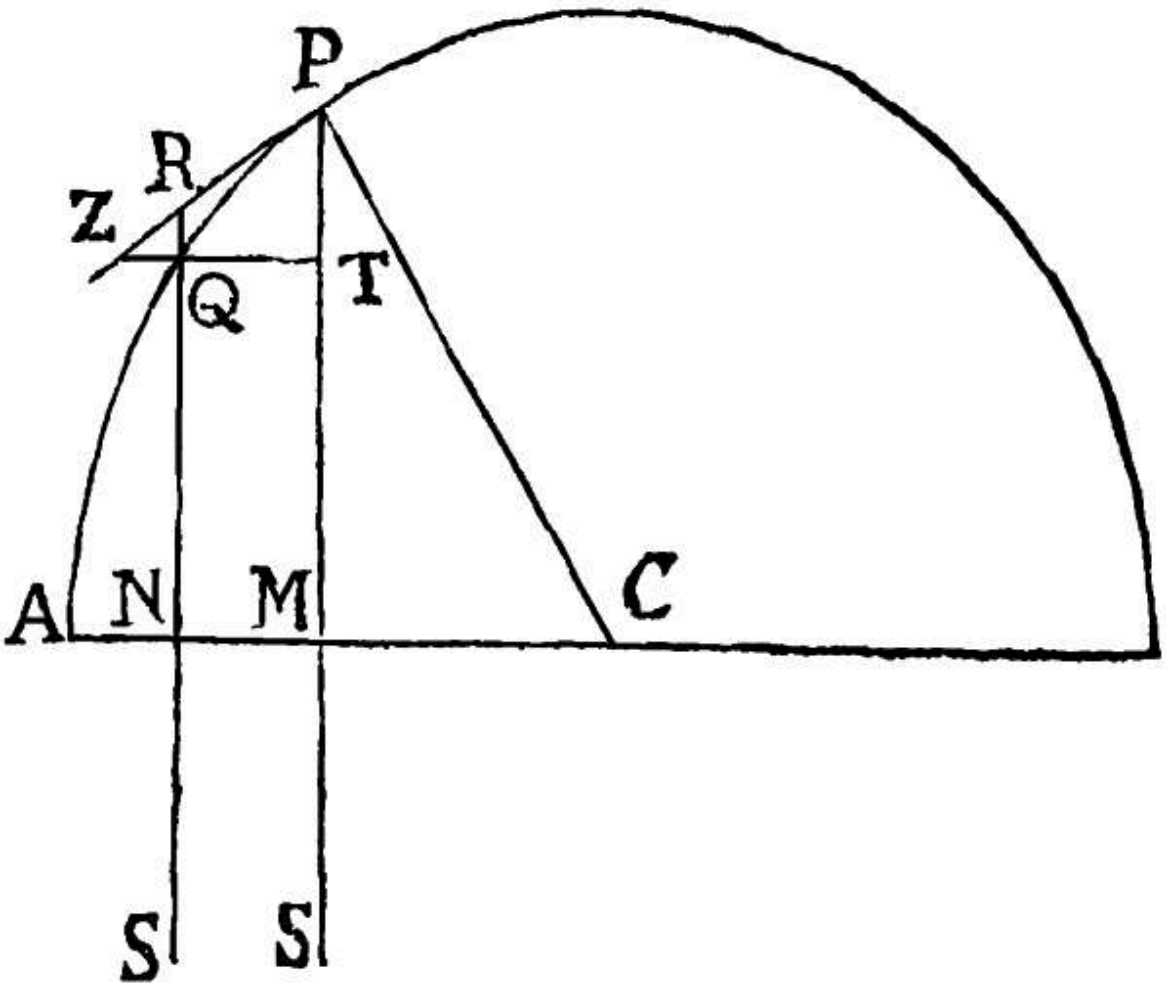
Prop. VII. Prob. II.



Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum aliquod in circumferentia datum.

Esto circuli circumferentia *SQPA*, centrum vis centripetæ *S*, corpus in circumferentia latum *P*, locus proximus in quem movebitur *Q*. Ad diametrum *SA* & rectam *SP* demitte perpendiculi *PK*, *QT*, & per *Q* ipsi *SP* parallelam age *LR* occurrentem circulo in *L* & tangenti *PR* in *R*, & coeant *TQ*, *PR* in *Z*. Ob similitudinem triangulorum *ZQR*, *ZTP*, *SPA* erit *RP quad.* (hoc est *QRL*) ad *QT quad.* ut *SA quad.* ad *SP quad.* Ergo *QRL* × *SP quad.* ÷ *SA quad.* æquatur *QT quad.* Ducantur hæc æqualia in *SP quad.* ÷ *QR*, & punctis *P* & *Q* coeuntibus, scribatur *SP* pro *RL*. Sic fiet *SP qc.* ÷ *SAq.* æquale *QTq.* × *SPq.* ÷ *QR*. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut *SP qc.* ÷ *SAq.*, id est (ob datum *SA quad.*) ut quadrato-cubus distantiæ *SP*. Quod erat inveniendum.

Prop. VIII. Prob. III.



Moveatur corpus in circulo PQA*: ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum, ut lineæ omnes* PS*,* RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

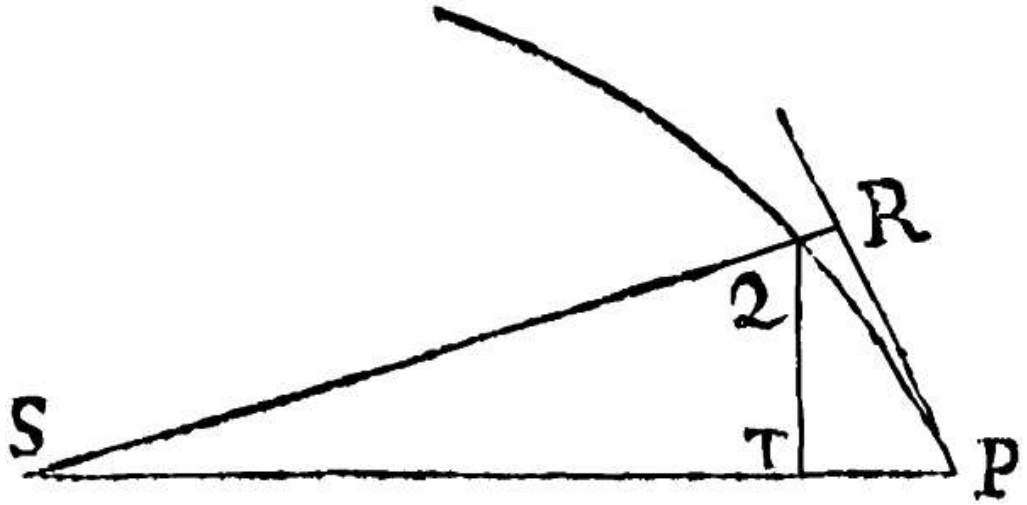
A circuli centro *C* agatur semidiameter *CA* parallelas istas perpendiculariter secans in *M* & *N*, & jungantur *CP*. Ob similia triangula *CPM*, & *TPZ*, vel (per Lem. VIII.) *TPQ*, est *CPq.* ad *PMq.* ut *PQq.* vel (per Lem. VII.) *PRq.* ad *QTq.* & ex natura circuli rectangulum $QR \times RN + QN$ æquale est *PR* quadrato. Coeuntibus autem punctis *P*, *Q* fit $RN + QN$ æqualis $2PM$. Ergo est *CP quad.* ad *PM quad.* ut $QR \times 2PM$ ad *QT quad.* adeoq; *QT quad.* ÷ *QR* æquale $2PM$ *cub.* ÷ *CP quad.*, & *QT quad.* × *SP quad.* ÷ *QR* æquale $2PM$ *cub.* × *SP quad.* ÷ *CP quad.* Est ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut $2PM$ *cub.* × *SP quad.* ÷ *CP quad.* hoc

est (neglecta ratione determinata 2*SP quad. ÷ CP quad.*) reciproce ut *PM cub. Q. E. I.*

Scholium.

Et simili argumento corpus movebitur in Ellipsi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

Prop. IX. Prob. IV.



Gyretur corpus in spiral PQS *secante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.*

Detur angulus indefinite parvus *PSQ*, & ob datos omnes angulos dabitur specie figura *SPQRT*. Ergo datur ratio *QT ÷ RQ* estq; *QT quad. ÷ QR* ut *QT*, hoc est ut *SP*. Mutetur jam utcunq; angulus *PSQ*, & recta *QR* angulum contactus *QPR* subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipsius *PR* vel *QT*. Ergo manebit *QT quad. ÷ QR* eadem quæ prius, hoc est ut *SP*. Quare *QTq. × SPq. ÷ QR* est ut *SP cub.* id est (per Corol. Theor. V.) vis centripeta ut cubus distantiæ *SP*. *Q. E. I.*

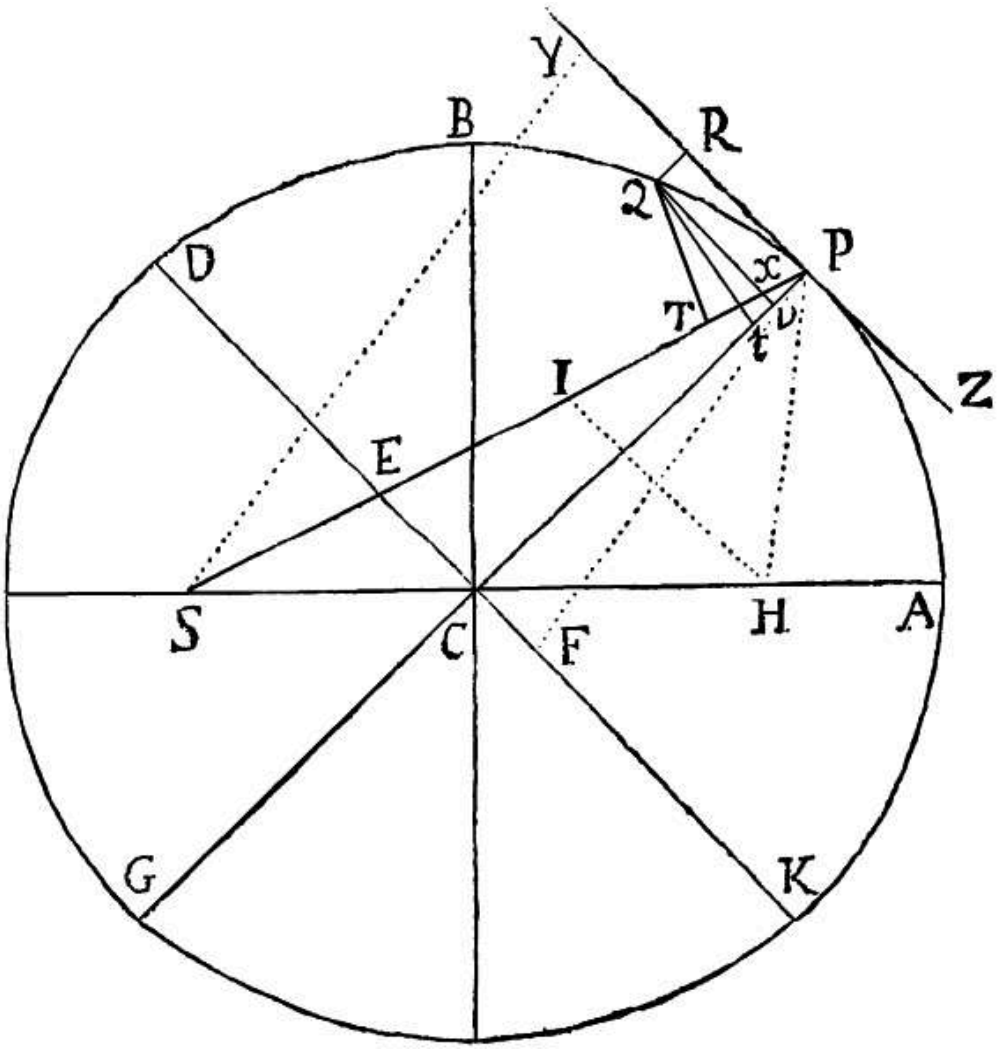
Lemma XII.

Parallelogramma omnia circa datam Ellipsin descripta esse inter se æqualia. Idem intellige de Parallelogrammis in Hyperbola circum diametros ejus descriptis.

Constat utrumq; ex Conicis.

Prop. X. Prob. V.

Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.



Sunto *CA*, *CB* semiaxes Ellipseos; *GP*, *DK* diametri conjugatæ; *PF*, *Qt*, perpendicula ad diametros; *Qv* ordinatim applicata ad diametrum *GP*; & si compleatur parallelogrammum *QvRP*, erit (ex Conicis) *PvG* ad *Qv quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad.* & (ob similia triangula *Qvt*, *PCF*) *Qv quad.* est ad *Qt quad.* ut *PC quad.* ad *PF quad.* & conjunctis rationibus, *PvG* ad *Qt*

quad. ut *PC quad.* ad *CD quad.* & *PC quad.* ad *PF quad.* id est *vG* ad *Qt quad.* ÷ *Pv* ut *PC quad.* ad *CDq.* × *PFq.* ÷ *PCq.*. Scribe *QR* pro *Pv*, & (per Lemma xii.) *BC* × *CA* pro *CD* × *PF*, nec non (punctis *P* & *Q* coeuntibus) 2*PC* pro *vG*, & ductis extremis & medijs in se mutuo, fiet *QTq.* × *PCq.* ÷ *QR* æquale 2*BCq.* × *CAq.* ÷ *PC*. Est ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut 2*BCq.* × *CAq.* ÷ *PC*, id est (ob datum 2*BCq.* × *CAq.*) ut 1 ÷ *PC*, hoc est, directe ut distantia *PC*. *Q. E. I.*

Corol. 1. Unde vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem Ellipsis migrare potest.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Figuris universis circa centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipsibus similibus æqualia sunt per Corol. 3 & 7 Prop. IV: In Ellipsibus autem communem habentibus axem majorem, sunt ad invicem ut Ellipseon areæ totæ directe & arearum particulæ simul descriptæ inverse; id est ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverse, hoc est ut axes illi directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverse, & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

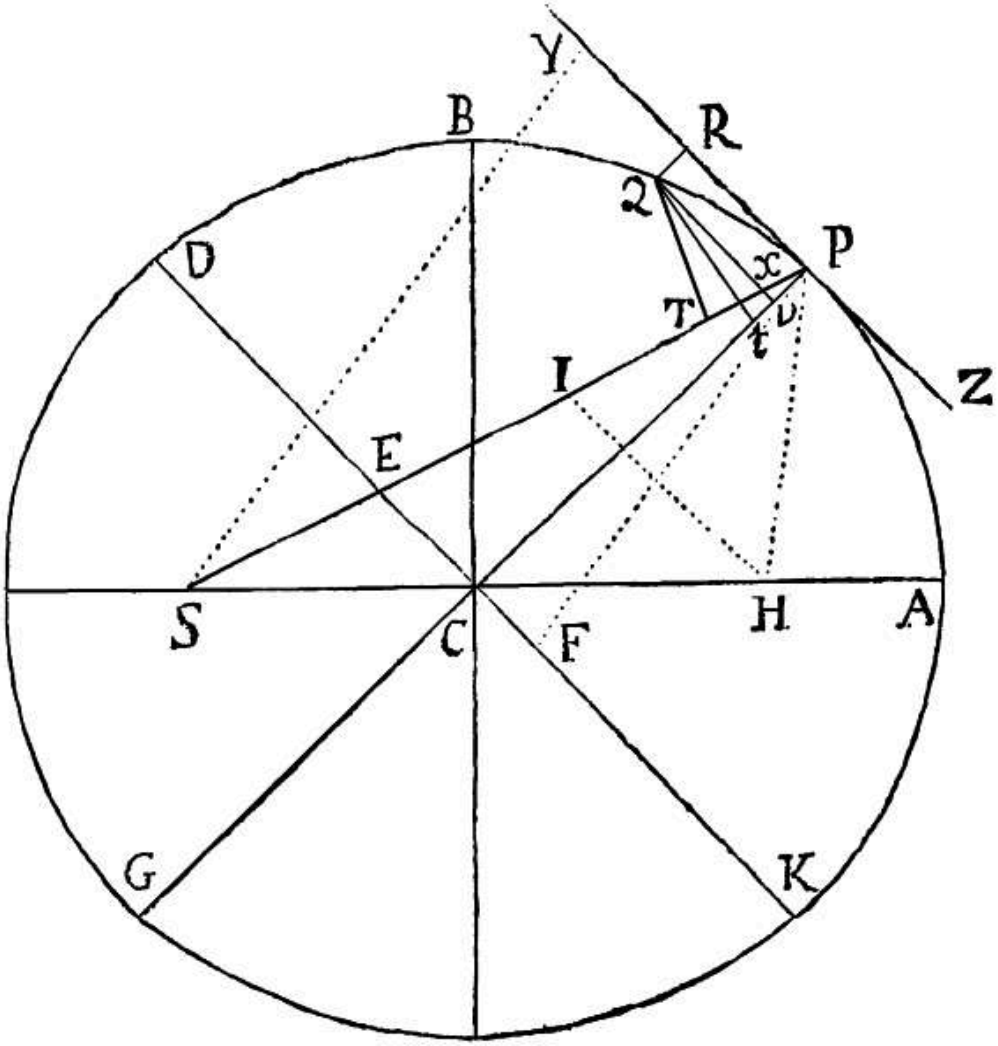
Si Ellipsis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite distans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc est Theorema *Galilei*. Et si Conisectio Parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam versa.

SECT. III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

Prop. XI. Prob. VI.

Revolvatur corpus in Ellipsi: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.



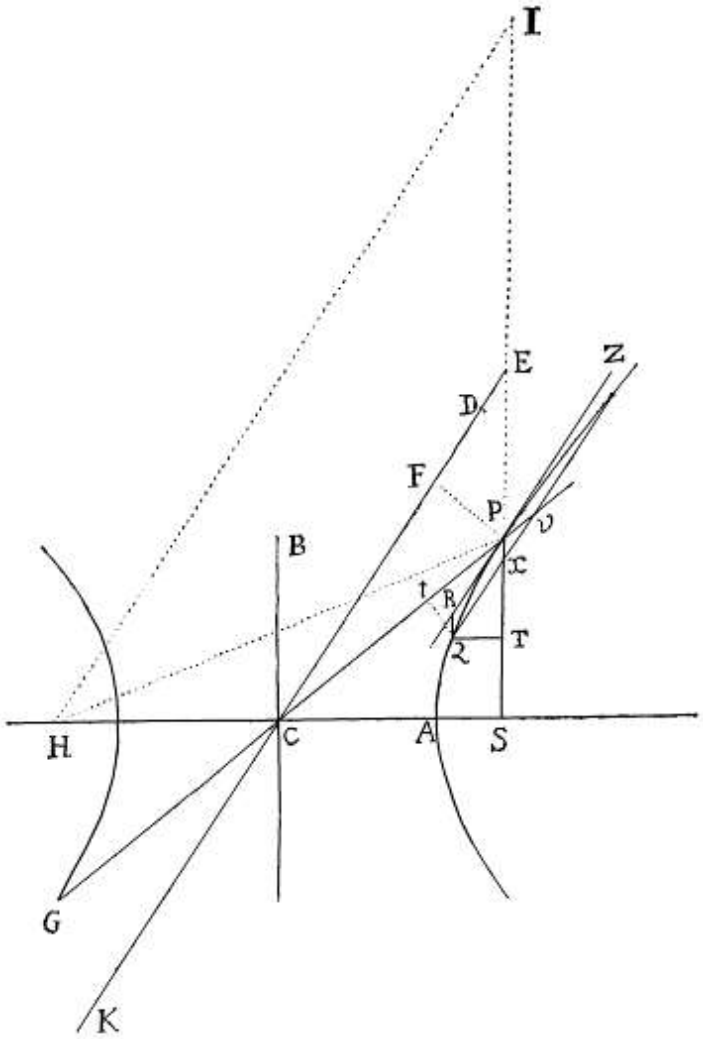
Esto Ellipseos superioris umbilicus *S*. Agatur *SP* secans Ellipseos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem esse semiaxi majori *AC*, eo quod acta ab altero Ellipseos umbilico *H* linea *HI* ipsi *EC* parallela, (ob æquales *CS*, *CH*) æquentur *ES*, *EI*, adeo ut *EP* semisumma sit ipsarum *PS*, *PI*, id est (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipsorum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum 2*AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & Ellipseos latere recto principali (seu 2*BC quad.* ÷ *AC*) dicto *L*, erit *L* × *QR* ad *L* × *Pv* ut *QR* ad *Pv*; id est ut *PE* (seu *AC*) ad *PC*; & *L* × *Pv* ad *GvP* ut *L* ad *Gv*; & *GvP* ad *Qv quad.* ut *CP quad.* ad *CD quad.*; & (per Lem. VIII.) *Qv quad.* ad *Qx quad.* punctis *Q* & *P* coeuntibus, est ratio æqualitatis, & *Qx quad.* seu *Qv quad.* est ad *QT quad.* ut *EP quad.*

ad *PF quad.*, id est ut *CA quad.* ad *PF quad.* sive (per Lem. XII.) ut *CD quad.* ad *CB quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad *QT quad.* ut *AC* ad $PC + L$ ad $Gv + CPq.$ ad $CDq. + CDq.$ ad $CBq.$ id est ut $AC \times L$ (seu $2CBq.$) $\times CPq.$ ad $PC \times Gv \times CBq.$ sive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis *Q* & *P* coeuntibus, æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & *QT quad.* æquantur. Ducantur hæc aqualia in $SPq. \div QR$ & fiet $L \times SPq.$ æquale $SPq. \times QTq. \div QR$. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq.$ id est reciproce in ratione duplicata distantiæ *SP*. *Q. E. I.*

Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

Prop. XII. Prob. VII.

Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.



Sunto *CA*, *CB* semiaxes Hyperbolæ; *PG*, *KD* diametri conjugatæ; *PF*, *Qt* perpendicula ad diametros; & *Qv* ordinatim applicata ad diametrum *GP*. Agatur *SP* secans tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QRPx*. Patet *EP* æqualem esse semiaxi transverso *AC*, eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico *H* linea *HI* ipsi *EC* parallela, ob æquales *CS*, *CH*, æquentur *ES*, *EI*; adeo ut *EP* semidifferentia sit ipsarum *PS*, *PI*, id est (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipsarum *PI*, *PH*, quarum differentia axem totum 2*AC* adæquat. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*. Et Hyperbolæ latere recto principali (seu 2*BCq.* ÷ *AC*) dicto *L*, erit *L* × *QR* ad *L* × *Pv* ut *QR* ad *Pv*, id est, ut *PE* (seu *AC*) ad *PC*; Et *L* × *Pv* ad *GvP* ut *L* ad *Gv*; & *GvP* ad *Qvq.* ut *CPq.* ad *CDq.*; & (per Lem. VIII.) *Qvq.* ad *Qxq.*, punctis *Q* & *P* coeuntibus fit ratio æqualitatis; & *Qxq.* seu *Qvq.* est ad *QTq.* ut *EPq.* ad *PFq.*, id est ut *CAq.* ad *PFq.*, sive (per Lem. XII.) ut *CDq.* ad *CBq.*: & conjunctis his

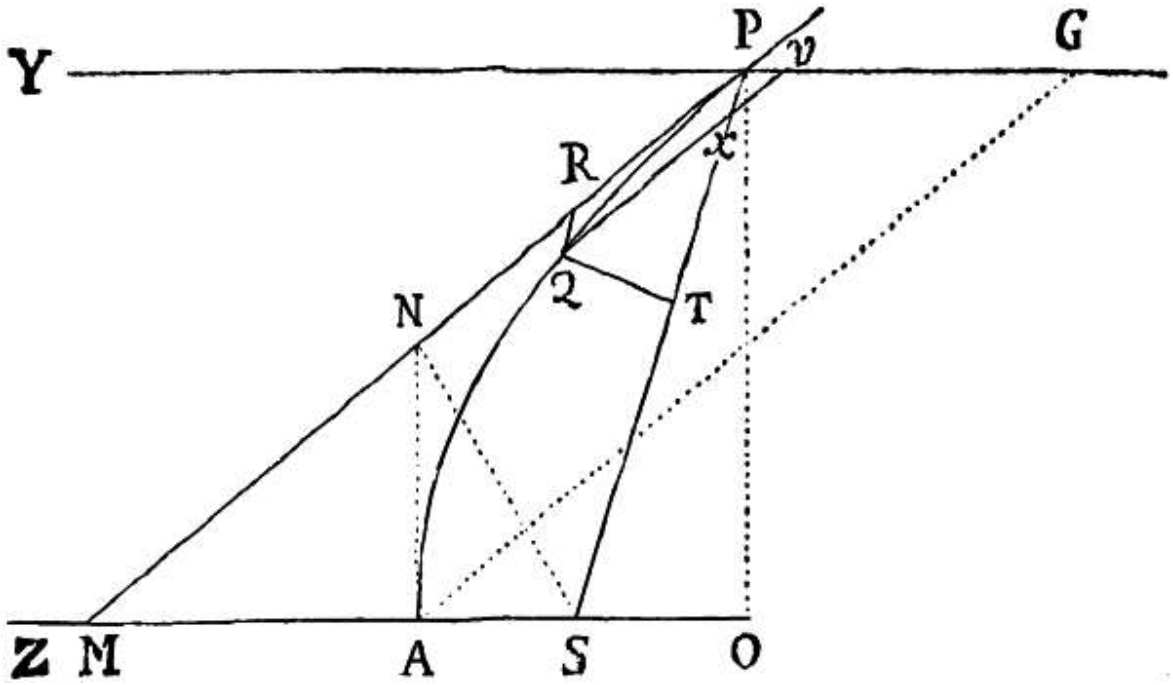
omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad $QTq.$ ut AC ad $PC + L$ ad $Gv + CPq.$ ad $CDq. + CDq.$ ad $CBq.$: id est ut $AC \times L$ (seu $2BCq.$) $\times PCq.$ ad $PC \times Gv \times CB\ quad.$ sive ut $2PC$ ad Gv, sed punctis Q & P coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & $QTq.$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $SPq. \div QR$ & fiet $L \times SPq.$ æquale $SPq. \times QTq. \div QR$. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq.$ id est in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*

Eodem modo demonstratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam versa, movebitur in Hyperbola conjugata.

Lemma XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

Lemma XIV.



Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim APQ Parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM

tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN* linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN*, & ob æquales *MS* & *SP*, *MN* & *NP*, *MA* & *AO*, parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*, & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A* & simile triangulis æqualibus *SMN*, *SPN*. Ergo *PS* est ad *SN* ut *SN* ad *SA*. *Q. E. D.*

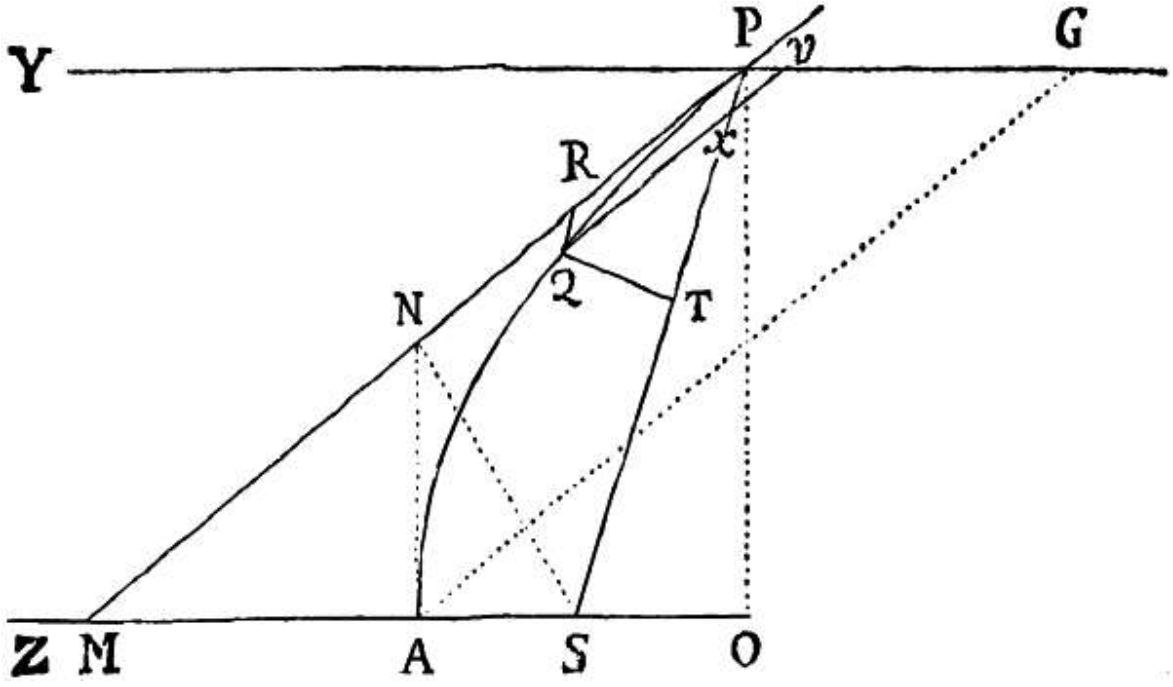
Corol. 1. *PSq.* est ad *SNq.* ut *PS* ad *SA*.

Corol. 2. Et ob datam *SA*, est *SNq.* ut *PS*.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis *PM* cum recta *SN* quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam *AN*, quæ Parabolam tangit in vertice principali.

Prop. XIII. Prob. VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.



Maneat constructio Lemmatis, sitq; *P* corpus in perimetro Parabolæ, & a loco *Q* in quem corpus proxime movetur, age ipsi *SP* Parallelam *QR* & perpendicularem *QT*, necnon *Qv* tangentiparallelam & occurrentem tum diametro *YPG* in *v*, tum distantiæ *SP* in *x*. Jam ob similia triangula *Pxv*, *MSP* & æqualia unius latera *SM*, *SP*, æqualia sunt alterius latera *Px* seu *QR* & *Pv*. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ *Qv* æquale est rectangulo sub

latere recto & segmento diametri *Pv*, id est (per Lem. XIII.) rectangulo 4*PS* × *Pv* seu 4*PS* × *QR*; & punctis *P* & *Q* coeuntibus, ratio *Qv* ad *Qx* (per Lem. 8.) fit æqualitatis. Ergo *Qxq.* eo in casu, æquale est rectangulo 4*PS* × *QR*. Est autem (ob æquales angulos *QxT*, *MPS*, *PMO*) *Qxq.* ad *QTq.* ut *PSq.* ad *SNq.* hoc est (per Corol. I. Lem. XIV.) ut *PS* ad *AS*, id est ut 4*PS* × *QR* ad 4*AS* × *QR*, & inde (per Pro. Lib. V. Elem.) *QTq.* & 4*AS* × *QR* æquantur. Ducantur hæc æqualia in *SPq.* ÷ *QR*, & fiet *SPq.* × *QTq.* ÷ *QR* æquale *SPq.* × 4*AS*: & propterea (per Corol. Theor. V.) vis centripeta est reciproce ut *SPq.* × 4*AS*, id est, ob datam 4*AS*, reciproce in duplicata ratione distantiæ *SP*. *Q. E. I.*

Corol. I. Ex tribus novissimis Proportionibus consequens est, quod si corpus quodvis *P*, secundum lineam quamvis rectam *PR*, quacunq; cum velocitate exeat de loco *P*, & vi centripeta quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra.

Corol. II. Et si velocitas, quacum corpus exit de loco suo *P*, ea sit, qua lineola *PR* in minima aliqua temporis particula describi possit, & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium *QR*: movebitur hoc corpus in Conica aliqua sectione cujus latus rectum est quantitas illa *QTq.* ÷ *QR* quæ ultimo fit ubi lineolæ *PR*, *QR* in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipsin, & casum excipio ubi corpus recta descendit ad centrum.

Prop. XIV. Theor. VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta decrescat in duplicata ratione distantiarum a centro; dico quod Orbium Latera recta sunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore describunt.

Nam per Corol. II. Prob. VIII. Latus rectum *L* æquale est quantitati *QTq.* ÷ *QR* quæ ultimo fit ubi coeunt puncta *P* & *Q*. Sed linea minima *QR*, dato tempore, est ut vis centripeta generans, hoc est (per Hypothesin) reciproce ut *SPq.* Ergo *QTq.* ÷ *QR* est ut *QTq.* × *SPq.* hoc est, latus rectum *L* in duplicata ratione areæ *QT* × *SP*. *Q. E. D.*

Corol. Hinc Ellipseos area tota, eiq; proportionale rectangulum sub axibus, est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & integra

ratione temporis periodici.

Prop. XV. Theor. VII.

Iisdem positis, dico quod tempora periodica in Ellipsibus sunt in ratione sesquiplicata transversorum axium.

Namq; axis minor est medius proportionalis inter axem majorem (quem transversum appello) & latus rectum, atq; adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & sesquiplicata ratione axis transversi. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Theorematis Sexti, est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione periodici temporis. Dematur utrobiq; dimidiata ratio lateris recti & manebit sesquiplicata ratio axis transversi æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

Prop. XVI. Theor. VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisq; ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendiculorum inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. Vide Fig. Prop. X. &. XI.

Ab umbilico *S* ad tangentem *PR* demitte perpendiculum *SY* & velocitas corporis *P* erit reciproce in dimidiata ratione quantitatis $SYq. \div L$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus *PQ* in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens *PR*, id est (ob proportionales *PR* ad *QT* & *SP* ad *SY*) ut $SP \times QT \div SY$, sive ut *SY* reciproce & $SP \times QT$ directe; estq; $SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est, per Theor. VI. in dimidiata ratione lateris recti *Q. E. D.*

Corol. 1. Latera recta sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum

inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

Corol. 3. Ideoq; velocitas in Conica sectione, in minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia, in dimidiata ratione lateris recti ad distantiam illam duplicatam.

Corol. 4. Corporum in Ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias, hoc est (per Corol. VI. Theor. IV.) reciproce in dimidiata ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semiaxes minores, & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverse cum dimidiata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio dimidiata distantiarum inverse.

Corol. 5. In eadem vel æqualibus figuris, vel etiam in figuris inæqualibus, quarum latera recta sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas est reciproce in dimidiata ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2 Lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in dimidiata ratione distantiæ.

Corol. 7. In Parabola, velocitas ubiq; est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem distantiam, in dimidiata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium secundum, velocitas in vertice Parabolæ est in hac ratione, & per Corollaria sexta hujus & Theorematis quarti, servatur eadem proportio in omnibus distantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubiq; æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major.

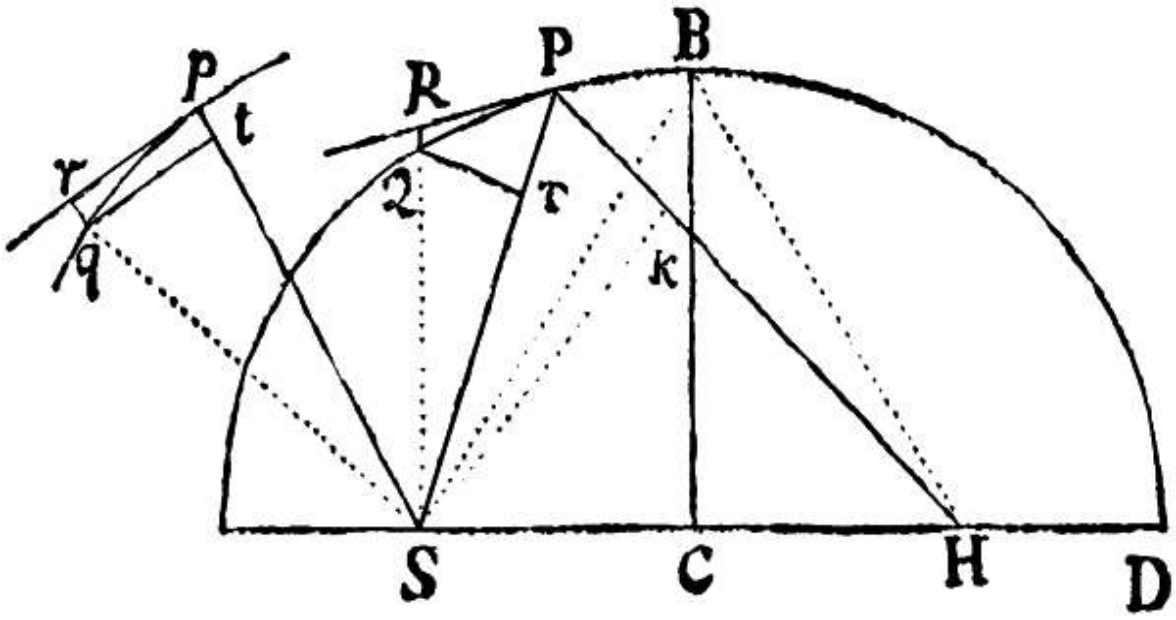
Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantia dimidii lateris recti Sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demissum. Patet per Corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Theor. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio, reciproce in dimidiata ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem distantia, ut media

proportionalis inter distantiam illam communem & semissem lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

Prop. XVII. Prob. IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea quam corpus describit, de loco dato cum data velocitate secundum datam rectam egrediens.



Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea sit quæ corpus *p* in orbita quavis data *pq* gyrare faciat, & cognoscatur hujus velocitas in loco *p*. De loco *P* secundum lineam *PR* exeat corpus *P* cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Conisectionem *PQ*. Hanc igitur recta *PR* tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *pr* orbitam *pq* in *p*, & si ab *S* ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Theor. VIII.) latus rectum Conisectionis ad latus rectum orbitæ datæ, in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atq; adeo datur. Sit istud *L*. Datur præterea Conisectionis umbilicus *S*. Anguli *RPS* complementum ad duos rectos fiat angulus *RPH*, & dabitur positione linea *PH*, in qua umbilicus alter *H* locatur. Demisso ad *PH* perpendiculo *SK*, & erecto semiaxe conjugato *BC*, est $SPq. - 2KPH + PHq.$ (per Pro. Lib. II. Elem.) $= SHq. = 4CHq. = 4BHq. - 4BCq. = SP + PH$

quad. - $L \times SP + PH = SPq. + 2SPH + PHq.$ - $L \times SP + PH$. Addantur utrobiq; $2KPH + L \times SP + PH - SPq. - PHq.$ & fiet $L \times SP + PH = 2SPH + 2KPH$, seu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS, adeoq; figura erit Ellipsis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis, adeoq; tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc in omni Conisectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP$ ad L, in casu hujus Corollarii, fit $DS + DH$ ad DH ut $4DS$ ad L, & divisim DS ad DH ut $4DS - L$ ad L.

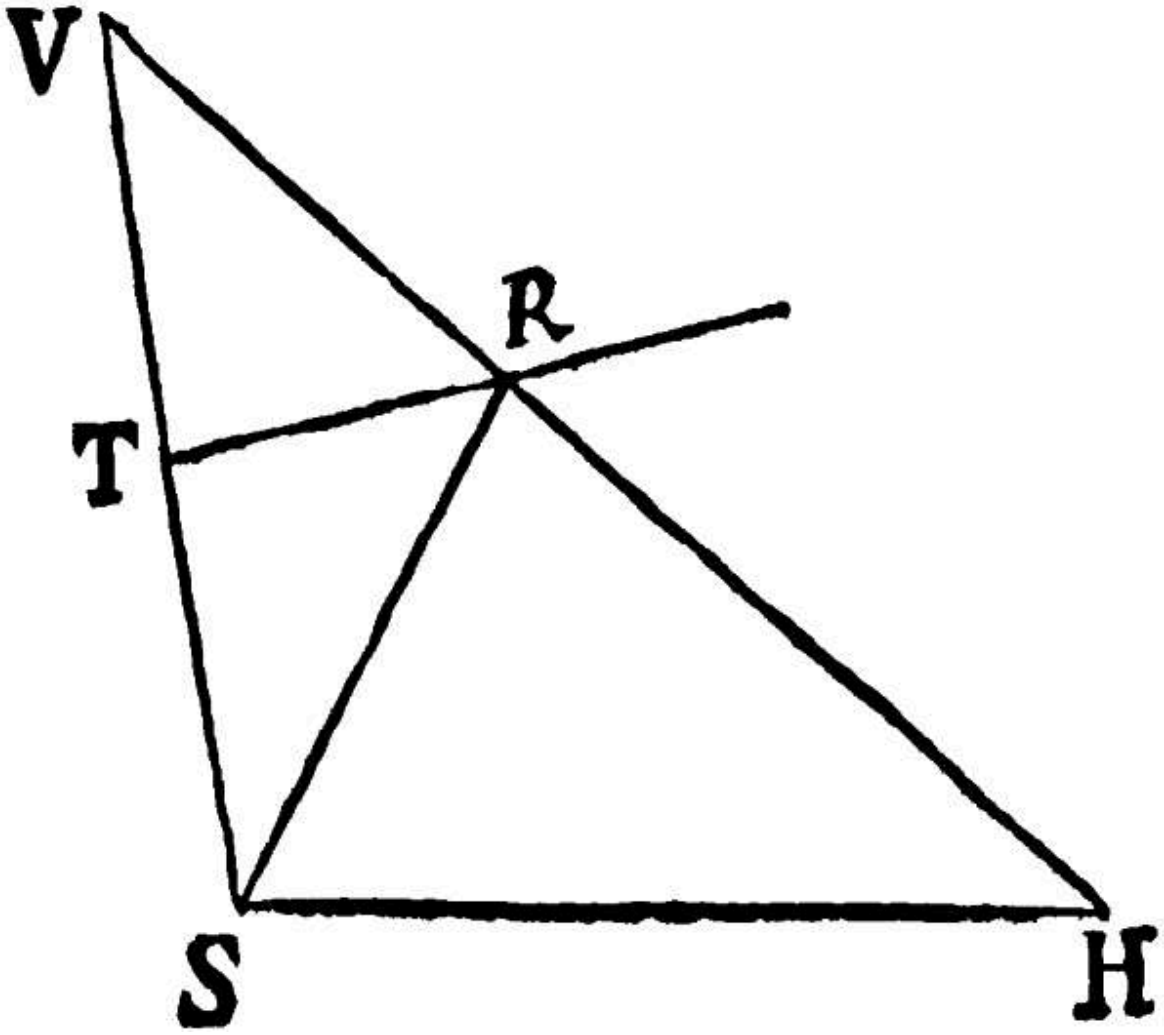
Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur Orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam DS, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis: (Per Corol. 3. Theor. VIII.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunq; Conica, & ex orbe suo impulsu quocunq; exturbetur; cognosci potest orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia, mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

SECT. IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.



Lemma XV.

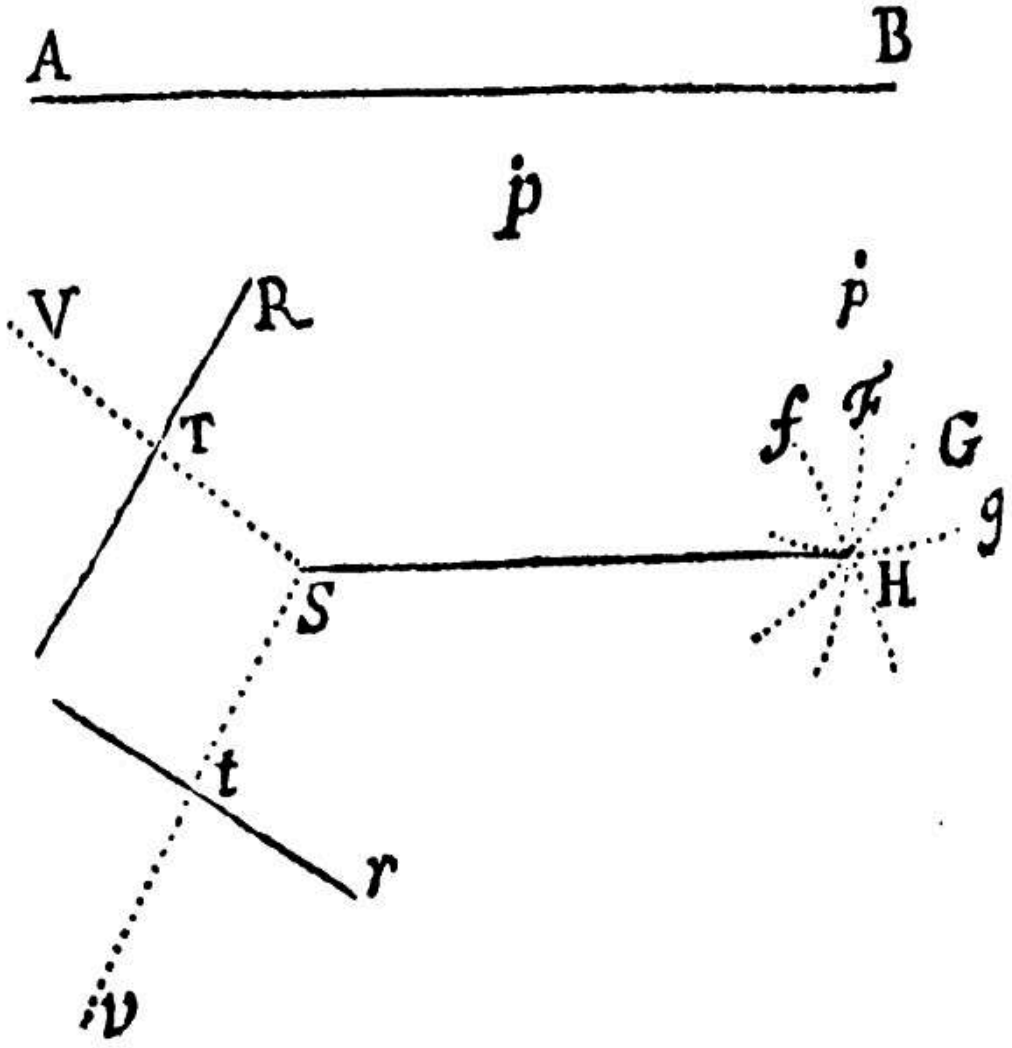
Si ab Ellipseos vel Hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis sit axi transverso figuræ, altera* SV *a perpendiculo* TR *in se demisso bisecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *sectionem Conicam alicubi tangit: & contra, si tangit, erit* VH *æqualis axi figuræ.*

Secet enim *VH* sectionem conicam in *R*, & jungatur *SR*. Ob æquales rectas *TS*, *TV*, æquales erunt anguli *TRS*, *TRV*. Bisecat ergo *RT* angulum

VRS & propterea figuram tangit: & contra. *Q. E. D.*

Prop. XVIII. Prob. X.

Datis umbilico & axibus transversis describere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

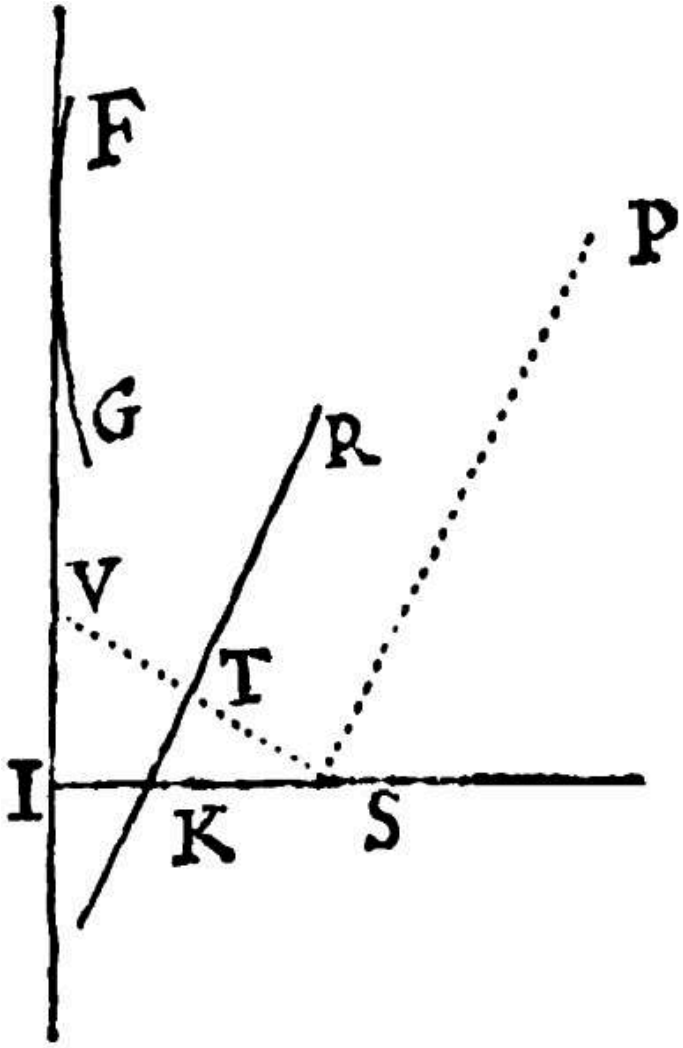


Sit *S* communis umbilicus figuraram; *AB* longitudo axis transversi Trajectoriæ cujusvis; *P* punctum per quod Trajectoria debet transire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro *P* intervallo *AB* - *SP*, si orbita sit Ellipsis, vel *AB* + *SP*, si ea sit Hyperbola, describatur circulus *HG*. Ad tangentem *TR* demittatur perpendiculum *ST*, & producatur ea ad *V* ut sit *TV* æqualis *ST*; centroq; *V* & intervallo *AB* describatur circulus *FH*. Hac methodo sive dentur duo puncta *P*, *p*, sive duæ tangentes *TR*, *tr*, sive punctum *P* &

tangens *TR*, describendi sunt circuli duo. Sit *H* eorum intersectio communis, & umbilicis *S*, *H*, axe illo dato describatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria descripta (eo quod *PH* + *SP* in Ellipsi, & *PH* - *SP* in Hyperbola æquatur axi) transibit per punctum *P*, & (per Lemma superius) tanget rectam *TR*. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo *P*, *p*, vel tanget rectas duas *TR*, *tr*. *Q. E. F.*

Prop. XIX. Prob. XI.

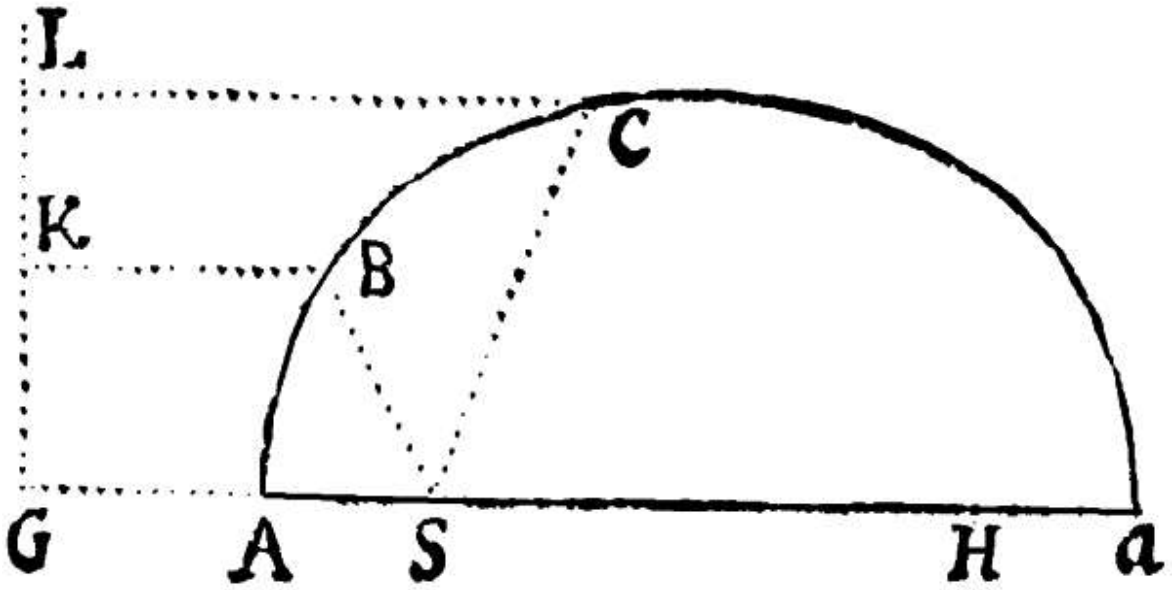
Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.



Sit *S* umbilicus, *P* punctum & *TR* tangens trajectoriæ describendæ. Centro *P*, intervallo *PS* describe circulum *FG*. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem *ST*, & produc eam ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*.

Eodem modo describendus est alter circulus *fg*, si datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, si datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta *IF* quæ tangat duos circulos *FG*, *fg* si dantur duo puncta *P*, *p*; vel transeat per duo puncta *V*, *v*, si dantur duæ tangentes *TR*, *tr*, vel tangat circulum *FG* & transeat per punctum *V*, si datur punctum *P* & tangens *TR*. Ad *FI* demitte perpendicularem *SI*, eamq; biseca in *K*, & axe *SK*, vertice principali *K* describatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola ob æquales *SK* & *IK*, *SP* & *FP* transibit per punctum *P*; & (per Lemmatis XIV. Corol. 3.) ob æquales *ST* & *TV* & angulum rectum *STR*, tanget rectam *TR*. *Q. E. F.*

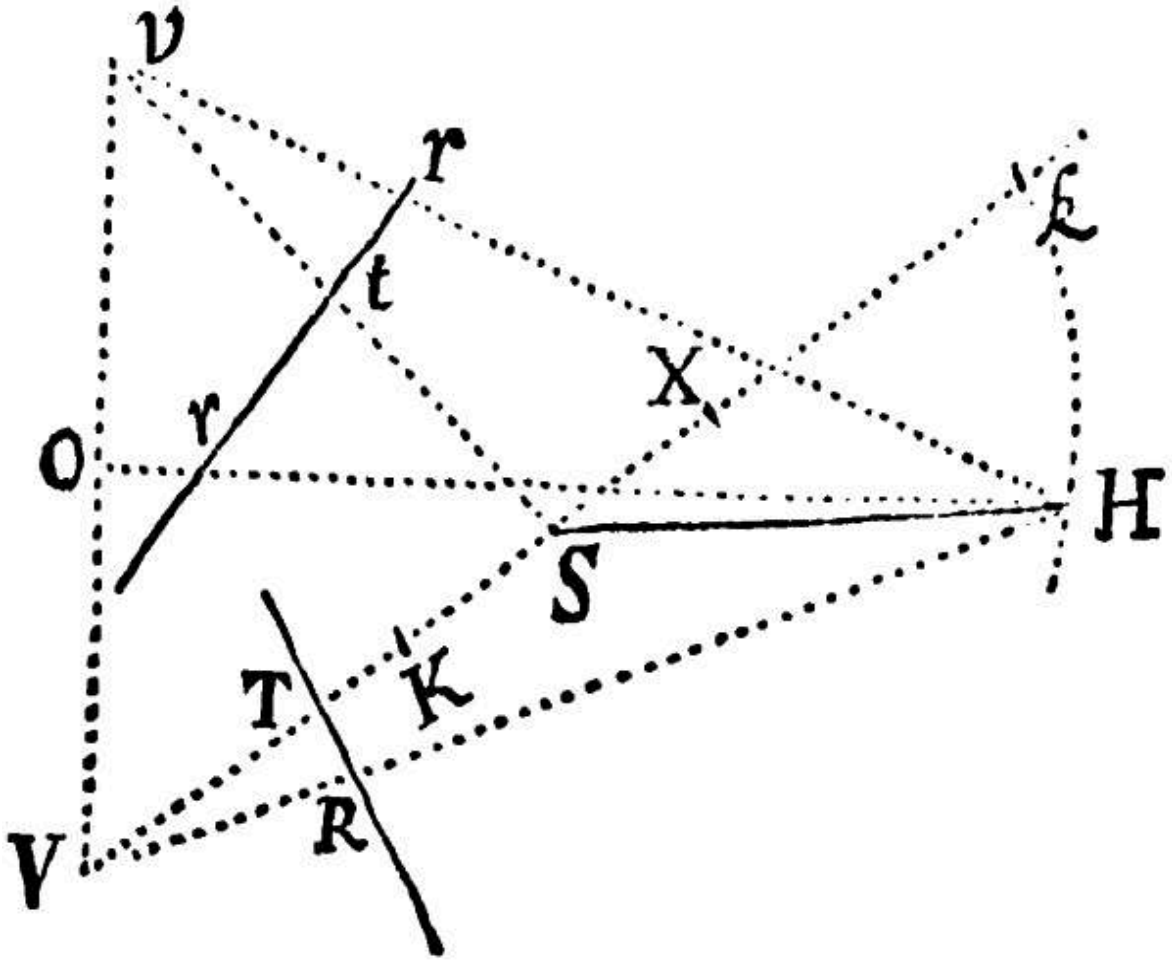
Prop. XX. Prob. XII.



Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis specie datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.

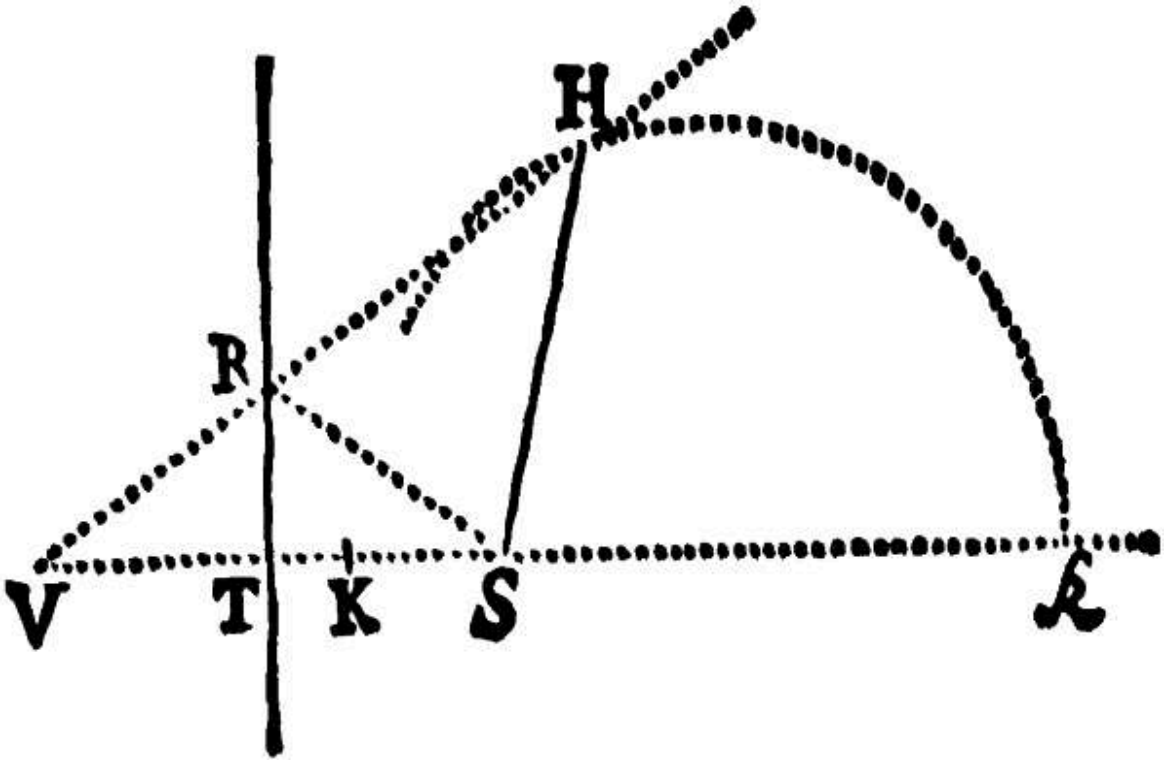
Cas. 1. Dato umbilico *S*, describenda sit Trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam Trajectoria datur specie, dabitur ratio axis transversi ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, describe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eosdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemq; seca in *A* & *a*, ita ut sit *SA* ad *AG* & *Sa* ad *aG*, ut est *SB* ad *BK*, & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, describatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit *SA* ad *AG* ut *Sa* ad *aG*, erit divisim *Sa* - *SA* seu *SH* ad *aG* - *AG* seu *Aa* in eadem ratione, adeoq; in ratione quam habet axis

transversus figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. Cumq; sint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eadem ratione, transibit hæc Figura per puncta *B*, *C*, ut ex Conicis manifestum est.

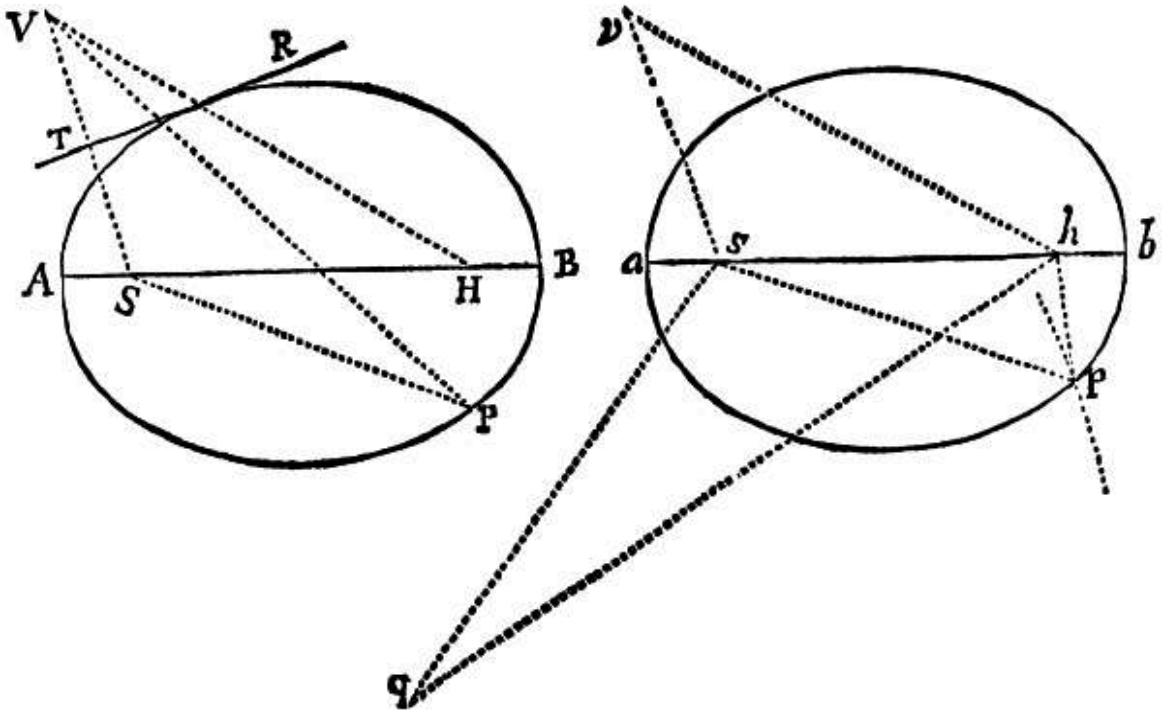


Cas. 2. Dato umbilico *S*, describenda sit Trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut sint *TV*, *tv* æquales *TS*, *ts*. Biseca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinite *OH*, rectamq; *VS* infinite productam seca in *K* & *k* ita, ut sit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut est Trajectoriæ describendæ axis transversus ad umbilicorum distantiam. Super diametro *Kk* describatur circulus secans rectam *OH* in *H*; & umbilicis *S*, *H*, axe transverso ipsam *VH* æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Nam biseca *Kk* in *X*, & junge *HX*, *HS*, *HV*, *Hv*. Quoniam est *VK* ad *KS* ut *Vk* ad *kS*; & composite ut *VK* + *Vk* ad *KS* + *kS*; divisimq; ut *Vk* - *VK* ad *kS* - *KS* id est ut 2*VX* ad 2*KX* & 2*KX* ad 2*SX*, adeoq; ut *VX* ad *HX* & *HX* ad *SX*, similia erunt triangula *VXH*, *HXS*,

& propterea *VH* erit ad *SH* ut *VX* ad *XH*, adeoq; ut *VK* ad *KS*. Habet igitur Trajectoria; descriptæ axis transversus *VH* eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam *SH*, quam habet Trajectoriæ describendæ axis transversus ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum *VH*, *vH* æquentur axi transverso, & *VS*, *vS* a rectis *TR*, *tr* perpendiculariter bisecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.*



Cas. 3. Dato umbilico *S* describenda sit Trajectoria quæ rectam *TR* tanget in puncto dato *R*. In rectam *TR* demitte perpendicularem *ST*, & produc eandem ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*. Junge *VR*, & rectam *VS* infinite productam seca in *K* & *k*, ita ut sit *VK* ad *SK* & *Vk* ad *Sk* ut Ellipseos describendæ axis transversus ad distantiam umbilicorum; circuloq; super diametro *Kk* descripto, secetur producta recta *VR* in *H*, & umbilicis *S*, *H*, axe transverso rectam *HV* æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Namq; *VH* esse ad *SH* ut *VK* ad *SK*, atq; adeo ut axis transversus Trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in Casu secundo, & propterea Trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describenda: rectam vero *TR* qua angulus *VRS* bisecatur, tangere Trajectoriam in puncto *R*, patet ex Conicis. *Q. E. F.*

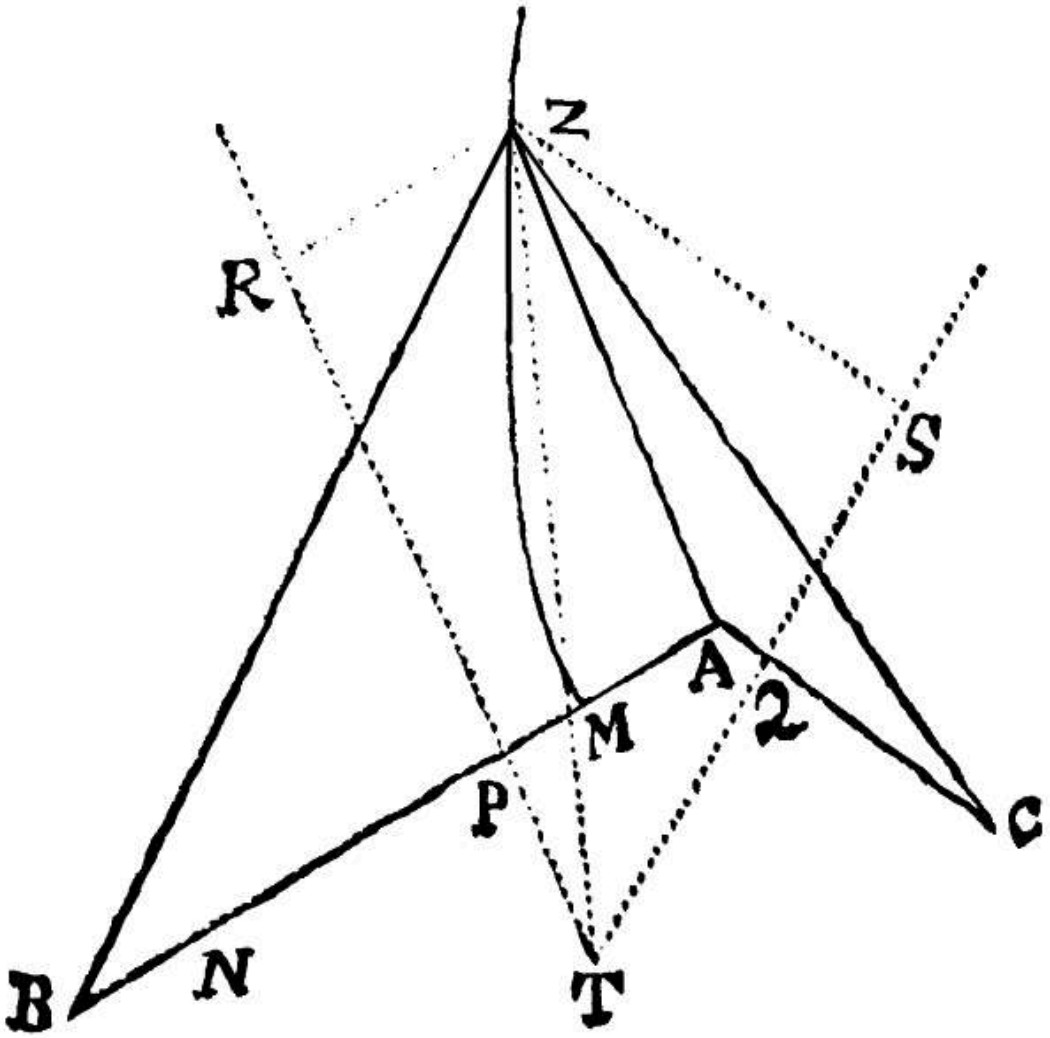


Cas. 4. Circa umbilicum *S* describenda jam sit Trajectoria *APB*, quæ tangat rectam *TR*, transeatq; per punctum quodvis *P* extra tangentem datum, quæq; similis sit figuræ *apb*, axe transverso *ab* & umbilicis *s*, *h* descriptæ. In tangentem *TR* demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*. Angulis autem *VSP*, *SVP* fac angulos *hsq*, *shq* æquales; centroq; *q* intervallo quod sit ad *ab* ut *SP* ad *VS* describe circulum secantem figuram *apb* in *p*. Junge *sp* & age *SH* quæ sit ad *sh* ut est *SP* ad *sp* quæq; angulum *PSH* angulo *psh* & angulum *VSH* angulo *psq* æquales constituat. Deniq; umbilicis *S*, *H*, axe distantiam *VH* æquante, describatur sectio conica.

Dico factum. Nam si agatur *sv* quæ sit ad *sp* ut est *sh* ad *sq*, quæq; constituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt similia, & propterea *vh* erit ad *pq* ut est *sh* ad *sq*, id est (ob similia triangula *VSP*, *hsq*) ut est *VS* ad *SP* seu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro ob similia triangula *VSH*, *vsh* est *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id est, axis Conicæ actionis jam descripta: ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*, & propterea figura jam descripta similis est figuræ *apb*. Transit autem hæc figura per punctum *P*, eo quod triangulum *PSH* simile sit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipsius axi & *VS* bisecatur perpendiculariter a recta *TR* tangit eadem rectam *TR*. *Q. E. F.*

Lemma XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.



Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet: Ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in Hyperbola cujus umbilici sunt *A* & *B*, & axis transversus differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut est *MN* ad *AB*, & erecto *PR* perpendiculari ad *AB*, demissoq; *ZR* perpendiculari ad *PR*, erit ex natura hujus Hyperbolæ *ZR* ad *AZ* ut est *MN* ad *AB*. Simili discursu punctum *Z* locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt *A*, *C* & axis transversus differentia inter *AZ* & *CZ*, duciq; potest *QS* ipsi *AC* perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut est differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*.

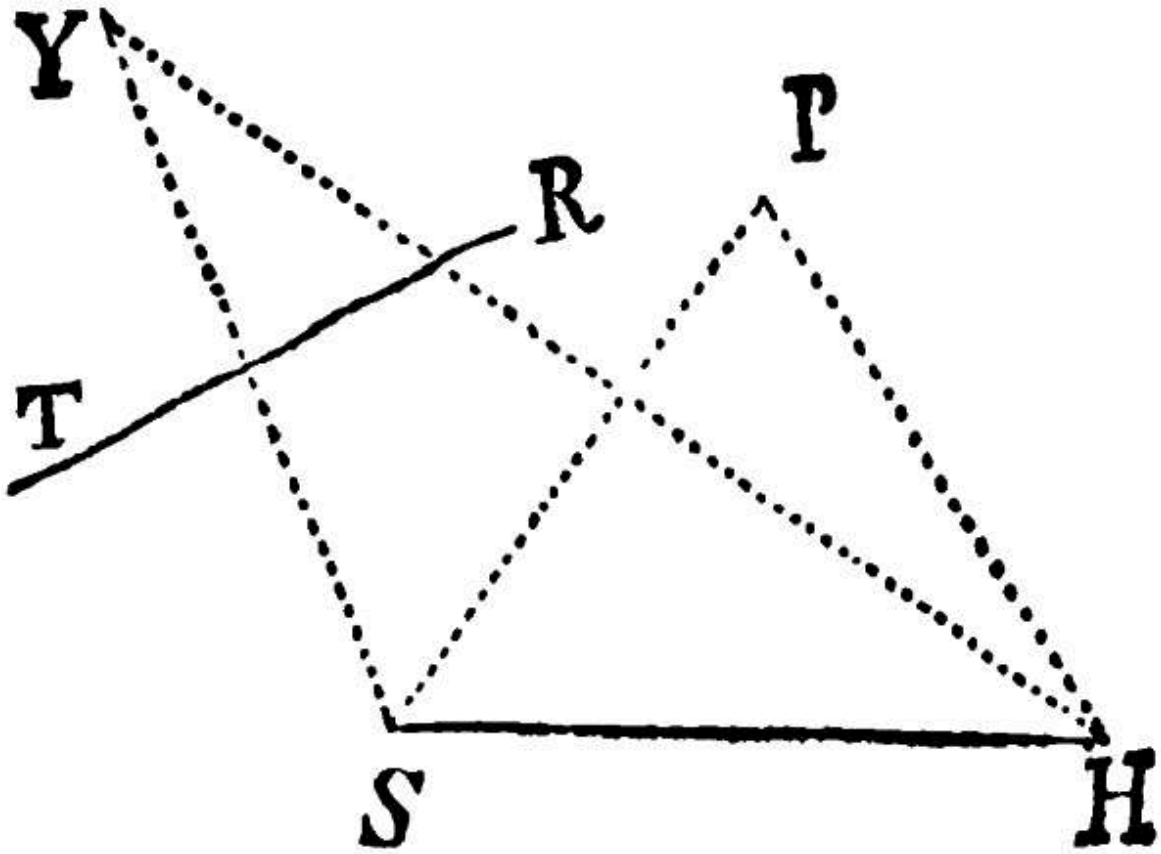
Dantur ergo rationes ipsarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; adeoq; rectis *RP*, *SQ* concurrentibus in *T*, locabitur punctum *Z* in recta *TZ* positione data. Eadem Methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt *B* & *C* & axis transversus differentia rectarum *BZ*, *CZ*, inveniri potest alia recta in qua punctum *Z* locatur. Habitis autem duobus locis rectilineis, habetur punctum quæsitum *Z* in earum intersectione, *Q. E. I.*

Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *AZ* & *BZ* æquantur, punctum *Z* locabitur in perpendiculo bisecante distantiam *AB*, & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum *Z* in centro circuli per puncta *A*, *B*, *C* transeuntis. *Q. E. I.*

Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per Librum. Tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

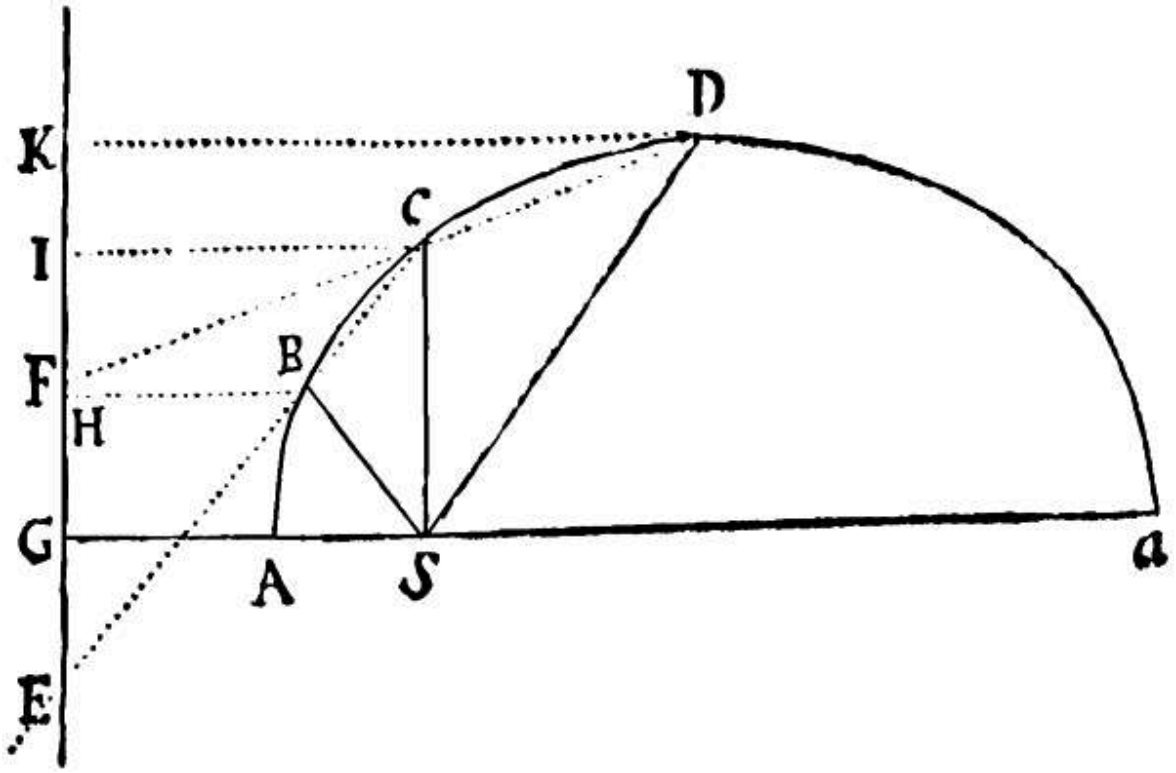
Prop. XXI. Prob. XIII.



Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

Detur umbilicus *S*, punctum *P*, & tangens *TR*, & inveniendus sit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *Y*, ut sit *TY* æqualis *ST*, & erit *YH* æqualis axi transverso. Junge *SP*, *HP* & erit *SP* differentia inter *HP* & axem transversum. Hoc modo si dentur plures tangentes *TR*, vel plura puncta *P*, devenietur semper ad lineas totidem *YH*, vel *PH*, a dictis punctis *Y* vel *P* ad umbilicum *H* ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus *SP* differunt ab iisdem, atq; adeo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma superius, datur umbilicus ille alter *H*. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est *YH*, vel si Trajectoria Ellipsis est, *PH* + *SP*; sin Hyperbola *PH* - *SP*) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*

Scholium.



Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*, *F*, ut sit *EB* ad *EC* ut *SB* ad *SC*, & *FC* ad *FD* ut *SC* ad *SD*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales *SG*, *BH*, inq; *GS* infinite producta cape *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut est *HB* ad *BS*; & erit

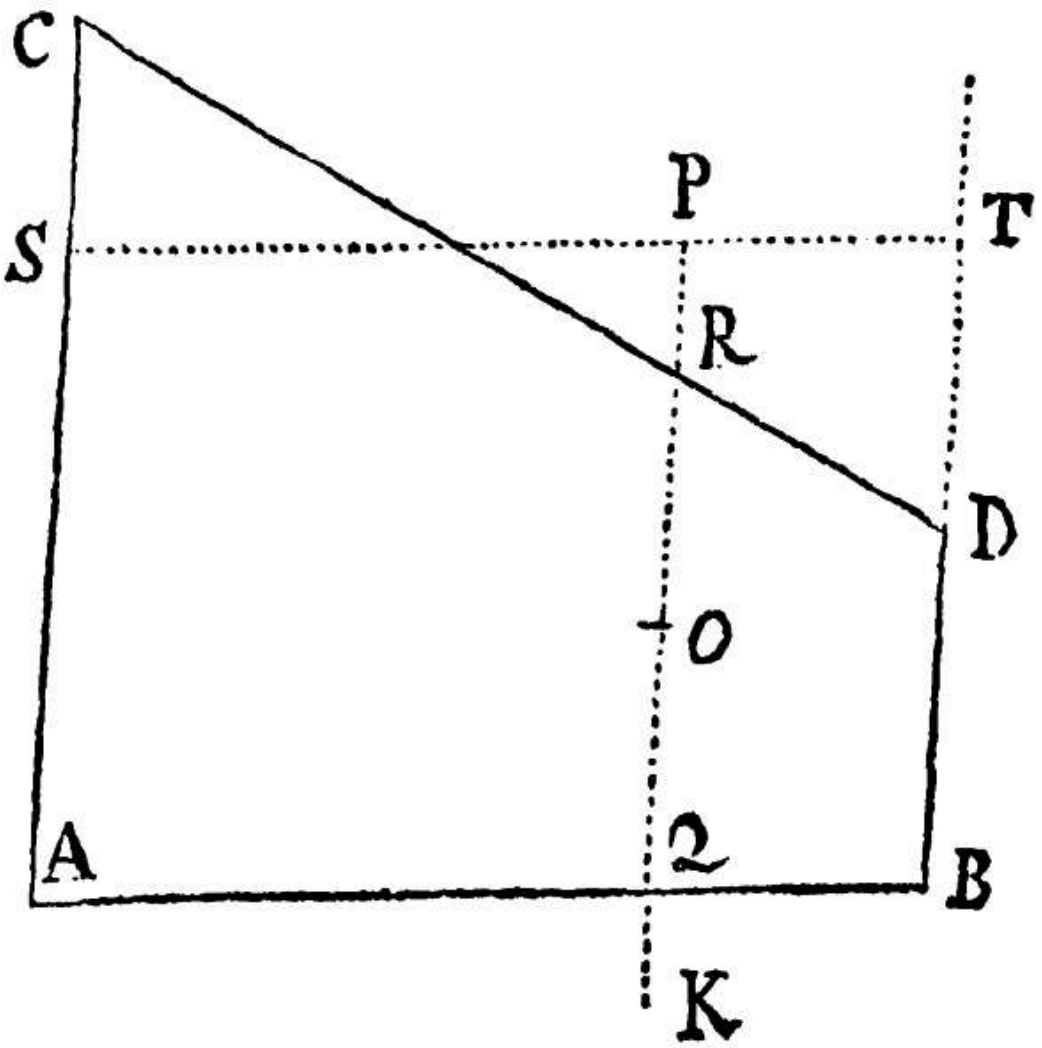
A vertex, & *Aa* axis transversus Trajectoriæ: quæ, perinde ut *GA* minor, æqualis vel major fuerit quam *AS*, erit Ellipsis, Parabola vel Hyperbola; puncto *a* in primo casu cadente ad eandem partem lineæ *GK* cum puncto *A*; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *GK*. Nam si demittantur ad *GF* perpendicula *CI*, *DK*, erit *IC* ad *HB* ut *EC* ad *EB*, hoc est ut *SC* ad *SB*; & vicissim *IC* ad *SC* ut *HB* ad *SB*, seu *GA* ad *SA*. Et simili argumento probabitur esse *KD* ad *SD* in eadem ratione. Jacent ergo puncta *B*, *C*, *D* in Conisectione circa umbilicum *S* ita descripta, ut rectæ omnes ab umbilico *S* ad singula Sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula a punctis iisdem ad rectam *GK* demissa in data illa ratione.

Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit Clarissimus Geometra *De la Hire*, Conicorum suorum Lib. VIII. Prop. XXV.

SECT. V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

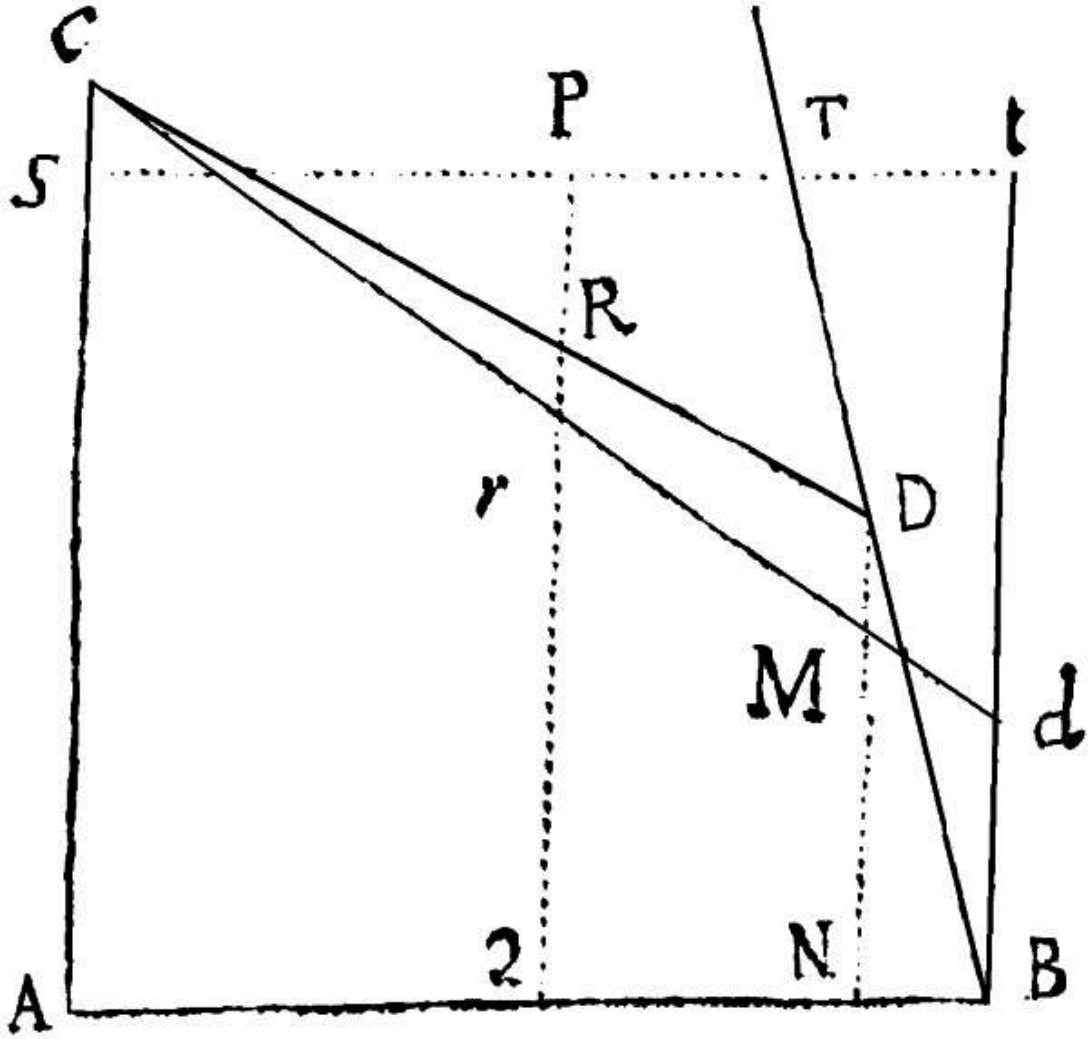
Lemma XVII.



Si a datæ conicæ sectionis puncto quovis P*, ad Trapezii alicujus* ABCD*, in Conica illa sectione inscripti, latera quatuor infinite producta* AB*,* CD*,* AC*,* DB*, totidem rectæ* PQ*,* PR*,* PS*,* PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* PQ × PR*, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* PS × PT *in data ratione.*

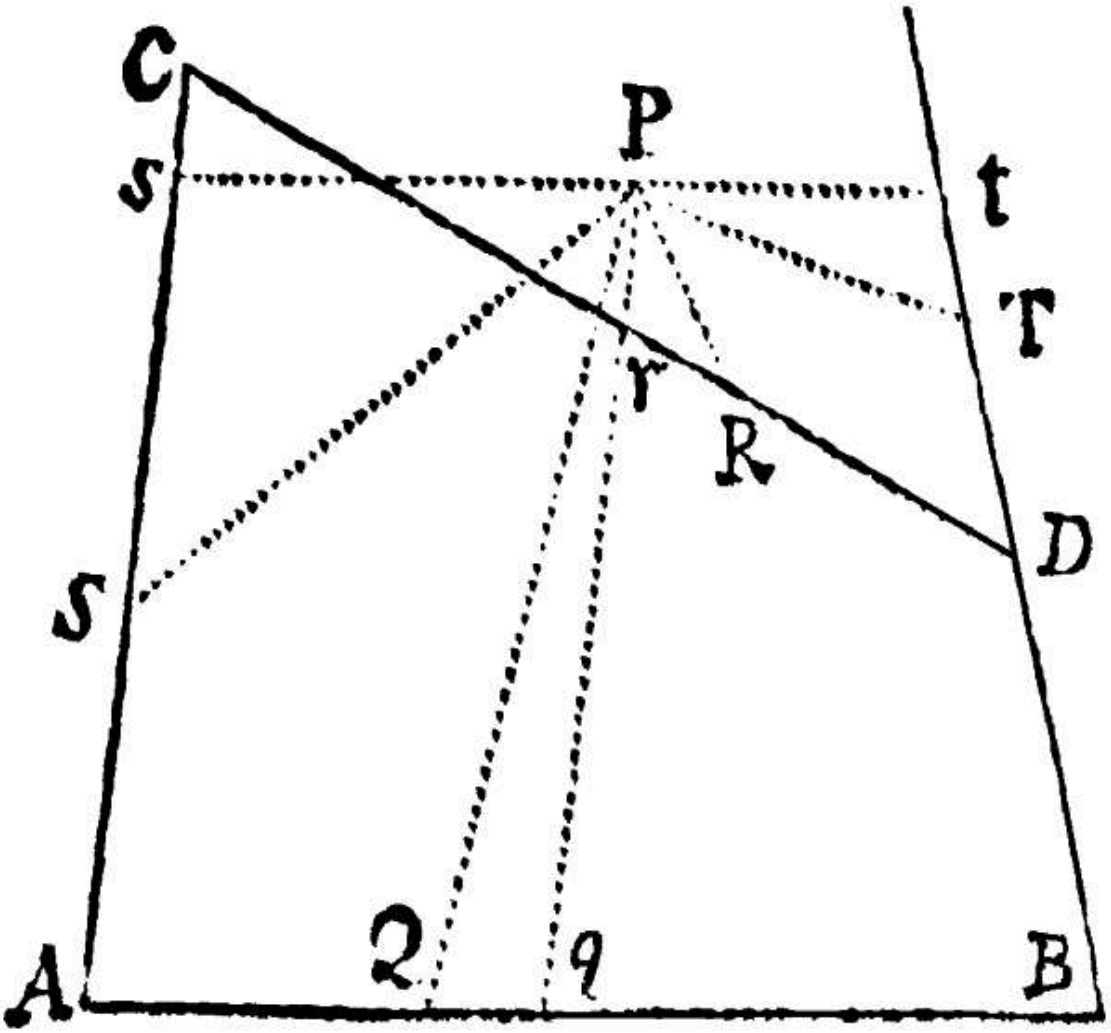
Cas. 1. Ponamus imprimis lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintq; insuper latera duo ex oppositis, puta *AC* & *BD*, parallela. Et recta quæ bisecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ sectionis, & bisecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* bisecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K* ut sit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* sint ad Conicam sectionem, & *PR* secet *AB* in dato

angulo, erit (per Pro & 18 Lib. III *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *QK* & *PR* æquales sunt, utpote æqualium *OK*, *OP*, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & *PQ* × *PR* æqualia sunt; atq; adeo rectangulum *PQ* × *PR* est ad rectangulum *AQB*, hoc est ad rectangulum *PS* × *PT* in data ratione. *Q. E. D.*



Cas. 2. Ponamus jam Trapezii latera opposita *AC* & *BD* non esse parallela. Age *Bd* parallelam *AC* & occurrentem tum rectæ *ST* in *t*, tum Conicæ sectioni in *d*. Junge *Cd* secantem *PQ* in *r*, & ipsi *PQ* parallelam age *DM* secantem *Cd* in *M* & *AB* in *N*. Jam ob similia triangula *BTt*, *DBN*, est *Bt* seu *PQ* ad *Tt* ut *DN* ad *NB*. Sic & *Rr* est ad *AQ* seu *PS* ut *DM* ad *AN*. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum *PQ* in *Rr* est ad rectangulum *Tt* in *PS*, ita rectangulum *NDM* est ad rectangulum *ANB*, & (per Cas. 1) ita rectangulum

QPr est ad rectangulum *SPt*, ac divisim ita rectangulum *QPR* est ad rectangulum *PS* × *PT*. *Q. E. D.*

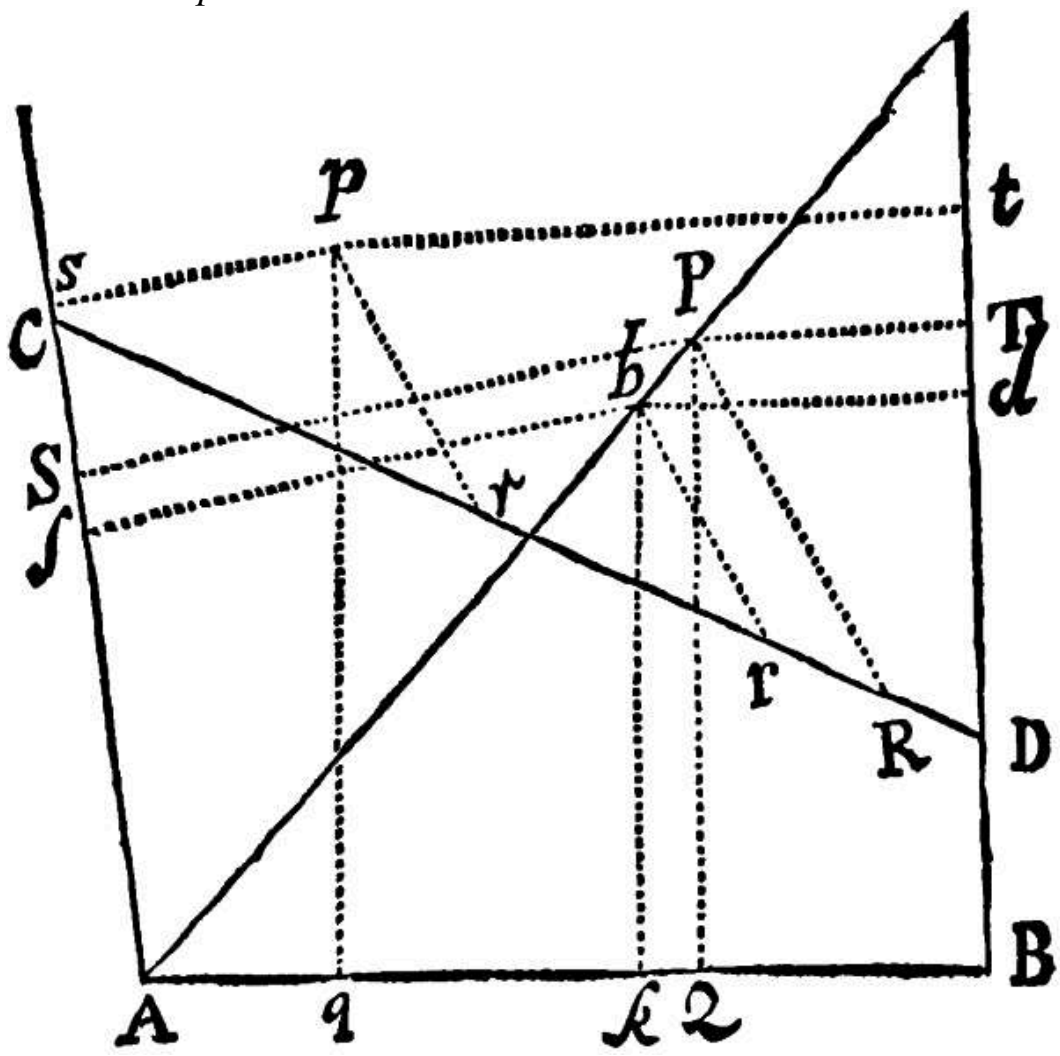


Cas. 3. Ponamus deniq; lineas quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* non esse parallelas lateribus *AC*, *AB*, sed ad ea utcunq; inclinatas. Earum vice age *Pq*, *Pr* parallelas ipsi *AC*; & *Ps*, *Pt* parallelas ipsi *AB*; & propter datos angulos triangulorum *PQq*, *PRr*, *PSs*, *PTt*, dabuntur rationes *PQ* ad *Pq*, *PR* ad *Pr*, *PS* ad *Ps* & *PT* ad *Pt*, atq; adeo rationes compositæ *PQ* in *PR* ad *Pq* in *Pr*, & *PS* in *PT* ad *Ps* in *Pt*. Sed per superius demonstrata, ratio *Pq* in *Pr* ad *Ps* in *Pt* data est: Ergo & ratio *PQ* in *PR* ad *PS* in *PT*. *Q. E. D.*

Lemma XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera Trapezii PQ × PR *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS × PT *in data*

ratione; punctum P*, a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam sectionem circa Trapezium descriptam.*



Per puncta *A*, *B*, *C*, *D* & aliquod infinitorum punctorum *P*, puta *p*, concipe Conicam sectionem describi: dico punctum *P* hanc semper tangere. Si negas, junge *AP* secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in *P* si fieri potest, puta in *b*. Ergo si ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt* & *bk*, *b*r, *bſ*, *bd*; erit ut *bk* × *b*r ad *bd* × *bſ* ita (per Lemma XVII) *pq* × *pr* ad *ps* × *pt* & ita (per hypoth.) *PQ* × *PR* ad *PS* × *PT*. Est & propter similitudinem Trapeziorum *bkAſ*, *PQAS*, ut *bk* ad *bſ* ita *PQ* ad *PS*. Quare applicando terminos prioris propositionis ad terminos correspondentes hujus, erit *b*r ad *bd* ut *PR* ad *PT*. Ergo Trapezia æquiangula *Dr*b*d*, *DRPT* similia sunt, & eorum diagonales *Db*, *DP* propterea coincidunt. Incidit itaq; *b* in intersectionem rectarum *AP*, *DP* adeoq;

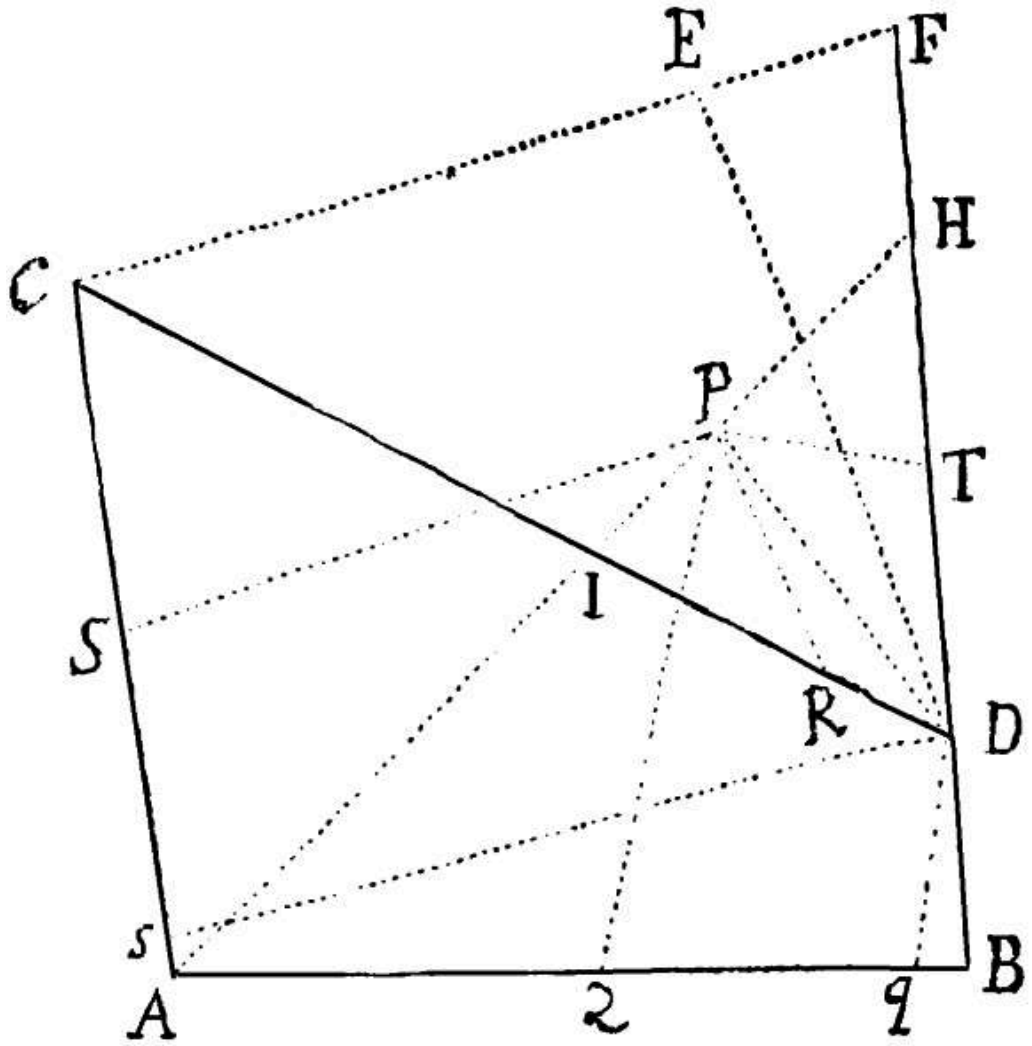
coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunq; sumatur, incidit in assignatam Conicam sectionem. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si rectæ tres *PQ*, *PR*, *PS* a puncto communi *P* ad alias totidem positione datas rectas *AB*, *CD*, *AC*, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitq; rectangulum sub duabus ductis *PQ* × *PR* ad quadratum tertii, *PS quad.* in data ratione: punctum *P*, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conica quæ tangit lineas *AB*, *CD* in *A* & *C* & contra. Nam coeat linea *BD* cum linea *AC* manente positione trium *AB*, *CD*, *AC*; dein coeat etiam linea *PT* cum linea *PS*: & rectangulum *PS* × *PT* evadet *PS quad.* rectæq; *AB*, *CD* quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangent.

Scholium.

Nomen Conicæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem Coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. Nam si punctum *p* incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* junguntur, Conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitq; rectangulum sub duabus ductis *PS* × *PR* æquale rectangulo sub duabus aliis *PS* × *PT*, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis & rectangulum sub duabus ductis *PQ* × *PR* sit ad rectangulum sub aliis duabus *PS* × *PT* ut rectangulum sub sinubus angulorum *S*, *T*, in quibus duæ ultimæ *PS*, *PT* ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum *Q*, *R*, in quibus duæ primæ *PQ*, *PR* ducuntur. Cæteris in casibus Locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii *ABCD* substitui potest quadrilaterum cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & e punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* possunt unum vel duo abire in infinitum, eoq; pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

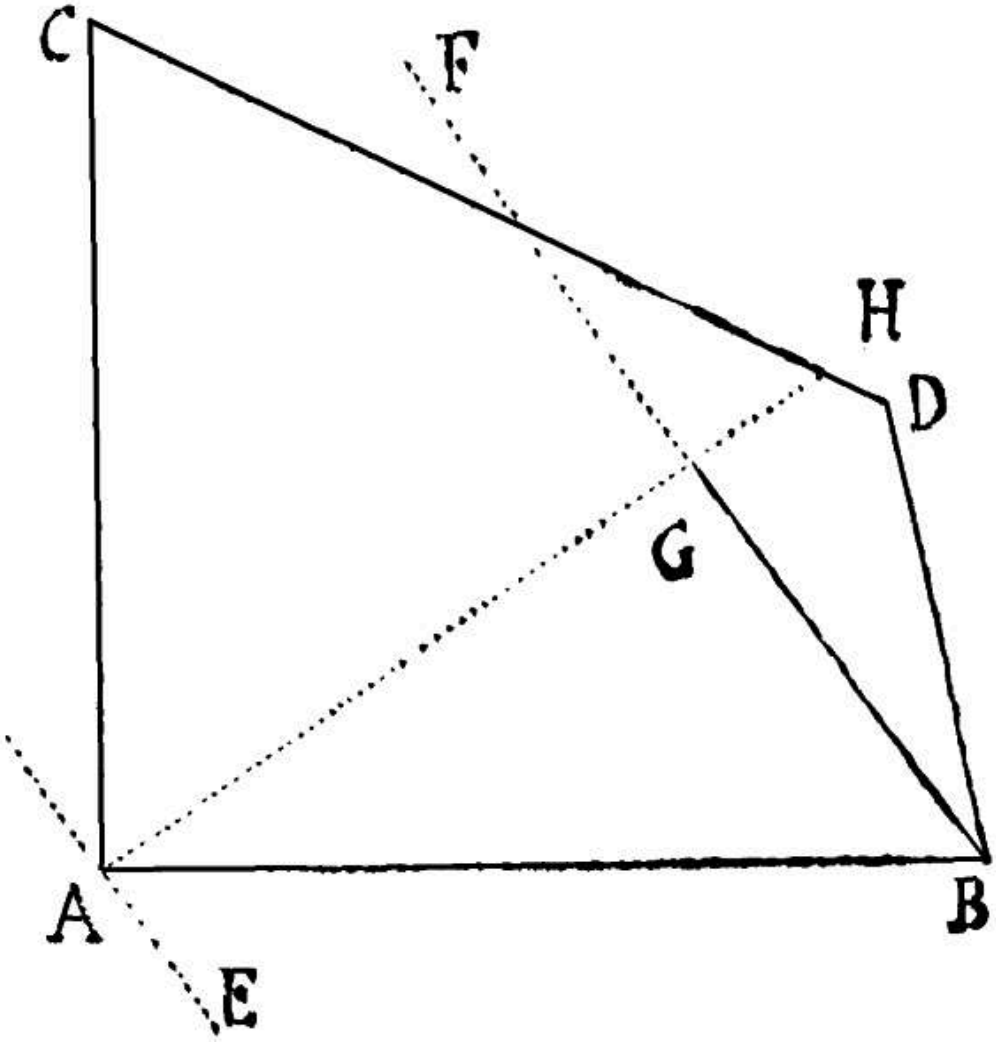
Lemma XIX.



Invenire punctum P*, a quo si rectæ quatuor* PQ*,* PR*,* PS*,* PT *ad alias totidem positione datas rectas* AB*,* CD*,* AC*,* BD *singulæ ad singulas in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,* PQ × PR*, sit ad rectangulum sub aliis duabus,* PS × PT*, in data ratione.*

Lineæ *AB, CD*, ad quas rectæ duæ *PQ*, *PR*, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis *A*, *B*, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in qua velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppositas *BD*, *CD*, nimirum *BD* in *H* & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* ad *PS*, adeoq; ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc a data ratione *PQ* × *PR* ad *PS* × *PT*, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *PR*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH* atq; adeo punctum *P*. *Q*. *E*. *I*.

Corol. 1. Hinc etiam ad Loci punctorum infinitorum *P* punctum quodvis *D* tangens duci potest. Nam chorda *PD* ubi puncta *P* ac *D* conveniunt, hoc est, ubi *AH* ducitur per punctum *D*, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium *IP* & *PH* invenietur ut supra. Ipsi igitur *AD* duc parallelam *CF*, occurrentem *BD* in *F*, & in ea ultima ratione sectam in *E*, & *DE* tangens erit, propterea quod *CF* & evanescens *IH* parallelæ sunt, & in *E* & *P* similiter sectæ.



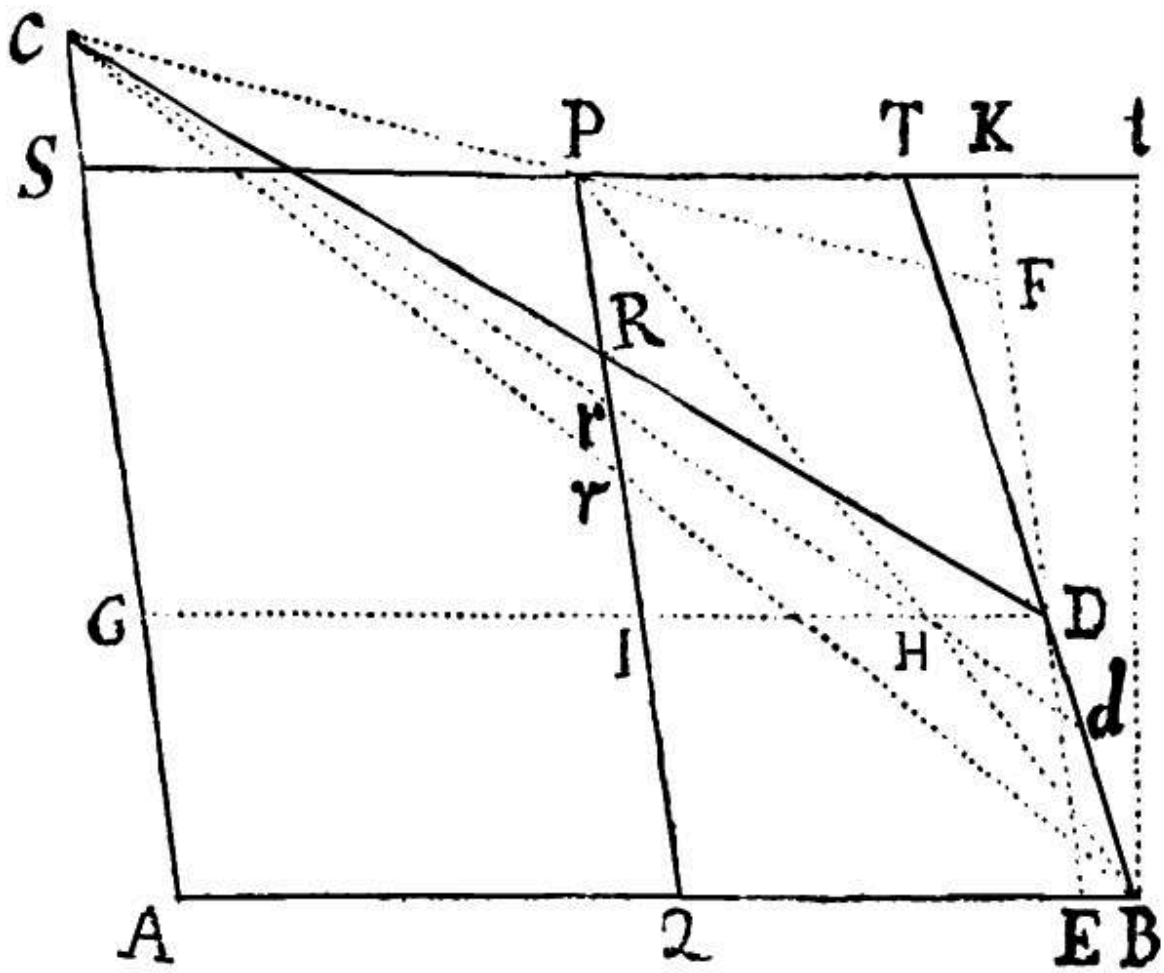
Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium *P* definiri potest. Per quodvis punctorum *A*, *B*, *C*, *D*, puta *A*, duc Loci tangentem *AE*, & per aliud quodvis punctum *B* duc tangenti parallelam *BF* occurrentem Loco in *F*. Invenietur autem punctum *F* per Lemma superius. Biseca *BF* in *G*, & acta *AG* diameter erit ad quam *BG* & *FG* ordinatim applicantur. Hæc *AG* occurrat Loco in *H*, & erit *AH* latus transversum, ad quod latus rectum est ut

BGq. ad *AGH*. Si *AG* nullibi occurrit Loco, linea *AH* existente infinita, Locus erit Parabola & latus rectum ejus *BGq. ÷ AG*. Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit ubi puncta *A* & *H* sita sunt ad easdem partes ipsius *G*: & Ellipsis, ubi *G* intermedium est, nisi forte angulus *AGB* rectus sit & insuper *BG quad.* æquale rectangulo *AGH*, quo in casu circulus habebitur.

Atq; ita Problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incæpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

Lemma XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppositis* A *&* P *tangit sectionem quamvis Conicam in punctis* A *&* P*, & lateribus unius angulorum illorum infinite productis* AQ*,* AS *occurrit eidem sectioni Conicæ in* B *&* C*; a punctis autem occursuum* B *&* C *ad quintum quodvis sectionis Conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD*,* CD *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* PS*,* PQ *in* T *&* R*: erunt semper abscissæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor* A*,* B*,* P*,* C *transeuntem.*



Cas. 1. Jungantur *BP*, *CP* & a puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipsi *AB* parallela sit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela sit ipsi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per Lemma XVII.) rectangulum *DE* × *DF* ad rectangulum *DG* × *DH* in ratione data. Sed est *PQ* ad *DE* seu *IQ*, ut *PB* ad *HB*, adeoq; ut *PT* ad *DH*; & vicissim *PQ* ad *PT* ut *DE* ad *DH*. Est & *PR* ad *DF* ut *RC* ad *DC*, adeoq; ut *IG* vel *PS* ad *DG*, & vicissim *PR* ad *PS* ut *DF* ad *DG*; & conjunctis rationibus fit rectangulum *PQ* × *PR* ad rectangulum *PS* × *PT* ut rectangulum *DE* × *DF* ad rectangulum *DG* × *DH*, atq; adeo in data ratione. Sed dantur *PQ* & *PS* & propterea ratio *PR* ad *PT* datur. *Q. E. D.*

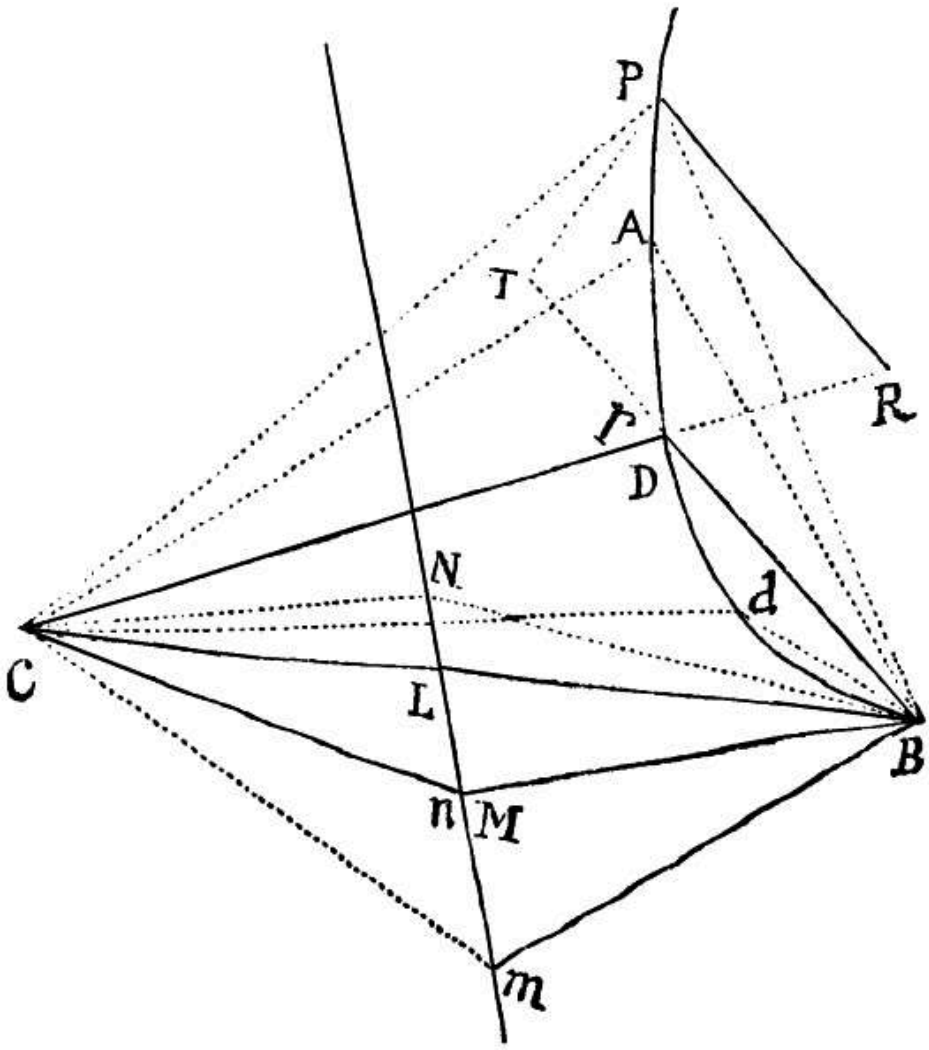
Cas. 2. Quod si *PR* & *PT* ponantur in data ratione ad invicem, tunc simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum *DE* × *DF* ad rectangulum *DG* × *DH* in ratione data, adeoq; punctum *D* (per Lemma XVIII.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta *A*, *B*, *P*, *C*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si agatur *BC* secans *PQ* in *r*, & in *PT* capiatur *Pt* in ratione ad *Pr* quam habet *PT* ad *PR*, erit *Bt* Tangens Conicæ sectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B* ita ut, chorda *BD* evanescente, *BT* Tangens evadet; & *CD* ac *BT* coincident cum *CB* & *Bt*.

Corol. 2. Et vice versa si *Bt* sit Tangens, & ad quodvis Conicæ sectionis punctum *D* conveniant *BD*, *CD* erit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*. Et contra, si sit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*, convenient *BD*, *CD* ad Conicæ sectionis punctum aliquod *D*.

Corol. 3. Conica sectio non secat Conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ Conicæ sectiones per quinq; puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *P*, easq; secet recta *BD* in punctis *D*, *d*, & ipsam *PQ* secet recta *Cd* in r. Ergo *PR* est ad *PT* ut *P*r ad *PT*, hoc est, *PR* & *P*r sibi invicem æquantur, contra Hypothesin.

Lemma XXI.



Si recta duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C, *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN*; & aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C, *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur; dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem Conicam. Et vice versa, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant Sectionem Conicam per puncta* B, C, A *transeuntem, & harum concursus tunc incidit in ejus punctum aliquod* A, *cum alteræ duæ* BM, CM *coincidunt cum linea* BC, *punctum* M *continget rectam positione datam.*

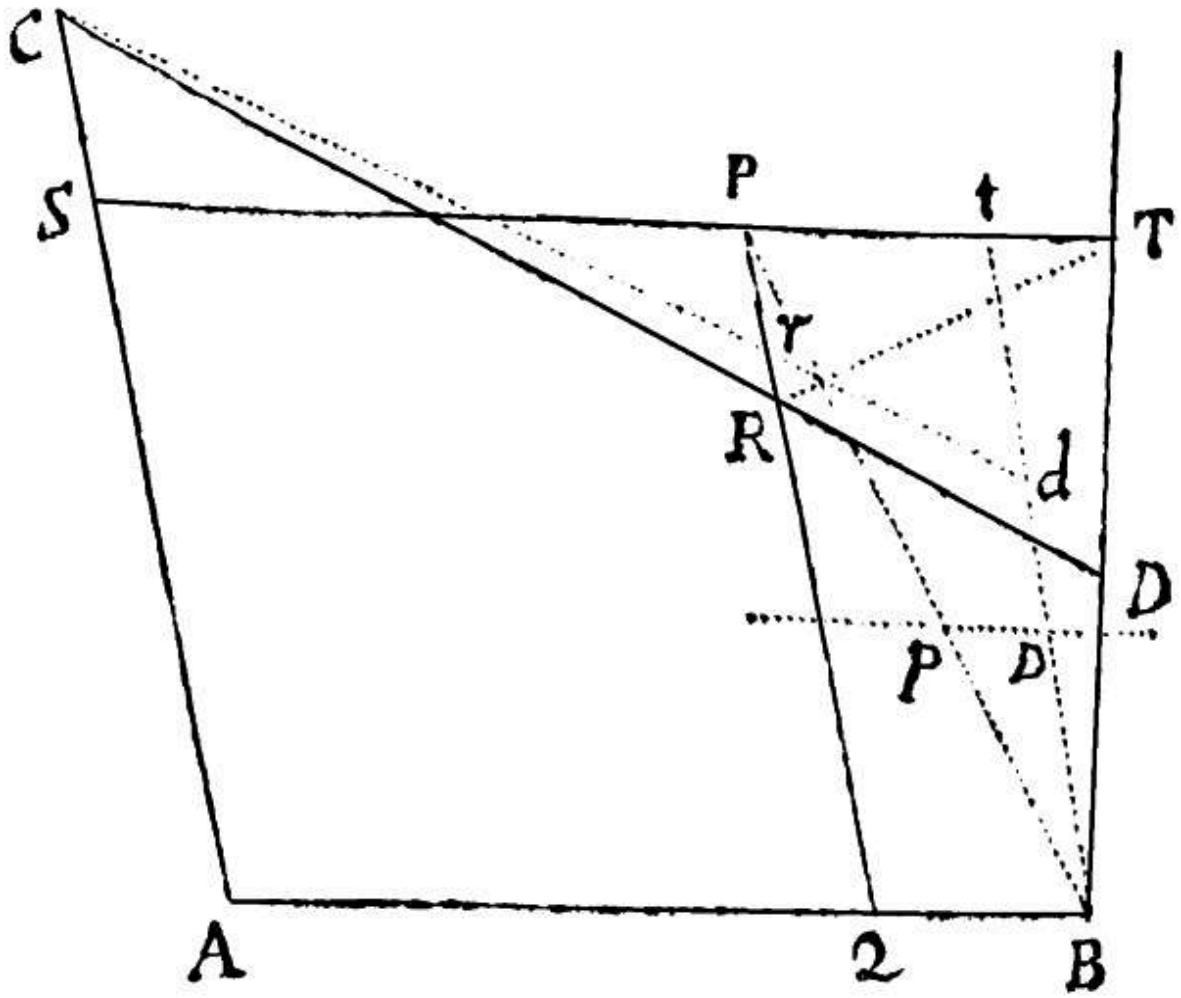
Nam in recta *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*, incidat punctum mobile *D* in immotum *P*. Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipsis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes angulum *BPT* æqualem angulo *BNM* & angulum *CPR* æqualem

angulo *CNM*. Cum ergo (ex Hypothesi) æquales sint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*: aufer communes *NBD* & *MCP*, & restabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCM* & *PCR*: adeoq; triangula *NBM*, *PBT* similia sunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* est ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeq; datam rationem inter se, atq; adeo, per Lemma XX, punctum *P* (perpetuus rectarum mobilum *BT* & *CR* concursus) contingit sectionem Conicam. *Q. E. D.*

Et contra, si punctum *D* contingit sectionem Conicam transeuntem per puncta *B*, *C*, *A*, & ubi rectæ *BM*, *CM* coincidunt cum recta *BC*, punctum illud *D* incidit in aliquod sectionis punctum *A*; ubi vero punctum *D* incidit successive in alia duo quævis sectionis puncta *p*, *P*, punctum mobile *M* incidit successive in puncta immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N* agatur recta *nN*, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, si fieri potest, versetur punctum *M* in linea aliqua curva. Tanget ergo punctum *D* sectionem Conicam per puncta quinq; *C*, *p*, *P*, *B*, *A*, transeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum *D* sectionem Conicam per eadem quinq; puncta *C*, *p*, *P*, *B*, *A*, transeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones Conicæ transibunt per eadem quinq; puncta, contra Corol. 3. Lem. XX. Igitur punctum *M* versari in linea curva absurdum est. *Q. E. D.*

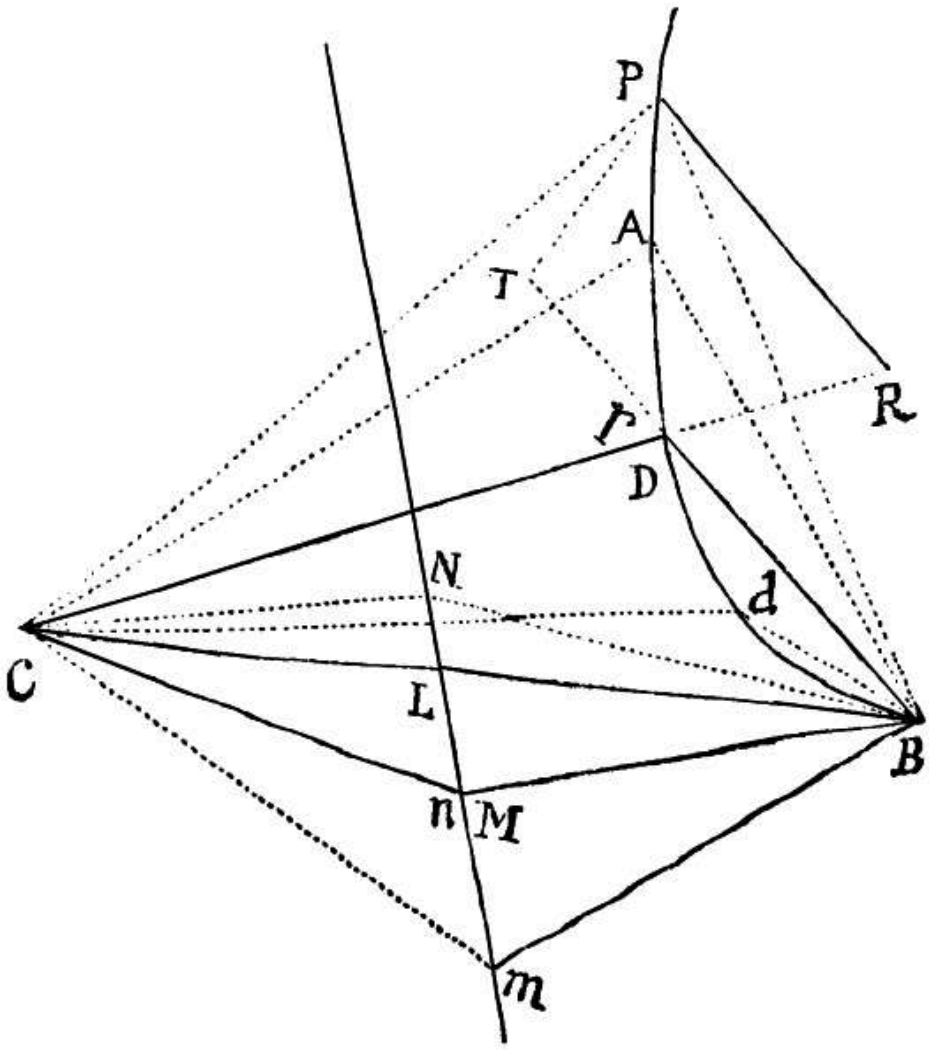
Prop. XXII. Prob. XIV.

Trajectoriam per data quinq; puncta describere.



Dentur puncta quinq; *A*, *B*, *C*, *D*, *P*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, *C*, quæ poli nominentur, age rectas *AB*, *AC* hisq; parallelas *TPS*, *PRQ* per punctum quartum *P*. Deinde a polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum *D* infinitas duas *BDT*, *CRD*, novissime ductis *TPS*, *PRQ* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in *T* & *R*. Deniq; de rectis *PT*, *PR*, acta recta *tr* ipsi *TR* parallela, abscinde quasvis *Pt*, *Pr* ipsis *PT*, *PR* proportionales, & si per earum terminos *t*, *r* & polos *B*, *C* actæ *Bt*, *Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in Trajectoria quæsita. Nam punctum illud *d* (per Lem. XX) versatur in Conica Sectione per puncta quatuor *A*, *B*, *P*, *C* transeunte; & lineis *Rr*, *Tt* evanescentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Transit ergo sectio Conica per puncta quinq; *A*, *B*, *C*, *D*, *P*. *Q. E. D.*

Idem aliter.



E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*, & circum duo eorum *B*, *C* ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primo ad punctum *D* deinde ad punctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *BL*, *CL* casu utroq; se decussant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos *B*, *C*, ea lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* intersectio, quæ jam sit *m*, incidat semper in rectam illam infinitam *MN*, & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD* intersectio, quæ jam sit *d*, Trajectoriam quæsitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d* per Lem. XXI continget sectionem Conicam per puncta *B*, *C* transeuntem & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per constructionem) accedet ad puncta *A*, *D*, *P*. Describetur itaq; sectio Conica transiens per puncta quinq; *A*, *B*, *C*, *D*, *P*. *Q. E. F.*

Corol. 1. Hinc rectæ expedite duci possunt quæ trajectoriam in punctis quibusvis datis *B*, *C* tangent. In casu utrovis accedat punctum *d* ad punctum *C* & recta *Cd* evadet tangens quæsita.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri possunt, ut in Corollario secundo Lemmatis XIX.

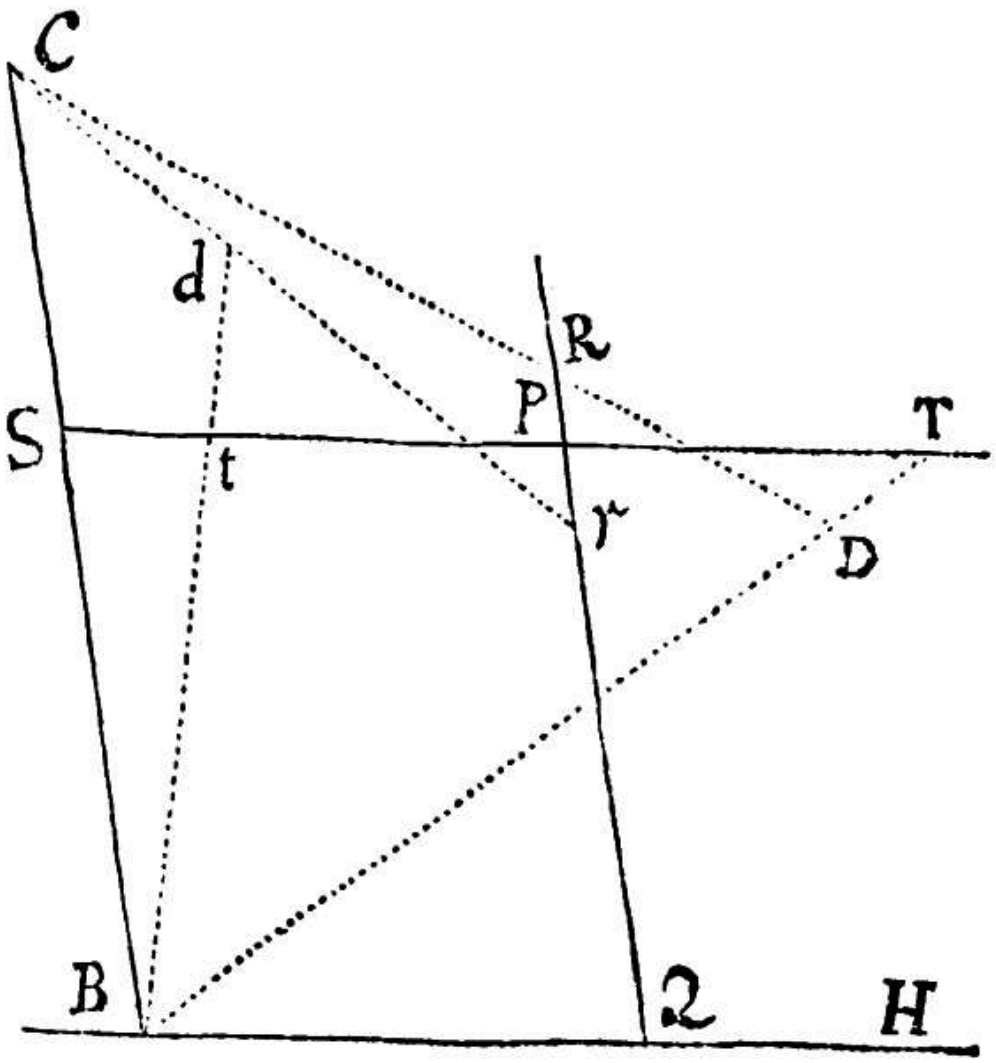
Schol.

Constructio in casu priore evadet paulo simplicior jungendo *BP*, & in ea si opus est producta, capiendo *Bp* ad *BP* ut est *PR* ad *PT*, & per *p* agendo rectam infinitam *pD* ipsi *SPT* parallelam, inq; ea capiendo semper *pD* æqualem *Pr*, & agendo rectas *BD*, *Cr* concurrentes in *d*. Nam cum sint *Pr* ad *Pt*, *PR* ad *PT*, *pB* ad *PB*, *pD* ad *Pt* in eadem ratione, erunt *pD* & *Pr* semper æquales. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditissime, nisi mavis Curvam, ut in casu secundo, describere Mechanice.

Prop. XXIII. Prob. XV.

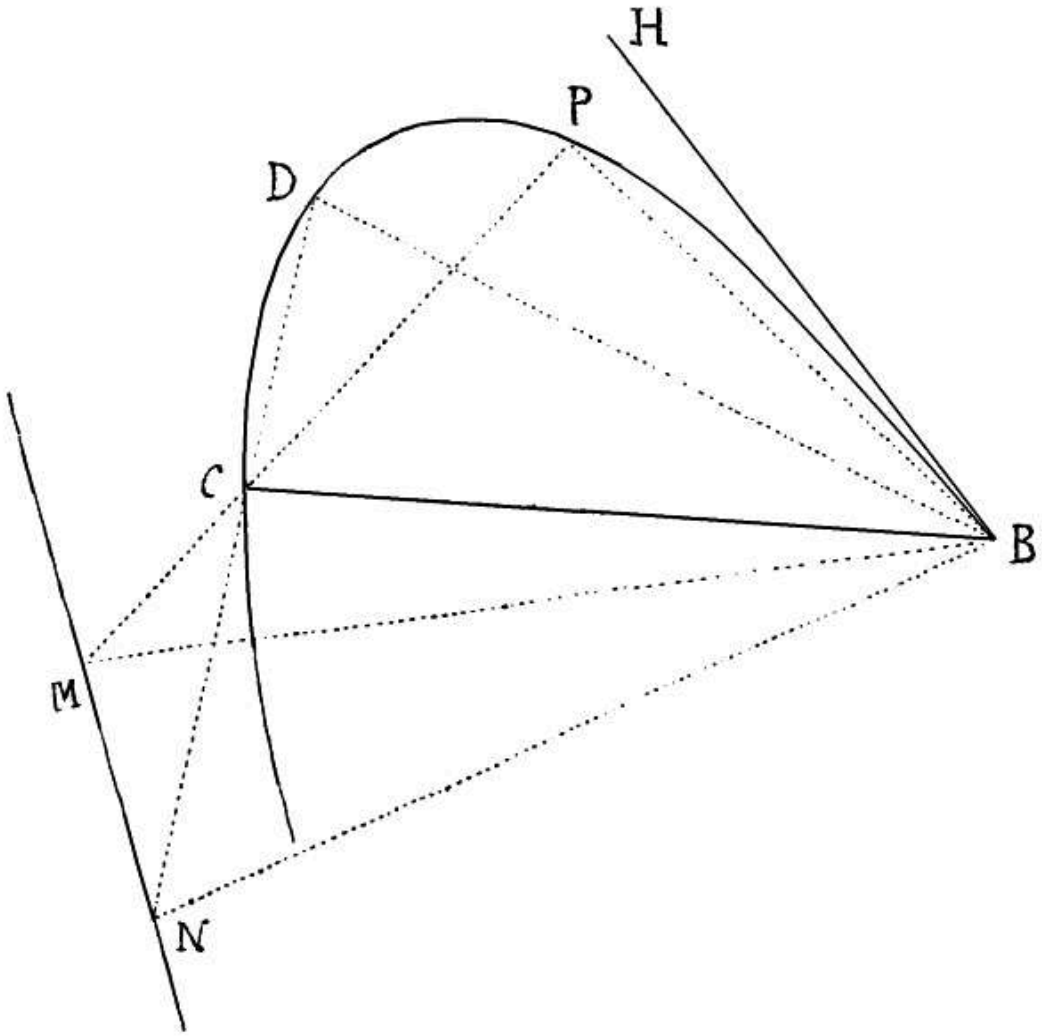
Trajectoriam describere quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

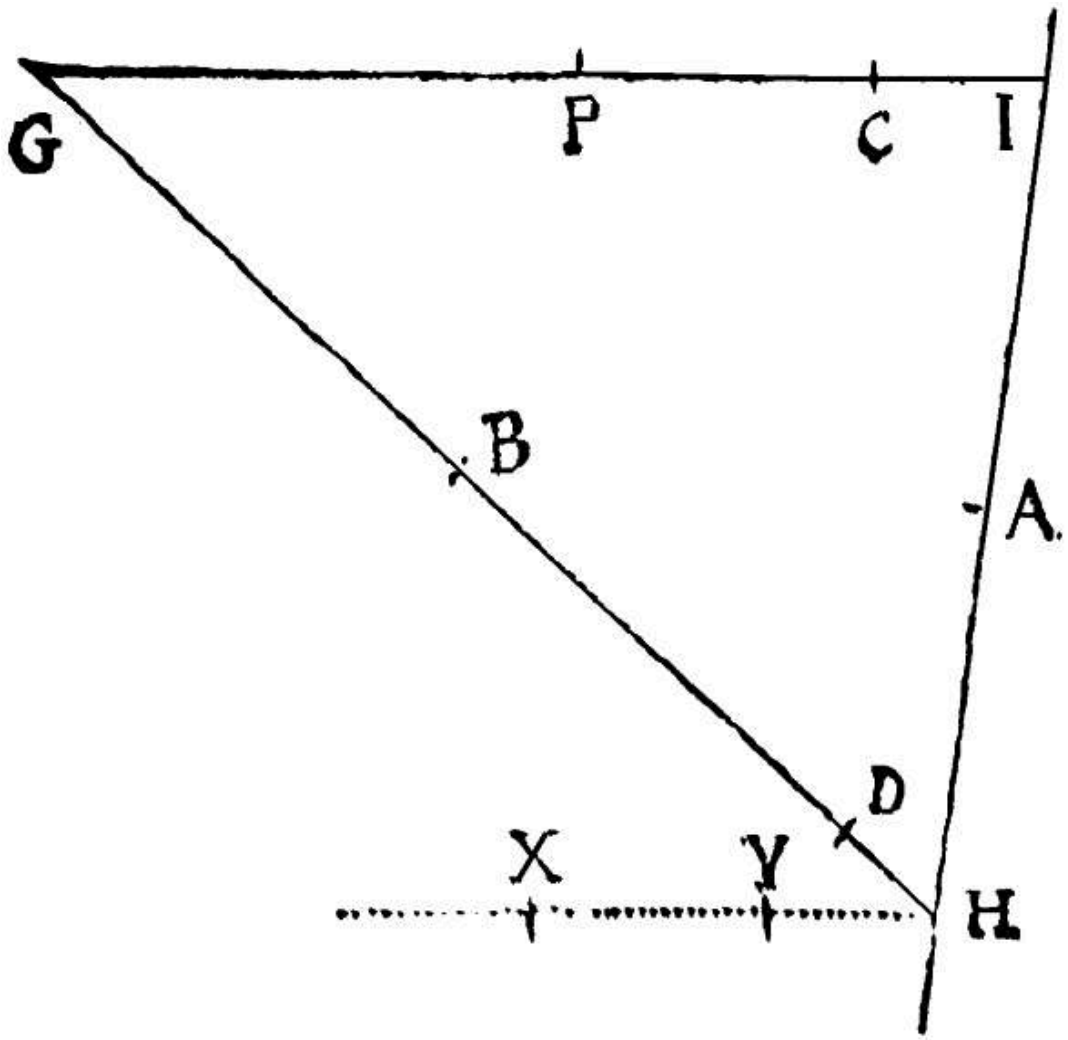
Cas. 1. Dentur tangens *HB*, punctum contactus *B*, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *BC*, & agendo *PS* parallelam *BH*, & *PQ* parallelam *BC*, comple parallelogrammum *BSPQ*. Age *BD* secantem *SP* in *T*, & *CD* secantem *PQ* in *R*. Deniq; agendo quamvis *tr* ipsi *TR* parallelam, de *PQ*, *PS* abscinde *Pr*, *Pt* ipsis *PR*, *PT* proportionales respective; & actarum *Cr*, *Bt* concursus *d* (per Corol. 2. Lem. XX) incidet semper in Trajectoriam describendam.



Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus *CBH* circa polum *B*, tum radius quilibet rectilineus & utrinq; productus *DC* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N* in quibus anguli crus *BC* secat radium illum ubi crus alterum *BH* concurrit cum eodem radio in punctis *D* & *P*. Deinde ad actam infinitam *MN* concurrant perpetuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *CB*, & cruris alterius *BH* concursus cum radio delineabit Trajectoriam quæsitam.


H
P
D
C
B
M
N



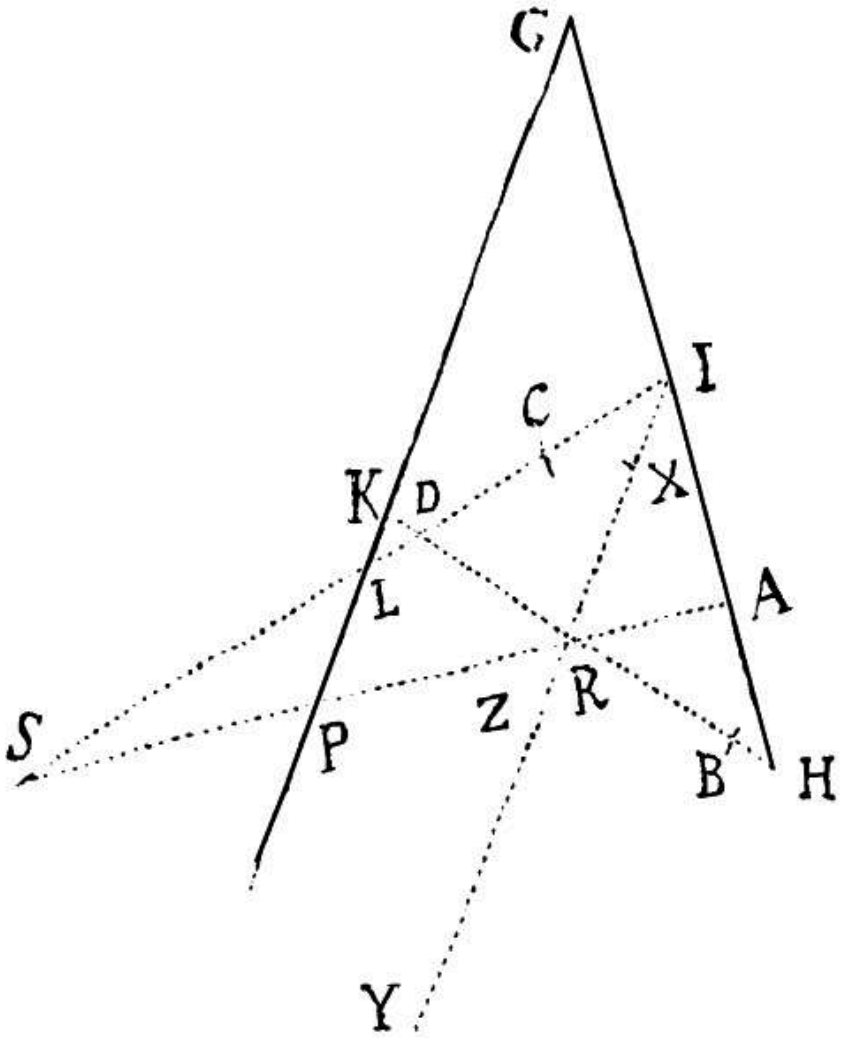
Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo suo situ fiet tangens *BH*, atq; adeo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris *BH* concursus cum radio sectionem Conicam per puncta *C*, *D*, *P* transeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto *B*. *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, *P* extra tangentem *HI* sita. Junge bina *BD*, *CP* concurrentia in *G*, tangentiq; occurrentia in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut sit *HA* ad *AI*, ut est rectangulum sub media proportionali inter *BH* & *HD* & media proportionali inter *CG* & *GP*, ad rectangulum sub media proportionali inter *PI* & *IC* & media proportionali inter *DG* & *GB*, & erit *A* punctum contactus. Nam si rectæ *PI* parallela *HX* trajectoriam secet in punctis quibusvis *X* & *Y*: erit (ex Conicis) *HA quad.* ad *AI quad.* ut

rectangulum *XHY* ad rectangulum *BHD* (seu rectangulum *CGP* ad rectangulum *DGB*) & rectangulum *BHD* ad rectangulum *PIC* conjunctim. Invento autem contactus puncto *A*, describetur Trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.* Capi autem potest punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter describi.

Prop. XXIV. Prob. XVI.

Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.

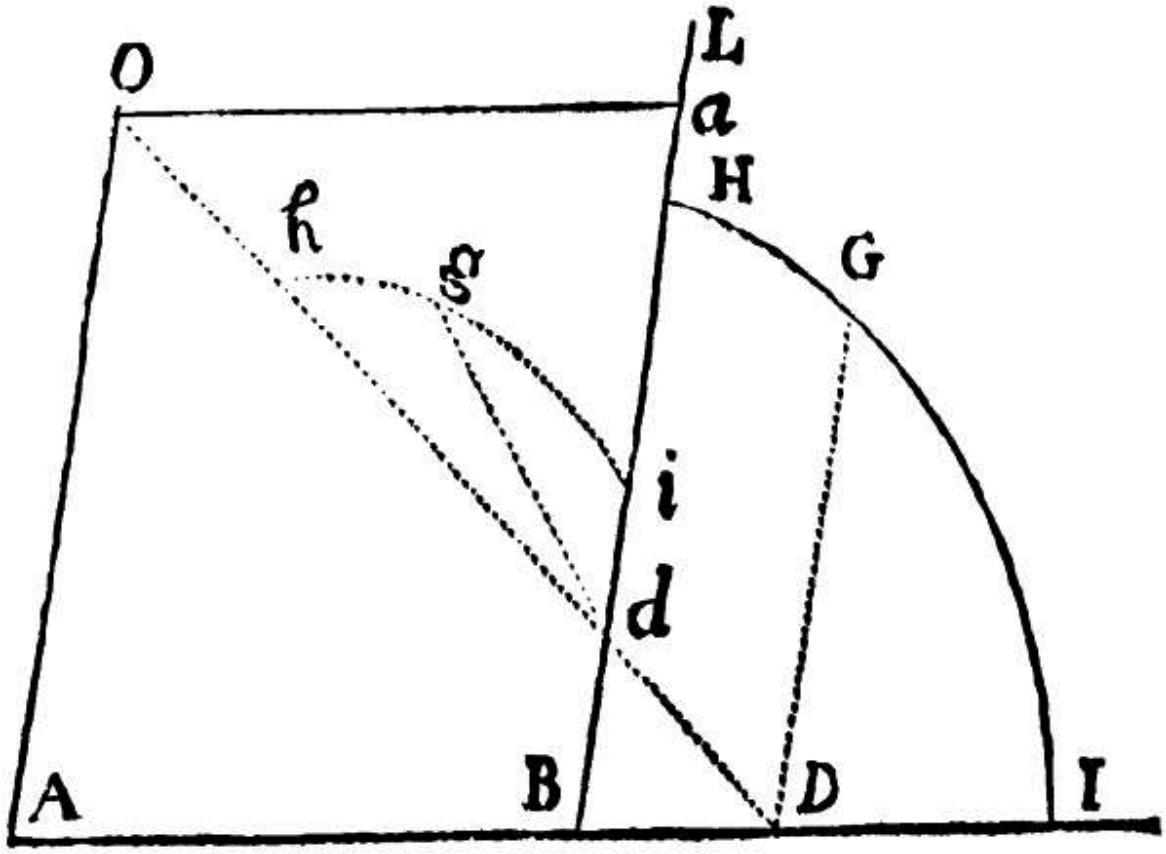


Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Age *BD* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K* & *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & *S*, ut sit *HR* ad *KR* ut est media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut est media

proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* & *LD*. Age *RS* secantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactus. Nam si *A* & *P* sint Puncta contactuum ubivis in tangentibus sita, & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I* agatur recta *IY* tangenti *KL* parallela & occurrens curvæ in *X* & *Y*, & in ea sumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*: erit, ex Conicis, rectangulum *XIY* (seu *IZ quad.*) ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*; id est (per constructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad.* atq; adeo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex Conicis) rectangulum *XIY* (seu *IZ quad.*) ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad.*, adeoq; *IZ* ad *IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P*, *Z* & *A* in una recta, adeoq; puncta *S*, *P* & *A* sunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactus *A* & *P* in recta *SR*. Hisce autem inventis, Trajectoria describetur ut in casu primo Problematis superioris. *Q. E. F.*

Lemma XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.



Transmutanda sit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis positione datam *AB* secantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur *GD*, ipsi *OA* parallela. Deinde a puncto aliquo *O* in linea *OA* dato ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipsi *BL* occurrens in *d*; & a puncto occursus erigatur recta *gd*, datum quemvis angulum cum recta *BL* continens, atq; eam habens rationem ad *Od* quam habet *GD* ad *OD*; & erit *g* punctum in figura nova *hgi* puncto *G* respondens. Eadem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratia nominemus *DG* ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; *BD* abscissam primam, *Bd* abscissam novam; *O* polum, *OD* radium abscindentem, *OA* radium ordinatum primum & *Oa* (quo parallelogrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod si punctum *G* tangit rectam lineam positione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam positione datam. Si punctum *G* tangit

Conicam sectionem, punctum *g* tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum annumero. Porro si punctum *G* tangit lineam tertii ordinis Analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum: Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis Analytici quas puncta *G*, *g* tangunt. Etenim ut est *ad* ad *OA* ita sunt *Od* ad *OD*, *dg* ad *DG*, & *AB* ad *AD*; adeoq; *AD* æqualis est $OA \times AB \div ad$ & *DG* æqualis est $OA \times dg \div ad$. Jam si punctum *D* tangit rectam lineam, atq; adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam *AD* & ordinatam *DG* habetur, indeterminatæ illæ *AD* & *DG* ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $OA \times AB \div ad$ pro *AD*, & $OA \times dg \div ad$ pro *DG*, producetur æquatio nova, in qua abscissa nova *ad* & ordinata noua *dg* ad unicam tantum dimensionem ascendent, atq; adeo quæ designat lineam rectam. Sin *AD* & *DG* (vel earum alterutra) ascendebant ad duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem *ad* & *dg* ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ *ad*, *dg* in æquatione secunda & *AD*, *DG* in prima ascendent semper ad eundem dimensionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta *G*, *g* tangunt, sunt ejusdem ordinis Analytici.

Dico præterea quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta translata tanget lineam curvam in figura nova: & contra. Nam si Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata coibunt in figura nova, atq; adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur simul, evadent curvarum tangentes in figura utraq;. Componi possent harum assertionum Demonstrationes more magis Geometrico. Sed brevitati consulo.

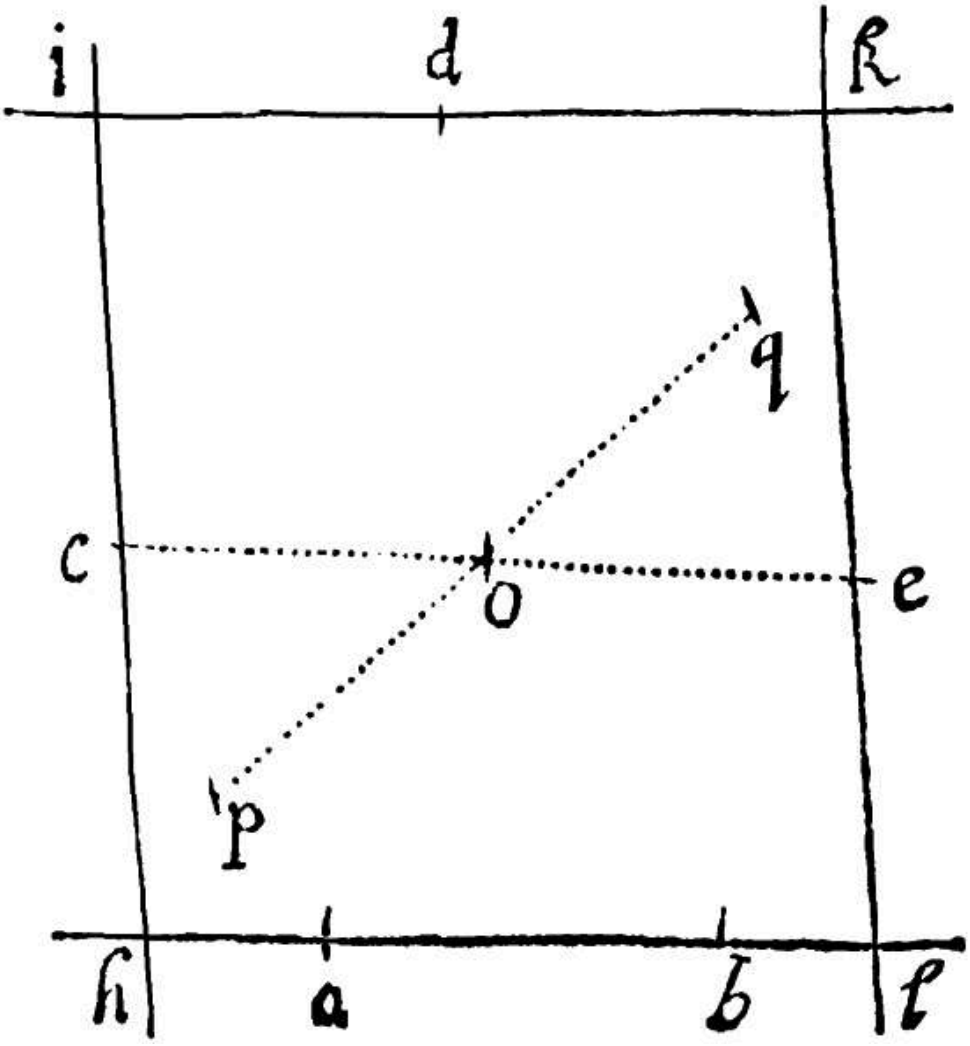
Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope Curva linea definitur. Inservit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo *AO* lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; id adeo quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ sunt quæ ad punctum infinite distans tendunt. Postquam autem Problema solvitur in figura nova, si per inversas

operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur Solutio quæsita.

Utile est etiam hoc Lemma in solutione Solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmutare licet unum earum in circulum. Recta item & sectio Conica in constructione planorum problematum vertuntur in rectam & circulum.

Prop. XXV. Prob. XVII.

Trajectoriam describere quæ per data duo puncta transibit & rectas tres continget positione datas.



Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit,

age rectam infinitam; eaq; adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per Lemma superius, in figuram novam. In hac figura tangentes illæ duæ evadent parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo transeunti. Sunto *hi*, *kl* tangentes duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela transiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ Conica sectio in hac figura nova transire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d* & *e*, ita ut sit *hc* ad latus quadratum rectanguli *ahb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd* ut est summa rectarum *hi* & *kl* ad summam trium linearum quarum prima est recta *ik*, & alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum *ahb* & *alb*: Et erunt *c*, *d*, *e* puncta contactus. Etenim, ex Conicis, sunt *hc* quadratum ad rectangulum *ahb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad *alb* rectangulum in eadem ratione, & propterea *hc* ad latus quadratum ipsius *ahb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd* & *el* ad latus quadratum ipsius *alb* sunt in dimidiata illa ratione, & composite, in data ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli *ahb* & recta *ik* & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactus *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inversas operationes Lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per casum primum Problematis XIV, describetur Trajectoria. *Q. E. F.* Cæterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, Problema impossibile est.

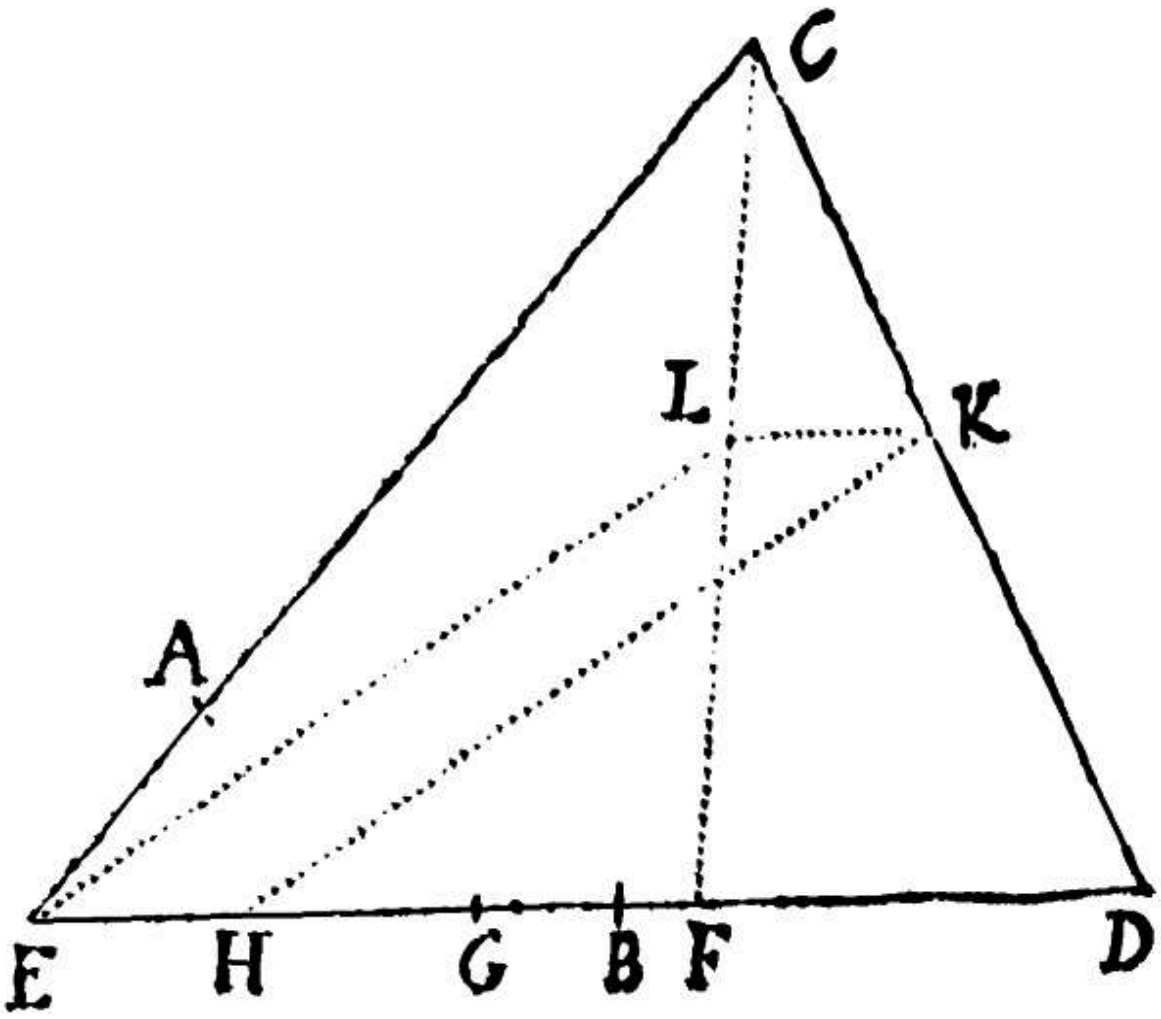
Prop. XXVI. Prob. XVIII.

Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per Lem. XXII) in figuram novam, & Tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitq; *p* punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum *O* agatur *pq*, & existente *Oq* æquali *Op* erit *q* punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura

nova transire debet. Per Lemmatis XXII operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. XVII. *Q. E. F.*

Lemma XXIII.



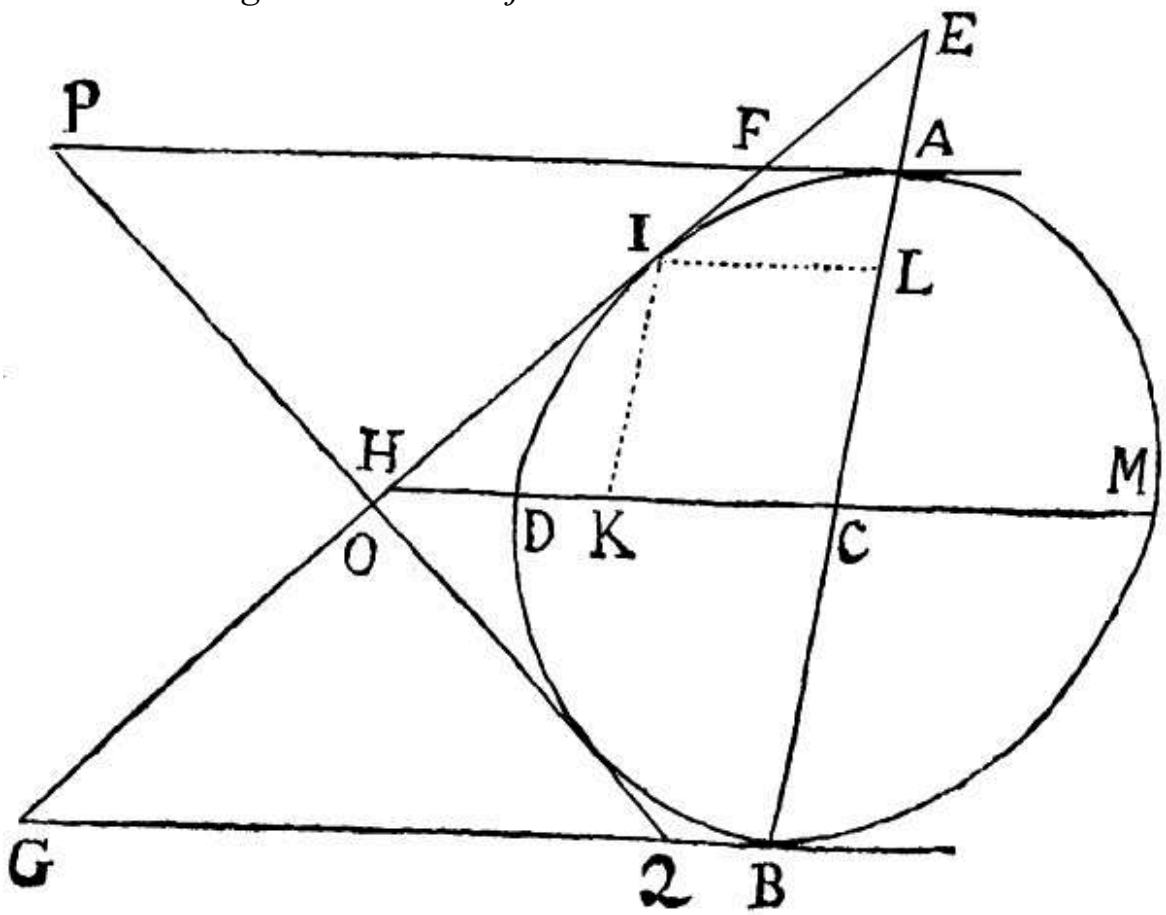
Si rectæ duæ positione datæ AC*,* BD *ad data puncta* A*,* B *terminentur, datamq; habeant rationem ad invicem, & recta* CD*, qua puncta indeterminata* C*,* D *junguntur secetur in ratione data in* K*: dico quod punctum* K *locabitur in recta positione data.*

Concurrant enim rectæ *AC, BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut est *BD* ad *AC*, sitq; *FD* æqualis *EG*, & erit *EC* ad *GD*, hoc est ad *EF* ut *AC* ad *BD*, adeoq; in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum *EFC*. Secetur *CF* in *L* in ratione *CK* ad *CD*, & dabitur etiam specie triangulum

EFL, proindeq; punctum *L* locabitur in recta *EL* positione data. Junge *LK*, & ob datam *FD* & datam rationem *LK* ad *FD*, dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*, & erit *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi latere positione dato *HK*. *Q. E. D.*

Lemma XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunq; conisectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis semidiameter hisce duabus parallela, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactum & tangenti tertiæ interjecta.



Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ Conisectionem *ADB* tangentes in *A* & *B*; *EF* recta tertia Conisectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; sitq; *CD* semidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod *AF*, *CD*, *BG* sunt continue proportionales.

Nam si diametri conjugatæ *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H*, seq; mutuo secent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; erit ex

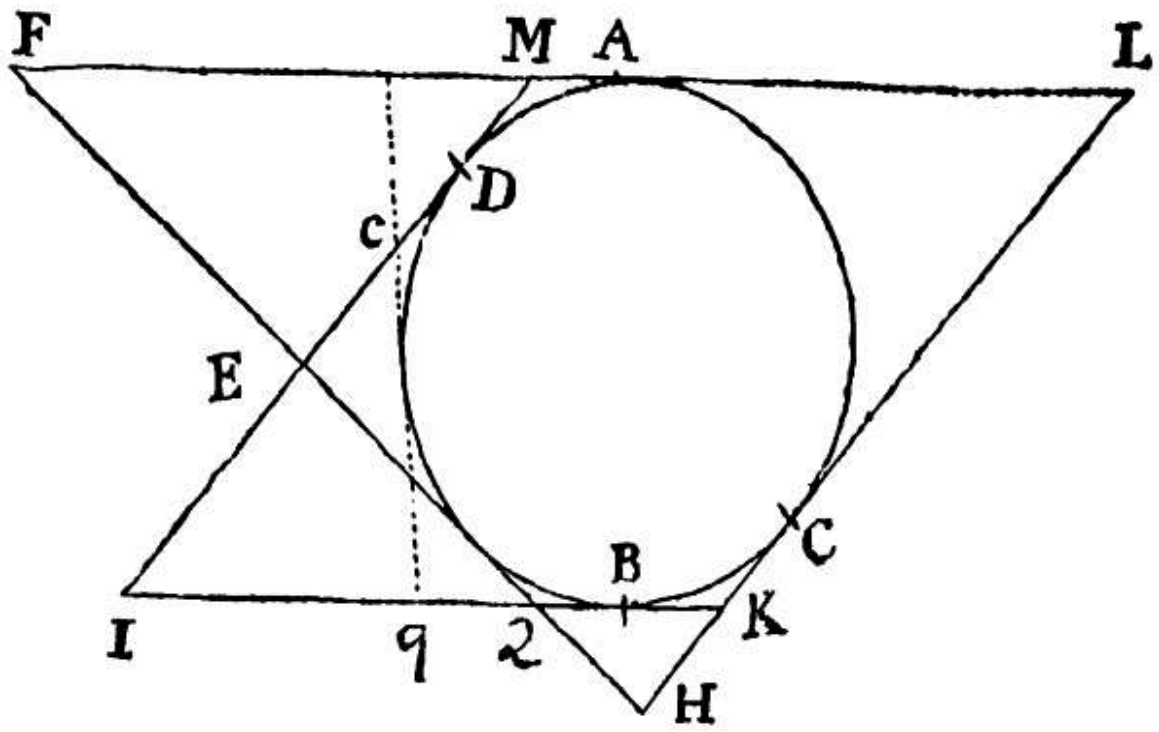
natura sectionum Conicarum, ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *LC*, & ita divisim *EC* - *CA* ad *CA* - *CL* seu *EA* ad *AL*, & composite *EA* ad *EA* + *AL* seu *EL* ut *EC* ad *EC* + *CA* seu *EB*; adeoq; (ob similitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*) *AF* ad *LI* ut *CH* ad *BG*. Est itidem ex natura sectionum Conicarum *LI* seu *CK* ad *CD* ut *CD* ad *CH* atq; adeo ex æquo perturbate *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, seq; mutuo secent in *O*, erit (ex æquo perturbate) *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, & divisim ut *FP* ad *GQ*, atq; adeo ut *FO* ad *OG*.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ* per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum figuræ & puncta contactuum *A*, *B* transeuntem.

Lemma XXV.

Si parallelogrammi latera quattuor infinite producta tangant sectionem quamcunq; Conicam & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem abscisse terminate ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa unius lateris ad latus illud, ut pars lateris contermini inter punctum contactus & latus tertium, ad abscissam lateris hujus contermini.



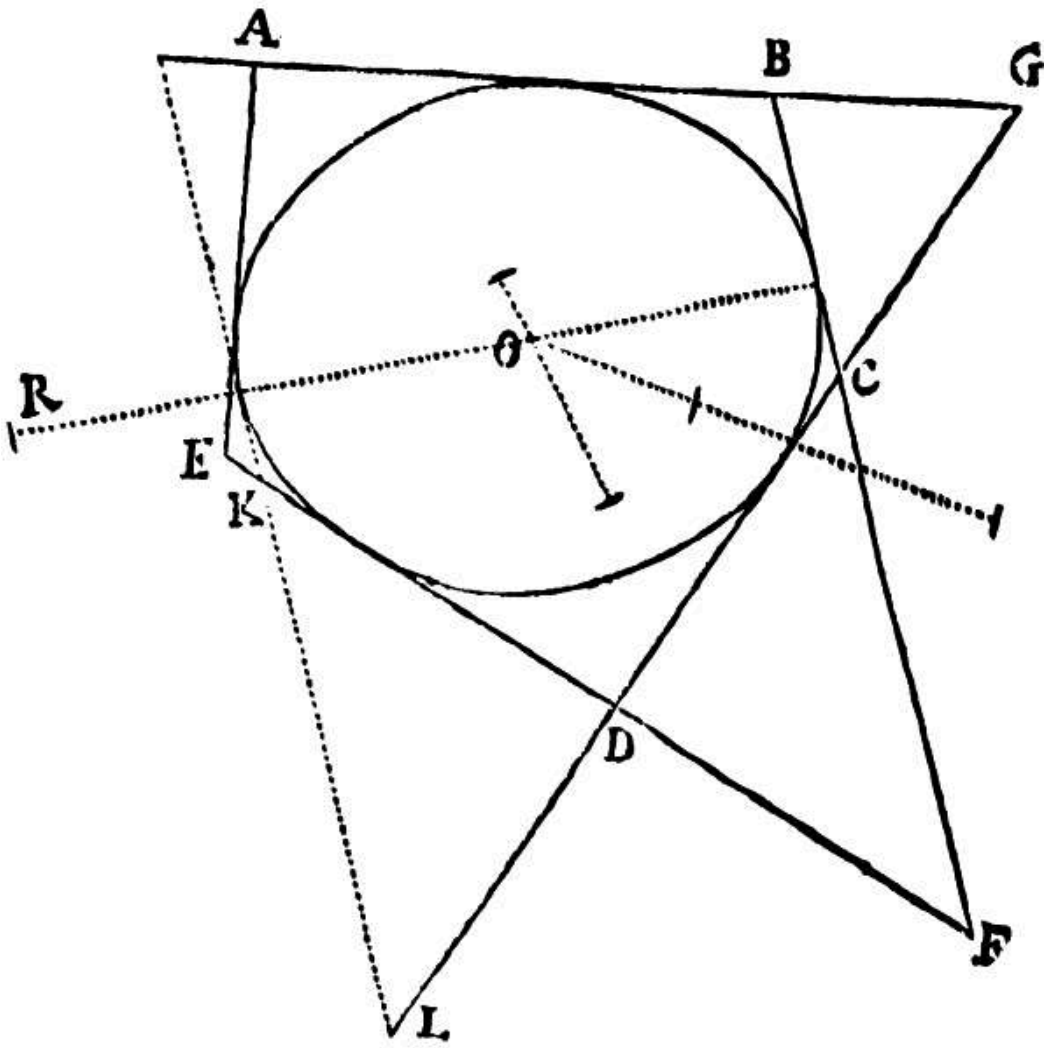
Tangant parallelogrammi *MIKL* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* sectionem Conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & secet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*: dico quod sit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ* & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per Corollarium Lemmatis superioris, est *ME* ad *EI* ut *AM* seu *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. Q. E. D. Item *KH* ad *HL* ut *BK* seu *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si parallelogrammum *IKLM* datur, dabitur rectangulum *KQ* × *ME*, ut & huic æquale rectangulum *KH* × *MF*. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum *KQH*, *MFE*.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens *eq* tangentibus *KI*, *MI* occurrens in *e* & *q*, rectangulum *KQ* × *ME* æquabitur rectangulo *Kq* × *Me*, eritq; *KQ* ad *Me* ut *Kq* ad *ME*, & divisim ut *Qq* ad *Ee*.

Corol. 3. Unde etiam si *Eq*, *eQ* jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit *Qq* ad *Ee* ut *KQ* ad *Me*, transibit eadem recta per medium omnium *Eq*, *eQ*, *MK*; (per Lemma XXIII) & medium rectæ *MK* est centrum Sectionis.

Prop. XXVII. Prob. XIX.



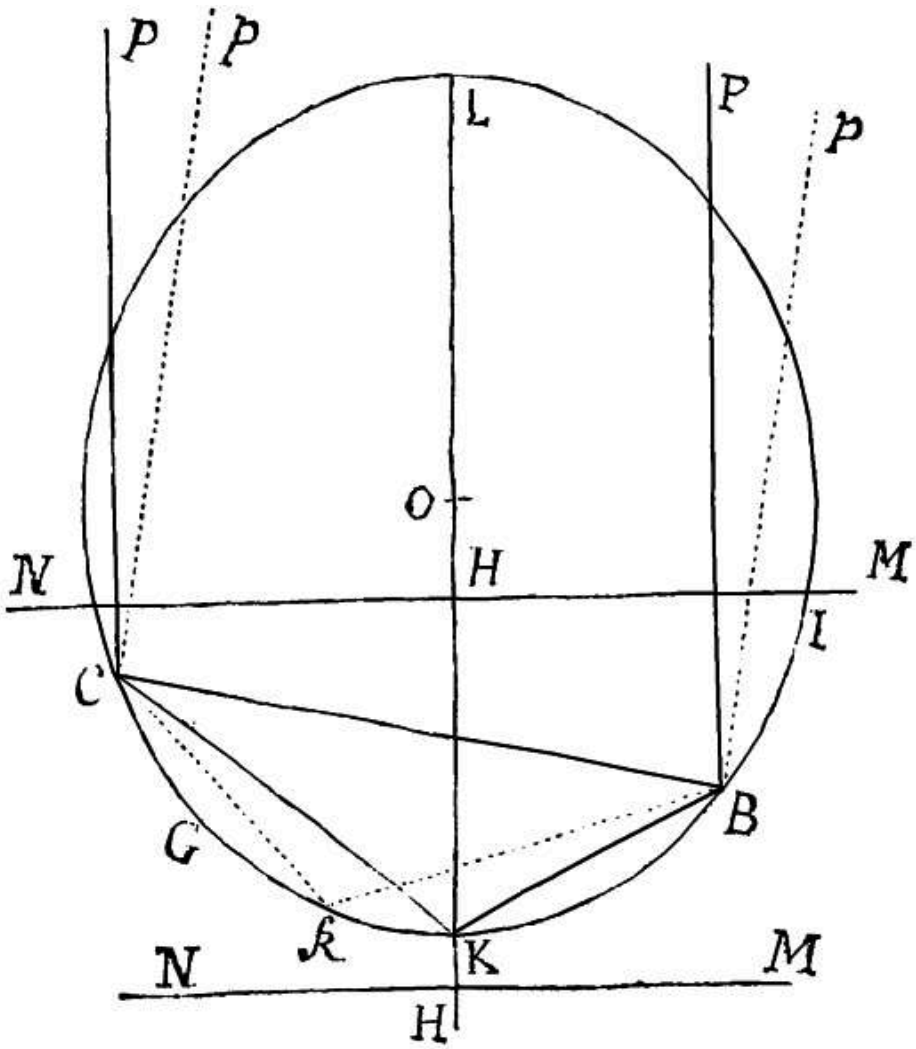
Trajectoriam describere quæ rectas quinq; positione datas continget.

Dentur positione tangentes *ABG*, *BCF*, *GCD*, *FDE*, *EA*. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ *ABFE* diagonales *AF*, *BE* biseca, & (per Cor. 3. Lem. XXV) recta per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ *BGDF*, sub alijs quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *BD*, *GF* biseca, & recta per puncta bisectionum acta transibit per centrum sectionis. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud *O*. Tangenti cuivis *BC* parallelam age *KL*, ad eam distantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur, & acta *KL* tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas *CD*, *FDE* in *L* & *K*. Per tangentium non parallelarum *CL*, *FK* cum parallelis *CF*, *KL* concursus *C* & *K*, *F* & *L* age *CK*, *FL* concurrentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta secabit

tangentes parallelas *CF*, *KL* in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per Casum 1. Prob. XIV. Trajectoriam describere. *Q. E. F.*

Schol.

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Asymptoti includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæq; tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atq; constructiones Problematis XV & Casus primi Problematis XIV vertentur in constructiones Problematum ubi Asymptoti dantur.



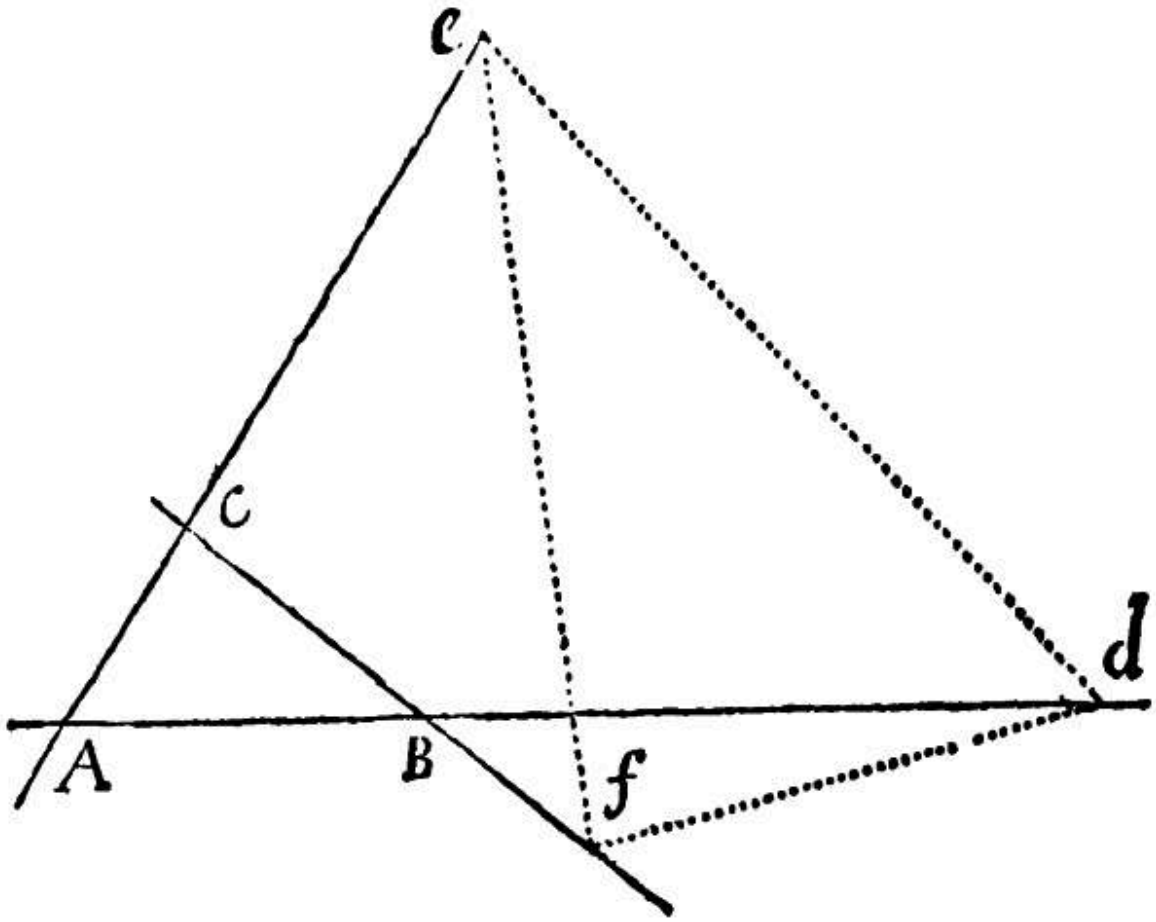
Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In constructione & Figura Lemmatis XXI, fac ut angulorum mobilium *PBN*, *PCN* crura *BP*, *CP* quorum concursu Trajectoria describebatur sint sibi invicem parallela, eumq; servantia situm revolvantur circa polos suos *B*, *C* in figura illa. Interea vero describant altera angulorum illorum crura *CN*, *BN* concursu suo *K* vel *k*, circulum *IBKGC*. Sit circuli hujus centrum *O*. Ab hoc centro ad Regulam *MN*, ad quam altera illa crura *CN*, *BN* interea concurrebant dum Trajectoria describebatur, demitte normalem *OH* circulo occurrentem in *K* & *L*. Et ubi crura illa altera *CK*, *BK* concurrant ad punctum istud *K* quod Regulæ proprius est, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori & perpendicularia minori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius *L*. Unde si detur

Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axium vero quadrata sunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituantur poli *C*, *B*, tertium dabit angulos mobiles *PCK*, *PBK*. Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, centroq; *O* & intervallo *OH* describendo circulum, & per punctum quartum agendo rectam quæ circulum illum tangat, dabitur regula *MN* cujus ope Trajectoria describatur. Unde etiam vicissim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis sectione Conica inscribi potest.

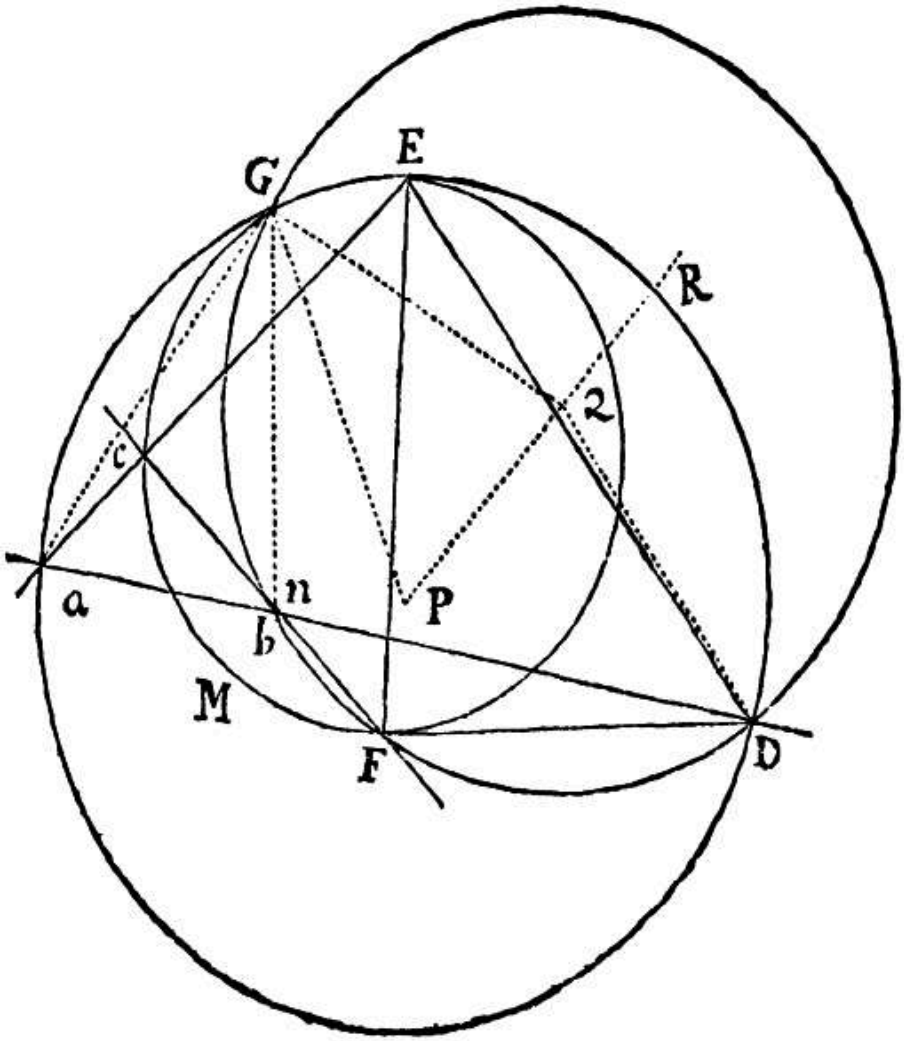
Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam Conisectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam Conisectionem ejusdem speciei cum priore, atq; axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

Lemma XXVI.



Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF* describe tria circulorum segmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales respective. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF* ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant: deinde compleantur hæc



segmenta in circulos. Secent circuli duo priores se mutuo in *G*, sintq; centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* describe circulum, qui secet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* secans circulum secundum *DFG* in *b*, tum *aE* secans circulum tertium *GEc* in *c*. Et compleatur figura *ABCdef* similis & æqualis figuræ *abcDEF*. Dico factum.

Agatur enim *Fc* ipsi *aD* occurrens in *n*. Jungantur *aG*, *bG*, *PD*, *QD* & producatur *PQ* ad *R*. Ex constructione est angulus *EaD* æqualis angulo *CAB*, & angulus *EcF* æqualis angulo *ACB*, adeoq; triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* seu *FnD* angulo *ABC*, adeoq; angulo *FbD* æqualis est, & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, qui dimidius est anguli ad centrum *GPD*, æqualis est angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQR*, qui dimidius est complementi anguli ad centrum *GQD*, æqualis est angulo ad circumferentiam *GbD*,

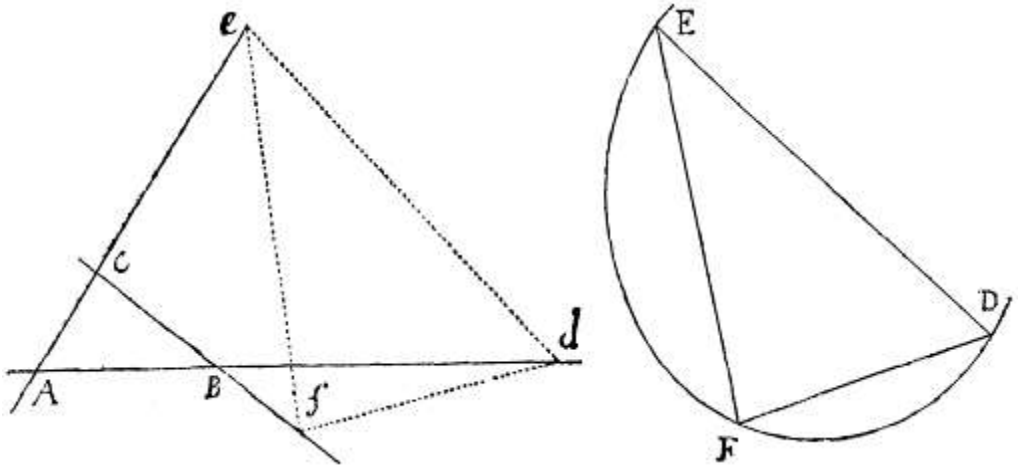
adeoq; eorum complementa *PQG*, *abG* æquantur, suntq; ideo triangula *GPQ*, *Gab* similia, & *Ga* est ad *ab* ut *GP* ad *PQ*; id est (ex constructione) ut *Ga* ad *AB*. Æquantur itaq; *ab* & *AB*, & propterea triangula *abc*, *ABC*, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli *DEF* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc* respective, compleri potest figura *ABCdef* figuræ *abcDEF* similis & æqualis, atq; eam complendo solvetur Problema. *Q. E. F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe Triangulum *DEF*, puncto *D* ad latus *EF* accedente, & lateribus *DE*, *DF* in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *DE*, rectis positione datis *AB*, *AC*, & pars data *DF* rectis positione datis *AB*, *BC* interponi debet; & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur Problema.

Prop. XXVIII. Prob. XX.

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

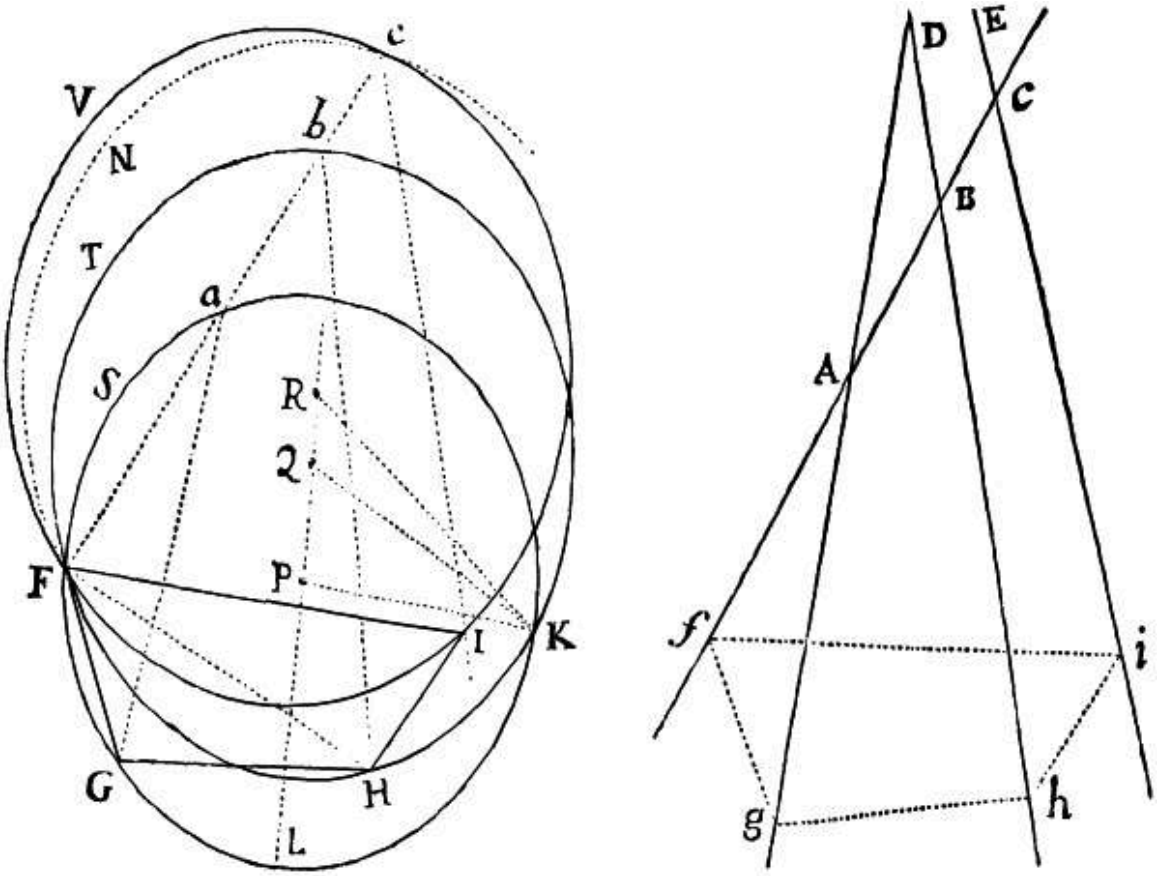
Describenda sit Trajectoria quæ sit similis & æqualis lineæ curvæ *DEF*, quæq; a rectis tribus *AB*, *AC*, *BC* positione datis, in partes datis hujus partibus *DE* & *EF* similes & æquales secabitur.



Age rectas *DE*, *EF*, *DF*, & trianguli hujus *DEF* pone angulos *D*, *E*, *F* ad rectas illas positione datas: (per Lem. XXVI) Dein circa triangulum describe Trajectoriam curvæ *DEF* similem & æqualem. *Q. E. F.*

Lemma XXVII.

Trapezium specie datum describere cujus anguli ad rectas quatuor positione datas (quæ neq; omnes parallelæ sunt, neq; ad commune punctum convergunt) singuli ad singulas consistent.



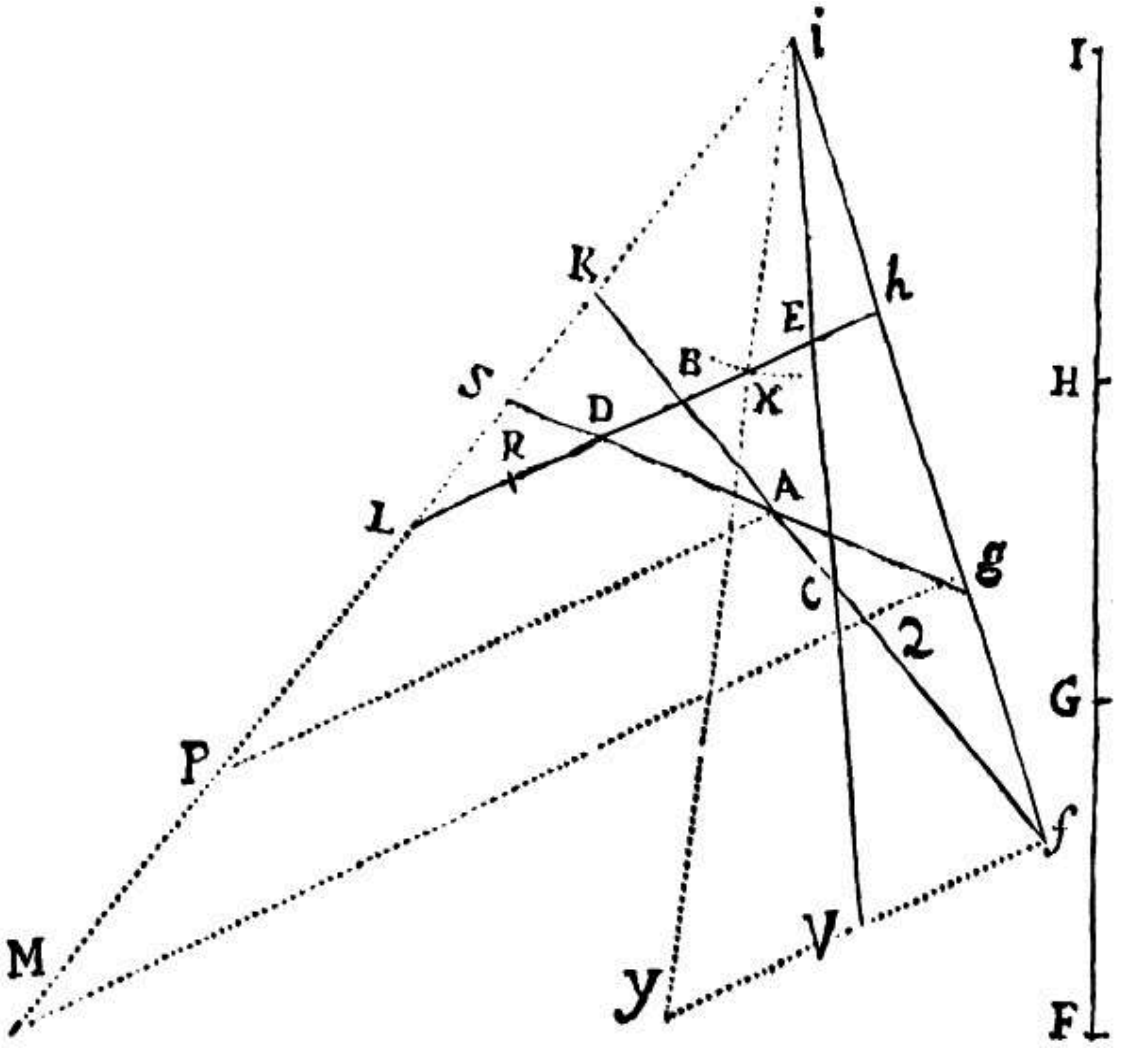
Dentur positione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*, quarum prima secet secundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & describendum sit Trapezium *fghi* quod sit Trapezio *FGHI* simile, & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC* cæteriq; anguli *g*, *h*, *i* cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* respective. Jungatur *FH*, & super *FG*, *FH*, *FI* describantur totidem circulorum segmenta *FSG*, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum æqualem angulo *BAD*, secundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBE*; ac tertium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum *FG*, *FH*, *FI*, ut literarum *FSGF* idem sit ordo circularis qui literarum *BADB*, utq; literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBEC*, & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos, sitq; *P* centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum secundi *FTH*. Jungatur & utrinq; producatur *PQ*, & in ea capiatur

QR in ea ratione ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem sit ordo circularis atq; literarum *A*, *B*, *C*: centroq; *R* & intervallo *RF* describatur circulus quartus *FNc* secans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* secans circulum primum in *a* & secundum in *b*. Agantur *aG*, *bH*, *cI*, & figuræ *abcFGHI* similis constituatur figura *ABCfghi*: Eritq; Trapezium *fghi* illud ipsum quod constituere oportuit.

Secent enim circuli duo primi *FSG*, *FTH* se mutuo in *K*. Jungantur *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK* & producatur *QP* ad *L*. Anguli ad circumferentias *FaK*, *FbK*, *FcK*, sunt semisses angulorum *FPK*, *FQK*, *FRK* ad centra, adeoq; angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LRK* æquales. Est ergo figura *PQRK* figuræ *abcK* æquiangula & similis, & propterea *ab* est ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id est ut *AB* ad *BC*. Angulis insuper *FaG*, *FbH*, *FcI* æquantur *fAg*, *fBh*, *fCi* per constructionem. Ergo figuræ *abcFGHI* figura similis *ABCfghi* compleri potest. Quo facto Trapezium *fghi* constituetur simile Trapezio *FGHI* & angulis suis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*. *Q. E. F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli *FGH*, *GHI* usq; eo, ut rectæ *FG*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc casu construendo Problema, ducetur recta *fghi* cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor positione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ *FG*, *GH*, *HI*, eundemq; servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditius.

Producantur *AB* ad *K*, & *BD* ad *L*, ut sit *BK* ad *AB* ut *HI* ad *GH*; & *DL* ad *BD* ut *GI* ad *FG*; & jungatur *KL* occurrens rectæ *CE* in *i*. Producatur *iL* ad *M*, ut sit *LM* ad *iL* ut *GH* ad *HI*, & agatur tum *MQ* ipsi *LB* parallela rectæq; *AD* occurrens in *g*, tum *gi* secans *AB*, *BD* in *f*, *h*. Dico factum.



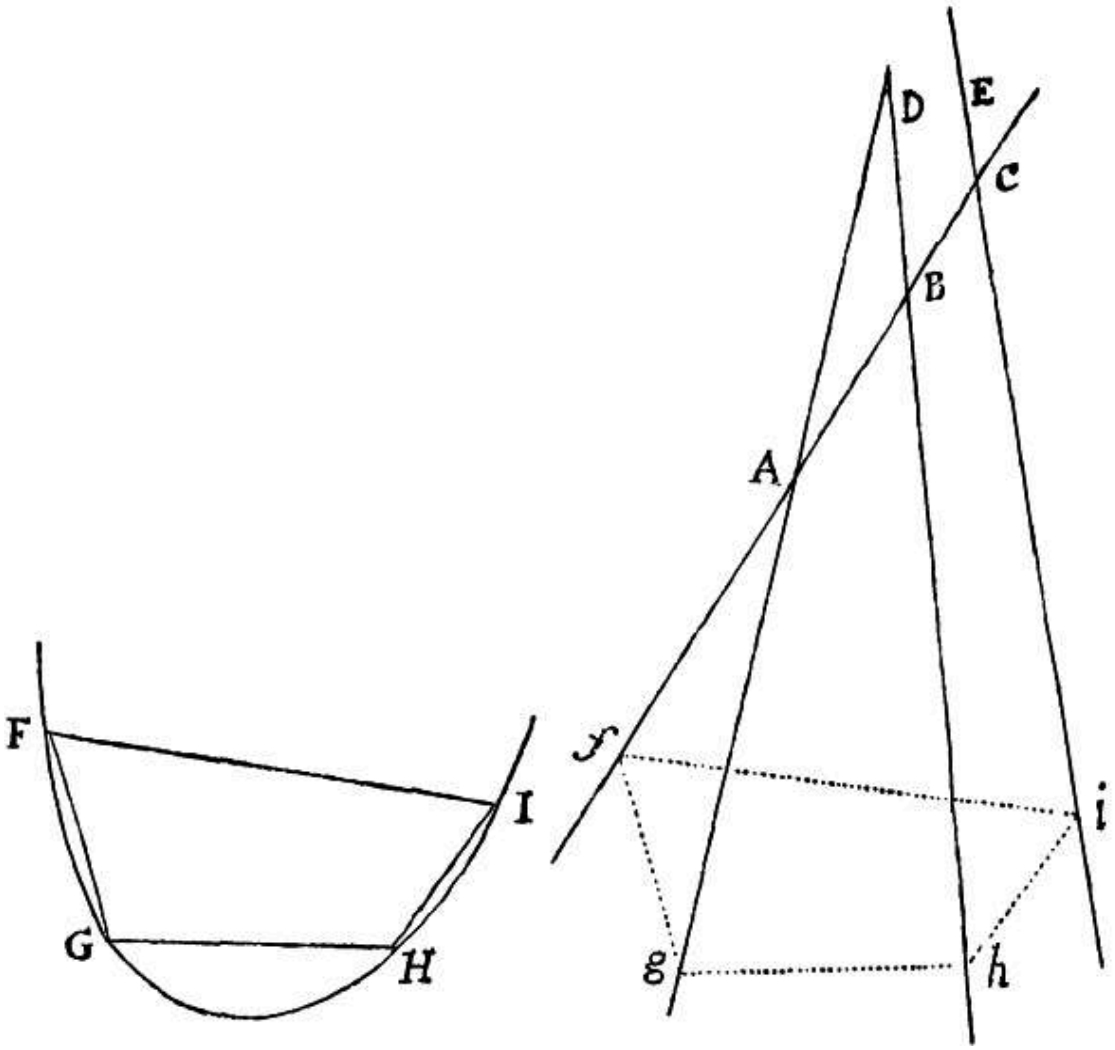
Secet enim *Mg* rectam *AB* in *Q*, & *AD* rectam *KL* in *S*, & agatur *AP*, quæ sit ipsi *BD* parallela & occurrat *iL* in *P*, & erunt *Mg* ad *Lh* (*Mi* ad *Li*, *gi* ad *hi*, *AK* ad *BK*) & *AP* ad *BL* in eadem ratione. Secetur *DL* in *R* ut sit *DL* ad *RL* in eadem illa ratione, & ob proportionales *gS* ad *gM*, *AS* ad *AP* & *DS* ad *DL*, erit ex æquo ut *gS* ad *Lh* ita *AS* ad *BL* & *DS* ad *RL*; & mixtim, *BL - RL* ad *Lh - BL* ut *AS - DS* ad *gS - AS*. Id est *BR* ad *Bh* ut *AD* ad *Ag*, adeoq; ut *BD* ad *gQ*. Et vicissim *BR* ad *BD* ut *Bh* ad *gQ* seu *fh* ad *fg*. Sed ex constructione est *BR* ad *BD* ut *FH* ad *FG*. Ergo *fh* est ad *fg* ut *FH* ad *FG*. Cum igitur sit etiam *ig* ad *ih* ut *Mi* ad *Li*, id est, ut *IG* ad *IH*, patet lineas *FI*, *fi* in *g* & *h*, *G* & *H* similiter sectas esse. *Q. E. F.*

In constructione Corollarii hujus postquam ducitur *LK* secans *CE* in *i*, producere licet *iE* ad *V*, ut sit *EV* ad *iE* ut *FH* ad *HI*, & agere *Vf* parallelam ipsi *BD*. Eodem recidit si centro *i*, intervallo *IH* describatur circulus secans

BD in *X*, producatur *iX* ad *Y*, ut sit *iY* æqualis *IF*, & agatur *Yf* ipsi *BD* parallela.

Prop. XXIX. Prob. XIX.

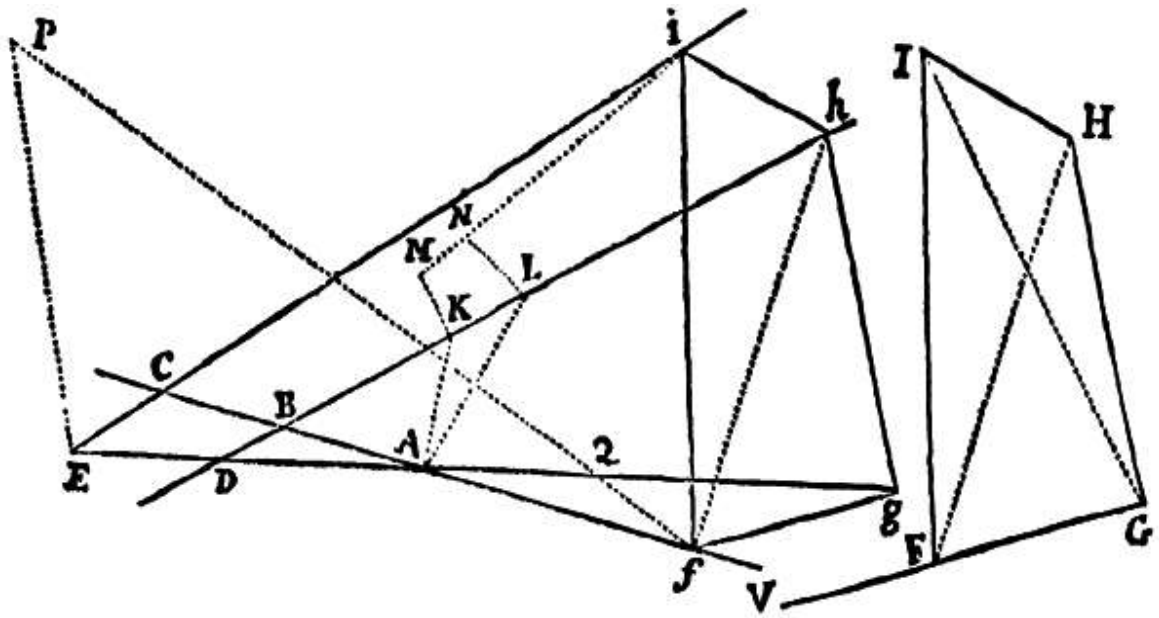
Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.



Describenda sit Trajectoria *fghi*, quæ similis sit lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes *fg*, *gh*, *hi* illius partibus *FG*, *GH*, *HI* similes & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *EC* positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI*, describatur Trapezium *fghi* quod sit Trapezio *FGHI* simile & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas positione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE* singuli singulas dicto

ordine. Dein (per Lem. XXVII) circa hoc Trapezium describatur Trajectoria curvæ lineæ *FGHI* consimilis.

Scholium.



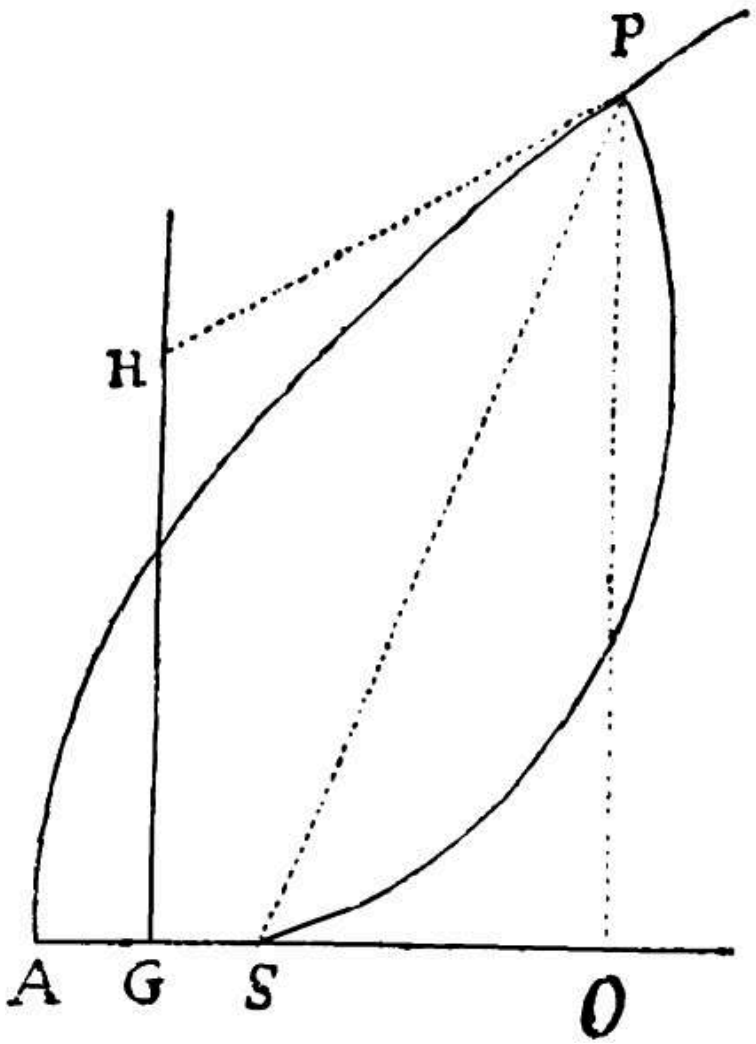
Construi etiam potest hoc Problema ut sequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeq; *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde aguntur *KM*, *LN*, quarum *KM* constituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, sitq; ad *AK* ut est *HI* ad *GH*; & *LN* constituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, sitq; ad *AL* ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALK*, *DALND* eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant, & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, sitq; *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *QPf*, quæ cum recta *AED* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæq; *AB* occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem sit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & si super linea *fi* eodem quoq; literarum ordine constituatur Trapezium *fghi* Trapezio *FGHI* simile, & circumscribatur Trajectoria specie data, solvetur Problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Superest ut motus corporum orbibus inventis determinemus.

SECT. VI.

De inventione motuum in Orbibus datis.

Prop. XXX. Prob. XXII.



Corporis in data Trajectoria Parabolica moventis, invenire locum ad tempus assignatum.

Sit *S* umbilicus & *A* vertex principalis Parabolæ, sitq; $4AS \times M$ area Parabolica *APS*, quæ radio *SP*, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit area illa ex tempore ipsi proportionali. Biseca *AS* in *G*, erigeq; perpendiculum *GH* æquale 3*M*, & circulus centro *H*, intervallo *HS* descriptus secabit Parabolam in loco quæsito *P*. Nam demissa ad axem perpendiculari *PO*, est $HGq. + GSq.$ (= $HSq. = HPq. = GOq. + PO - HGq.$) = $GOq. + HGq. - 2HG \times PO + POq.$ Et deleto utrinq; $HGq.$ fiet $GSq. = GOq. - 2HG \times PO + POq.$ seu $2HG \times PO$ (= $GOq. + POq. - GSq. = AOq. - 2GAO + POq.$) = $AOq. + ¾POq.$ Pro $AOq.$ scribe $AO \times POq. \div 4AS$, & applicatis terminis omnibus ad 3*PO*, ductisq; in 2*AS*, fiet $/_3GH \times AS$ (= $/_6AO \times PO + ½AS \times PO = \{AO + 3AS\} \div 6 \times PO = \{4AO - 3SO\} \div 6 \times PO$ = areæ *APO* - *SPO*) = areæ *APS*. Sed *GH* erat 3*M*, & inde $/_3HG \times AS$ est $4AS \times M$. Ergo area *APS* æqualis est $4AS \times M$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc *GH* est ad *AS*, ut tempus quo corpus descripsit arcum *AP* ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem *A* & perpendiculum ad axem ab umbilico *S* erectum.

Corol. 2. Et circulo *ASP* per corpus movens perpetuo transeunte, velocitas puncti *H* est ad velocitatem quam corpus habuit in vertice *A*, ut 3 ad 8; adeoq; in ea etiam ratione est linea *GH* ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab *A* ad *P*, ea cum velocitate quam habuit in vertice *A*, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam viceversa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum *AP*. Junge *AP* & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ *GH* occurrens in *H*.

Lemma XXVIII.

Nulla extat figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatq; semper ea cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra Ovalem longitudo. Hoc motu punctum illud describet Spiralem gyris infinitis. Jam si

area Oualis per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo; quæ huic areæ proportionalis est, adeoq; omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, adeoq; ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenitur nisi per æquationem duarum dimensionum, qua intersectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum sectionum Conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, qua omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoq; & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam intersectiones Sectionum Conicarum & curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & intersectiones duarum curvarum tertiæ potestatis, quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. Id nisi necessario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & plusquam solida ad solida. Eadem de causa intersectiones binæ rectarum & sectionum Conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum; ternæ rectarum & curvarum tertiæ potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum quartæ potestatis per æquationes dimensionum quatuor, & sic in infinitum. Ergo intersectiones numero infinitæ rectarum, propterea quod omnium eadem est lex & idem calculus, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus omnes possunt simul exhiberi. Si a polo in rectam illam secantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum una cum secante revolvatur circa polum, intersectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæq; prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoq; una eademq; exhibebit

intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

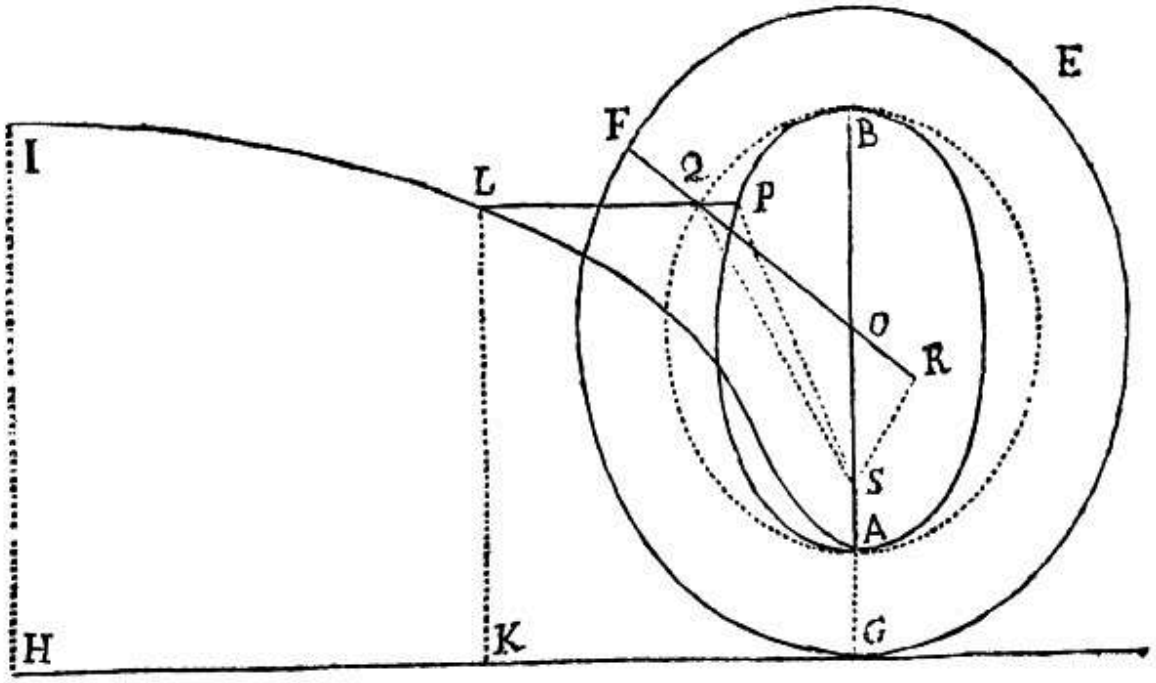
Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi.

Corollarium.

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem Curuarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasq; (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipseos tempori proportionalem abscindo per Curvam Geometrice irrationalem ut sequitur.

Prop. XXXI. Prob. XXIII.

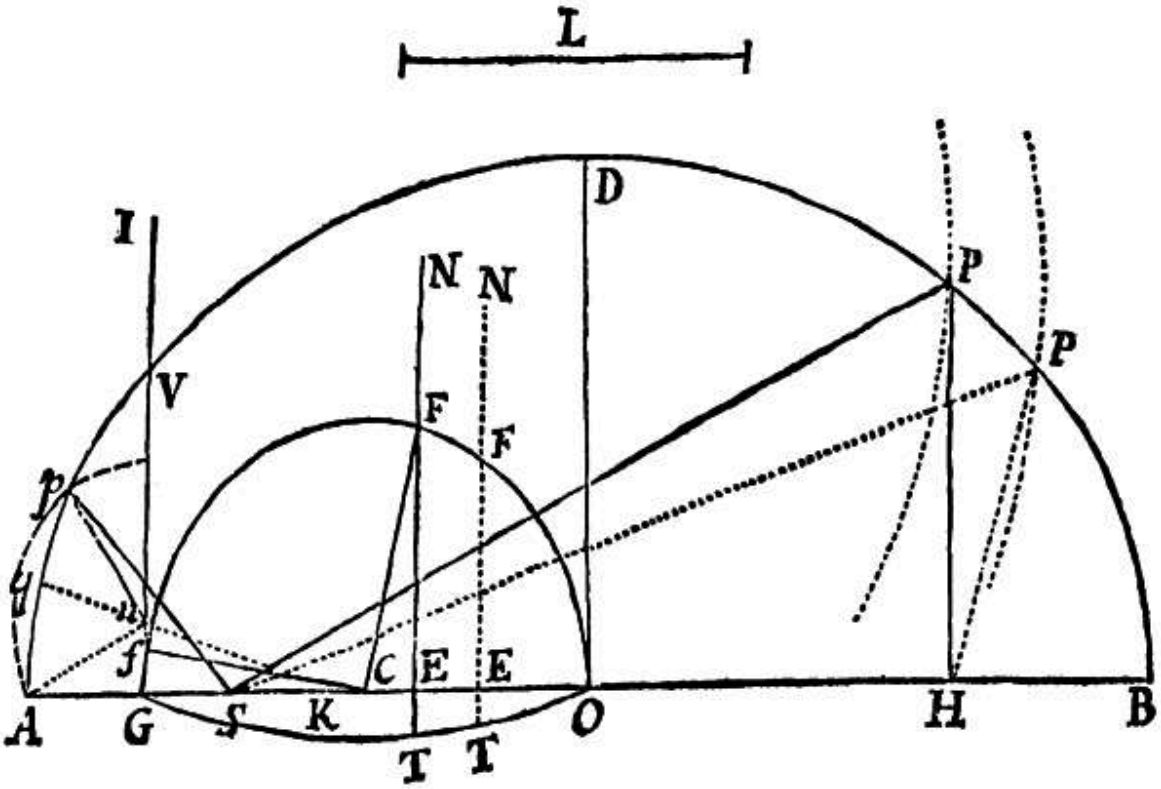
Corporis in data Trajectoria Elliptica moventis invenire locum ad tempus assignatum.



Ellipseos *APB* sit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, *O* centrum, sitq; *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G* ut sit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroq; *O* & intervallo *OG* describe circulum *EFG*, & super regula *GH*, ceu fundo, progrediatur rota *GEF* revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo *A* describendo Trochoidem *ALI*. Quo facto, cape *GK* in ratione ad rotæ perimetrum *GEFG*, ut est tempus quo corpus progrediendo ab *A* descripsit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens Trochoidi in *L*, & acta *LP* ipsi *KG* parallela occurret Ellipsi in corporis loco quæsito *P*.

Nam centro *O* intervallo *OA* describatur semicirculus *AQB*, & arcui *AQ* occurrat *LP* producta in *Q*, junganturq; *SQ*, *OQ*. Arcui *EFG* occurrat *OQ* in *F*, & in eandem *OQ* demittatur perpendiculum *SR*. Area *APS* est ut area *AQS*, id est, ut differentia inter sectorem *OQA* & triangulum *OQS*, sive ut differentia rectangulorum ½*Q* × *AQ* & ½*OQ* × *SR*, hoc est, ob datam ½*OQ*, ut differentia inter arcum *AQ* & rectam *SR*, adeoq; (ob æqualitatem rationum *SR* ad sinum arcus *AQ*, *OS* ad *OA*, *OA* ad *OG*, *AQ* ad *GF*, & divisim *AQ* - *SR* ad *GF* - sin. arc. *AQ*) ut *GK* differentia inter arcum *GF* & sinum arcus *AQ*. *Q. E. D.*

Scholium.



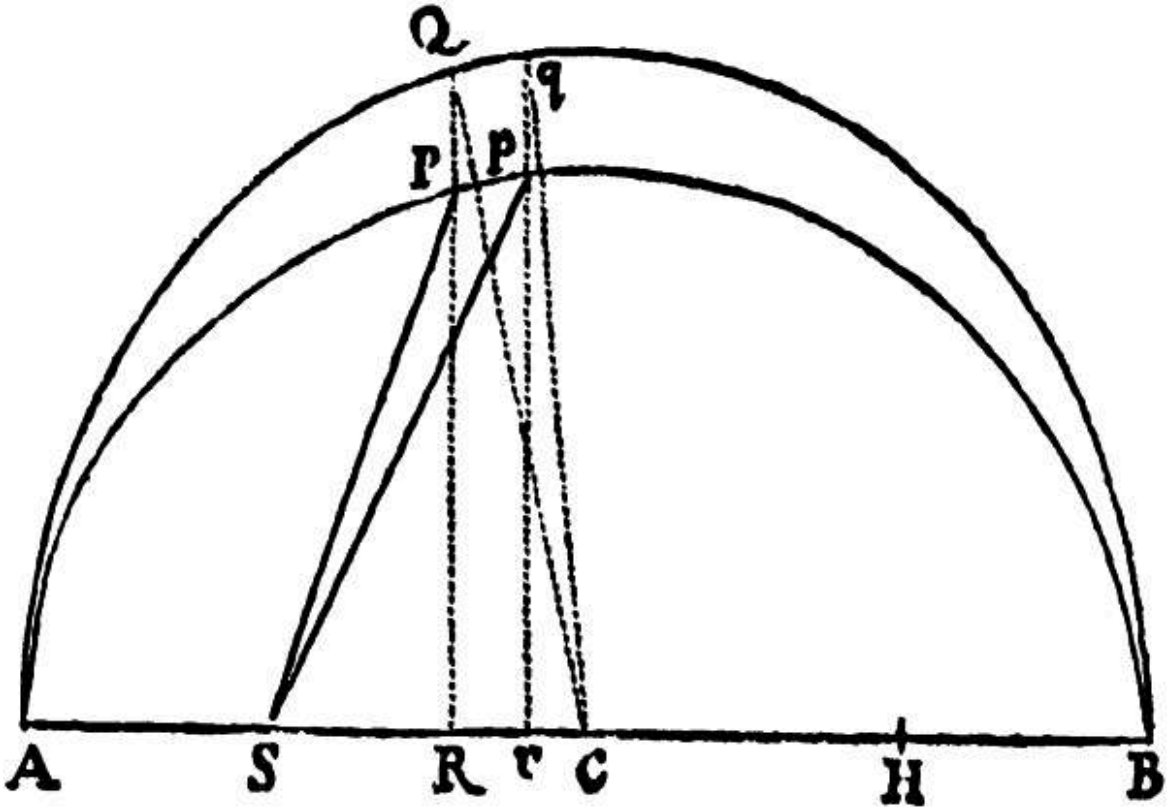
Cæterum ob difficultatem describendi hanc curvam præstat constructiones vero proximas in praxi Mechanica adhibere. Ellipseos cujusvis *APB* sit *AB* axis major, *O* centrum, *S* umbilicus, *OD* semiaxis minor, & *AK* dimidium lateris recti. Secetur *AS* in *G*, ut sit *AG* ad *AS* ut *BO* ad *BS*; & quæratur longitudo *L*, quæ sit ad ½*GK* ut est *AO quad.* ad rectangulum *AS* × *OD*. Bisecetur *OG* in *C*, centroq; *C* & intervallo *CG* describatur semicirculus *GFO*. Deniq; capiatur angulus *GCF* in ea ratione ad angulos quatuor rectos, quam habet tempus datum, quo corpus descripsit arcum quæsitum *AP*, ad tempus periodicum seu revolutionis unius in Ellipsi: Ad *AO* demittatur normalis *FE*, & producatur eadem versus *F* ad usq; *N*, ut sit *EN* ad longitudinem *L*, ut anguli illius sinus *EF* ad radium *CF*; centroq; *N* & intervallo *AN* descriptus circulus secabit Ellipsin in corporis loco quæsito *P* quam proxime.

Nam completo dimidio temporis periodici, corpus *P* semper reperietur in Apside summa *B*, & completo altero temporis dimidio, redibit ad Apsidem imam, ut oportet. Ubi vero proxime abest ab Apsidibus, ratio prima nascentium sectorum *ASP*, *GCF*, & ratio ultima evanescentium *BSP* & *OCF*, eadem est rationi Ellipseos totius ad circulum totum. Nam punctis *P*, *F* & *N* incidentibus in loca *p*, *f* & *n* axi *AB* quam proximis; ob æquales *An*,

pn, recta *nq*, quæ ad arcum *Ap* perpendicularis est, adeoq; concurrit cum axe in puncto *K*, bisecat arcum *Ap*. Proinde est ½*Ap* ad *Gn* ut *AK* ad *GK*, & *Ap* ad *Gn* ut 2*AK* ad *GK*. Est & *Gn* ad *Gf* ut *EN* ad *EF*, seu *L* ad *CF*, id est, ut {*GK* × *AOq.*} ÷ {2*AS* × *OD*} ad *CF*, seu *GK* × *AOq.* ad 2*AS* × *OD* × *CF*, & ex æquo *Ap* ad *Gf* ut 2*AK* ad *GK* + *GK* × *AOq.* ad 2*AS* × *OD* × *CF*, id est, ut *AK* × *AOq.* ad *AS* × *OD* × *CF*, hoc est, ob æqualia *AK* × *AO* × *ODq.* ut *AO* × *OD* ad *AS* × *CF*. Proinde *Ap* × ½*AS* est ad *Gf* × ½*GC* ut *AO* × *OD* × *AS* ad *AS* × *CF* × *GC*, seu *AO* × *OD* ad *CGq.* id est, sector nascens *ASp* ad sectorem nascentem *GCf* ut *AO* × *OD* ad *CGq.* & propterea ut area Ellipseos totius ad aream circuli totius. *Q. E. D.* Argumento prolixiore probari potest analogia ultima in Sectoribus evanescentibus *BSP*, *OCF*: ideoq; locus puncti *P* prope Apsides satis accurate inventus est. In quadraturis error quasi quingentesimæ partis areæ Ellipseos totius vel paulo major obvenire solet: qui tamen propemodum evanescet per ulteriorem Constructionem sequentem.

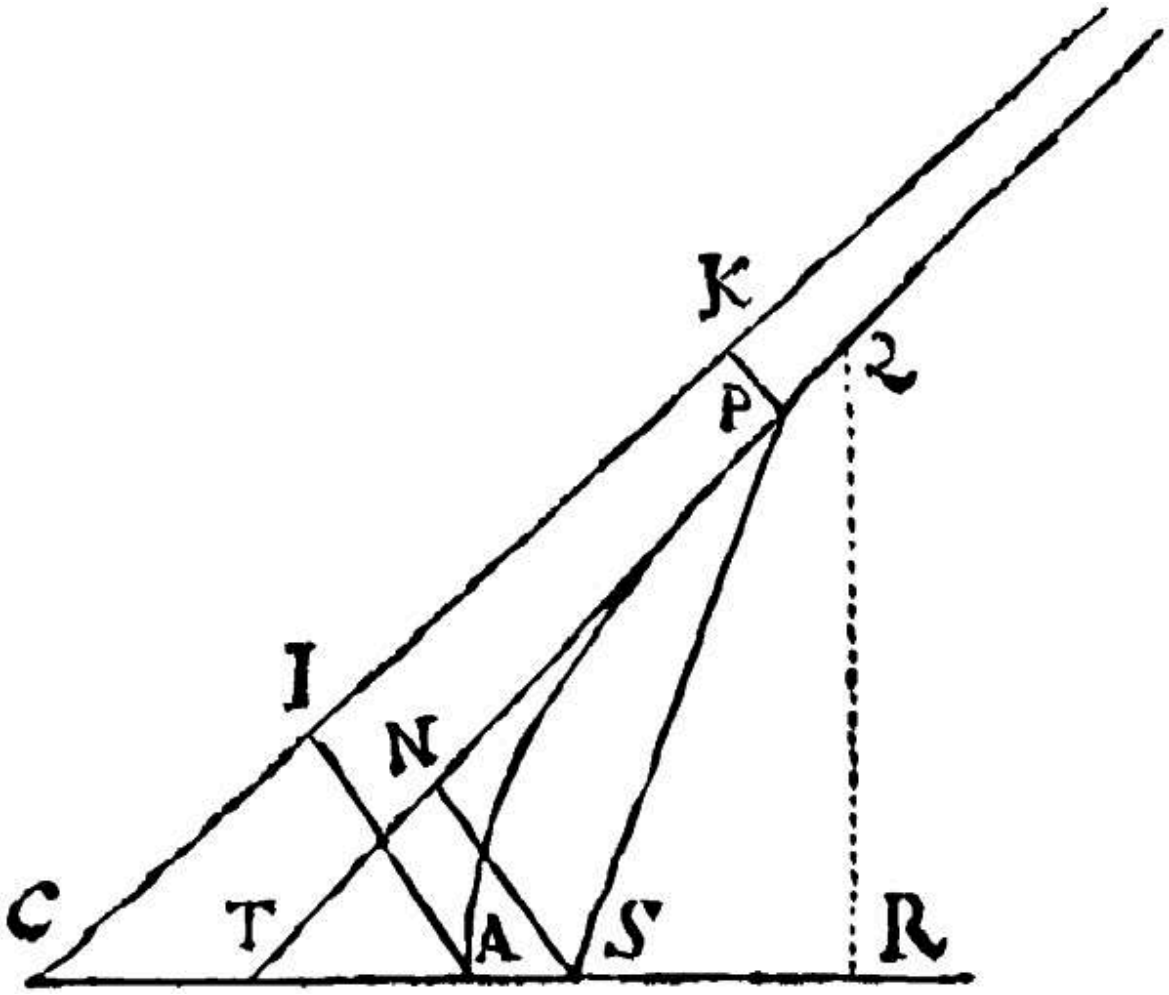
Per puncta *G*, *O*, duc arcum circularem *GTO* justæ magnitudinis; dein produc *EF* hinc inde ad *T* & *N* ut sit *EN* ad *FT* ut ½*L* ad *CF*; centroq; *N* & intervallo *AN* describe circulum qui secet Ellipsin in *P*, ut supra. Arcus autem *GTO* determinabitur quærendo ejus punctum aliquod *T*; quod constructionem in illo casu accuratam reddet.

Si Ellipseos latus transversum multo majus sit quam latus rectum, & motus corporis prope verticem Ellipseos desideretur, (qui casus in Theoria Cometarum incidit,) educere licet e puncto *G* rectam *GI* axi *AB* perpendicularem, & in ea ratione ad *GK* quam habet area *AVPS* ad rectangulum *AK* × *AS*; dein centro *I* & intervallo *AI* circulum describere. Hic enim secabit Ellipsim in corporis loco quæsito *P* quamproxime. Et eadem constructione (mutatis mutandis) conficitur Problema in Hyperbola. Hæ autem constructiones demonstrantur ut supra, & si Figura (vertice ulteriore *B* in infinitum abeunte) vertatur in Parabolam, migrant in accuratam illam constructionem Problematis XXII.



Si quando locus ille *P* accuratius determinandus sit, inveniatur tum angulus quidam *B*, qui sit ad angulum graduum 57,29578 quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia *SH* ad Ellipseos diametrum *AB*; tum etiam longitudo quædam *L*, quæ sit ad radium in eadem ratione inverse. Quibus semel inventis, Problema deinceps confit per sequentem Analysin. Per constructionem superiorem (vel utcunq; conjecturam faciendo) cognoscatur corporis locus *P* quam proxime. Demissaq; ad axem Ellipseos ordinatim applicata *PR*, ex proportione diametrorum Ellipseos, dabitur circuli circumscripti *AQB* ordinatim applicata *RQ*, quæ sinus est anguli *ACQ* existente *AC* radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus tempori proportionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos ut est tempus quo corpus descripsit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Sit angulus iste *N*. Tum capiatur & angulus *D* ad angulum *B*, ut est sinus iste anguli *ACQ* ad Radium, & angulus *E* ad angulum $N - ACQ + D$, ut est longitudo *L* ad longitudinem eandem *L* cosinu anguli $ACQ + \frac{1}{2}D$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus *F* ad angulum *B*, ut est sinus anguli $ACQ + E$ ad radium, tum angulus *G* ad

angulum $N - ACQ - E + F$ ut est longitudo L ad Longitudinem eandem cosinu anguli $ACQ + E + ½F$ diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli $ACQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - ACQ - E - G + H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $ACQ + E + G + ½H$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Deniq; capiatur angulus ACq æqualis angulo $ACQ + E + G + I$ &c. & ex cosinu ejus Cr & ordinata pr, quæ est ab sinum qr ut Ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. Siquando angulus $N - ACQ + D$ negativus est, debet signum + ipsius E ubiq; mutari in -, & signum - in +. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I, ubi anguli $N - ACQ - E + F$, & $N - ACQ - E - G + H$ negative prodeunt. Convergit autem series infinita $ACQ + E + G + I$ quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area APS sit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in Radium CQ perpendiculariter demissam.



Non dissimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus centrum *C*, Vertex *A*, Umbilicus *S* & Asymptotos *CK*. Cognoscatur quantitas areæ *APS* tempori proportionalis. Sit ea *A*, & fiat conjectura de positione rectæ *SP*, quæ aream illam abscindat quamproxime. Jungatur *CP*, & ab *A* & *P* ad Asymptoton agantur *AI*, *PK* Asymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area *AIKP*, eiq; æqualis area *CPA*, quæ subducta de triangulo *CPS* relinquet aream *APS*. Applicando arearum *A* & *APS* semidifferentiam ½*APS* - ½*A* vel ½*A* - ½*APS* ad lineam *SN*, quæ ab umbilico *S* in tangentem *PT* perpendicularis est, orietur longitudo *PQ*. Capiatur autem *PQ* inter *A* & *P*, si area *APS* major sit area *A*, secus ad puncti *P* contrarias partes: & punctum *Q* erit locus corporis accuratius. Et computatione repetita invenietur idem accuratius in perpetuum.

Atq; his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum usibus Astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus *AO*, *OB*, *OD* semiaxibus Ellipseos, (*Vide fig. pag. 109. 110.*) &

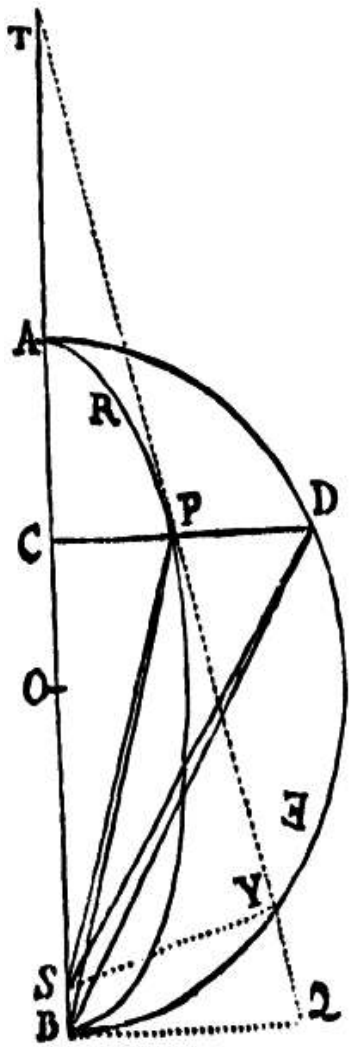
L ipsius latere recto, quære tum angulum *Y*, cujus Tangens sit ad Radium ut est semiaxium differentia *AO* - *OD* ad eorum summam *AO* + *OD*; tum angulum *Z*, cujus tangens sit ad Radium ut rectangulum sub umbilicorum distantia *SH* & semiaxium differentia *AO* - *OD* ad triplum rectangulum sub *OQ* semiaxe minore & *AO* - ¼*L* differentia inter semiaxem majorem & quartam partem lateris recti. His angulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum *T* proportionalem tempori quo arcus *BP* descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum *V* (primam medii motus æquationem) ad angulum *Y* (æquationem maximam primam) ut est sinus anguli *T* duplicati ad radium; atq; angulum *X* (æquationem secundam) ad angulum *Z* (æquationem maximam secundam) ut est sinus versus anguli *T* duplicati ad radium duplicatum, vel (quod eodem recidit) ut est quadratum sinus anguli *T* ad quadratum Radii. Angulorum *T*, *V*, *X* vel summæ *T* + *X* + *V*, si angulus *T* recto minor est, vel differentiæ *T* + *X* - *V*, si is recto major est rectisq; duobus minor, æqualem cape angulum *BHP* (motum medium æquatum;) & si *HP* occurrat Ellipsi in *P*, acta *SP* abscindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum *V* & *X* (in minutis secundis, si placet, positorum) figuras duas tresve primas invenire sufficit. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *HSP* & distantia *SP* in promptu sunt per methodum notissimam Dris. *Sethi Wardi* Episcopi *Salisburiensis* mihi plurimum colendi.

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

SECT. VII.

De Corporum Ascensu & Descensu Rectilineo.

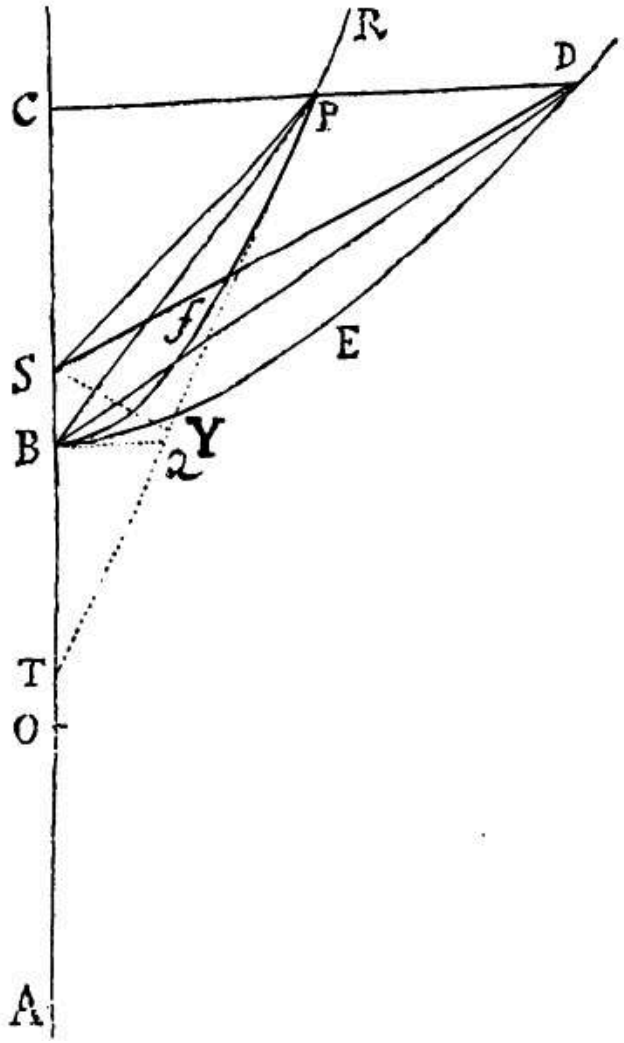
Prop. XXXII. Prob. XXIV.



Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus describit.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter describet id sectionem aliquam Conicam cujus umbilicus inferior congruit cum centro. Id ex Propositionibus XI, XII, XIII & earum Corollariis constat. Sit sectio illa Conica *ARPB* & umbilicus inferior *S*. Et primo si Figura illa Ellipsis est, super hujus axe majore *AB* describatur semicirculus *ADB*, & per corpus decidens transeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actisq; *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP* atq; adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo Ellipseos, & semper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, descendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaq;

spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*



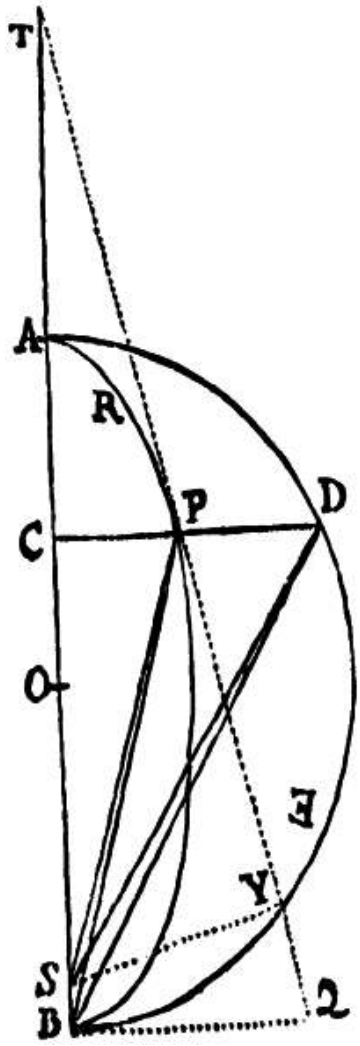
Cas. 2. Sin figura superior *RPB* Hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem *AB* Hyperbola rectangula *BD*: & quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* sunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, singulæ ad singulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis est tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PB*, erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus *PB* cum recta *CB*, & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto descensu describit lineam *CB*. *Q. E. I.*

Cas. 3. Et simili argumento si figura *RPB* Parabola est, & eodem vertice principali *B* describatur alia Parabola *BED*, quæ semper maneat data,

interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus Latere recto, conveniat cum linea *CB*, fiet segmentum Parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* descendet ad centrum *B*. *Q. E. I.*

Prop. XXXIII. Theor. IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum describentis, in dimidiata ratione quam* CA*, distantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ vertice ulteriore* A*, habet ad figuræ semidiametrum principalem ½*AB.

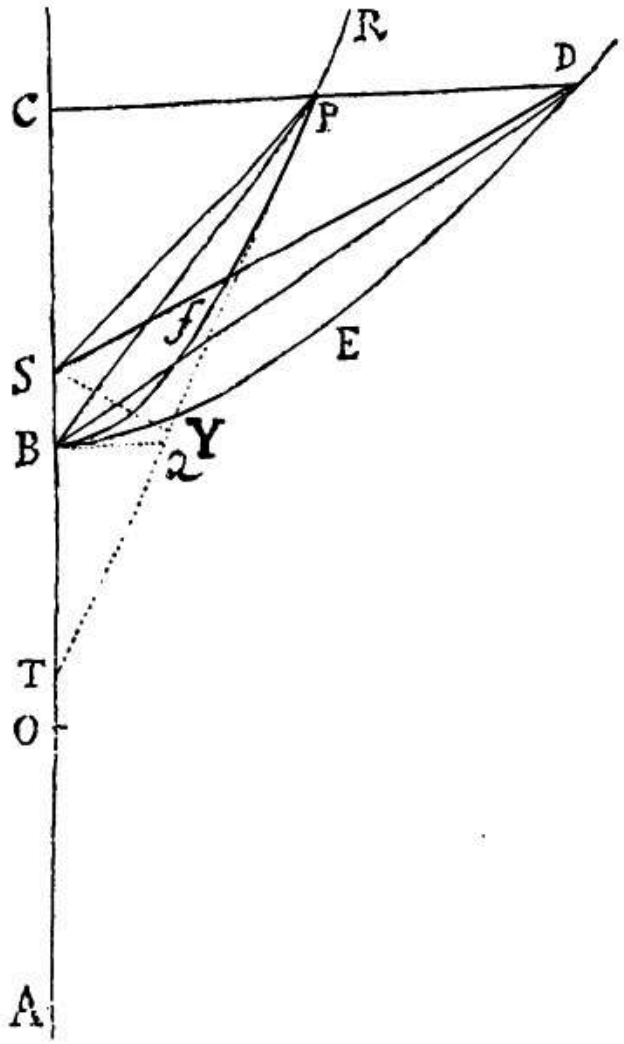


Namq; ob proportionales *CD*, *CP*, linea *AB* communis est utriusq; figuræ *RPB*, *DEB* diameter. Bisecetur eadem in *O*, & agatur recta *PT* quæ tangat figuram *RPB* in *P*, atq; etiam secet communem illam diametrum *AB* (si opus est productam) in *T*; sitq; *SY* ad hanc rectam & *BQ* ad hanc diametrum perpendicularis, atq; figuræ *RPB* latus rectum ponatur *L*. Constat per Cor. 9. Theor. VIII. quod corporis in linea *RPB* circa centrum *S* moventis velocitas in loco quovis *P* sit ad velocitatem corporis intervallo *SP* circa idem centrum circulum describentis in dimidiata ratione rectanguli ½*L* × *SP* ad *SY* quadratum. Est autem ex Conicis *ACB* ad *CPq.* ut 2*AO* ad *L*, adeoq; 2*CPq.* × *AO* ÷ *ACB* æquale *L*. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in dimidiata ratione *CPq.* × *AO* × *SP* ÷ *ACB* ad *SY quad.* Porro ex Conicis est *CO* ad *BO* ut *BO* ad *TO*, & composite vel divisim ut *CB* ad *BT*. Unde dividendo vel componendo fit *BO* - uel + *CO* ad *BO* ut *CT* ad *BT*, id est *AC* ad *AO* ut *CP* ad *BQ*; indeq; *CPq.* × *AO* × *SP* ÷ *ACB* æquale est *BQq.* × *AC* × *SP* ÷ {*AO* × *BC*}. Minuatur jam in infinitum figuræ *RPB* latitudo *CP*, sic ut punctum *P* coeat cum puncto *C*, punctumq; *S* cum puncto *B*, & linea *SP* cum linea *BC*, lineaq; *SY* cum linea *BQ*; & corporis jam recta descendentis in linea *CB* velocitas fiet ad velocitatem corporis centro *B* interuallo *BC* circulum describentis, in dimidiata ratione ipsius *BQq.* × *AC* × *SP* ÷ {*AO* × *BC*} ad *SYq.* hoc est (neglectis æqualitatis rationibus *SP* ad *BC* & *BQq.* ad *SYq.*) in dimidiata ratione *AC* ad *AO*. *Q. E. D.*

Corol. Punctis *B* & *S* coeuntibus, fit *TC* ad *ST* ut *AC* ad *AO*.

Prop. XXXIV. Theor. X.

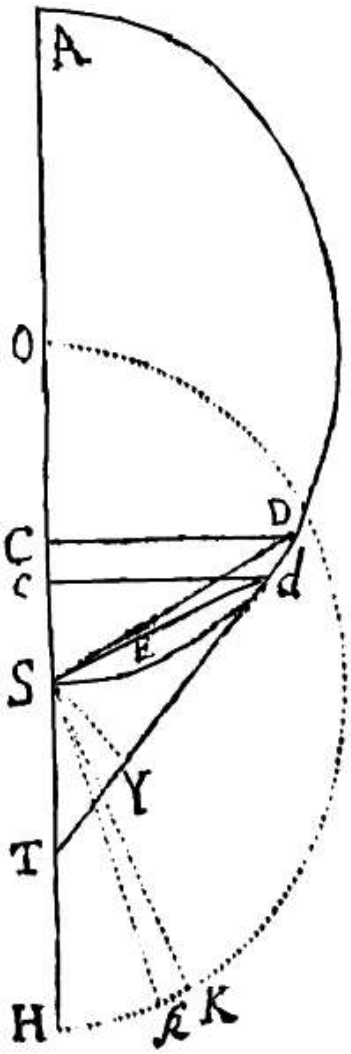
Si figura BED *Parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli sui* BC *circulum uniformiter describere potest.*



Nam corporis Parabolam *RPB* circa centrum *S* describentis velocitas in loco quovis *S* (per Corol. 7. Theor. VIII) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli *SP* circulum circa idem *S* uniformiter describentis. Minuatur Parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus Parabolicus *PfB* cum recta *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & interuallum *SP* cum intervallo *BP* coincidat, & constabit Propositio. *Q. E. D.*

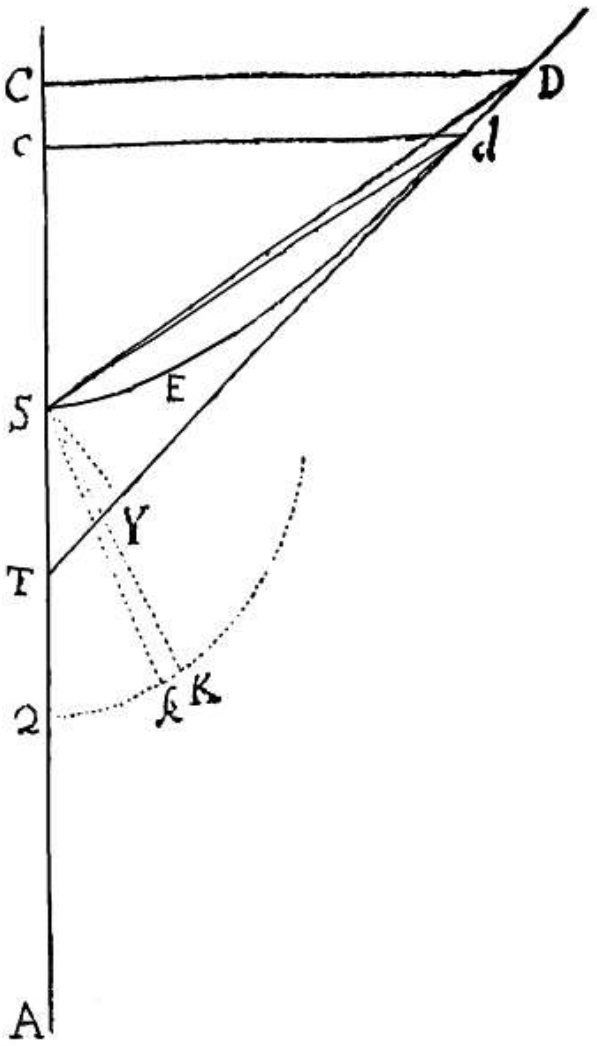
Prop. XXXV. Theor. XI.

Iisdem positis, dico quod area figuræ DES*, radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*



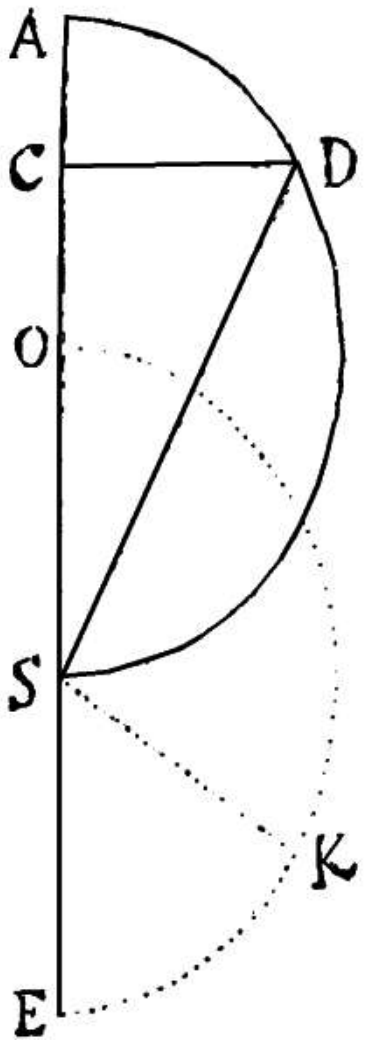
Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo describere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* describere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *SY*.

Cas. 1. Jam si figura *DES* Circulus est vel Hyperbola, bisecetur ejus transversa diameter *AS* in *O*, & erit *SO* dimidium Lateris recti. Et quoniam est *TC* ad *TD* ut *Cc* ad *Dd*, & *TD* ad *TS* ut *CD* ad *SY*, erit ex æquo *TC* ad *TS* ut *CD* × *Cc* ad *SY* × *Dd*. Sed per Corol. Pro. est *TC* ad *ST* ut *AC* ad *AO*, puta si in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo *AC* est ad *AO*, id est ad *SK*, ut *CD* × *Cc* ad *SY* × *Dd*. Porro corporis descendentis velocitas in *C* est ad velocitatem corporis circulum intervallo *SC* circa centrum *S* describentis in dimidiata ratione *AC* ad *AO* vel *SK* (per Theor. IX.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum *OKk* in dimidiata ratione *SK* ad *SC* per Cor. 6. Theor. IV. & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola *Cc* ad arcum *Kk* in dimidiata ratione *AC* ad *SC*, id est in ratione *AC* ad *CD*. Quare est *CD* × *Cc* æquale *AC* × *Kk*, & propterea *AC* ad *SK* ut *AC* × *Kk* ad *SY* × *Dd*, indeq; *SK* × *Kk* æquale *SY* × *Dd*, & ½*SK* × *Kk* æquale ½*SY* × *Dd*, id est area *KSk* æqualis areæ *SDd*. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ *KSk*, *SDd*, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. *Q. E. D.*



Cas. 2. Quod si figura *DES* Parabola sit, invenietur ut supra $CD \times Cc$ esse ad $SY \times Dd$ ut *TC* ad *ST*, hoc est ut 2 ad 1, adeoq; $\frac{1}{4}CD \times Cc$ æqualem esse $\frac{1}{2}SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in *C* æqualis est velocitati qua circulus intervallo $\frac{1}{2}SC$ uniformiter describi possit (per Theor. X.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua circulus radio *SK* describi possit, hoc est, lineola *Cc* ad arcum *Kk* est in dimidiata ratione *SK* ad $\frac{1}{2}Sc$, id est, in ratione *SK* ad $\frac{1}{2}CD$, per Corol. 6. Theorem. IV. Quare est $\frac{1}{2}SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4}CD \times Cc$, adeoq; æquale $\frac{1}{2}SY \times Dd$, hoc est, area *KSk* æqualis Areæ *SDd*, ut supra. *Quod erat demonstrandum.*

Prop. XXXVI. Prob. XXV.

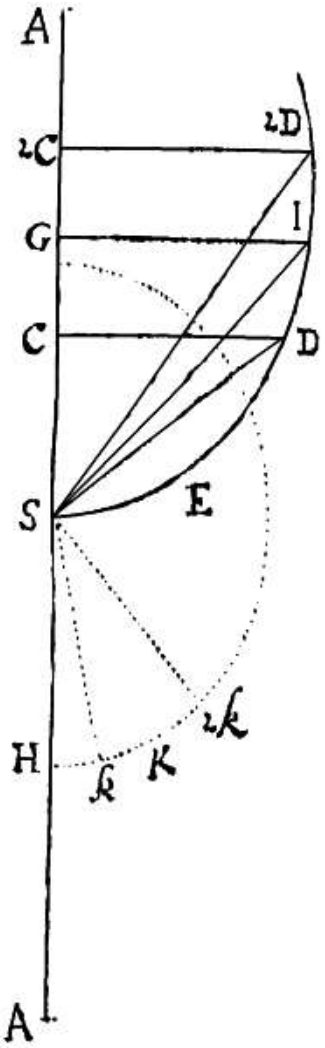


Corporis de loco dato A *cadentis determinare tempora descensus.*

Super diametro *AS* (distantia corporis a centro sub initio) describe semicirculum *ADS*, ut & huic æqualem semicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem constitue Sectionem *OSK*. Patet per Theor. XI, quod corpus cadendo describet spatium *AC* eodem tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum *S* gyrando, describere potest arcum *OK*. *Quod erat faciendum.*

Prop. XXXVII. Prob. XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.

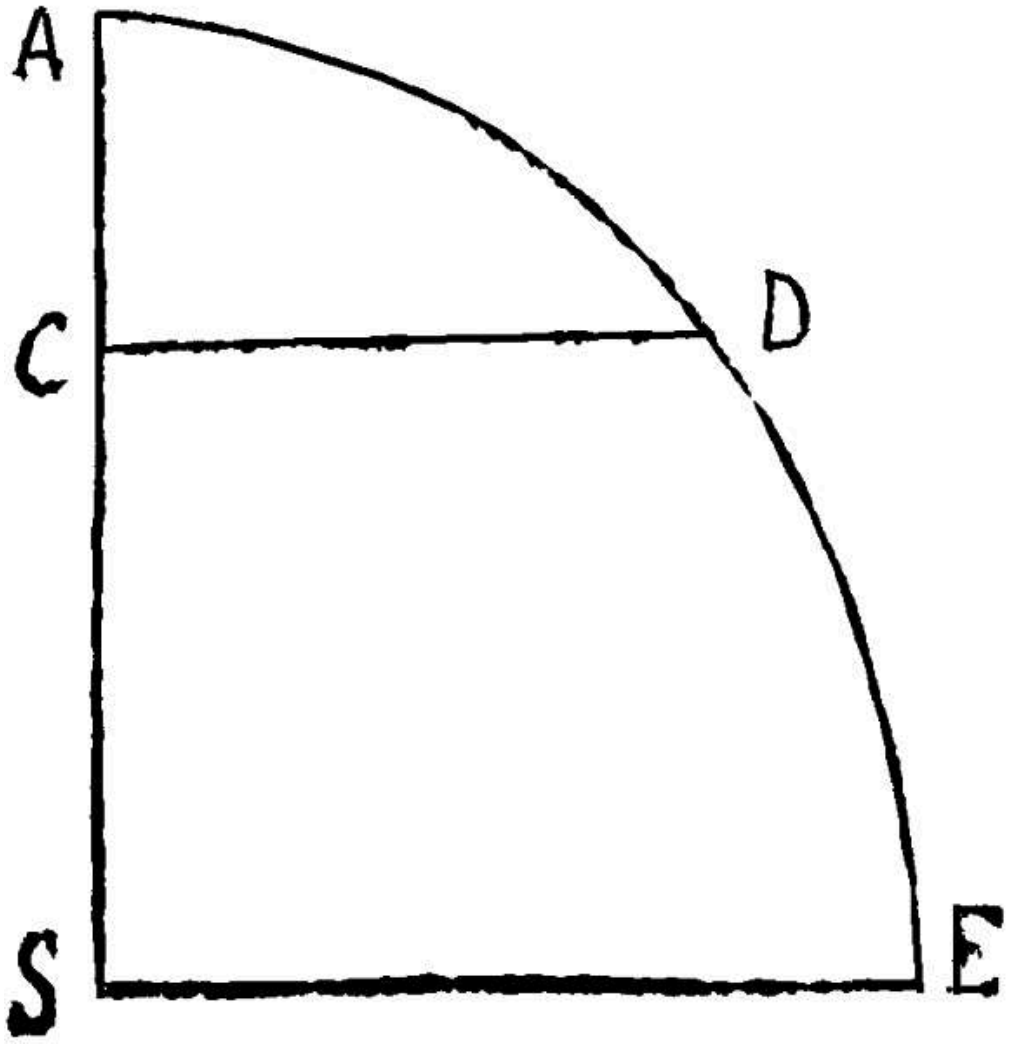


Exeat corpus de loco dato *G* secundum lineam *ASG* cum velocitate quacunq;. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi posset, cape *CA* ad ½*AS*. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum *A* cadet ad infinitam distantiam, quo in casu Parabola uertice *S*, axe *SC*, latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Theorema X. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu Circulus, posteriore Hyperbola rectangula super diametro *SA* describi debet. Patet per Theorema IX. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur

circulus *HKk*, & ad corporis ascendentis vel descendentis loca duo quævis *G*, *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia Conicæ Sectioni vel circulo in *I* ac *D*. Dein junctis *SI*, *SD*, fiant segmentis *SEIS*, *SEDS* Sectores *HSK*, *HSk* æquales, & per Theorema XI. corpus *G* describet spatium *GC* eodem tempore quo corpus *K* describere potest arcum *Kk*. Q. E. F.

Prop. XXXVIII. Theor. XII.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia descripta sunt arcubus arcuumq; sinibus versis & sinibus rectis respective proportionales.



Cadat corpus de loco quovis *A* secundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, describatur circuli quadrans *AE*, sitq; *CD* sinus rectus arcus

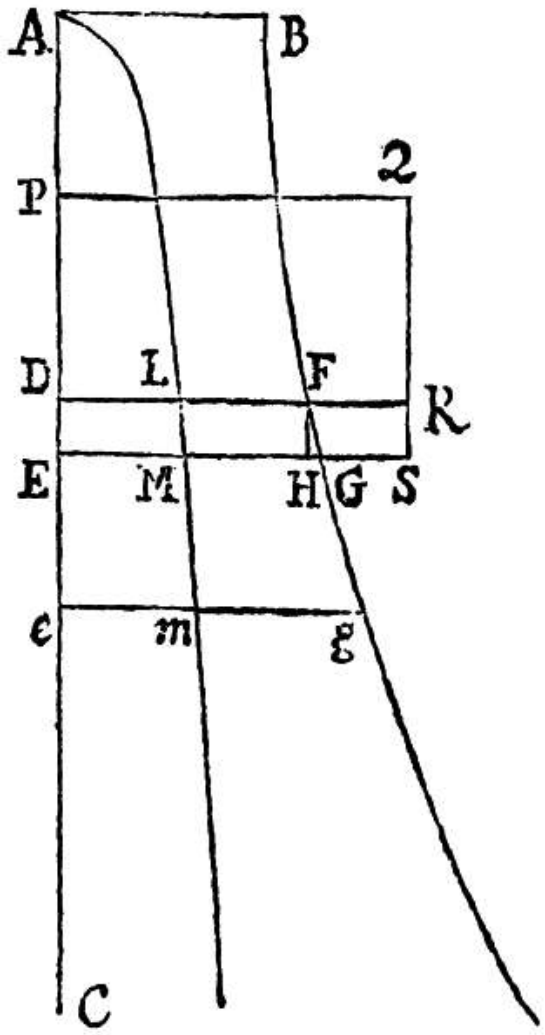
cujusvis *AD*, & corpus *A*, tempore *AD*, cadendo describet spatium *AC*, inq; loco *C* acquisierit velocitatem *CD*. Demonstratur eodem modo ex Propositione X. quo Propositio XXXII. ex Propositione XI. demonstrata fuit. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc æqualia sunt tempora quibus corpus unum de loco *A* cadendo provenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad usq; centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. IV.) æquantur.

Prop. XXXIX. Prob. XXVII.

Posita cujuscunq; generis vi centripeta, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.



De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deq; loco ejus *E* erigatur semper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitq; *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipso motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* ut areæ curvilineæ *ABGE* latus quadratum. *Q. E. I.* In *EG* capiatur *EM* lateri quadrato areæ *ABGE* reciproce proportionalis, & sit *ALM* linea curva quam punctum *M* perpetuo tangit, & erit tempus quo corpus cadendo describit lineam *AE* ut area curvilinea *ALME*. *Quod erat Inveniendum.*

Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, sitq; *DLF* locus lineæ *EMG* ubi corpus versabatur in *D*; & si ea sit vis centripeta, ut area *ABGE* latus quadratum sit ut descendentis velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in *D* & *E* scribantur *V* & *V* + *I*, erit area *ABFD* ut *V*, & area *ABGE* ut *V* + 2*VI* + *I*, &

divisim area *DFGE* ut $2VI + I$, adeoq; *DFGE* ÷ *DE* ut $\{2I \times V + \frac{1}{2}I\} \div DE$, id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo *DF* ut quantitas $2I \times V \div DE$, adeoq; etiam ut quantitatis hujus dimidium $I \times V \div DE$. Est autem tempus quo corpus cadendo describit lineolam *DE*, ut lineola illa directe & velocitas *V* inverse, estq; vis ut velocitatis incrementum *I* directe & tempus inverse, adeoq; si primæ nascentium rationes sumantur, ut $I \times V \div DE$, hoc est, ut longitudo *DF*. Ergo vis ipsi *DF* vel *EG* proportionalis facit corpus ea cum velocitate descendere quæ sit ut areæ *ABGE* latus quadratum. Q. E. D.

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* describatur, sit ut velocitas, adeoq; ut areæ *ABFD* latus quadratum inverse; sitq; *DL*, atq; adeo areæ nascens *DLME*, ut idem latus quadratum inverse: erit tempus ut area *DLME*, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea *AE* describitur ut area tota *AME*. Q. E. D.

Corol. 1. Si *P* sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi ui centripeta nota (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunq; cadens acquisivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ sit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *PDRQ*, eiq; æqualis abscindatur area *ABFD*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namq; completo rectangulo *EDRS*, cum sit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut *VV* ad $2V \times I$, adeoq; ut $\frac{1}{2}V$ ad *I*, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintq; incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, adeoq; ut areæ nascentes *DFGE*, *DRSE*; erunt (ex æquo) areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.

Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunq; *D* data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut est latus quadratum rectanguli *PQRD* area curvilinea *DFge* vel aucti, si locus *e* est loco *D*

inferior, vel diminuti, si is superior est, ad latus quadratum rectanguli solius *PQRD*, id est ut √*PQRD* + vel - *DFge* ad √*PQRD*.

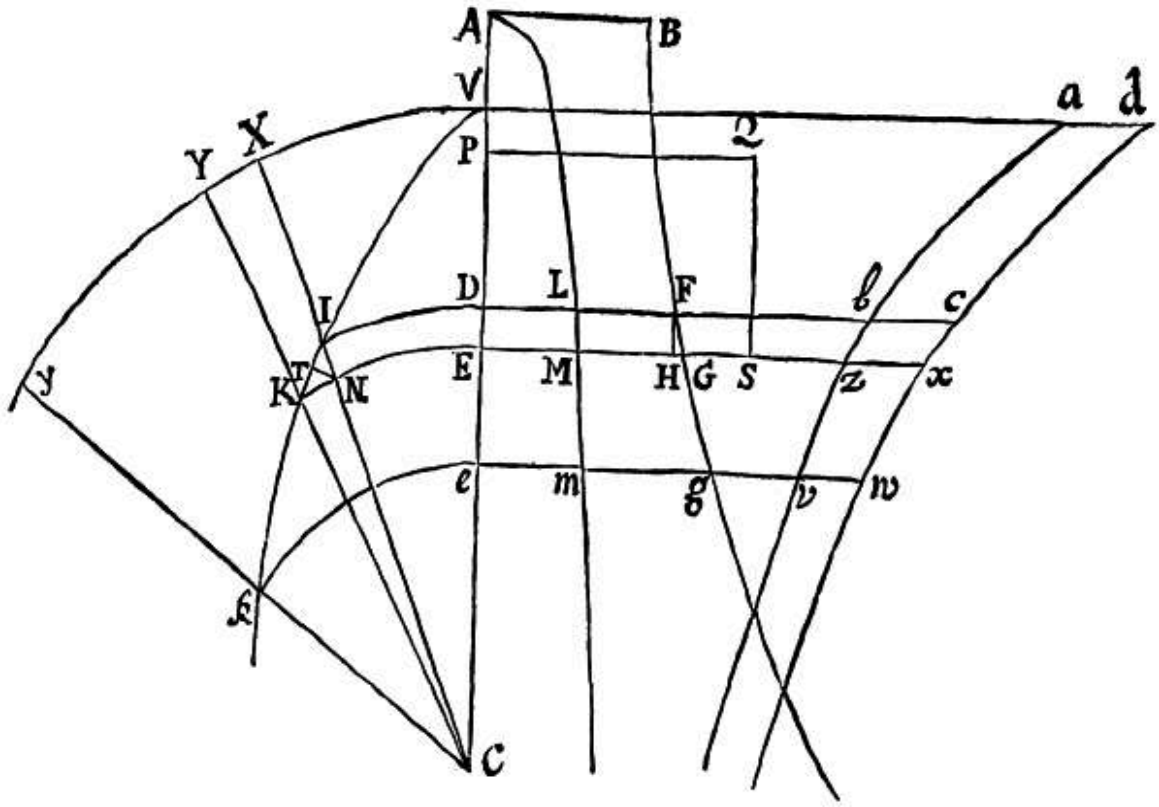
Corol. 3. Tempus quoq; innotescet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex *PQRD* + vel - *DFge*, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum 2*PD* × *DL*. Namq; tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam *PD* est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam *PE* in dimidiata ratione *PD* ad *PE*, id est (lineola *DE* jamjam nascente) in ratione *PD* ad *PD* + ½*DE* seu 2*PD* ad 2*PD* + *DE*, & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam *DE* ut 2*PD* ad *DE*, adeoq; ut rectangulum 2*PE* × *DL* ad aream *DLME*; estq; tempus quo corpus utrumq; descripsit lineolam *DE* ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam *De* ut area *DLME* ad aream *DLme*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum 2*PD* × *DL* ad aream *DLme*.

SECT. VIII.

De Inventione Orbium in quibus corpora viribus quibuscunq; centripetis agitata revolventur.

Prop. XL. Theor. XIII.

Si corpus, cogente vi quacunq; centripeta, moveatur utcunq;, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintq; eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.



Descendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in linea curva *VIKk*. Centro *C* intervallis quibusvis describantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæq; *VIK* in *I* & *K* occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipsi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; sitq; circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocitates æquales. Quoniam distantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & si vis una *IN*, per Legum Corol. 2. resolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo secundum lineam *NT* corporis cursui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietq; ipsum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inq; via curvilinea *ITKk*, progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera *IT*, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) sunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut

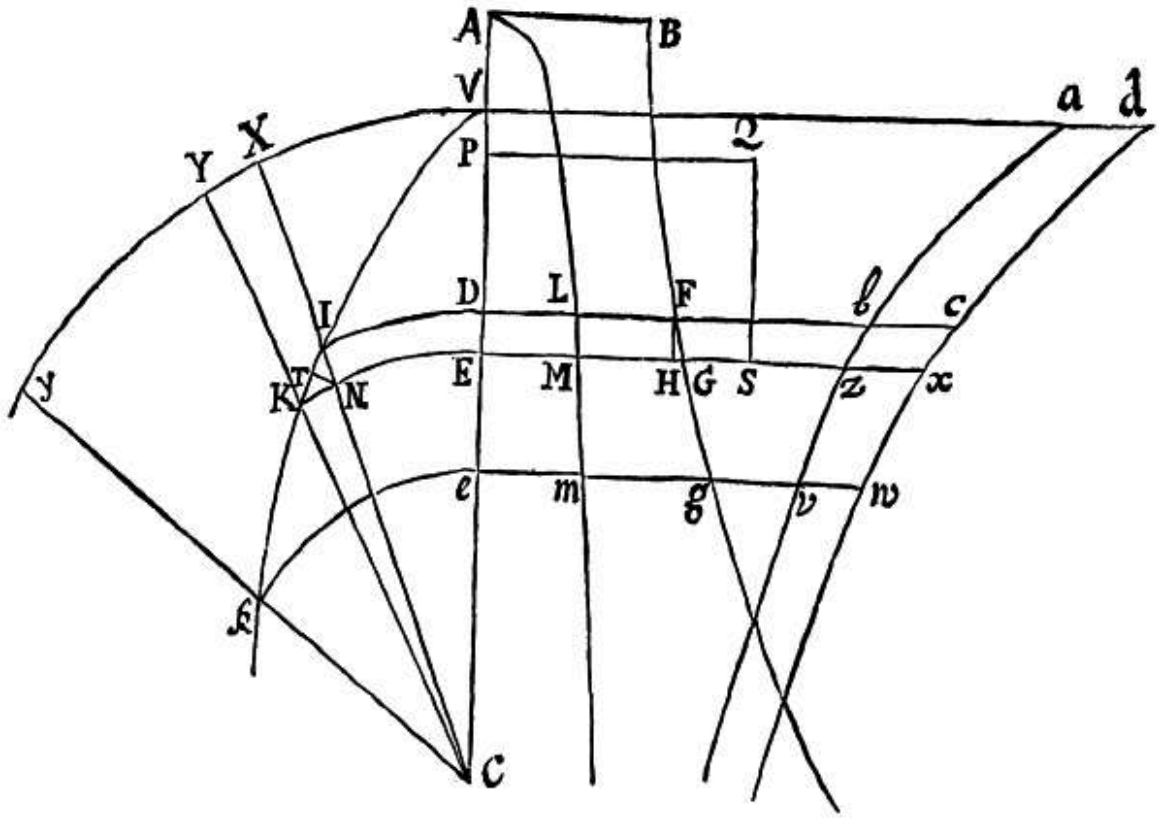
lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ *DE* & *IK*, adeoq; accelerationes, in cursu corporum per lineas *DE* & *IK*, sunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id est ut *DE quad.* & *IT* × *IK* rectangulum. Sed rectangulum *IT* × *IK* æquale est *IN quadrato*, hoc est, æquale *DE quadrato* & propterea accelerationes in transitu corporum a *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in *E* & *K* & eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiis. Q. E. D. Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus vel funipendulum oscilletur, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintq; velocitates eorum in eadem quacunq; altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunq; æqualibus altitudinibus æquales. Namq; impedimento vasis absolute lubrici idem præstatur quod vi transversa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

Corol. 2. Hinc etiam si quantitas *P* sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in Trajectoria quacunq; revolvens, deq; quovis trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitq; quantitas *A* distantia corporis a centro in alio quovis Orbis puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius *A* dignitas quælibet A^{n-}, cujus Index *n* - 1 est numerus quilibet *n* unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine *A* erit ut $\sqrt{nP^n - nA^n}$, atq; adeo datur. Namq; velocitas ascendentis ac descendentis (per Prop. XXXIX.) est in hac ipsa ratione.

Prop. XLI. Prob. XXVIII.

Posita cujuscunq; generis vi centripeta & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in Trajectoriis inventis.

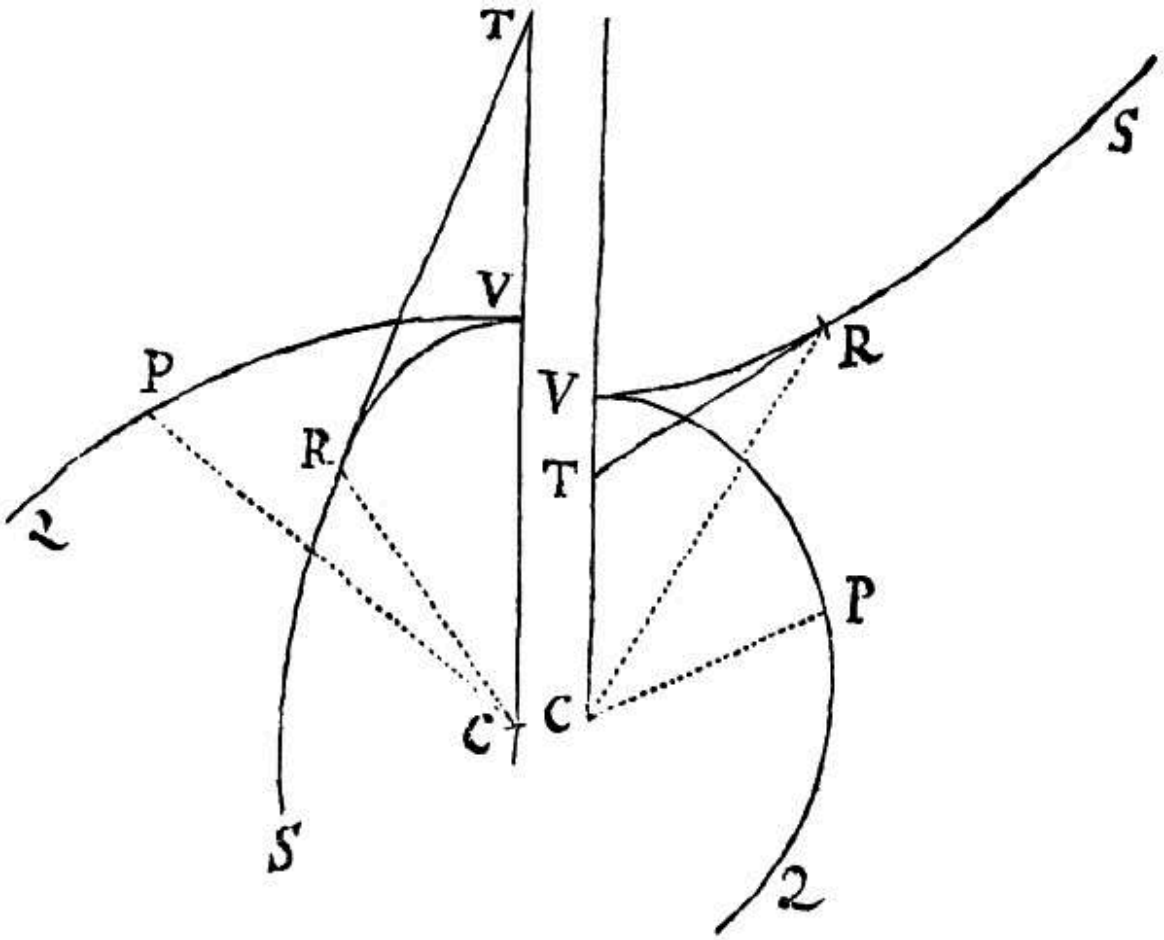


Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda sit Trajectoria *VITKk*. Detur circulus *VXY* centro *C* intervallo quovis *CV* descriptus, centroq; eodem describantur alii quivis circuli *ID*, *KE* trajectoriam secantes in *I* & *K* rectamq; *CV* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* secantem circulos *KE*, *VY* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VXY* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab *V* per *I*, *T* & *K* ad *k*; sitq; *A* altitudo illa de qua corpus aliud cadere debet ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*; & stantibus quæ in Propositione XXXIX, quoniam lineola *IK*, dato tempore quam minimo descripta, est ut velocitas atq; adeo ut latus quadratum areæ *ABFD*, & triangulum *ICK* tempori proportionale datur, adeoq; *KN* est reciproce ut altitudo *IC*, id est, si detur quantitas aliqua *Q*, & altitudo *IC* nominetur *A*, ut $Q \div A$; quam nominemus *Z*. Ponamus eam esse magnitudinem ipsius *Q* ut sit $\sqrt{ABFD}$ in aliquo casu ad *Z* ut est *IK* ad *KN*, & erit semper $\sqrt{ABFD}$ ad *Z* ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad *ZZ* ut *IK quad.* ad *KN quad.* & divisim *ABFD* - *ZZ* ad *ZZ* ut *IN quad.* ad *KN quad.* adeoq; $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad *Z* ut *IN* ad *KN*, & propterea $A \times KN$ æquale $Q \times IN \div \sqrt{ABFD - ZZ}$. Unde cum $YX \times XC$ sit ad $A \times KN$ in duplicata ratione *YC* ad *KC*, erit rectang. $YX \times XC$ æquale $Q \times IN$

× *CX quad.* ÷ *AA* √*ABFD* - *ZZ*. Igitur si in perpendiculo *DF* capiantur semper *Db*, *Dc* ipsis *Q* ÷ 2√*ABFD* - *ZZ* & *Q* × *CX quad.* ÷ 2*AA* √*ABFD* - *ZZ* æquales respective, & describantur curvæ lineæ *ab*, *cd* quas puncta *b*, *c* perpetuo tangunt; deq; puncto *V* ad lineam *AC* erigatur perpendiculum *Vad* abscindens areas curvilineas *VDba*, *VDdc*, & erigantur etiam ordinatæ *Ez*, *Ex*: quoniam rectangulum *Db* × *IN* seu *DbzE* æquale est dimidio rectanguli *A* × *KN*, seu triangulo *ICK*; & rectangulum *Dc* × *IN* seu *Dc* × *E* æquale est dimidio rectanguli *YX* in *CX*, seu triangulo *XCY*; hoc est, quoniam arearum *VDba*, *VIC* æquales semper sunt nascentes particulæ *DbzE*, *ICK*, & arearum *VDcd*, *VCX* æquales semper sunt nascentes particulæ *DExc*, *XCY*, erit area genita *VDba* æqualis areæ genitæ, *VIC*, adeoq; tempori proportionalis, & area genita *VDdc* æqualis Sectori genito *VCX*. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco *V*, dabitur area ipsi proportionalis *VDba*, & inde dabitur corporis altitudo *CD* vel *CI*; & area *VDcd*, eiq; æqualis Sector *VCX* una cum ejus angulo *VCI*. Datis autem angulo *VCI* & altitudine *CI* datur locus *I*, in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc maximæ minimæq; corporum altitudines, id est Apsides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Incidunt enim Apsides in puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam *VIK*: id quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, adeoq; ubi area *ABFD* æqualis est *ZZ*.

Corol. 2. Sed & angulus *KIN*, in quo Trajectoria alibi secat lineam illam *IC*, ex data corporis altitudine *IC* expedite invenitur, nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut *KN* ad *IK*, id est ut *Z* ad latus quadratum areæ *ABFD*.



Corol. 3. Si centro *C* & vertice principali *V* describatur sectio quælibet Conica *VRS*, & a quovis ejus puncto *R* agatur Tangens *RT* occurrens axi infinite producto *CV* in puncto *T*; dein juncta *CR* ducatur recta *CP*, quæ æqualis sit abscissæ *CT*, angulumq; *VCP* Sectori *VCR* proportionalem constituat; tendat autem ad centrum *C* vis centripeta cubo distantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco *V* justa cum velocitate secundum lineam rectæ *CV* perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum *P* perpetuo tangit; adeoq; si conica sectio *CVRS* Hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea Ellipsis sit, ascendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quacunq; cum velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incæperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique ascendere, figura *CVRS* vel Hyperbola sit vel Ellipsis, inveniri potest Trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in data aliqua ratione. Sed et vi centripeta in centrifugam versa, ascendet corpus oblique in Trajectoria *VPQ* quæ invenitur capiendo angulum *VCP* Sectori Elliptico *CVRC* proportionalem, & longitudinem *CP*

longitudini *CT* æqualem: ut supra. Consequuntur hæc omnia ex Propositione præcedente, per Curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem ut satis facilem brevitatis gracia missam facio.

Prop. XLII. Prob. XXIX.

Data lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus Propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco *I* secundum lineolam *IT*, ea cum velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere posset in *D*: sitq; hæc vis uniformis ad vim qua corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus versus *k*; centroq; *C* & intervallo *Ck* describatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *ALMm*, *BFGg*, *abzv*, *dcxw* ordinatim applicatæ *em*, *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo *PDRQ*, dataq; lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ *BFGg*, *ALMm*, per constructionem Problematis XXVIII. & ejus *Corol. 1.* Deinde ex dato angulo *CIT* datur proportio nascentium *IK*, *KN* & inde, per constructionem Prob. XXVIII, datur quantitas *Q*, una cum curvis lineis *abzv*, *dcxw*: adeoq; completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eiq; æqualis Sector *XCy*, angulusq; *XCy* & locus *k* in quo corpus tunc versabitur. Q. E. I.

Supponimus autem in his Propositionibus vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunq; quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undiq; eandem. Atq; hactenus corporum in Orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

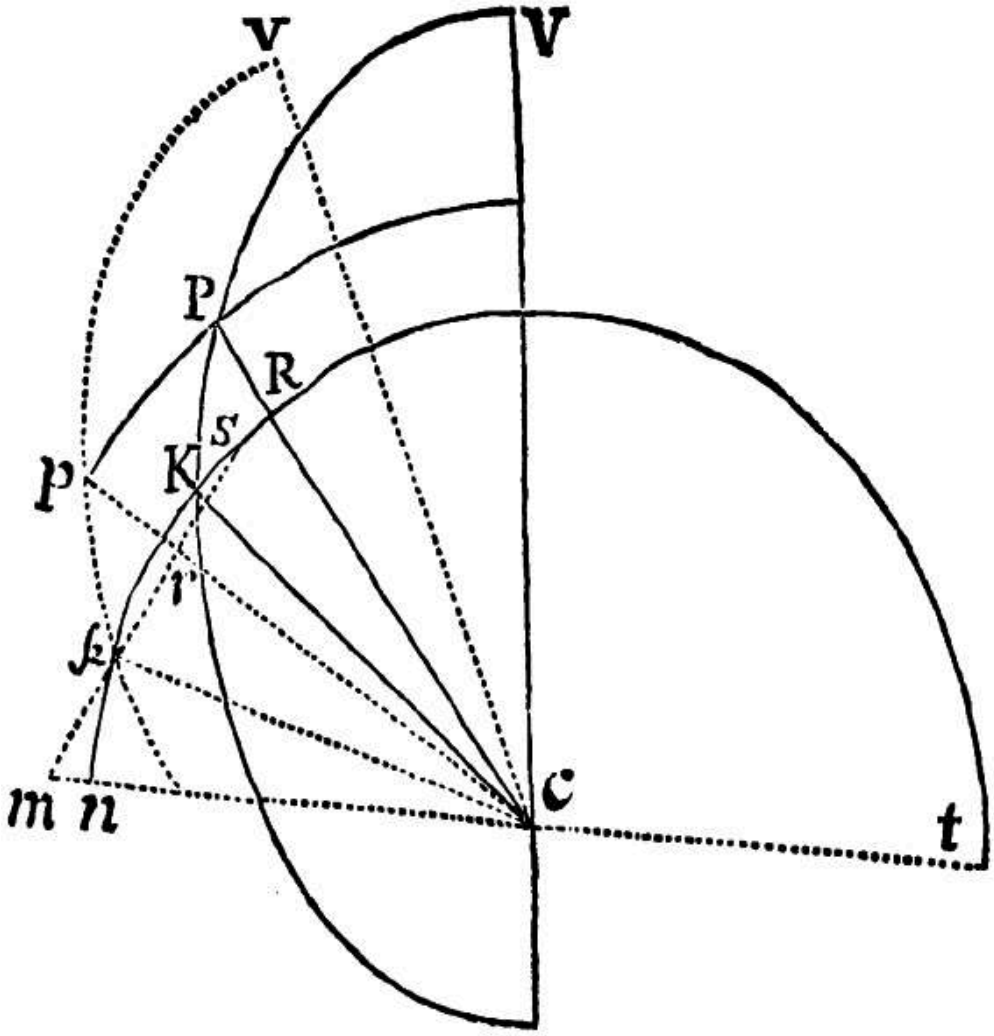
SECT. IX.

De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deq; motu Apsidum.

Prop. XLIII. Prob. XXX.

Efficiendum est ut corpus in Trajectoria quacunq; circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atq; corpus aliud in eadem Trajectoria quiescente.

In Orbe *VPK* positione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* versus *K*. A centro *C* agatur semper *Cp*, quæ sit ipsi *CP* æqualis, angulumq; *VCp* angulo *VCP* proportionalem constituat; & area quam linea *Cp* describit erit ad aream *VCP* quam linea *CP* describit, ut velocitas lineæ describentis *Cp* ad velocitatem lineæ describentis *CP*; hoc est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, adeoq; in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea *Cp* in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripeta, revolvi possit una cum puncto *p* in curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus *VCv* angulo *PCp*, & linea *Cv* lineæ *CV*, atq; figura *vCp* figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p*



semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis *vCp*, eodemq; tempore describet arcum ejus *vp* quo corpus aliud *P* arcum ipsi similem & æqualem *VP* in figura quiescente *VPK* describere potest. Quæratur igitur, per Corollarium Propositionis VI, vis centripeta qua corpus revolvi possit in curva illa linea quam punctum *p* describit in plano immobili, & solvetur Problema. Q. E. F.

Prop. XLIV. Theor. XIV.

Differentia virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.

Partibus orbis quiescentis *VP*, *PK* sunto similes & æquales orbis revolventis partes *vp*, *pk*. A puncto *k* in rectam, *pC* demitte perpendiculum

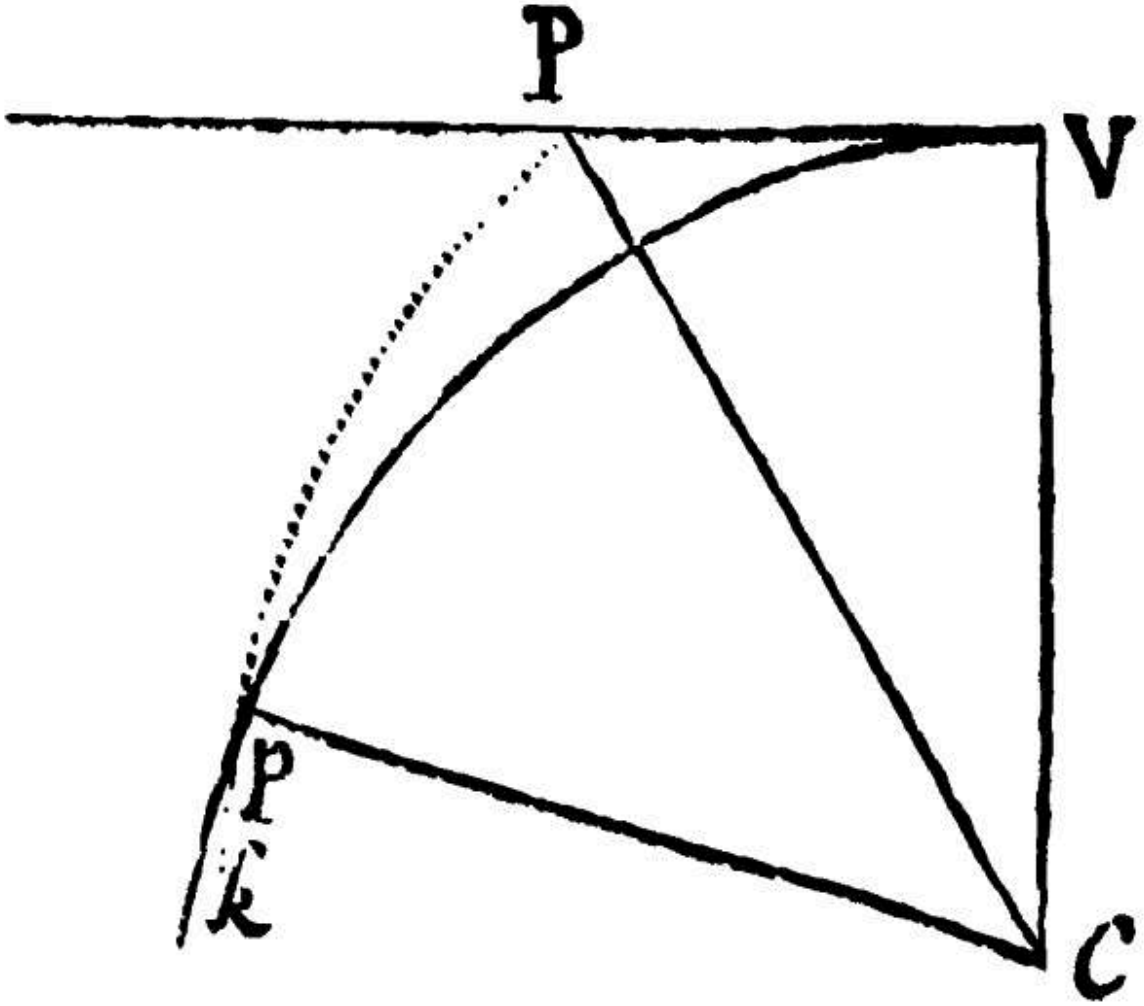
kr, idemq; produc ad *m*, ut sit *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC*, *KC* & *kC* semper æquantur, manifestum est quod si corporum in locis *P* & *p* existentium distinguantur motus singuli (per Legum Corol. 2.) in binos, (quorum hi versus centrum, sive secundum lineas *PC*, *pC*; alteri prioribus transversi secundum lineas ipsis *PC*, *pC* perpendiculares determinantur) motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis *p* erit ad motum transversum corporis *P*, ut motus angularis lineæ *pC* ad motum angularem lineæ *PC*, id est ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Igitur eodem tempore quo corpus *P* motu suo utroq; pervenit ad punctum *K*, corpus *p* æquali in centrum motu æqualiter movebitur a *P* versus *C*, adeoq; completo illo tempore reperietur alicubi in linea *mkr*, quæ per punctum *k* in lineam *pC* perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam a linea *pC*, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum acquirit a linea *PC*, ut est hujus motus transversus ad motum transversum alterius. Quare cum *kr* æqualis sit distantiæ quam corpus alterum acquirit a linea *pC*, sitq; *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, hoc est, ut motus transversus corporis *p* ad motum transversum corporis *P*, manifestum est quod corpus *p* completo illo tempore reperietur in loco *m*. Hæc ita se habebunt ubi corpora *P* & *p* æqualiter secundum lineas *pC* & *PC* moventur, adeoq; æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus *pCn* ad angulum *pCk* ut est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, sitq; *nC* æqualis *kC*, & corpus *p* completo illo tempore revera reperietur in *n*; adeoq; vi majore urgetur, si modo angulus *mCp* angulo *kCp* major est, id est si orbis *Vpk* movetur in consequentia, & minore, si orbis regreditur; estq; virium differentia ut locorum intervallum *mn*, per quod corpus illud *p* ipsius actione, dato illo temporis spatio transferri debet. Centro *C* intervallo *Cn* vel *Ck* describi intelligetur circulus secans lineas *mr*, *mn* productas in *s* & *t*, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoq; *mn* æquale $mk \times ms \div mt$. Cum autem triangula *pCk*, *pCn* dentur magnitudine, sunt *kr* & *mr*, earumq; differentia *mk* & summa *ms* reciproce ut altitudo *pC*, adeoq; rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis *pC*. Est & *mt* directe ut $\frac{1}{2}mt$, id est ut altitudo *pC*. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $mk \times ms \div mt$, id est lineola nascens *mn*, eiq; proportionalis virium differentia reciproce ut cubus altitudinis *pC*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis *P* & *p* vel *K* & *k* est ad vim qua corpus motu circulari revolvi posset ab *r* ad *k*, eodem tempore quo corpus *P* in orbe immobili describit arcum *PK*, ut *mk* × *ms* ad *rk* quadratum; hoc est si capiantur datæ quantitates *F*, *G* in ea ratione ad invicem quam habet angulus *VCP* ad angulum *VCp*, ut *Gq.* - *Fq.* ad *Fq.* Et propterea, si centro *C* intervallo quovis *CP* vel *Cp* describatur Sector circularis æqualis areæ toti *VPC*, quam corpus *P* tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit, differentia virium, quibus corpus *P* in orbe immobili & corpus *p* in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo descripta sit area *VPC*, uniformiter describere potuisset, ut *Gq.* - *Fq.* ad *Fq.* Namq; sector ille & area *pCk* sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis *VPK* Ellipsis sit umbilicum habens *C* & Apsidem summam *V*; eiq; similis & æqualis ponatur Ellipsis *vpk*, ita ut sit semper *pc* æqualis *PC*, & angulus *VCp* sit ad angulum *VCP* in data ratione *G* ad *F*; pro altitudine autem *PC* vel *pc* scribatur *A*, & pro Ellipseos latere recto ponatur 2*R*: erit vis qua corpus in Ellipsi mobili revolvi potest, ut *Fq.* ÷ *Aq.* + {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.* & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipsi per quantitatem *Fq.* ÷ *Aq.*, & vis in *V* erit *Fq.* ÷ *CV quad.* Vis autem qua corpus in circulo ad distantiam *CV* ea cum velocitate revolvi posset quam corpus in Ellipsi revolvens habet in *V*, est ad vim qua corpus in Ellipsi revolvens urgetur in Apside *V*, ut dimidium lateris recti Ellipseos ad circuli semidiametrum *CV*, adeoq; valet *RFq.* ÷ *CV cub.*: & vis quæ sit ad hanc ut *Gq.* - *Fq.* ad *Fq.*, valet {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *CV cub.*: estq; hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium quibus corpus *P* in Ellipsi immota *VPK*, & corpus *p* in Ellipsi mobili *vpk* revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine *A* sit ad seipsam in altitudine *CV* ut 1 ÷ *A cub.* ad 1 ÷ *CV cub.*, eadem differentia in omni altitudine *A* valebit {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.* Igitur ad vim *Fq.* ÷ *Aq.* qua corpus revolvi potest in Ellipsi immobili *VPK*, addatur excessus {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.* & componetur vis tota *Fq.* ÷ *Aq.* + {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.* qua corpus in Ellipsi mobili *vpk* iisdem temporibus revolvi possit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, si orbis immobilis *VPK* Ellipsis sit centrum habens in virium centro *C*; eiq; similis, æqualis & concentrica ponatur Ellipsis mobilis *vpk*, sitq; 2*R* Ellipseos hujus latus

rectum, & 2*T* latus transversum atq; angulus *VCp* semper sit ad angulum *VCP* ut *G* ad *F*; vires quibus corpora in Ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut *Fq.A* ÷ *T cub.* & *Fq.A* ÷ *T cub.* + {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.* respective.



Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur *T*, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur *R*, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunq; immobili *VPK* revolvi potest, in loco *V* dicatur {*Fq.* ÷ *Tq.*} *V*, atq; aliis in locis *P* indefinite dicatur *X*, altitudine *CP* nominata *A*, & capiatur *G* ad *F* in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta qua corpus idem eosdem motus in eadem Trajectoria *vpk* circulariter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium *X* + {*VRGq.* - *VRFq.*} ÷ *A cub.*

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunq; immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data,

& inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturq; *PC*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCp*, qui sit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari potest in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam *Vpk*. Est autem hæc Curva *Vpk* eadem cum Curva illa *VPQ* in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.

Prop. XLV. Prob. XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in Ellipsi mobili, ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel 3. revolvens, describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus Apsides requiruntur, & quærendo Apsides orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum *V* Apsis summa, & scribantur *T* pro altitudine maxima *CV*, *A* pro altitudine quavis alia *CP* vel *Cp*, & *X* pro altitudinum differentia *CV* - *CP*; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum ejus *C* (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæq; in Corollario 2. erat ut $Fq. \div Aq. + \{RGq. - RFq.\} \div A\ cub.$ id est ut $\{Fq.\ A + RGq. - RFq.\} \div A\ cub.$, substituendo *T* - *X* pro *A*, erit ut $\{RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X\} \div A\ cub.$ Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit *A cub.* & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res Exemplis parebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoq; ut $A\ cub. \div A\ cub.$, sive (scribendo *T* - *X* pro *A* in Numeratore) ut $\{T\ cub. - 3Tq.X + 3TXq. - X\ cub.\} \div A\ cub.$; & collatis Numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet

RGq. - *RFq.* + *TFq.* ad *T cub.* ut -*Fq.X* ad -3*Tq.X* + 3*TXq.* - *X cub.* sive ut -*Fq.* ad -3*Tq.* + 3*TX* - *Xq.* Jam cum Orbis ponatur circulo quam maxime finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas *R*, *T* æquales, atq; *X* in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt *RGq.* ad *T cub.* ut -*Fq.* ad -3*Tq.* seu *Gq.* ad *Tq.* ut *Fq.* ad 3*Tq.* & vicissim *G quadrat.* ad *F quadrat.* ut *T quad.* ad 3*T quad.* id est, ut 1 ad 3; adeoq; *G* ad *F*, hoc est angulus *VCp* ad angulum *VCP* ut 1 ad √3. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum *VCP* (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atq; adeo in orbe immobili de quo agimus, ab Abside summa ad Apsidem imam descendendo conficiet angulum *VCp* graduum 180 ÷ √3: id adeo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Apsidem imam conficiet semper angulum 180 ÷ √3 graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* ad centrum; perveniens ab Apside summa ad Apsidem imam, ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens, ubi iterum confecit eundem angulum, & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis *A* dignitas quælibet A^{n-} seu $A^n \div A$: ubi *n* - 3 & *n* significant dignitatum indices quoscunq; integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $T - X^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-} + \{nn - n\}\div 2\ Xq.T^{n-}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius *RGq.* - *RFq.* + *TFq.* - *Fq.X*, fit *RGq.* - *RFq.* + *TFq.* ad T^n ut -*Fq.* ad $-nT^{n-} + \{nn - n\}\div 2\ XT^{n-}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit *RGq.* ad T^n ut -*Fq.* ad $-nT^{n-}$, seu *Gq.* ad T^{n-} ut *Fq.* ad nT^{n-}, & vicissim *Gq.* ad *Fq.* ut T^{n-} ad nT^{n-} id est ut 1 ad *n*; adeoq; *G* ad *F*, id est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad √*n*. Quare cum angulus *VCP*, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam in Ellipsi confectus, sit graduum 180, conficietur angulus *VCp*, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam in Orbe propemodum

circulari, quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^n - proportionali describit, æqualis angulo graduum $180 \div \sqrt{n}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apside ima ad Apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est ut A seu $A \div A$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{4}$ æqualis 2; adeoq; angulus inter Apsidem summam & Apsidem imam æqualis $180 \div 2$ *gr.* seu 90 *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad Apsidem imam, & completa alia quarta parte ad Apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione X. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $1 \div A$ seu $A \div A$, erit $n = 2$, adeoq; inter Apsidem summam & imam angulus erit graduum $180 \div \sqrt{2}$ seu 127 *gr.* 17 *min.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apside summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut Latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis Altitudinis, id est reciproce ut $A^{/}_{4}$, adeoq; directe ut $1 \div A^{/}_{4}$ seu ut $A^{¼} \div A$ erit n æqualis ¼, & $180 \div \sqrt{n}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de Apside summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad Apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad Apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\{bA^m + cA^n\} \div A$ *cub.* id est ut $\{b$ in $T - X^m + c$ in $T - X^n\} \div A$ *cub.* seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut

$bT^m - mbXT^{m-} + \{mm - m\} \div 2\ bXT^{m-} + cT^n - ncXT^{n-} + \{nn - n\} \div 2\ cXT^{n-}$ *&c.*

A cub.

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGq. - RFq. + TFq.$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-Fq.$ ad $-mbT^{m-} - ncT^{n-} + \{mm - m\}\div 2\ XT^{m-} + \{nn - n\}\div 2\ XT^{n-}$ &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $Gq.$ ad $bT^{m-} + cT^{n-}$, ut $Fq.$ ad $mbT^{m-} + ncT^{n-}$, & vicissim $Gq.$ ad $Fq.$ ut $bT^{m-} + cT^{n-}$ ad $mbT^{m-} + ncT^{n-}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T Arithmetice per unitatem, fit $Gq.$ ad $Fq.$ ut $b + c$ ad $mb + nc$, adeoq; ut 1 ad $\{mb + nc\} \div \{b + c\}$. Unde est G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\{\{mb + nc\} \div \{b + c\}\}}$. Et propterea cum angulus VCP inter Apsidem summam & Apsidem imam in Ellipsi immobili sit 180 *gr.* erit angulus VCp inter easdem Apsides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\{bA^m + cA^n\} \div A\ cub.$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\{\{b + c\} \div \{mb + nc\}\}}$. Et eodem argumento si vis centripeta sit ut $\{bA^m - cA^n\} \div A\ cub.$, angulus inter Apsides invenietur $180\sqrt{\{\{b - c\} \div \{mb - nc\}\}}$ graduum. Nec secus resolvetur Problema in casibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes $A\ cub.$ Dein pars data Numeratoris hujus $RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X$ ad partem non datam in eadem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoq; unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu Apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad Apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{nn/}_{mm}{}^{-}$, cujus Index est ${}^{nn}/_{mm} - 3$. Id quod per Exempla secunda manifestum est. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione decrescere non posse: Corpus tali vi revolvens deq; Apside discedens, si cæperit descendere, nunquam perveniet ad Apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usq; ad centrum, describens curvam illam lineam de qua egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cæperit illud de Apside discedens vel minimum ascendere, ascendet in infinitum, neq; unquam perveniet ad Apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de qua actum est in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis in recessu a

centro decrescit in majori quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apside discedens, perinde ut cæperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usq; vel ascendet in infinitum. At si vis in recessu a centro vel decrescat in minori quam triplicata ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunq; Corpus nunquam descendet ad centrum usq; sed ad Apsidem imam aliquando perveniet: & contra, si corpus de Apside ad Apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum, Vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de Apside ad Apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1/_2$ de Apside summa ad Apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit, hoc est, si fuerit *m* ad *n* ut 8 vel 4 vel 2 vel $1/_2$ ad 1, adeoq; $^{nn}/_{mm}$ - 3 ualeat $/_{64}$ - 3 vel $/_{16}$ - 3 vel $/_4$ - 3 vel $/_9$ - 3, erit vis ut $A^{/}{}_{64}{}^{-}$ vel $A^{/}{}_{16}{}^{-}$ vel $A^{/}{}_{4}{}^{-}$ vel $A^{/}{}_{9}{}^{-}$, id est reciproce ut $A^{-/}{}_{64}$ vel $A^{-/}{}_{16}$ vel $A^{-/}{}_{4}$ vel $A^{-/}{}_{9}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad Apsidem eandem immotam, erit *m* ad *n* ut 1 ad 1, adeoq; $A^{nn/}{}_{mm}{}^{-}$ æqualis A^{-} seu $1 \div A$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apsidem eandem redierit, erit *m* ad *n* ut $/_4$ vel $/_3$ vel $/_3$ vel $/_4$ ad 1, adeoq; $A^{nn/}{}_{mm}{}^{-}$ æqualis $A^{/}{}_{9}{}^{-}$ vel $A^{/}{}_{4}{}^{-}$ vel A^{-} vel A^{-} & propterea Vis aut reciproce ut $A^{/}{}_{9}$ vel $A^{/}{}_{4}$, aut directe ut A vel A. Deniq; si Corpus pergendo ab Apside summa ad Apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoq; Apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in Consequentia gradus tres, erit *m* ad *n* ut 363*gr.* ad 360*gr.* adeoq; $A^{nn/}{}_{mm}{}^{-}$ erit æquale $A^{-\div}$, & propterea Vis centripeta reciproce ut $A^{\div}$ seu $A^{/}{}_{243}$. Decrescit igitur Vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $60/_4$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripeta quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per Exempla tertia) motus Apsidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in Ellipsi sit ut $1 \div A$, &

vis extranea ablata ut cA, adeoq; vis reliqua ut $\{A - cA\} \div A$; erit (in Exemplis tertiis) A æqualis 1 & n æqualis 4, adeoq; angulus revolutionis inter Apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\{\{1 - c\} \div \{1 - 4c\}\}}$. Ponatur vim illam extraneam esse 357,45 vicibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipsi, id est c esse $100 \div 35745$, & $180\sqrt{\{\{1 - c\} \div \{1 - 4c\}\}}$ evadet $180\sqrt{\{35645 \div 35345\}}$ seu 180,7602, id est 180*gr.* 45*m.* 37*s.* Igitur corpus de Apside summa discedens, motu angulari 180*gr.* 45*m.* 37*s.* perveniet ad Apsidem imam, & hoc motu duplicato ad Apsidem summam redibit: adeoq; Apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1*gr.* 31*m.* 14*s.*

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunq; datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuscunq; centra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quasq; tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo describunt. Et eadem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

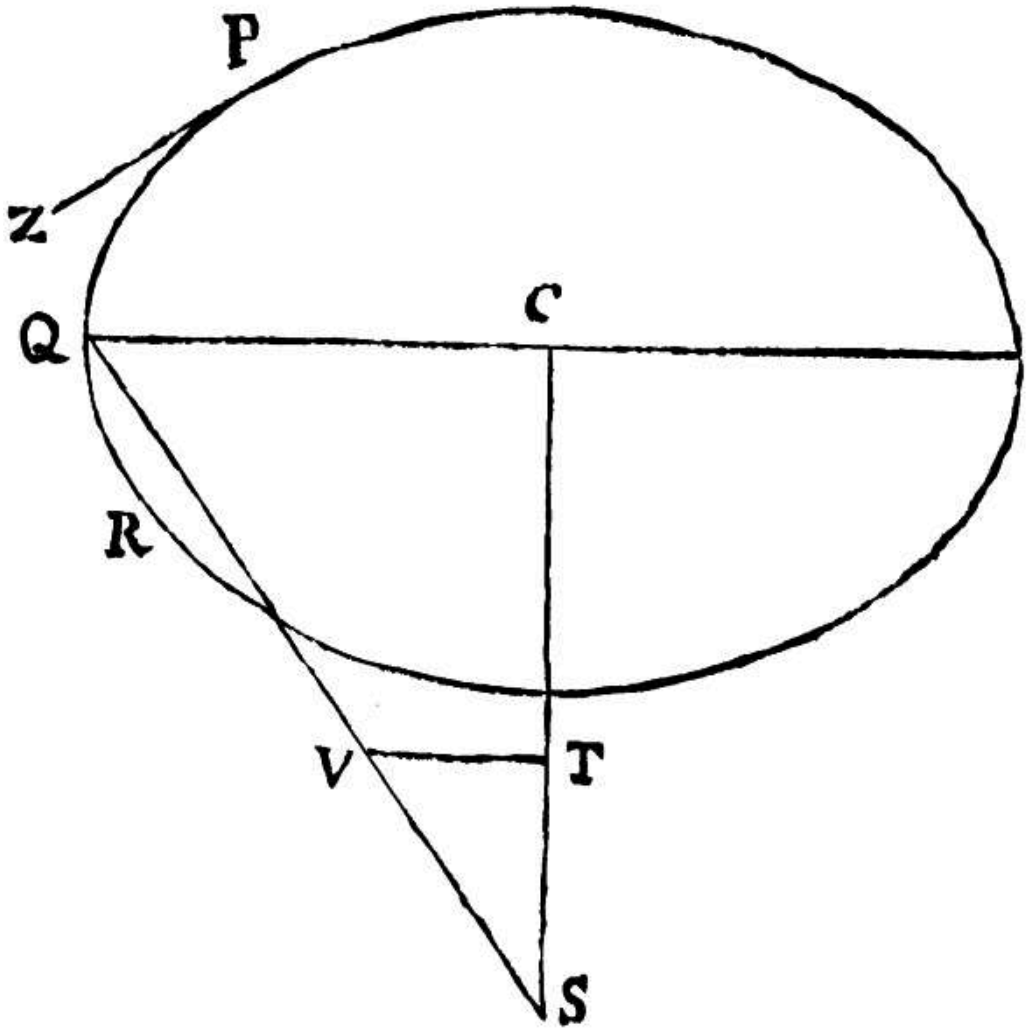
SECT. X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deq; Funipendulorum Motu reciproco.

Prop. XLVI. Prob. XXXII.

Posita cujuscunq; generis vi centripeta, datoq; tum virium centro tum plano quocunq; in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum

quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate secundum Rectam in Plano illo datam egressi.



Sit *S* centrum virium, *SC* distantia minima centri hujus a plano dato, *P* corpus de loco *P* secundum rectam *PZ* egrediens, *Q* corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & *PQR* Trajectoria illa in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur *CQ*, *QS*, & si in *QS* capiatur *SV* proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum *S*, & agatur *VT* quæ sit parallela *CQ* & occurrat *SC* in *T*: Vis *SV* resolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires *ST*, *TV*; quarum *ST* trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera *TV*, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directe versus punctum *C* in plano datum, adeoq; facit illud in hoc plano perinde moveri ac si vis *ST* tolleretur, & corpus vi sola *TV* revolveretur circa centrum *C* in

spatio libero. Data autem vi centripeta *TV* qua corpus *Q* in spatio libero circa centrum datum *C* revolvitur, datur per Prop. XLII. tum Trajectoria *PQR* quam corpus describit, tum locus *Q* in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum deniq; velocitas corporis in loco illo *Q*; & contra. Q. E. I.

Prop. XLVII. Theor. XV.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunq; revolventia describent Ellipses, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæq; moventur in lineis rectis ultro citroq; discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.

Nam stantibus quæ in superiore Propositione; vis *SV* qua corpus *Q* in plano quovis *PQR* revolvens trahitur versus centrum *S* est ut distantia *SQ*; atq; adeo ob proportionales *SV* & *SQ*, *TV* & *CQ*, vis *TV* qua corpus trahitur versus punctum *C* in Orbis plano datum, est ut distantia *CQ*. Vires igitur, quibus corpora in plano *PQR* versantia trahuntur versus punctum *C*, sunt pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora unaquaq; trahuntur versus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iisdem temporibus in iisdem figuris in plano quovis *PQR* circa punctum *C*, atq; in spatiis liberis circa centrum *S*, adeoq; (per Corol. 2. Prop. X. & Corol. 2. Prop. XXXVIII.) temporibus semper æqualibus, vel describent Ellipses in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroq; in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano describi, dein circa axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revolvi, & ea revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique ascendendo & descendendo currant ultro citroq; peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atq; adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ

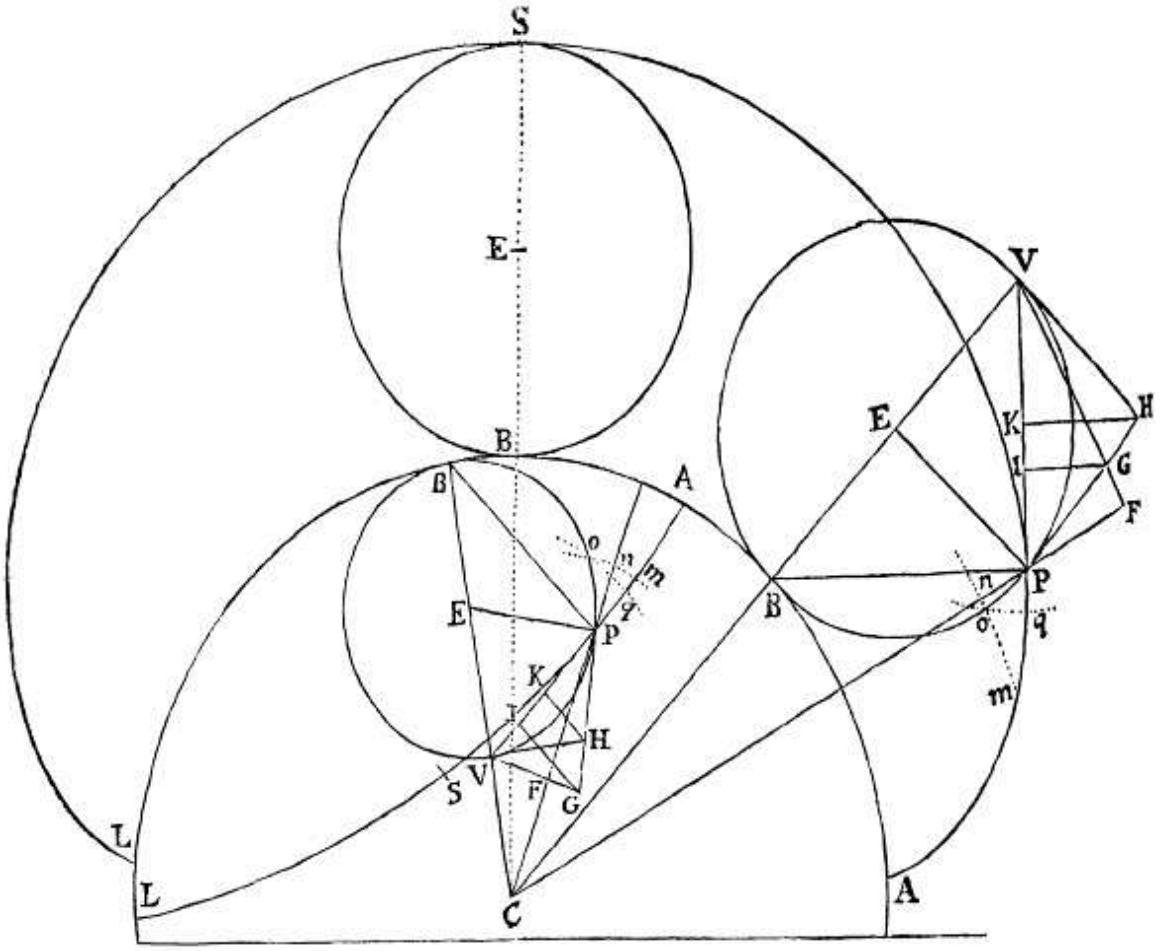
superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

Prop. XLVIII. Theor. XVI.

Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

Prop. XLIX. Theor. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in Rotæ Perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.



Sit *ABL* globus, *C* centrum ejus, *BPV* rota ei insistens, *E* centrum rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo *ABL* ab *A* per *B* versus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* sibi invicem semper æquentur, atq; punctum illud *P* in Perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* via tota curvilinea descripta ex quo Rota globum tetigit in *A*, & erit viæ hujus longitudo *AP* ad duplum sinum versum arcus ½*PB*, ut 2*CE* ad *CB*. Nam recta *CE* (si opus est producta) occurrat Rotæ in *V*, junganturq; *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur Normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, secetq; *PH* ipsam *VF* in *G*, & ad *VP* demittantur Normales *GI*, *HK*. Centro item *C* & intervallo quovis describatur circulus *nom* secans rectam *CP* in *n*, Rotæ perimetrum *Bp* in *o* & viam curvilineam *AP* in *m*, centroq; *V* & intervallo *Vo* describatur circulus secans *VP* productam in *q*.

Quoniam Rota eundo semper revolvitur circa punctum contactus *B*, manifestum est quod recta *BP* perpendicularis est ad lineam illam curvam *AP*, quam Rotæ punctum *P* describit, atq; adeo quod recta *VP* tanget hanc curvam in puncto *P*. Circuli *nom* radius sensim auctus æquetur tandem distantiæ *CP*, & ob similitudinem figuræ evanescentis *Pnomq* & figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evanescentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, id est ratio incrementorum momentaneorum curvæ *AP*, rectæ *CP* & arcus circularis *BP*, ac decrementi rectæ *VP*, eadem erit quæ linearum *PV*, *PF*, *PG*, *PI* respective. Cum autem *VF* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares sunt, anguliq; *HVG*, *VCF* propterea æquales; & angulus *VHP*, (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad *V* & *P* rectos,) complet angulum *VEP* ad duos rectos, adeoq; angulo *CEP* æqualis est, similia erunt triangula *VHG*, *CEP*; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *HV* seu *HP*, & ita *KI* ad *KP*, & divisim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis consequentibus ut *CB* ad 2*CE* ita *PI* ad *PV*. Est igitur decrementum lineæ *VP*, id est incrementum lineæ *BV* - *VP*, ad incrementum lineæ curvæ *AP* in data ratione *CB* ad 2*CE*, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines *BV* - *VP* & *AP* incrementis illis genitæ sunt in eadem ratione. Sed existente *BV* radio, est *VP* cosinus anguli *VPB* seu ½*BEP*, adeoq; *BV* - *VP* sinus versus ejusdem anguli, & propterea in hac Rota cujus radius est ½*BV*, erit *BV* - *VP* duplus sinus versus arcus ½*BP*. Ergo *AP* est ad duplum sinum versum arcus ½*BP* ut 2*CE* ad *CB*. Q. E. D.

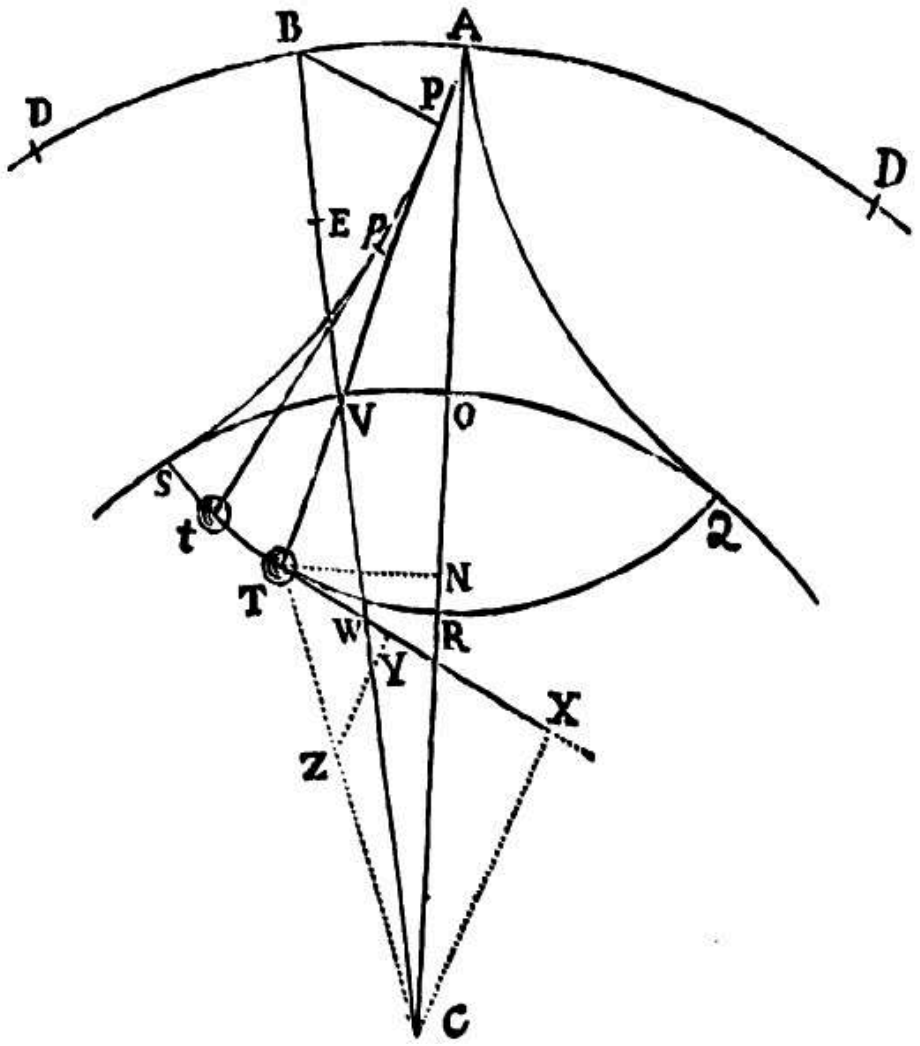
Lineam autem *AP* in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc si describatur Cyclois integra *ASL* & bisecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus est sinus anguli *VBP*, existente *EB* radio) ut 2*CE* ad *CB* atq; adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri Cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad Rotæ diametrum *BV* ut 2*CE* ad *CB*.

Corol. 3. Ideoq; longitudo illa est ut rectangulum *BEC*, si modo Globi detur semidiameter.

Prop. L. Prob. XXXIII.



Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

Intra Globum *QVS* centro *C* descriptum detur Cyclois *QRS* bisecta in *R* & punctis suis extremis *Q* & *S* superficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* bisecans arcum *QS* in *O*, & producatur ea ad *A*, ut sit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* intervallo *CA* describatur Globus exterior *ABD*, & intra hunc globum Rota, cujus diameter sit *AO*, describantur duæ semicycloides *AQ*, *AS*, quæ globum interiorem tangant in *Q* & *S* & globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra semicycloides *AQ*, *AS* oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo *AR*, filum parte sui superiore *AP* applicetur ad semicycloidem illam *APS*, versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteq; reliqua *PT* cui semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oscillabitur in Cycloide data *QRS*. Q. E. F.

Occurrat enim filum *PT* tum Cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in *V*, agaturq; *CV* occurrens circulo *ABD* in *B*; & ad fili partem rectam *PT*, e punctis extremis *P* ac *T*, erigantur perpendicula *PB*, *TW*, occurrentia rectæ *CV* in *B* & *W*. Patet enim ex genesi Cycloidis, quod perpendicula illa *PB*, *TW*, abscindent de *CV* longitudines *VB*, *VW* rotarum diametris *OA*, *OR* æquales, atq; adeo quod punctum *B* incidet in circulum *ABD*. Est igitur *TP* ad *VP* (duplum sinum anguli *VBP* existente ½*BV* radio) ut *BW* ad *BV*, seu *AO* + *OR* ad *AO*, id est (cum sint *CA* ad *CO*, *CO* ad *CR* & divisim *AO* ad *OR* proportionales,) ut *CA* + *CO* seu 2*CE* ad *CA*. Proinde per Corol. 1. Prop. XLIX. longitudo *PT* æquatur Cycloidis arcui *PS*, & filum totum *APT* æquatur Cycloidis arcui dimidio *APS*, hoc est (per Corollar. 2. Prop. XLIX) longitudini *AR*. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini *AR* movebitur punctum *T* in Cycloide *QRS*. Q. E. D.

Corol. Filum *AR* æquatur Cycloidis arcui dimidio *APS*.

Prop. LI. Theor. XVIII.

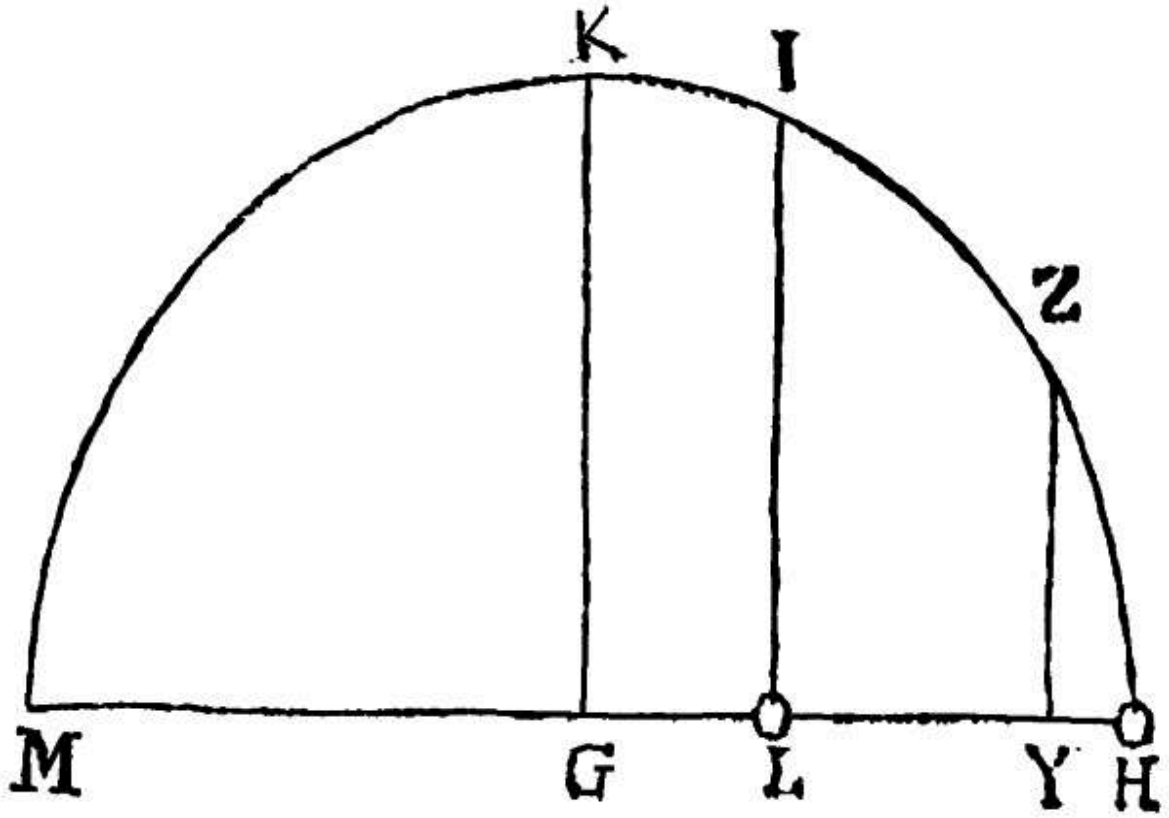
Si vis centripeta tendens undiq; ad Globi centrum C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusq; a centro, & hac sola vi agente Corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis* QRS*: dico quod oscillationum utcunq; inæqualium æqualia erunt Tempora.*

Nam in Cycloidis tangentem *TW* infinite productam cadat perpendiculum *CX* & jungatur *CT*. Quoniam vis centripeta qua corpus *T* impellitur versus *C* est ut distantia *CT*, (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directe a *P* distendit filum *PT* & per cujus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera *TX* urgendo corpus transversim seu versus *X*, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio huic vi acceleratrici proportionalis sit singulis momentis ut longitudo *TX*, id est, ob datas *CV*, *WV* iisq; proportionales *TX*, *TW*, ut longitudo *TW*, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus Cycloidis *TR*. Pendulis igitur duabus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi *TR*, *tR*. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut totæ; & sic deinceps.

Sunt igitur accelerationes atq; adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesq; describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumq; vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eosdem arcus Trochoidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atq; adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum Cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumq; perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. Q. E. D.

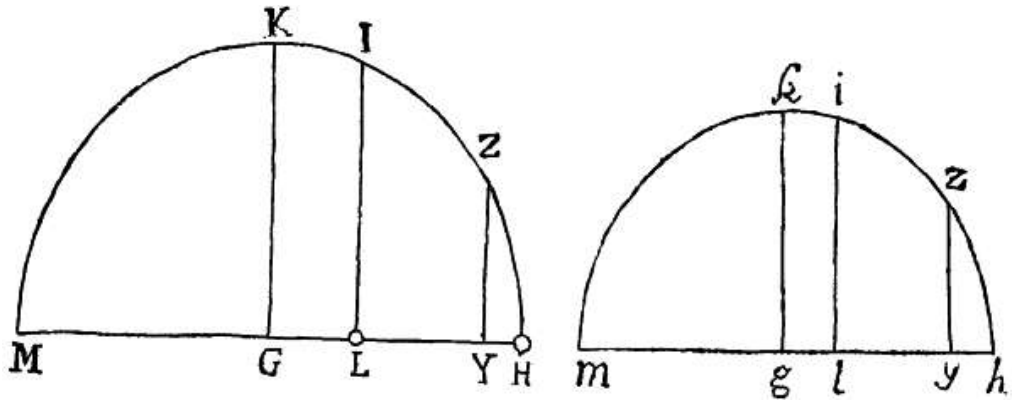
Prop. LII. Prob. XXXIV.

Definire & velocitates Pendulorum in locis singulis, & Tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.



Centro quovis *G*, intervallo *GH* Cycloidis arcum *RS* æquante, describe semicirculum *HKMG* semidiametro *GK* bisectum. Et si vis centripeta

distantiis locorum a centro proportionalis tendat ad centrum *G*, sitq; ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro globi *QOS* (*Vide Fig. Prop. L. & LI.*) ad ipsius centrum tendente; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco supremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis describendis *TR*, *GL* semper proportionales, atq; adeo, si æquantur *TR* & *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa describere spatia *ST*, *HL* æqualia sub initio, adeoq; subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare, per Prop. XXXVIII., tempus quo corpus describit arcum *ST* est ad tempus oscillationis unius, ut arcus *HI* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *L*) ad semicirculum *HKM* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *M*.) Et velocitas corporis penduli in loco *T* est ad velocitatem ipsius in loco infimo *R*, (hoc est velocitas corporis *H* in loco *L* ad velocitatem ejus in loco *G*, seu incrementum momentaneum lineæ *HL* ad incrementum momentaneum lineæ *HG*, arcubus *HI*, *HK* æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata *LI* ad radium *GK*, sive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad *SR*. Unde cum in Oscillationibus inæqualibus describantur æqualibus temporibus arcus totis Oscillationum arcubus proportionales, habentur ex datis temporibus & velocitates & arcus descripti in Oscillationibus universis. Quæ erant primo invenienda.



Oscillentur jam funipendula duo corpora in Cycloidibus inæqualibus & earum semiarcubus æquales capiantur rectæ *GH*, *gh*, centrisq; *G*, *g* & intervallis *GH*, *gh* describantur semicirculi *HZKM*, *hzkm*. In eorum diametris *HM*, *hm* capiantur lineolæ æquales *HY*, *hy*, & erigantur normaliter *YZ*, *yz* circumferentiis occurrentes in *Z* & *z*. Quoniam corpora pendula sub initio motus versantur in circumferentia globi *QOS*, adeoq; a viribus æqualibus urgentur in centrum, incipiuntq; directe versus centrum moveri,

spatia simul consecta æqualia erunt sub initio. Urgeantur igitur corpora *H*, *h* a viribus iisdem in *H* & *h*, sintq; *HY*, *hy* spatia æqualia ipso motus initio descripta, & arcus *HZ*, *hz* denotabunt æqualia tempora. Horum arcuum nascentium ratio prima duplicata est eadem quæ rectangulorum *GHY*, *ghy*, id est, eadem quæ linearum *GH*, *gh* adeoq; arcus capti in dimidiata ratione semidiametrorum denotant æqualia tempora. Est ergo tempus totum in circulo *HKM*, Oscillationi in una Cycloide respondens, ad tempus totum in circulo *hkm* Oscillationi in altera Cycloide respondens, ut semiperiferia *HKM* ad medium proportionale inter hanc semiperiferiam & semiperiferiam circuli alterius *hkm*, id est in dimidiata ratione diametri *HM* ad diametrum *hm*, hoc est in dimidiata ratione perimetri Cycloidis primæ ad perimetrum Cycloidis alterius, adeoq; tempus illud in Cycloide quavis est (per Corol. 3. Prop. XLIX.) ut latus quadratum rectanguli *BEC* contenti sub semidiametro Rotæ, qua Cyclois descripta fuit, & differentia inter semidiametrum illam & semidiametrum globi. Q. E. I. Est & idem tempus (per Corol. Prop. L.) in dimidiata ratione longitudinis fili *AR*. Q. E. I.

Porro si in globis concentricis describantur similes Cycloides: quoniam earum perimetri sunt ut semidiametri globorum & vires in analogis perimetrorum locis sunt ut distantiæ locorum a communi globorum centro, hoc est ut globorum semidiametri, atq; adeo ut Cycloidum perimetri & perimetrorum partes similes, æqualia erunt tempora quibus perimetrorum partes similes Oscillationibus similibus describuntur, & propterea Oscillationes omnes erunt Isochronæ. Cum igitur Oscillationum tempora in Globo dato sint in dimidiata ratione longitudinis *AR*, atq; adeo (ob datam *AC*) in dimidiata ratione numeri $AR \div AC$, id est in ratione integra numeri $\sqrt{\{AR \div AC\}}$; & hic numerus $\sqrt{\{AR \div AC\}}$ servata ratione *AR* ad *AC* (ut fit in Cycloidibus similibus) idem semper maneat, & propterea in globis diversis, ubi Cycloides sunt similes, sit ut tempus: manifestum est quod Oscillationum tempora in alio quovis globo dato, atq; adeo in globis omnibus concentricis sunt ut numerus $\sqrt{\{AR \div AC\}}$, id est, in ratione composita ex dimidiata ratione longitudinis fili *AR* directe & dimidiata ratione semidiametri globi *AC* inverse. Q. E. I.

Deniq; si vires absolutæ diversorum globorum ponantur inæquales, accelerationes temporibus æqualibus factæ, erunt ut vires. Unde si tempora capiantur in dimidiata ratione virium inverse, velocitates erunt in eadem dimidiata ratione directe, & propterea spatia erunt æqualia quæ his

temporibus describuntur. Ergo Oscillationes in globis & Cycloidibus omnibus, quibuscunq; cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex dimidiata ratione longitudinis Penduli directe, & dimidiata ratione distantiæ inter centrum Penduli & centrum globi inverse, & dimidiata ratione vis absolutæ etiam inverse, id est, si vis illa dicatur V, in ratione numeri $\sqrt{\{AR \div \{AC \times V\}\}}$. Q. E. I.

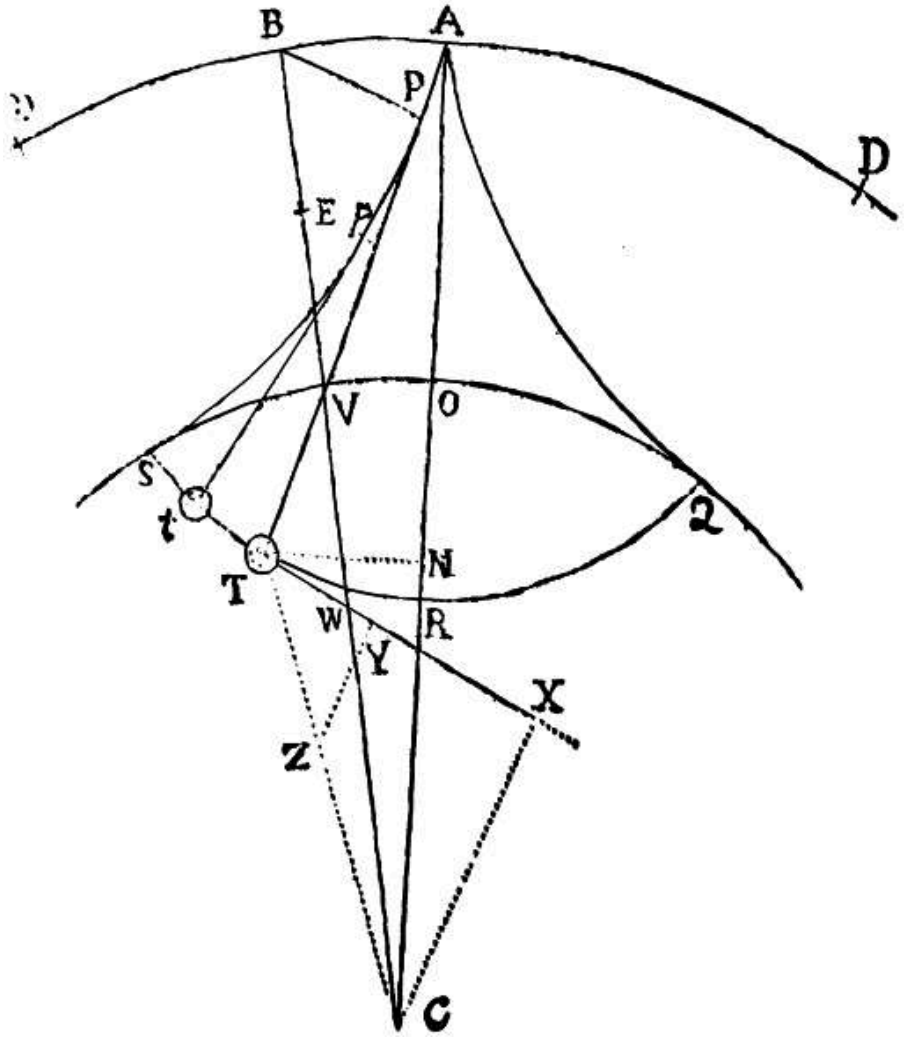
Corol. 1. Hinc etiam Oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si Rotæ, qua Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi transiens, & Oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per Casum secundum) ad tempus semioscillationis in Trochoide quavis APS ut $\frac{1}{2}BC$ ad $\sqrt{BEC}$.

Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *D. C. Wrennus* & *D. C. Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies Sphærica in planum, visq; centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois nostra abibit in Cycloidem vulgi. Isto autem in casu, longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum describens; ut invenit *D. C. Wrennus*: Et pendulum inter duas ejusmodi Cycloides in simili & æquali Cycloide temporibus æqualibus Oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & descensus gravium, tempore Oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem Propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terra suspensa, in Cycloidibus intra globos Oscillari debent, ut Oscillationes omnes evadant Isochronæ. Nam Gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decrescit in progressu a superficie Terræ, sursum quidem in duplicata ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

Prop. LIII. Prob. XXXV.

Concessis figurarum curvilinearum Quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis Oscillationes semper Isochronas peragent.



Oscilletur corpus *T* in curva quavis linea *STRQ*, cujus axis sit *OR* transiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in corporis loco quovis *T* contingat, inq; hac Tangente *TX* capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam longitudo arcus illius ex figurarum Quadraturis per Methodos vulgares innotescit. De puncto *Y* educatur recta *YZ* Tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit vis centripeta proportionalis rectæ *TZ*. Q. E. I.

Nam si vis, qua corpus trahitur de *T* versus *C*, exponatur per rectam *TZ* captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires *TY*, *YZ*; quarum *YZ* trahendo corpus secundum longitudinem fili *PT*, motum ejus nil mutat, vis autem altera *TY* motum ejus in curva *STRQ* directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc sit ut via describenda *TR*, accelerationes corporis

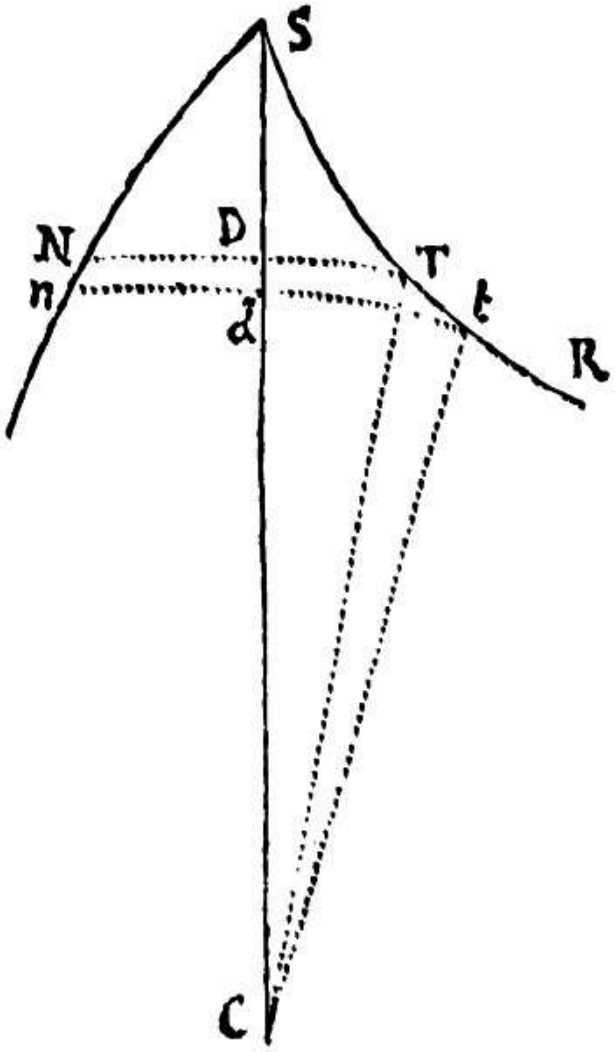
vel retardationes in Oscillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus *T* filo rectilineo *AT* a centro *A* pendens, describat arcum circularem *STRQ*, & interea urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliqua, quæ sit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus sinum *TN*: æqualia erunt Oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, similia erunt triangula *ANT*, *TYZ*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut *TY* ad *TN*; hoc est, si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *AT*, vis *TZ*, qua Oscillationes evadent Isochronæ, erit ad vim gravitatis *AT*, ut arcus *TR* ipsi *TY* æqualis ad arcus illius sinum *TN*.

Corol. 2. Igitur in Horologiis, si vires a Machina in Pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu *TR* & radio *AR*, ad sinum *TN*, Oscillationes omnes erunt Isochronæ.

Prop. LIV. Prob. XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuscunq; curvis in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

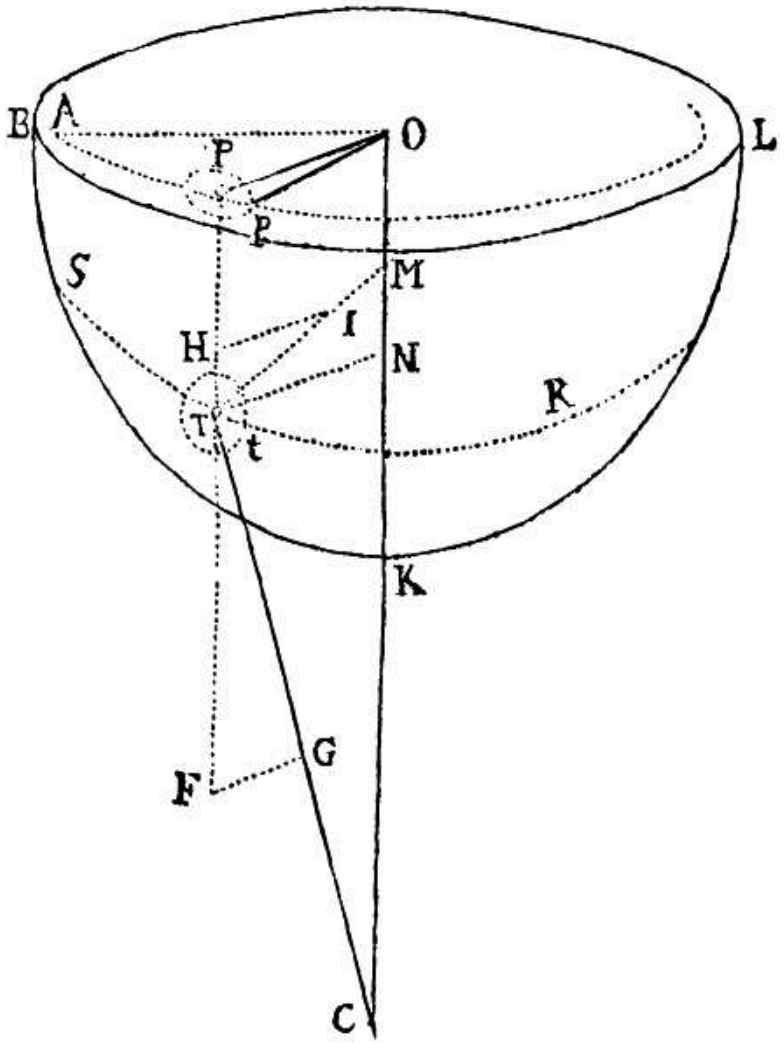


Descendat enim corpus de loco quovis *S* per lineam quamvis curvam *STtR* in plano per virium centrum *C* transeunte datam. Jungatur *CS* & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitq; *Dd* partium illarum aliqua. Centro *C*, intervallis *CD*, *Cd* describantur circuli *DT*, *dt*, Lineæ curvæ *STtR* occurrentes in *T* & *t*. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine *CS* de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine *CT*, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus describit lineolam *Tt*, est ut lineolæ hujus longitudo (id est ut secans anguli *tTC*) directe, & velocitas inverse. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata *DN* ad rectam *CS* per punctum *D* perpendicularis, & ob datam *Dd* erit rectangulum $Dd \times DN$, hoc est area *DNnd*, eidem tempori proportionale. Ergo si *SNn* sit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, erit area

SNDS proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam *ST*; proindeq; ex inventa illa area dabitur tempus. Q. E. I.

Prop. LV. Theor. XIX.

Si corpus movetur in superficie quacunq; curva, cujus axis per centrum virium transit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eiq; parallela & æqualis ab axis puncto quovis ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.



Sit *BSKL* superficies curva, *T* corpus in ea revolvens, *STtR* Trajectoria quam corpus in eadem describit, *S* initium Trajectoriæ, *OMNK* axis superficiei curvæ, *TN* recta a corpore in axem perpendicularis, *OP* huic parallela & æqualis a puncto *O* quod in axe datur educta, *AP* vestigium Trajectoriæ a puncto *P* in lineæ volubilis *OP* plano *AOP* descriptum, *A*

vestigii initium puncto *S* respondens, *TC* recta a corpore ad centrum ducta; *TG* pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum *C* proportionalis; *TM* recta ad superficiem curvam perpendicularis; *TI* pars ejus vi pressionis qua corpus urget superficiem, vicissimq; urgetur versus *M* a superficie, proportionalis; *PHTF* recta axi parallela per corpus transiens, & *GF*, *IH* rectæ a punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demissæ. Dico jam quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo secundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoq; motus ejus quatenus secundum positionem plani factus, hoc est motus puncti *P*, quo Trajectoriæ vestigium *AP* in hoc plano describitur, idem est ac si vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus solis viribus *FG*, *HI* agitaretur, hoc est idem ac si corpus in plano *AOP* vi centripeta ad centrum *O* tendente & summam virium *FG* & *HI* æquante, describeret curvam *AP*. Sed vi tali describetur area *AOP* (per Prop. I.) tempori proportionalis. Q. E. D.

Corol. Eodem argumento si corpus a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta *CO* data tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunq; curvam *ST*, foret area *AOP* tempori semper proportionalis.

Prop. LVI. Prob. XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum Quadraturis, datisq; tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curva cujus axis per centrum illud transit; invenienda est Trajectoria quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, data cum velocitate versus plagam in superficie illa datam egressum.

Stantibus quæ in superiore Propositione constructa sunt, exeat corpus de loco *S* in Trajectoriam inveniendam *STtR* & ex data ejus velocitate in altitudine *SC* dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine *TC*. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, describat corpus Trajectoriæ suæ particulam *Tt*, sitq; *Pp* vestigium ejus plano *AOP* descriptum. Jungatur *Op*, & circelli centro *T* intervallo *Tt* in superficie curva descripti sit *PpQ* vestigium Ellipticum in eodem plano *OAPp* descriptum. Et ob datum

magnitudine & positione circellum, dabitur Ellipsis illa *PpQ*. Cumq; area *POp* sit tempori proportionalis, atq; adeo ex dato tempore detur, dabitur *Op* positione, & inde dabitur communis ejus & Ellipseos intersectio *p*, una cum angulo *OPp*, in quo Trajectoriæ vestigium *APp* secat lineam *OP*. Inde autem invenietur Trajectoriæ vestigium illud *APp*, eadem methodo qua curva linea *VIKk* in Propositione XLI. ex similibus datis inventa fuit. Tum ex singulis vestigii punctis *P* erigendo ad planum *AOP* perpendicula *PT* superficiei curvæ occurrentia in *T*, dabuntur singula Trajectoriæ puncta *T*. Q. E. I.

SECT. XI.

De Motu Corporum Sphæricorum viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neq; attrahens possit quiescere neq; attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per Legum Corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia se mutuo attrahant) hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In Mathematicis enim jam versamur, & propterea missis disputationibus Physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

Prop. LVII. Theor. XX.

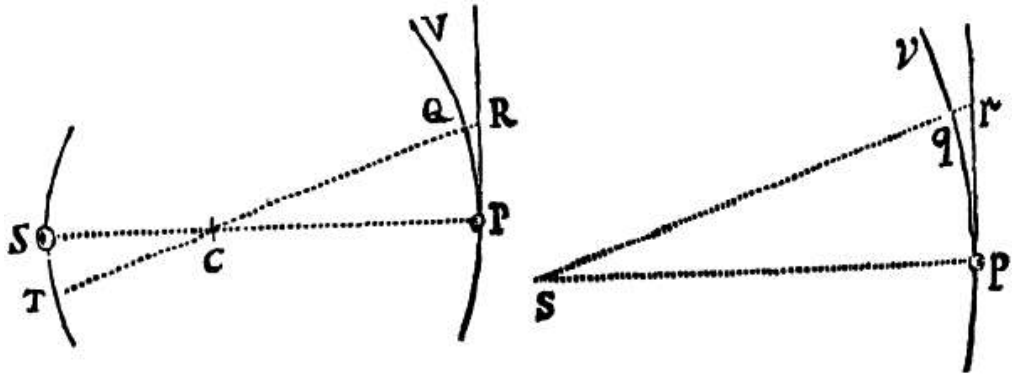
Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, figuras similes.

Sunt enim distantiæ a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atq; adeo in data ratione ad invicem, & componendo, in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eosdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quiescunt vel motu quovis non angulari moventur) describunt omnino similes. Proinde similes sunt figuræ quæ his distantiis circumactis describuntur. Q. E. D.

Prop. LVIII. Theor. XXI.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T* deq; *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipsis *SP*, *TQ* æquales & parallelæ ducantur semper *sp*, *sq*; & curva *pqv* quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, describit, erit similis & æqualis curvis quas corpora *S*, *P* describunt circum se mutuo: proindeq; (per Theor. XX.) similis curvis *ST* & *PQV*, quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum *C*: id adeo quia proportiones linearum *SC*, *CP* & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.



Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per Legum Corollarium quartum, vel quiescit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quiescit, inq; *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in

p, corporibus *S* & *P* similia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* Curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et ob similitudinem figurarum *CPRQ*, *sprq*, erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, adeoq; in data ratione. Proinde si vis qua Corpus *P* versus Corpus *S*, atq; adeo versus centrum intermedium *C* attrahitur, esset ad vim qua corpus *p* versus centrum *s* attrahitur in eadem illa ratione data, hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq*, per intervalla ipsis proportionalia *RQ*, *rq*; adeoq; vis posterior efficeret ut corpus *p* gyraretur in curva *pqv*, quæ similis esset curvæ *PQV*, in qua vis prior efficit ut corpus *P* gyretur, & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem distantiarum *SP*, *sp*) sibi mutuo æquales, corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de Tangentibus; & propterea ut corpus posterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idq; in dimidiata ratione intervallorum; propterea quod, per Lemma decimum, spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* esse ad velocitatem corporis *P* in dimidiata ratione distantiæ *sp* ad distantiam *CP*, eo ut temporibus quæ sint in eadem dimidiata ratione describantur arcus *PQ*, *pq*, qui sunt in ratione integra: Et corpora *P*, *p* viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia *C* & *s* figuras similes *PQV*, *pqv*, quarum posterior *pqv* similis est & æqualis figuræ quam corpus *P* circum corpus mobile *S* describit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium sextum, motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, adeoq; corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, & propterea figuræ *pqv* similes & æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. X.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Ellipses concentricas: & vice versa, si tales figuræ describuntur, sunt vires distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus describunt (per Prop. XI, XII, XIII.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo sectiones conicas umbilicos habentes

in centro circum quod figuræ describuntur. Et vice versa, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

Prop. LIX. Theor. XXII.

Corporum duorum S *&* P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P*, circa alterum immotum* S *gyrantis & figuris quæ corpora circum se mutuo describunt figuram similem & æqualem describentis, in dimidiata ratione corporis alterius* S*, ad summam corporum* S + P.

Namq; ex demonstratione superioris Propositionis, tempora quibus arcus quivis similes *PQ* & *pq* describuntur, sunt in dimidiata ratione distantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc est, in dimidiata ratione corporis *S* ad summam corporum *S* + *P*. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes *PQ* & *pq* describuntur, hoc est tempora tota quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem dimidiata ratione. Q. E. D.

Prop. LX. Theor. XXIII.

Si corpora duo S *&* P*, viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipseos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, Axis transversus erit ad axem transversum Ellipseos, quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S + P *ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum* S.

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica, per Theorema superius, forent in dimidiata ratione corporis *S* ad summam corporum *S* + *P*. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia, Ellipseos autem

axis transversus per Theorema VII. minuetur in ratione cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad $S + P$ est triplicata; adeoq; ad axem transversum Ellipseos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter $S + P$ & S ad $S + P$. Et inverse, axis transversus Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem transversum descriptæ circa immobile, ut $S + P$ ad primam duarum medie proportionalium inter $S + P$ & S. Q. E. D.

Prop. LXI. Theor. XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neq; alias agitata vel impedita, quomodocunq; moveantur; motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumq; a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantiæ corporum a centro illo communi atq; respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium, adeoq; eædem sunt ac si a corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam data est ratio distantiæ corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam corporis ejusdem a corpore altero, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiæ unius ad eandem potestatem distantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujusvis, quæ ex una distantia & quantitatibus datis utcunq; derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera distantia & quantitatibus totidem datis datamq; illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, qua corpus unum ab altero trahitur, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiæ potestas; vel deniq; ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitatibus datis quomodocunq; derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverse ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiæ hujus potestas, vel deniq; ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitatibus datis similiter derivata. Hoc est Vis trahentis eadem erit Lex respectu distantiæ utriusq;. Q. E. D.

Prop. LXII. Prob. XXXVIII.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora, per Theorema novissimum, perinde movebuntur, ac si a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet (per Hypothesin) & propterea (per Legum Corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus Corporum (per Probl. XXV.) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. Q. E. I.

Prop. LXIII. Prob. XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, deq; locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

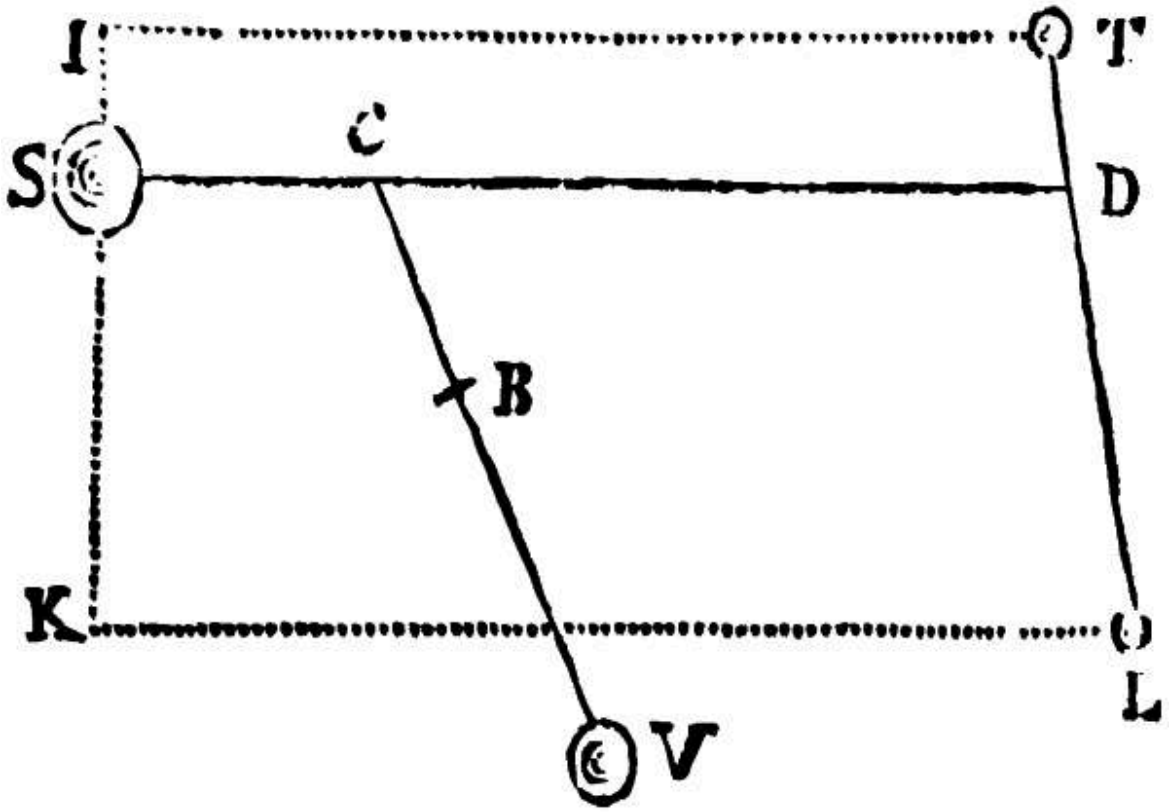
Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per Legum Corollarium quintum & Theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum una cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili de loco dato, secundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus est motus per Problema nonum & vicesimum sextum: & habebitur simul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus est uniformis ille Systematis spatii & corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. Q. E. I.

Prop. LXIV. Prob. XL.

Viribus quibus Corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centris: requiruntur motus plurium Corporum inter se.

Ponantur imprimis corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Describent hæc per Corollarium primum Theorematis XXI.

Ellipses centra habentes in *D*, quarum magnitudo ex Problemate V. innotescit.



Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipsis vicissim trahatur. Vis *ST* per Legum Corol. 2. resolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires autem *DT*, *DL*, quæ sunt ut ipsarum summa *TL*, atq; adeo ut vires acceleratrices quibus corpora *T* & *L* se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori & posterior posteriori, componunt vires distantiis *DT* ac *DL* proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; adeoq; (per Corol. 1. Prop. X. & Corol. 1 & 7. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa describant Ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD*, actionibus motricibus *SD* × *T* & *SD* × *L*, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas *TI*, *LK*, ipsi *DS* parallelas, nil mutant situs earum ad invicem, sed faciunt ipsa æqualiter accedere ad lineam *IK*; quam ductam concipe per medium corporis *S*, & lineæ *DS* perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam *IK* accessus faciendo ut Systema corporum *T* & *L* ex una parte, & corpus *S* ex altera, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum *C*. Tali motu corpus *S* (eo quod summa virium

motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantiæ CS proportionalium, trahitur versus centrum C) describit Ellipsin circa idem C; & punctum D ob proportionales CS, CD describet Ellipsin consimilem, e regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, posterius posteriore) æqualiter & secundum lineas parallelas TI & LK (ut dictum est) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile D Ellipses suas describere, ut prius. Q. E. I.

Addatur jam corpus quartum V, & simili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipses circa omnium commune centrum gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C, sed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita se habent ubi corpora T & L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili describunt. Q. E. I.

Prop. LXV. Theor. XXV.

Corpora plura quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse inter se in Ellipsibus, & radiis ad umbilicos ductis Areas describere temporibus proportionales quam proxime.

In Propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in Ellipsibus accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi posita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus, neq; fieri potest ut corpora secundum legem hic positam se mutuo trahentia moveantur in Ellipsibus accurate, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab Ellipsibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantq; ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum.) vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum,

fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, absq; errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipsibus, atq; radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usq; donec error iste & actiones mutuæ sint datis quibusvis minores, atq; adeo donec orbes cum Ellipsibus quadrent, & areæ respondeant temporibus, absq; errore qui non sit minor quovis dato. Q. E. O.

Cas. 2. Fingamus jam Systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuo revolventium corporum Systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut Systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur efficiunt: manifestum est quod ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum, & augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum minores sint differentiæ & inclinationes ad invicem quam datæ quævis, perseverabunt motus partium Systematis inter se absq; erroribus qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, Systema totum ad modum corporis unius attrahitur, movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum, Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipsim fortiore,) & Radio ad maximum ducto, verret areas temporibus proportionales, absq; ullis erroribus, nisi quas partium distantiæ (perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. Q. E. O.

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium

Systematis inter se, propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorq; proportionis inæqualitas.

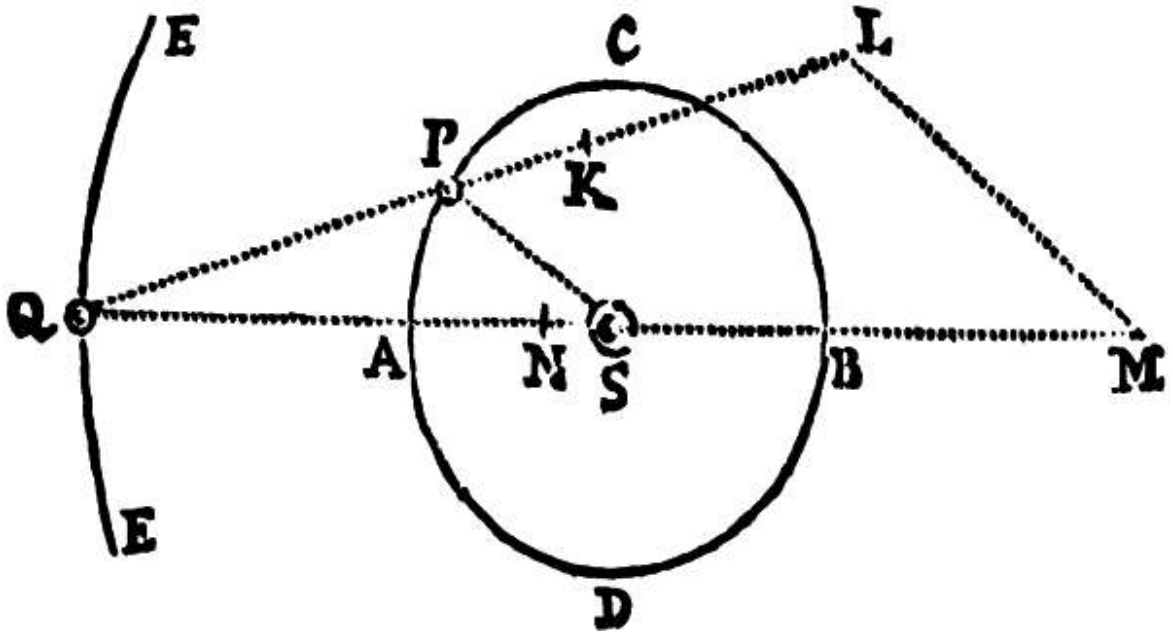
Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Systematis versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo: Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorq; sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si Systematis hujus partes in Ellipsibus vel Circulis sine perturbatione insigni moveantur, manifestum est, quod eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissime, aut urgentur æqualiter & secundum lineas parallelas quamproxime.

Prop. LXVI. Theor. XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum, se mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium sint inter se reciproce ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum in plano communi revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam Ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quam si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonstratione Corollarii secundi Propositionis præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.



Cas. 1. Revolvantur corpora minora *P* & *Q* in eodem plano circa maximum *S*, quorum *P* describat orbem interiorem *PAB*, & *Q* exteriorem *QE*. Sit *QK* mediocris distantia corporum *P* & *Q*; & corporis *P* versus *Q* attractio acceleratrix in mediocri illa distantia exponatur per eandem. In duplicata ratione *QK* ad *QP* capiatur *QL* ad *QK*, & erit *QL* attractio acceleratrix corporis *P* versus *Q* in distantia quavis *QP*. Junge *PS*, eiq; parallelam age *LM* occurrentem *QS* in *M*, & attractio *QL* resolvetur (per Legum Corol. 2.) in attractiones *QM*, *LM*. Et sic urgebitur corpus *P* vi acceleratrice triplici: una tendente ad *S* & oriunda a mutua attractione corporum *S* & *P*. Hac vi sola corpus *P*, circum corpus *S* sive immotum, sive hac attractione agitatum, describere deberet & areas, radio *PS* temporibus proportionales, & Ellipsin cui umbilicus est in centro corporis *S*. Patet hoc per Prob. VI. & Corollaria Theor. XXI. Vis altera est attractionis *LM*, quæ quoniam tendit a *P* ad *S*, superaddita vi priori coincidet cum ipsa, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per Corol. 3. Theor. XXI. At quoniam non est quadrato distantiæ *PS* reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idq; eo magis quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Corol. 1. Prob. VIII. & Corol. 2. Theor. XXI.) vis qua Ellipsis circa umbilicum S describitur tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ *PS* reciproce proportionalis; vis illa composita aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis *PAB* aberret a

forma Ellipseos umbilicum habentis in *S*; idq; eo magis quo major est aberratio ab hac proportione; atq; adeo etiam quo major est proportio vis secundæ *LM* ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia *QM*, trahendo corpus *P* secundum lineam ipsi *QS* parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a *P* in *S*, quæq; ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atq; adeo quæ faciet ut corpus *P*, radio *SP*, areas non amplius temporibus proportionales describet, atq; aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de causa adaugebit, tum quod non dirigitur a *P* ad *S*, tum etiam quod non sit proportionalis quadrato distantiæ *PS*. Quibus intellectis, manifestum est quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod Orbis *PAB* tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipue vis tertia, fit minima, vi prima manente.

Exponatur corporis *S* attractio acceleratrix versus *Q* per lineam *QN*; & si attractiones acceleratrices *QM*, *QN* æquales essent, hæ trahendo corpora *S* & *P* æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (par Legum Corol. 6.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio *QN* minor esset attractione *QM*, tolleret ipsa attractionis *QM* partem *QN*, & maneret pars sola *MN*, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio *QN* major esset attractione *QM*, oriretur ex differentia sola *MN* perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem *QN* reducitur semper attractio tertia superior *QM* ad attractionem *MN*, attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita *PAB* ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est ubi corporum *P* & *S* attractiones acceleratrices, factæ versus corpus *Q*, accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est ubi attractio *QN* non est nulla, neq; minor minima attractionum omnium *QM*, sed inter attractionum omnium *QM* maximam & minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neq; multo minor attractione *QK*. Q. E. D.

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora *P*, *Q* circa maximum *S* in planis diversis, & vis *LM*, agendo secundum lineam *PS* in plano Orbitæ *PAB* sitam, eundem habebit effectum ac prius, neq; corpus *P* de plano Orbitæ suæ deturbabit. At vis altera *NM*, agendo secundum lineam quæ ipsi *QS* parallela est, (atq; adeo, quando corpus *Q* versatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ *PAB*;) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus *P* de plano suæ Orbitæ. Et hæc perturbatio in dato quovis corporum *P* & *S* ad invicem situ, erit ut vis illa generans *MN*, adeoq; minima evadet ubi *MN* est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio *QN* non est multo major neq; multo minor attractione *QK*. Q. E. D.

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod si corpora plura minora *P*, *Q*, *R* &c. revolvantur circa maximum *S*: motus corporis intimi *P* minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *S* pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atq; cæteri a se mutuo.

Corol. 2. In Systemate vero trium corporum *S*, *P*, *Q*; si attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum, corpus *P* radio *PS* aream circa corpus *S* velocius describet prope conjunctionem *A* & oppositionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namq; vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *S* non urgetur, quæq; non agit secundum lineam *PS*, accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in antecedentia vel in consequentia dirigitur. Talis est vis *NM*. Hæc in transitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in antecedentia, motumq; accelerat; dein usq; ad *D* in consequentia, & motum retardat; tum in antecedentia usq; ad *B*, & ultimo in consequentia transeundo a *B* ad *C*.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppositione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P* cæteris paribus curvior est in quadraturis quam in Conjunctione & Oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *NM*, in Conjunctione & Oppositione, contraria est vi qua corpus *S* trahit corpus *P*, adeoq; vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *S*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *S* in quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Hæc ita se habent excluso motu Excentricitatis. Nam si Orbita corporis *P* excentrica sit, Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi Apsides sunt in Syzygiis; indeq; fieri potest ut corpus *P*, ad Apsidem summam appellans, absit longius a corpore *S* in Syzygiis quam in Quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *S*, qua corpus *P* retinetur in Orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augeatur, est autem vis illa centripeta (per Corol. 2, Prop. IV.) in ratione composita ex ratione simplici radii *SP* directe & ratione duplicata temporis periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis *KL*, adeoq; tempus periodicum, si maneat Orbis radius *SP*, augeri, idq; in dimidiata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoq; adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in Radii hujus ratione sesquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus *P* minus semper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro *S*; & contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui *Q*, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices, augebitur simul ac diminuetur Radius *SP* per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione composita ex ratione sesquiplicata Radii & ratione dimidiata qua vis illa centripeta corporis centralis *S* per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui *Q* diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmissis consequitur etiam quod Ellipseos a corpore *P* descriptæ axis seu Apsidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, & in singulis corporis revolutionibus per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis qua corpus *P* urgetur in corpus *S* in Quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi centripeta qua corpus *S* trahit corpus *P*. Vis prior *LM*, si augeatur distantia *PS*, augetur in eadem fere ratione cum hac distantia, & vis posterior decrescit in duplicata illa ratione, adeoq; summa harum virium decrescit in minore quam duplicata ratione distantiæ *PS*, & propterea, per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem seu Apsidem summam regredi. In Conjunctione vero & Oppositione, vis qua corpus *P* urgetur in

corpus *S* differentia est inter vim qua corpus *S* trahit corpus *P* & vim *KL*; & differentia illa, propterea quod vis *KL* augetur quamproxime in ratione distantiæ *PS*, decrescit in majore quam duplicata ratione distantiæ *PS*, adeoq; per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem progredi. In locis inter Syzygias & Quadraturas, pendet motus Augis ex causa utraq; conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis *KL* in Syzygiis sit quasi duplo major quam vis *LM* in quadraturis, excessus in tota revolutione erit penes vim *KL*, transferetq; Augem singulis revolutionibus in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Systema corporum duorum *S*, *P* corporibus pluribus *Q*, *Q*, *Q* &c. in Orbe *QE* consistentibus, undiq; cingi. Namq; horum actionibus actio ipsius *S* minuetur undiq;, decrescetq; in ratione plusquam duplicata distantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ *SP*, in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atq; adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablatitiam *KL* seu *NM* - *LM*, progredientur velocius, inq; Quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicata distantiæ diminutæ: Manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiæ diminutæ, adeoq; Orbem describeret Orbe Elliptico interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoq; si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic Orbis

Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas; & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decrescat. Jam vero in Systemate corporum *S*, *P*, *Q*, ubi Apsides orbis *PAB* sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima fit ubi Apsides sunt in Syzygiis. Si Apsides constituantur in quadraturis ratio prope Apsides minor est, & prope Syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velocissimus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter Apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in Apside ima est ad vim in Apside summa in minore quam duplicata ratione distantiæ Apsidis summæ ab umbilico Ellipseos ad distantiam Apsidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apsides constituuntur in Syzygiis, vis in Apside ima est ad vim in Apside summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires *LM* in Quadraturis additæ viribus corporis *S* componunt vires in ratione minore, & vires *KL* in Syzygiis subductæ viribus corporis *S* relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius in transitu inter Apsides, minima in quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in transitu Apsidum a quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetq; Excentricitatem Ellipseos; inq; transitu a Syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum Orbis *QES* immobile manere; & ex errorum exposita causa manifestum est, quod ex viribus *NM*, *ML*, quæ sunt causa illa tota, vis *ML* agendo semper secundum planum Orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem, quodq; vis *NM* ubi Nodi sunt in Syzygiis, agendo etiam secundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpusq; *P* de plano Orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu corporis a quadraturis ad Syzygias, augetq; vicissim eandem in transitu a Syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatq; ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At si Nodi constituantur in Octantibus post quadraturas, id est inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligetur ex modo expositis quod, in transitu corporis *P* a Nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usq; ad quadraturam

proximam, inclinatio augetur, & postea denuo in transitu per alios 45 gradus, usq; ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaq; diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor est semper in nodo subsequente quam in præcedente. Et simili ratiocinio inclinatio magis augetur quam diminuitur, ubi nodi sunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi Nodi sunt in Syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a Syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad Nodos appulsibus, diminuitur, fitq; omnium minima ubi nodi sunt in quadraturis & corpus in Syzygiis: dein crescit iisdem gradibus quibus antea decreverat, Nodisq; ad Syzygias proximas appulsis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P* ubi nodi sunt in quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis sui, idq; in partem versus *Q*, in transitu suo a nodo *C* per Conjunctionem *A* ad nodum *D*; & in contrariam partem in transitu a nodo *D* per Oppositionem *B* ad nodum *C*; manifestum est quod in motu suo a nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis sui plano primo *CD*, usq; dum perventum est ad nodum proximum; adeoq; in hoc nodo, longissime distans a plano illo primo *CD*, transit per planum Orbis *QES*, non in plani illius Nodo altero *D*, sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *Q*, quodq; proinde novus est Nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergent Nodi recedere in transitu Corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis constituti perpetuo recedunt, in Syzygiis (ubi motus in latitudinem nil perturbatur) quiescunt; in locis intermediis conditionis utriusq; participes recedunt tardius, adeoq; semper vel retrogradi vel stationarii singulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis descripti errores sunt paulo majores in conjunctione Corporum *P*, *Q* quam in eorum Oppositione, idq; ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cumq; rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *Q*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *Q* tanta statuitur magnitudo ut circa ipsum revolvatur corporum duorum *S* & *P* Systema. Et ex aucto corpore *Q*, auctaq; adeo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus distantiis) majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus *Q* circum Systema corporum *P* & *S* revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *Q* longinquum est, sint quamproxime ut vis *QK* & ratio *PS* ad *QS* conjunctim, hoc est, si detur tum

distantia *PS*, tum corporis *Q* vis absoluta, ut *QS cub.* reciproce; sint autem vires illæ *NM*, *ML* causæ errorum & effectuum omnium de quibus actum est in præcedentibus Corollariis: manifestum est quod effectus illi omnes, stante corporum *S* & *P* Systemate, sint quamproxime in ratione composita ex ratione directa vis absolutæ corporis *Q* & ratione triplicata inversa distantiæ *QS*. Unde si Systema corporum *S* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *Q*, vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde si magnitudo corporis *Q* proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *Q* e corpore *S* spectati, & vice versa. Namq; hæ rationes eædem sunt atq; ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus Orbium *QE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & si corporum *Q* & *S* vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc est vis corporis *S*, qua corpus *P* de recto tramite in Orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *Q*, qua corpus idem *P* de Orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo & eadem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunq; corporum magnitudines, vires & distantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Casu colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires *NM*, *ML* cæteris stantibus sunt ut Radius *SP*, & harum effectus periodici (per Corol. 2, Lem. X) ut vires & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *S* spectati (id est tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14. & in quolibet corporum *S*, *P*, *Q* Systemate, ubi *P* circum *S* sibi propinquum, & *S* circum *Q* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *S* apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum

temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *S* inverse. Et inde motus medius Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterq; erit ut tempus periodicum corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *S* inverse. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis *PAB* non mutantur motus Augis & Nodorum sensibiliter, nisi ubi eædem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea *LM* nunc major si nunc minor quam radius *PS*, Exponatur vis mediocris *LM* per radium illum *PS*, & erit hæc ad vim mediocrem *QK* vel *QN* (quam exponere licet per *QS*) ut longitudo *PS* ad longitudinem *QS*. Est autem vis mediocris *QN* vel *QS*, qua corpus retinetur in orbe suo circum *Q*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *S*, in ratione composita ex ratione radii *QS* ad radium *PS*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *S* ad tempus periodicum corporis *S* circum *Q*. Et ex æquo, vis mediocris *LM*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *S* (quave corpus idem *P* eodem tempore periodico circum punctum quodvis immobile *S* ad distantiam *PS* revolvi posset) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia *PS*, datur vis mediocris *LM*; & ea data datur etiam vis *MN* quamproxime per analogiam linearum *PS*, *MN*.

Corol. 18. Iisdem legibus quibus corpus *P* circum corpus *S* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *S* ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *S* concentricum; & singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *S*, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis *Q*, quam in Quadraturis. Et Nodi annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis *Q* vel *S*, quiescent in Syzygiis; extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoq; inclinatio variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaq; revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *S* ex materia non fluida constantem ampliari & extendi usq; ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuq; eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut

in superiore Lemmate) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam superficies Globi, & sic fluet in alveo refluetq; ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quiescens, si tollatur attractio *Q*, nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par est ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum suum (per Legum Corol. 5) ut & Globi de cursa rectilineo uniformiter tracti (per Legum Corol. 6.) Accedat autem corpus *Q*, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorsum in Quadraturis, facietq; ipsam descendere usq; ad Syzygias; & vis *KL* trahet eandem sursum in Syzygiis, sistetq; descensum ejus & faciet ipsam ascendere usq; ad Quadraturas.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat & minuatur Globus, cessabit motus fluendi & refluendi; sed Oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum annulo, gyrosq; compleat iisdem temporibus, & superficie sua contingat ipsum interius, eiq; inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusq; Oscillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in Syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impressum usq; dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatq; motum novum in contrariam partem: Atq; hac ratione maximus decrescentis inclinationis motus fit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus post Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis & maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem est ratio Globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, aucta utcunq; Globi hujus vi centripeta, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atq; adeo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; si

materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si Globus juxta æquatorem vel depressior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim ex motu Nodorum innotescit constitutio Globi. Nimirum si Globus polos eosdem constanter servat & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunq; oblique in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neq; propensior est in unum axem, unumve axis situm, quam in alium quemvis; perspicuum est quod is axem suum axisq; inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique in eadem illa superficiei parte qua prius, impulsu quocunq; novo; & cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est quod hi duo impulsus successive impressi eundem producent motum ac si simul impressi fuissent, hoc est eundem ac si Globus vi simplici ex utroq; (per Legum Corol. 2.) composita impulsus fuisset, atq; adeo simplicem, circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus absq; primo generaret; atq; adeo impulsuum amborum factorum in loca quæcunq;: Generabunt hi eundem motum circularem ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocunq; per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur transeunte dividi intelligatur in duo hemisphæria, urgebit semper vis illa utrumq; hemisphærium æqualiter, & propterea Globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum Globi, facietq; polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumq; sibi oppositum perpetuo describere. Neq;

corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Casu, per Corol. 21, Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione, per Corol. 20, Nodi regredientur; vel deniq; ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur: & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

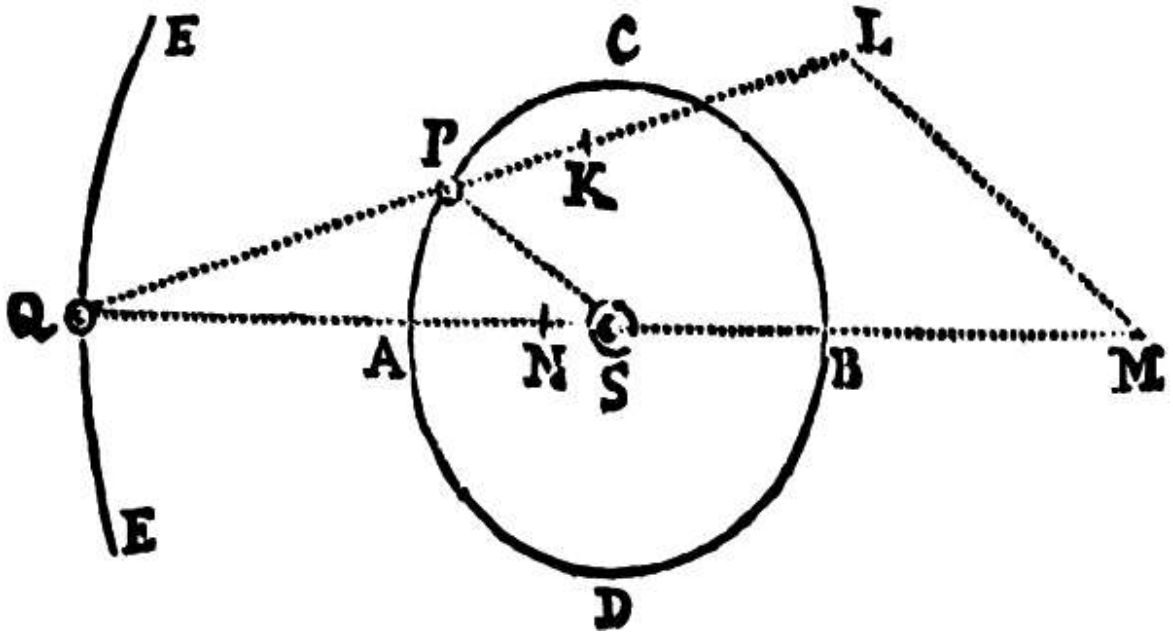
Prop. LXVII. Theor. XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q*, circa interiorum* P*,* S *commune Gravitatis centrum* C*, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* S*, radiis ad ipsum ductis, describere potest.*

Nam corporis *Q* attractiones versus *S* & *P* componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum *S* & *P* commune gravitatis centrum *C*, quam in corpus maximum *S*, quæq; quadrato distantiæ *QC* magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiæ *QS*: ut rem perpendenti facile constabit.

Prop. LXVIII. Theor. XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q *circa interiorum* P *&* S *commune gravitatis centrum* C*, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atq; cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*



Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum in quod corpus *Q* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis illorum duorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *Q* ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII. collatum cum demonstratis in Prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium *Q* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit, hoc est ubi corpus intimum & maximum *S* lege cæterorum attrahitur: fitq; major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *S*, moveri incipit & magis deinceps magisq; agitatur.

Corol. Et hinc si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ descriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directe & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahant agitentq;, & Orbitæ cujusq; umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium

interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum Omnium.

Prop. LXIX. Theor. XXIX.

In Systemate corporum plurium A, B, C, D *&c. si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D *&c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D *&c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente: erunt absolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora* A, B*, quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* versus *A*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi, & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiis; & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem secundam, septimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, sunt (per motus Legem tertiam) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sint reciproce ut Quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D* &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuscunq; distantiarum a

trahente, quæve secundum legem quamcunq; communem ex distantiis ab unoquoq; trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In Systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri potest accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

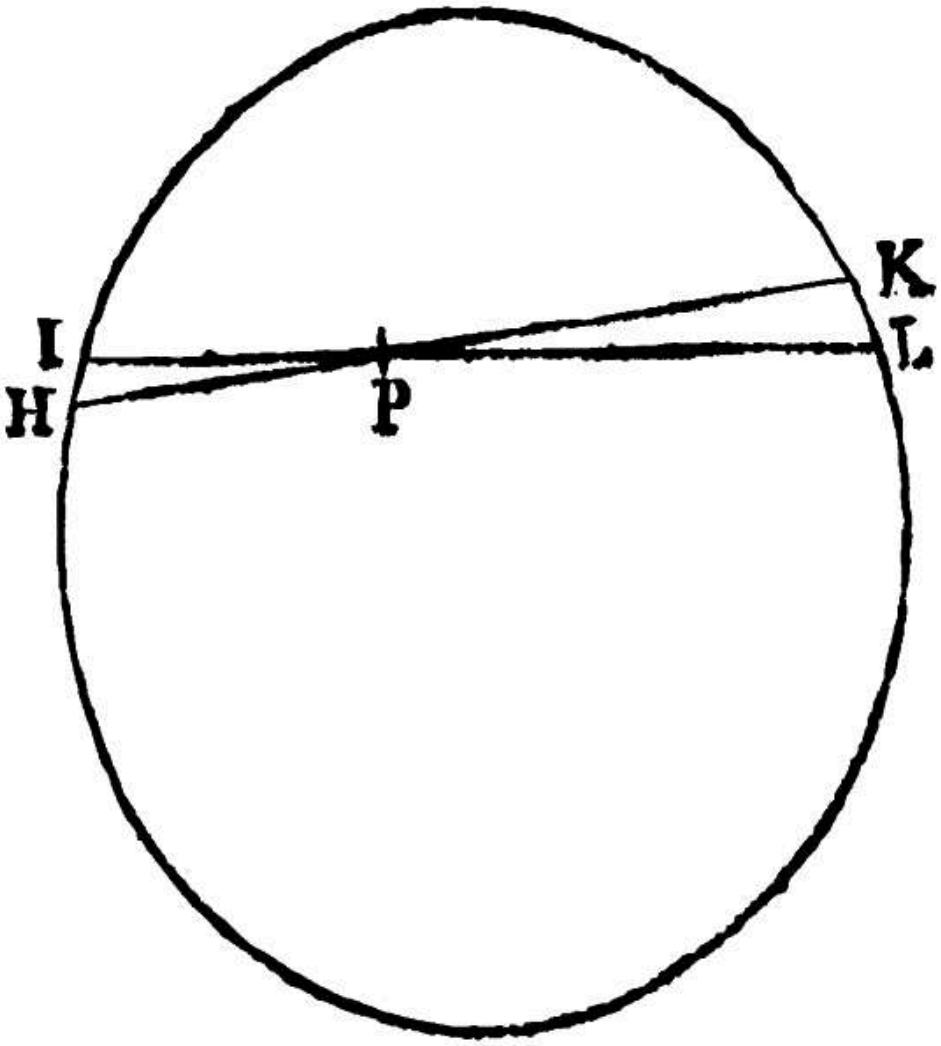
Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunq; accedendi ad invicem; sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per Spiritus emissos se invicem agitantium, sive is ab actione Ætheris aut Aeris mediive cujuscunq; seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunq; impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem impulsus, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens; ut in Definitionibus explicui. In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunq; positis consequentur: deinde ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere, & quales motus inde consequantur.

SECT. XII.

De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

Prop. LXX. Theor. XXX.



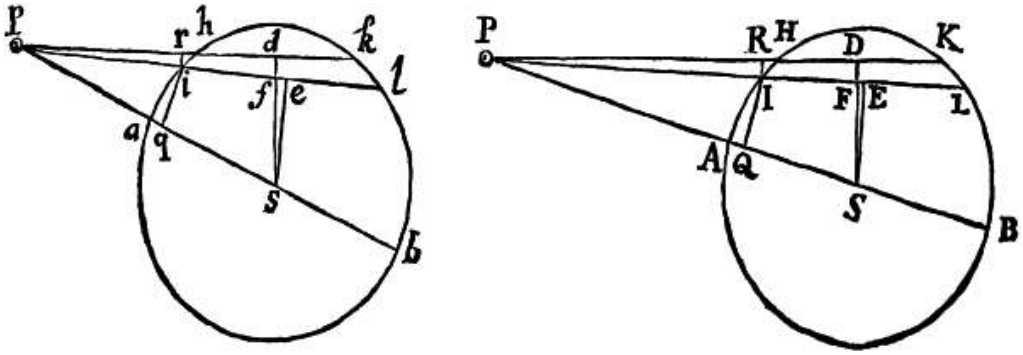
Si ad Sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit *HIKL* superficies illa Sphærica, & *P* corpusculum intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos

HI, *KL* intercipientes; & ob triangula *HPI*, *LPK* (per Corol. 3. Lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantiis *HP*, *LP* proportionales, & superficiei Sphæricæ particulæ quævis, ad *HI* & *KL* rectis per punctum *P* transeuntibus undiq; terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ sunt inter se aquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur in contrarias partes æqualiter factæ se mutuo destruunt. Et simili argumento attractiones omnes per totam Sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.

Prop. LXXI. Theor. XXXI.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum Sphæræ, vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.



Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ superficies Sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* descriptæ, & *P*, *p* corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ *PHK*, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes a circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus quam minimos *HK*, *hk* & *HL*, *hl*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* secent *PL*, *pl* in *F* & *f*. Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*; & ob æquales *DS* & *ds*, *ES* & *es*, & angulos evanescentes *DPE* & *dpe*, lineæ *PE*, *PF* & *pe*, *pf* & lineolæ *DF*, *df* pro æqualibus habeantur: quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dpe* simul evanescentibus, est æqualitatis. His itaq; constitutis, erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, & *pf* ad *pi* ut *DF* vel *df* ad *ri*; & ex æquo *PI* × *pf* ad *PF* × *pi* ut *RI* ad *ri*, hoc est (per Corol. 3. Lem. VII.) ut arcus *IH* ad arcum *ih*. Rursus *PI* ad *PS* ut *IQ* ad *SE*, & *ps* ad *pi* ut *SE* vel

se ad *iq*; & ex æquo *PI* × *ps* ad *PS* × *pi* ut *IQ* ad *iq*. Et conjunctis rationibus *PI quad.* × *pf* × *ps* ad *pi quad.* × *PF* × *PS*, ut *IH* × *IQ* ad *ih* × *iq*; hoc est, ut superficies circularis, quam arcus *IH* convolutione semicirculi *AKB* circa diametrum *AB* describet, ad superficiem circularem, quam arcus *ih* convolutione semicirculi *akb* circa diametrum *ab* describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula *P* & *p*, sunt (per Hypothesin) ut ipsæ superficies applicatæ ad quadrata distantiarum suarum a corporibus, hoc est, ut *pf* × *ps* ad *PF* × *PS*. Suntq; hæ vires ad ipsarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2 resolutione virium) secundum lineas *PS*, *ps* ad centra tendunt, ut *PI* ad *PQ*, & *pi* ad *pq*; id est (ob similia triangula *PIQ* & *PSF*, *piq* & *psf*) ut *PS* ad *PF* & *ps* ad *pf*. Unde ex æquo fit attractio corpusculi hujus *P* versus *S* ad attractionem corpusculi *p* versus *s*, ut *PF* × *pf* × *ps* ÷ *PS* ad *pf* × *PF* × *PS* ÷ *ps*, hoc es ut *ps quad.* ad *PS quad.* Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum *KL*, *kl* descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut *ps quad.* ad *PS quad.*; inq; eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraq; superficies Sphærica, capiendo semper *sd* = *SD* & *se* = *SE*, distingui potest. Et per Compositionem, vires totarum superficierum Sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

Prop. LXXII. Theor. XXXII.

Si ad Spheræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, ac detur ratio diametri Spheræ ad distantiam corpusculi a centro ejus; dico quod vis qua corpusculum attrahitur proportionalis erit semidiametro Sphæræ.

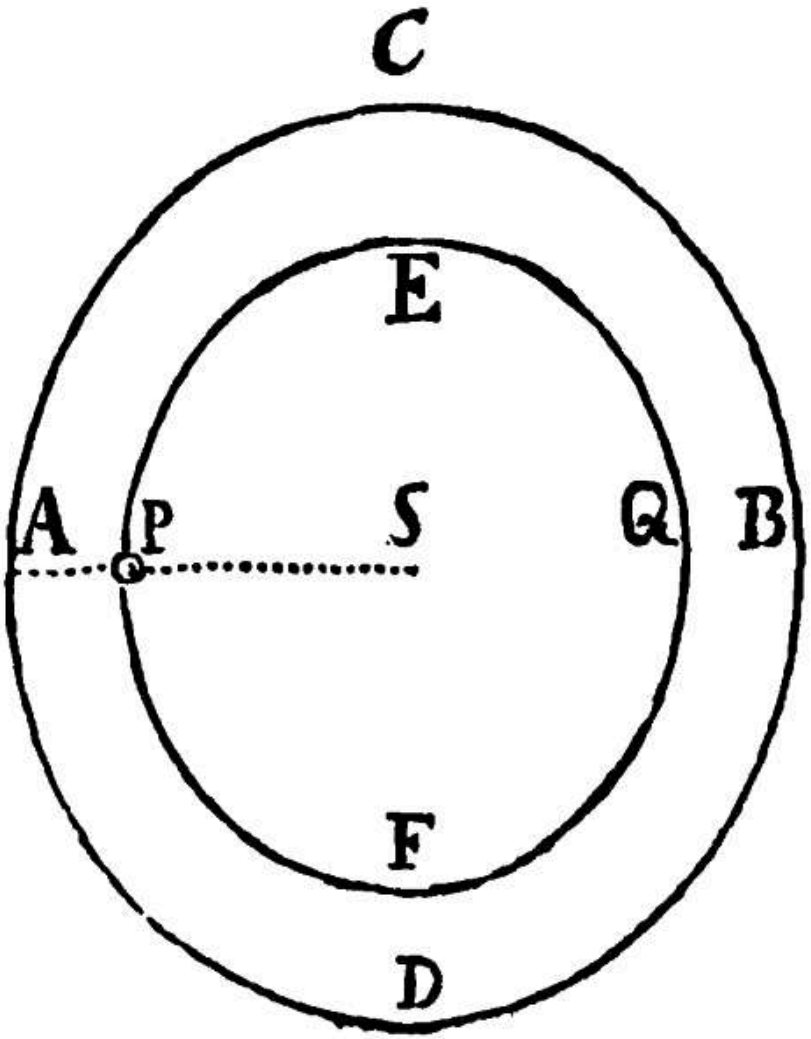
Nam concipe corpuscula duo seorsim a Sphæris duabus attrahi, & distantias a centris proportionales esse diametris, Sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Hinc attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione composita ex ratione particularum directe & ratione duplicata distantiarum inverse. Sed particulæ sunt ut Sphæræ, hoc est in ratione triplicata diametrorum, & distantiæ sunt ut diametri, & ratio prior directe

una cum ratione posteriore bis inverse est ratio diametri ad diametrum. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva constantes revolvantur, sintq; distantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris; tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versa, si tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Theor. IV.

Prop. LXXIII. Theor. XXXIII.



Si ad sphæræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra Sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.

In Sphæra *ABCD*, centro *S* descripta, locetur corpusculum *P*, & centro eodem *S* intervallo *SP* concipe Sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est, per Theor. XXX. quod Sphæricæ superficies concentricæ, ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus *P*. Restat sola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Theor. XXXII, hæc est ut distantia *PS*. Q. E. D.

Scholium.

Superficies ex quibus solida componuntur, hic non sunt pure Mathematicæ, sed Orbes adeo tenues ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum Orbes evanescentes ex quibus Sphæra ultimo constat, ubi Orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum, juxta Methodum sub initio in Lemmatis generalibus expositam. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

Prop. LXXIV. Theor. XXXIV.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur Sphæra in superficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantiæ corpusculi a centro, per Theor. XXXI. Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio Sphæræ totius, in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones sunt ut Sphæræ. Nam per Theor. XXXII. si distantiæ sunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione, & distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoq; erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum extra Sphæram homogeneam positum trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem Sphæra ex particulis attractivis; decrescet vis particulæ cujusq; in duplicata ratione distantiæ a particula.

Prop. LXXV. Theor. XXXV.

Si ad Sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, dico quod Sphæra quævis alia similaris attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantiæ ejus a centro Sphæræ trahentis, (per Theor. XXXI,) & propterea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Theor. XXXIV) reciproce proportionalis quadrato distantiæ ejus a centro Sphæræ; adeoq; huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, versus alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum quas attrahunt.

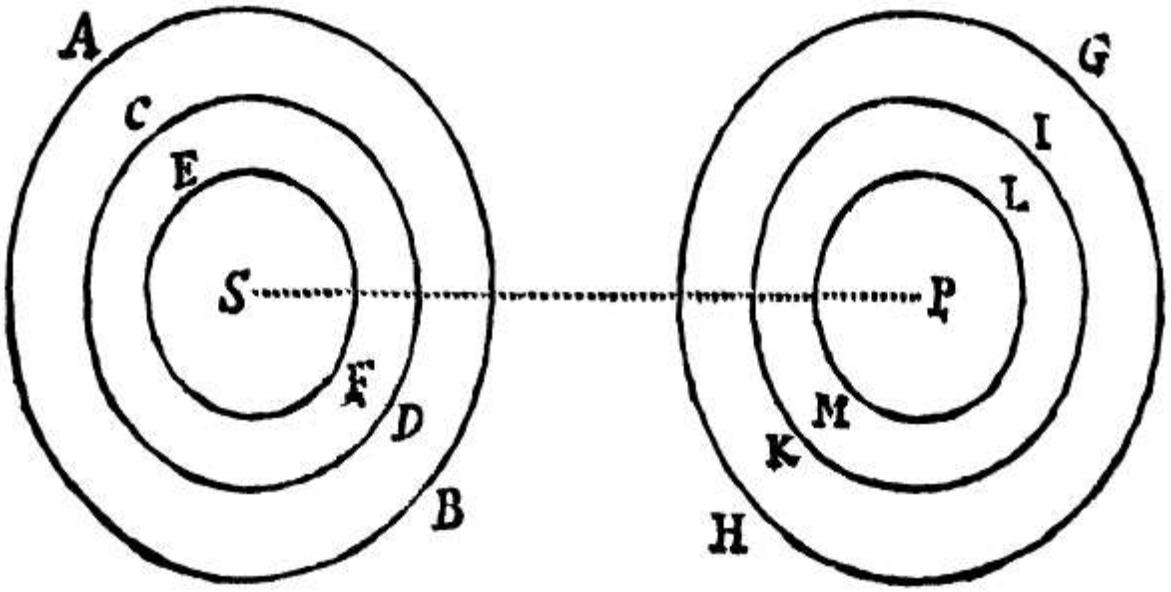
Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namq; hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoq; cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

Prop. LXXVI. Theor. XXXVI.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quod materiæ densitatem & vim attractivam) utcunq; dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undiq; similares, & vis attractiva puncti cujusq; decrescit in duplicata ratione distantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum.



Sunto Sphæræ quotcunq; concentricæ similares *AB*, *CD*, *EF* &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ, per Theor. XXXV, trahent Sphæras alias quotcunq; concentricas similares *GH*, *IK*, *LM*, &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias, hoc est, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuscunq; vel concentricarum differentiis composita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuscunq; vel concentricarum differentiis compositam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum sic, ut materiæ densitas una cum vi attractiva, in progressu a circumferentia ad centrum, secundum Legem quamcunq; crescat vel decrescat: & addita materia non attractiva compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum superius) in eadem illa distantiæ quadratæ ratione inversa. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si ejusmodi Sphæræ complures sibi invicem per omnia similes se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt in æqualibus quibusvis centrorum distantiis ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inq; distantiis quibusvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, seu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ

conjunctim, id est, ut contenta sub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inq; distantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriusq; virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

Corol. 6. Si hujusmodi Sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintq; distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

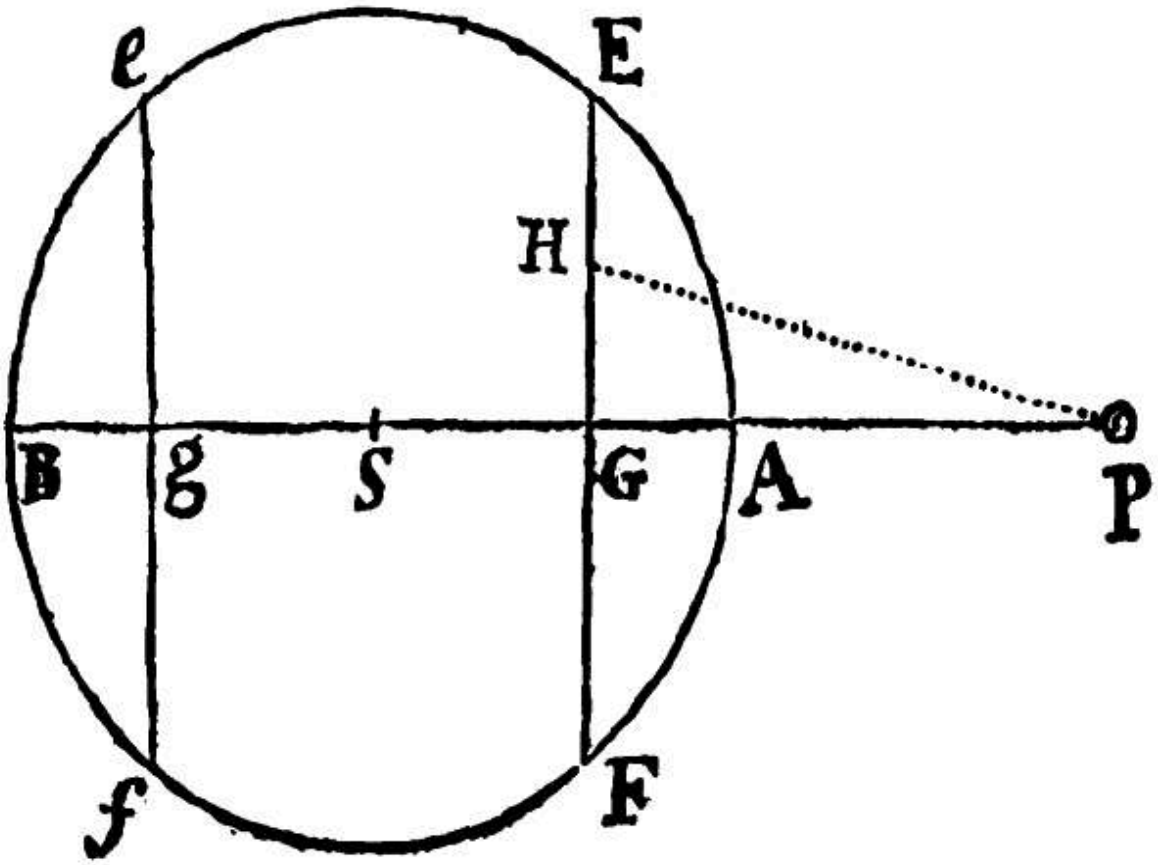
Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia, distantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

Prop. LXXVII. Theor. XXXVII.

Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.



Cas. 1. Sit *ACBD* Sphæra, *S* centrum ejus, *P* corpusculum attractum, *PASB* axis Sphæræ per centrum corpusculi transiens, *EF*, *ef* plana duo quibus Sphæra secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphæræ; *Gg* intersectiones planorum & axis, & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpusculum *P* secundum lineam *PH* exercita est ut distantia *PH*, & (per Legum Corol. 2.) secundum lineam *PG*, seu versus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc est plani totius vis, qua corpusculum *P* trahitur versus centrum *S*, est ut numerus punctorum ductus in distantiam *PG*: id est ut contentum sub plano ipso *EF* & distantia illa *PG*. Et similiter vis plani *ef*, qua corpusculum *P* trahitur versus centrum *S*, est ut planum illud ductum in distantiam suam *Pg*; sive ut huic æquale planum *EF* ductum in distantiam illam *Pg*; & summa virium plani utriusq; ut planum *EF* ductum in summam distantiarum *PG* + *Pg*, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam *PS*, hoc est, ut duplum planum *EF* ductum in distantiam *PS*, vel ut summa æqualium planorum *EF* + *ef* ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in

Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam *PS*, hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui *S* a corpusculo *P*. Q. E. D.

Cas. 2. Trahat jam corpusculum *P* Sphæram *ACBD*. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia *PS*. Q. E. D.

Cas. 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris *P*; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodq; trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atq; adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantiæ inter centra Sphærarum. Q. E. D.

Cas. 4. Trahant Sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. Q. E. D.

Cas. 5. Locetur jam corpusculum *p* intra Sphæram *ACBD*, & quoniam vis plani *ef* in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia *pg*; & vis contraria plani *EF* ut contentum sub plano illo & distantia *pG*; erit vis ex utraq; composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in *pS*, distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Et simili argumento attractio planorum omnium *EF*, *ef* in Sphæra tota, hoc est attractio Sphæræ totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in *pS* distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Q. E. D.

Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris *p* componatur Sphæra nova intra Sphæram priorem *ACBD* sita, probabitur ut prius, quod attractio, sive simplex Sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusq; in se invicem, erit ut distantia centrorum *pS*. Q. E. D.

Prop. LXXVIII. Theor. XXXVIII.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcunq; dissimilares & inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undiq; similares; & vis attractiva puncti cujusq; sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi

Sphæræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiæ inter centra Sphærarum.

Demonstratur ex Propositione præcedente, eodem modo quo Propositio LXXVII. ex Propositione LXXV. demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius in Propositionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum, conditionis jam descriptæ, suntq; corpora attracta Sphæræ conditionis ejusdem.

Scholium.

Attractionum Casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicata distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroq; Casu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum vires centripetas eadem lege in recessu a centro decrescentes vel crescentes cum seipsis. Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset: Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

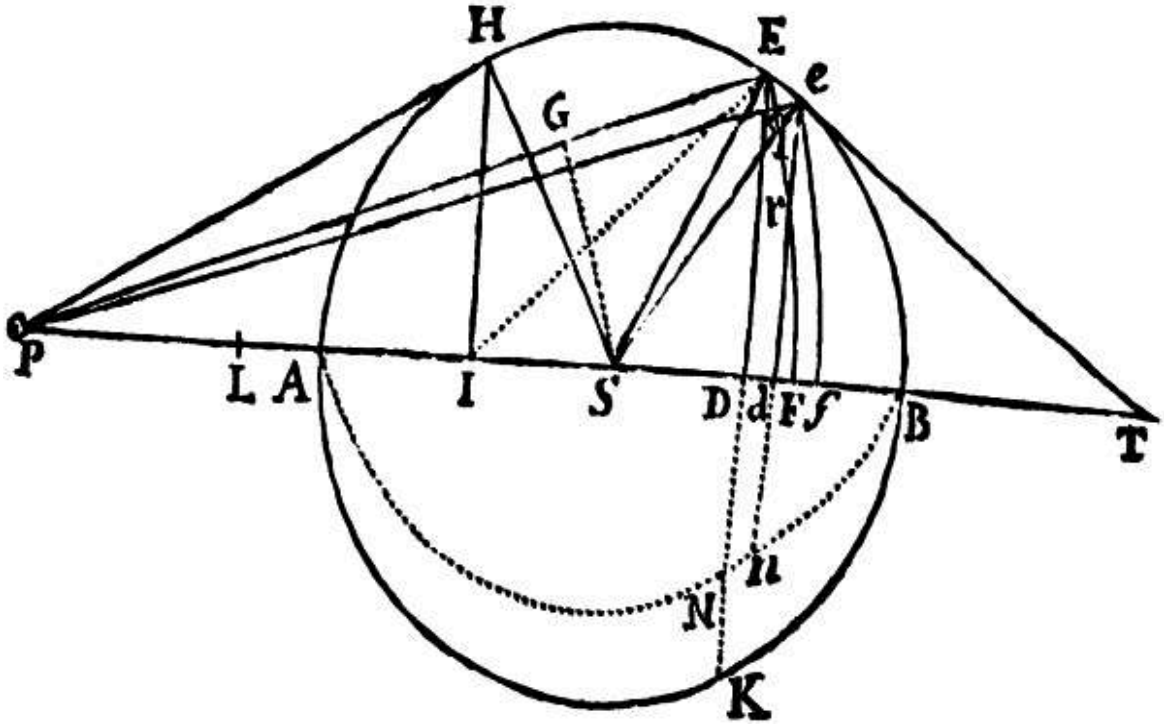
Lemma XXIX.

Si describantur centro S *circulus quilibet* AEB*,* (Vide Fig. Prop. sequentis) *& centro* P *circuli duo* EF*,* ef*, secantes priorem in* E*,* e*, lineamq;* PS *in* F*,* f*; & ad* PS *demittantur perpendicula* ED*,* ed*: dico quod si distantia arcuum* EF*,* ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* Dd *ad lineam evanescentem* Ff *ea sit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam si linea *Pe* secet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evanescente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob similia triangula *EDT*, *edt*, *EDS*; erit *Dd* ad *Ee*, ut *DT* ad *ET* seu *DE* ad *ES*, & ob triangula *Eqe*, *ESG* (per Lem. VIII. & Corol. 3. Lem. VII.) similia, erit *Ee* ad *qe* seu *Ff*, ut *ES* ad *SG*, & ex æquo *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc est (ob similia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. Q. E. D.

Prop. LXXIX. Theor. XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evanescens EFfe*, convolutione sui circa axem* PS*, describat solidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, qua solidum illud trahit corpusculum situm in* P*, est in ratione composita ex ratione solidi* DEq. × Ff *& ratione vis qua particula data in loco* Ff *traheret idem corpusculum.*



Nam si primo consideremus vim superficiei Sphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & linea *de* ubivis secatur in *r*; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente Sphæræ radio *PE*, (uti demonstravit *Archimedes* in Lib. de Sphæra & Cylindro.) Et hujus vis secundum lineas *PE* vel *Pr* undiq; in superficie conica sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola *Dd*, vel quod perinde est, ut rectangulum sub dato Sphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at secundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem minor, in ratione *PD* ad *PE*, adeoq; ut *PD* × *Dd*. Dividi jam intelligatur linea *DF* in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur *Dd*; & superficies *FE* dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium *PD* × *Dd*, hoc est, cum lineolæ omnes *Dd* sibi invicem æquentur,

adeoq; pro datis haberi possint, ut summa omnium *PD* ducta in *Dd*, id est, ut ½*PFq.* - ½*PDq.* sive ½*PEq.* - ½*PDq.* vel ½*DEq.* ductum in *Dd*; hoc est, si negligatur data ½*Dd*, ut *DE quad.* Ducatur jam superficies *FE* in altitudinem *Ff*; & fiet solidi *EFfe* vis exercita in corpusculum *P* ut *DEq.* × *Ff*: puta si detur vis quam particula aliqua data *Ff* in distantia *PF* exercet in corpusculum *P*. At si vis illa non detur, fiet vis solidi *EFfe* ut solidum *DEq.* × *Ff* & vis illa non data conjunctim. Q. E. D.

Prop. LXXX. Theor. XL.

Si ad Sphæræ alicujus AEB*, centro* S *descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem* AB*, in quo corpusculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis singulis* D *perpendicula* DE*, Sphæræ occurrentia in* E*, & in ipsis capiantur longitudines* DN*, quæ sint ut quantitas* DEq. × PS ÷ PE *& vis quam Sphæræ particula sita in axe ad distantiam* PE *exercet in corpusculum* P *conjunctim: dico quod vis tota, qua corpusculum* P *trahitur versus Sphæram, est ut area comprehensa sub axe Sphæræ* AB *& linea curva* ANB*, quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim stantibus quæ in Lemmate & Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem Sphæræ *AB* dividi in particulas innumeras æquales *Dd*, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas *EFfe*; & erigatur perpendiculum *dn*. Per Theorema superius, vis qua lamina *EFfe* trahit corpusculum *P* est ut *DEq.* × *Ff* & vis particulæ unius ad distantiam *PE* vel *PF* exercita conjunctim. Est autem per Lemma novissimum, *Dd* ad *Ff* ut *PE* ad *PS*, & inde *Ff* æqualis *PS* × *Dd* ÷ *PE*; & *DEq.* × *Ff* æquale *Dd* in *DEq.* × *PS* ÷ *PE*, & propterea vis laminæ *EFfe* est ut *Dd* in *DEq.* × *PS* ÷ *PE* & vis particulæ ad distantiam *PF* exercita conjunctim, hoc est (ex Hypothesi) ut *DN* × *Dd*, seu area evanescens *DNnd*. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus *P* exercitæ, ut areæ omnes *DNnd*, hoc est Sphæræ vis tota ut area tota *ABNA*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, & fiat *DN* ut *DEq.* × *PS* ÷ *PE*: erit vis tota qua corpusculum a Sphæra attrahitur, ut area *ABNA*.

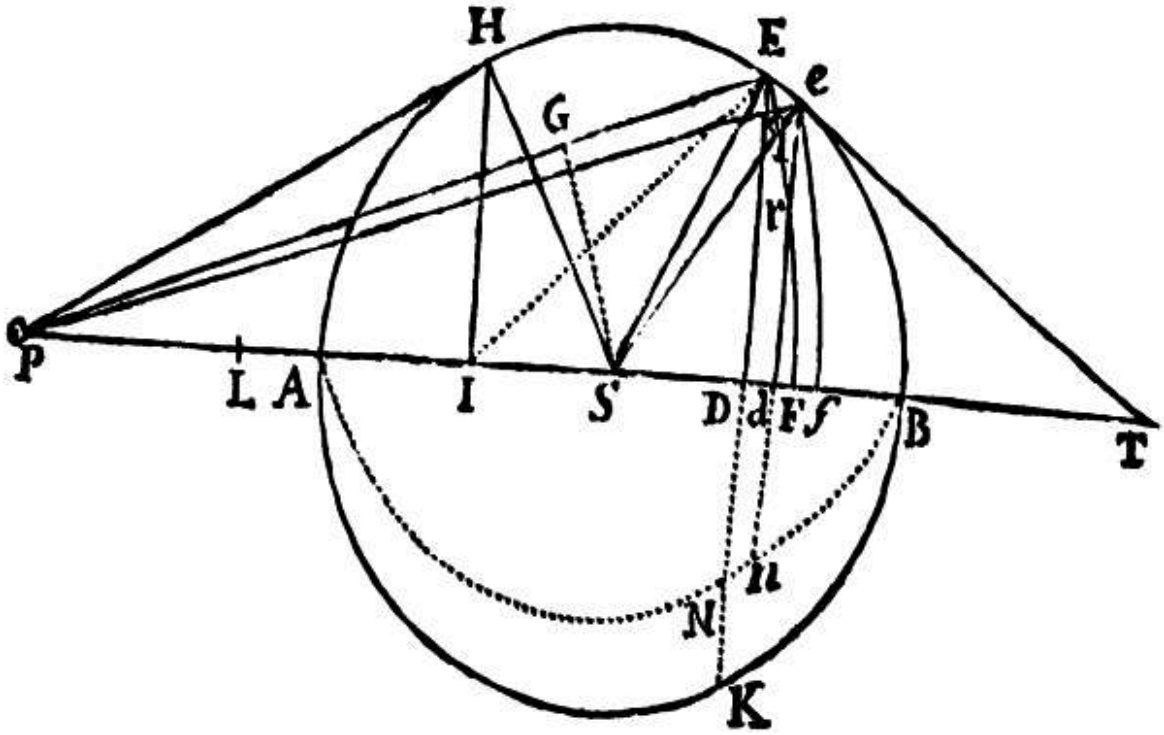
Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut distantia corpusculi a se attracti, & fiat *DN* ut *DEq.* × *PS* ÷ *PEq.*: erit vis qua

corpusculum *P* a Sphæra tota attrahitur ut area *ABNA*.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut cubus distantiæ corpusculi a se attracti, & fiat *DN* ut *DEq.* × *PS* ÷ *PEqq.*: erit vis qua corpusculum a tota Sphæra attrahitur ut area *ABNA*.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas *V*, fiat autem *DN* ut {*DEq.* × *PS*} ÷ {*PE* × *V*}; erit vis qua corpusculum a Sphæra tota attrahitur ut area *ABNA*.

Prop. LXXXI. Prob. XLI.



Stantibus jam positis, mensuranda est Area ABNA.

A puncto *P* ducatur recta *PH* Sphæram tangens in *H*, & ad axem *PAB* demissa Normali *HI*, bisecetur *PI* in *L*; & erit (per Pro, Lib. 2. Elem.) *PEq.* æquale *PSq.* + *SEq.* + 2*PSD*. Est autem *SEq.* seu *SHq.* (ob similitudinem triangulorum *SPH*, *SHI*) æquale rectangulo *PSI*. Ergo *PEq.* æquale est contento sub *PS* & *PS* + *SI* + 2*SD*, hoc est, sub *PS* & 2*LS* + 2*SD*, id est, sub *PS* & 2*LD*. Porro *DE quad.* æquale est *SEq.* - *SDq.* seu *SEq.* - *LSq.* + 2*SLD* - *LDq.* id est, *SLD* - *LDq.* - *ALB*. Nam *LSq.* - *SEq.* seu *LSq.* - *SAq.* (per Pro Lib. 2. Elem) æquatur rectangulo *ALB*. Scribatur itaq; 2*SLD* - *LDq.* - *ALB*

pro *DEq.* & quantitas $\{DEq. \times PS\} \div \{PE \times V\}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ *DN*, resolvet sese in tres partes

$2SLD \times PS$

-

$LDq. \times PS$

-

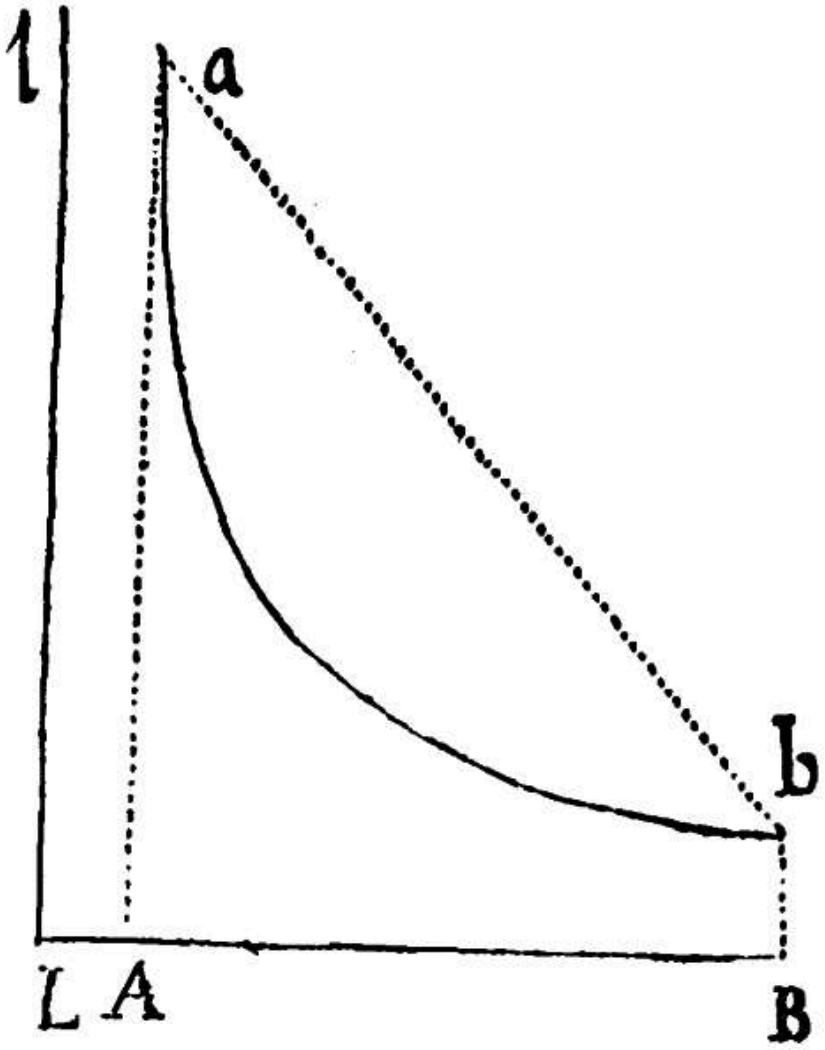
$ALB \times PS$

:

$PE \times V$

$PE \times V$

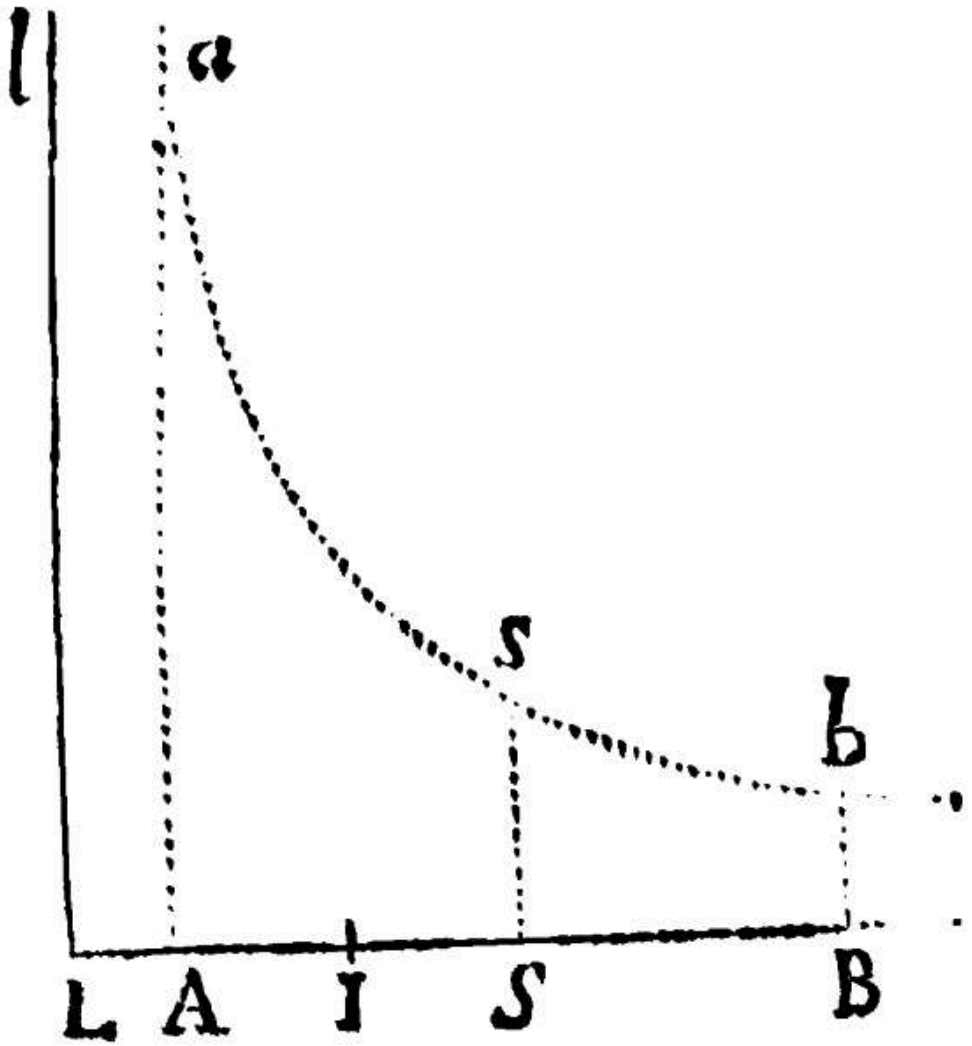
$PE \times V$



ubi si pro *V* scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro *PE* medium proportionale inter *PS* & 2*LD*; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innotescunt. Q. E. F.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro *V* scribe distantiam *PE*, dein 2*PS* × *LD* pro *PEq.*, & fiet *DN* ut *SL* - ½*LD* - *ALB* ÷ 2*LD*. Pone *DN* æqualem duplo ejus 2*SL* - *LD* - *ALB* ÷ *LD*: & ordinatæ pars data 2*SL* ducta in longitudinem *AB* describet aream rectangulam 2*SL* × *AB*; & pars indefinita *LD* ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini *LD*, describet aream {*LBq.* - *LAq.*} ÷ 2, id est, aream *SL* × *AB*; quæ subducta de area priore 2*SL* × *AB* relinquit aream *SL* × *AB*. Pars autem tertia *ALB* ÷ *LD*

ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream Hyperbolicam; quæ subducta de area *SL* × *AB* relinquet aream quæsitam *ABNA*. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta *L*, *A*, *B* erige perpendicula *Ll*, *Aa*, *Bb*, quorum *Aa* ipsi *LB*, & *Bb* ipsi *LA* æquetur. Asymptotis *Ll*, *LB*, per puncta *a*, *b* describatur Hyperbola *ab*. Et acta chorda *ba* claudet aream *aba* areæ quæsitæ *ABNA* æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe *PE cub.* ÷ 2*ASq.* pro *V*, dein 2*PS* × *LD* pro *PEq.*; & fiet *DN* ut

SL × *ASq.*

ASq.

-

ALB × *ASq*.

PS × *LD*

2*PS*

2*PS* × *LDq*.

id est (ob continue proportionales *PS*, *AS*, *SI*) ut

LSI
- ½SI -
ALB × SI
.

LD

$2LDq.$

Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $LSI \div LD$ generabit aream Hyperbolicam; secunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $ALB \times SI \div 2LDq.$ aream

$ALB \times SI$

-

$ALB \times SI$

,

$2LA$

$2LB$

id est $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima subducatur summa secundæ ac tertiæ, & manebit area quæsita $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipsi SI æquetur, perq; punctum s Asymptotis Ll, LB describatur Hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ subductum de area Hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$.

Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad singulas Sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicata ratione distantiæ a particulis, scribe $PE \div 2AS$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut

$SL \times SI^{/}{}_{2}$

-

$SI^{/}_{2}$

-

$ALB \times SI^{/}_{2}$

.

$\sqrt{2} \times LD^{/}_{2}$

$2\sqrt{2} \times LD^{/}_{2}$

$2\sqrt{2} \times LD^{/}_{2}$

Cujus tres partes ductæ in longitudinem *AB*, producunt Areas totidem, *viz.*

$\sqrt{2} \times SL \times SI^{/}_{2}$

-

$\sqrt{2} \times SL \times SI^{/}_{2}$

,

$LB^{/}_{2} \times SI^{/}_{2} - LA^{/}_{2} - SI^{/}_{2}$

&

$ALB \times SI^{/}_{2}$

-

$ALB \times SI^{/}_{2}$

.

$LA^{/}_{2}$

LB'_2

$\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} \times LA'_2$

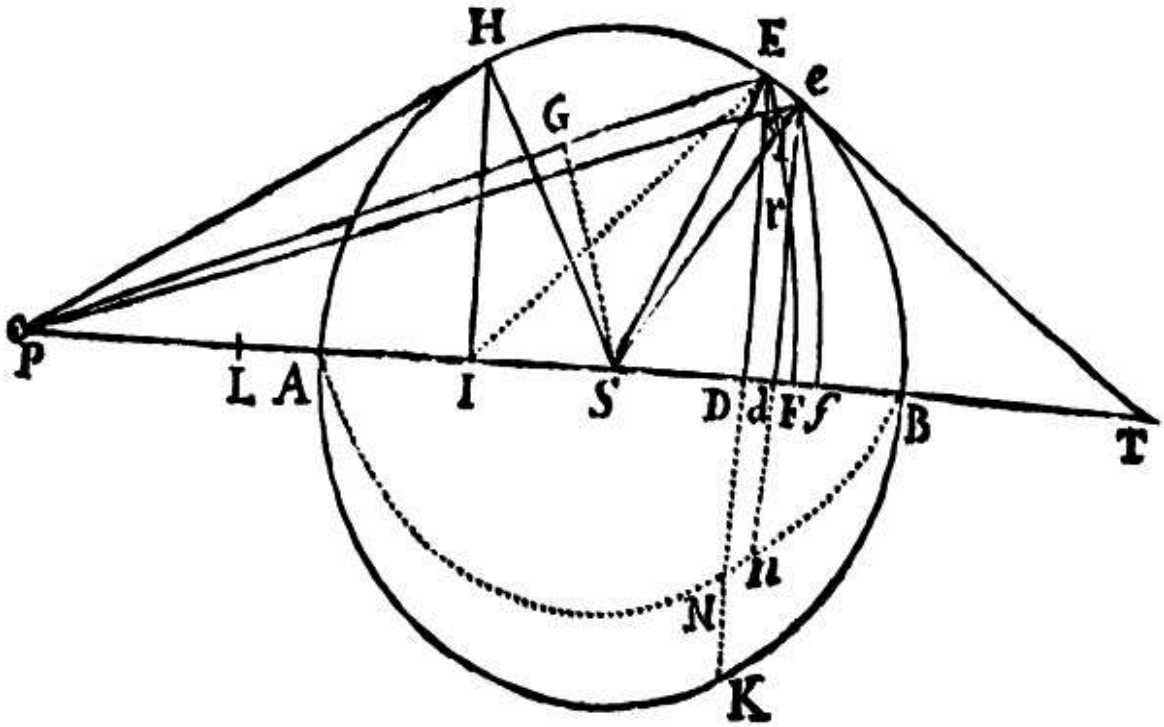
$3\sqrt{2} \times LB'_2$

Et hæ post debitam reductionem, subductis posterioribus de priori, evadunt $8SI\ cub. \div 3LI$. Igitur vis tota, qua corpusculum *P* in Sphæræ centrum trahitur, est ut $SI\ cub. \div PI$, id est reciproce ut $PS\ cub. \times PI$. Q. E. I.

Eadem Methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra Sphæram, sed expeditius per Theorema sequens.

Prop. LXXXII. Theor. XLI.

In Sphæra centro S *intervallo* SA *descripta, si capiantur* SI, SA, SP *continue proportionales: dico quod corpusculi intra Sphæram in loco quovis* I *attractio est ad attractionem ipsius extra Sphæram in loco* P, *in ratione composita ex dimidiata ratione distantiarum a centro* IS, PS *& dimidiata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

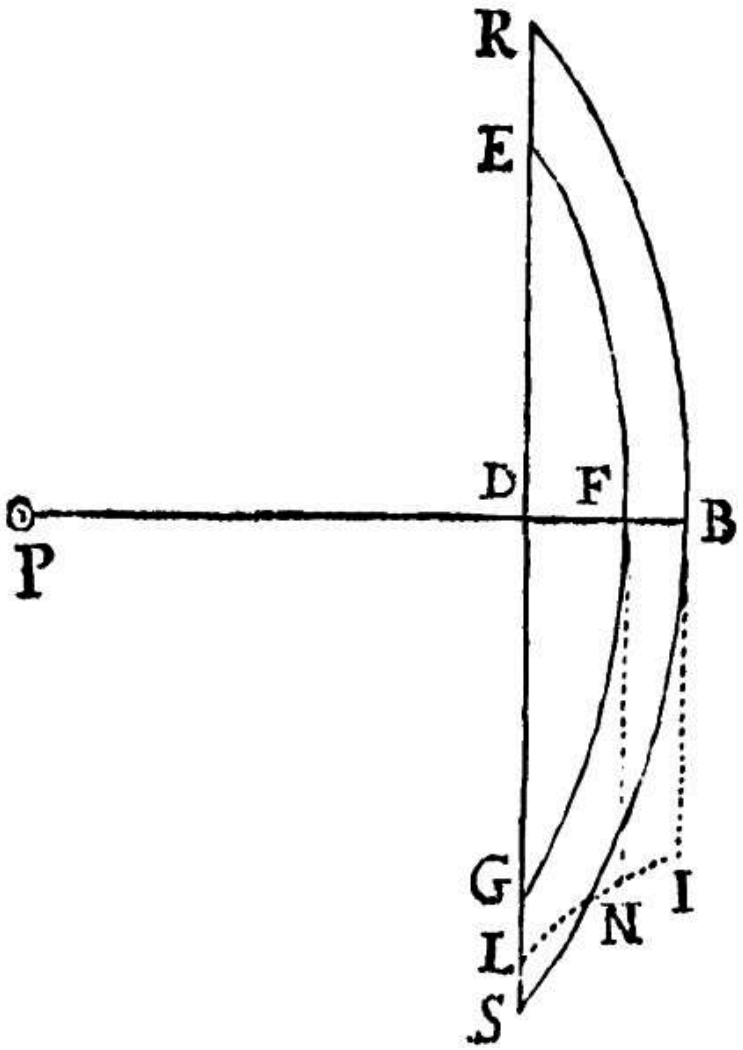


Ut si vires centripetæ particularum Sphæræ sint reciproce ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione composita ex dimidiata ratione distantiæ *SI* ad distantiam *SP* & ratione dimidiata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione dimidiata distantiarum *SI*, *SP* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes dimidiatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum Sphæræ sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in *I* sit ad attractionem in *P*, ut distantia *SP* ad Sphæræ semidiametrum *SA*: Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invicem ut *SP quad.* ad *SA quad.*; si in quadruplicata, ut *SP cub.* ad *SA cub.* Unde cum attractio in *P*, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut *PS cub.* × *PI*, attractio in *I* erit reciproce ut *SA cub.* × *PI*, id est (ob datum *SA cub.*) reciproce ut *PI*. Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco quovis *P*, ordinatim applicata *DN* inventa fuit ut {*DEq.* × *PS*} ÷ {*PE* × *V*}. Ergo si agatur *IE*, ordinata illa ad alium quemvis locum *I*, mutatis mutandis, evadet

ut $\{DEq. \times IS\} \div \{IE \times V\}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n, (ubi numerus n designet indicem potestatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\{DEq. \times PS\} \div \{PE \times PE^n\}$ & $\{DEq. \times IS\} \div \{IE \times IE^n\}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula SPE, SEI, fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE scribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA dimidiata est ratio distantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n dimidiata est ratio virium in distantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisq; proportionales attractiones, sunt in ratione composita ex dimidiatis illis rationibus. Q. E. D.

Prop. LXXXIII. Prob. XLII.



Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad ejus segmentum quodcunq; attrahitur.

Sit *P* corpus in centro Sphæræ, & *RBSD* segmentum ejus plano *RDS* & superficie Sphærica *RBS* contentum. Superficie Sphærica *EFG* centro *P* descripta secetur *DB* in *F*, ac distinguatur segmentum in partes *BREFGS*, *FEDG*. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas *O*, & erit hæc superficies (per demonstrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ esse reciproce ut distantiarum dignitas illa cujus Index est *n*; & vis qua superficies *FE* trahit corpus *P* erit ut $DF \times O \div PF^{n-}$. Huic proportionale sit perpendiculum *FN* ductum in *O*; & area curvilinea *BDLIB*, quam ordinatim applicata *FN* in

longitudinem *DB* per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota qua segmentum totum *RBSD* trahit corpus *P*. Q. E. I.

Prop. LXXXIV. Prob. XLIII.

Invenire vim qua corpusculum, extra centrum Sphæræ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.

A segmento *EBK* trahatur corpus *P* (*Vide Fig. Pro. 80. 81.*) in ejus axe *ADB* locatum. Centro *P* intervallo *PE* describatur superficies Sphærica *EFK*, qua distinguatur segmentum in partes duas *EBKF* & *EFKD*. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI. & vis partis posterioris per Prop. LXXXIII.; & summa virium erit vis segmenti totius *EBKD*. Q. E. I.

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit Propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deq; motibus inde oriundis, ob eorum in rebus Philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SECT. XIII.

De Corporum etiam non Sphæricorum viribus attractivis.

Prop. LXXXV. Theor. XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit

reciproce ut quadratum distantiæ attracti corporis a centro Sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atq; adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoq; vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusq; Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur Propositio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

Prop. LXXXVI. Theor. XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI. in Exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus Orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra Orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. Q. E. D.

Prop. LXXXVII. Theor. XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia & ex materia æqualiter attractiva constantia seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota

erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis similiter positas.

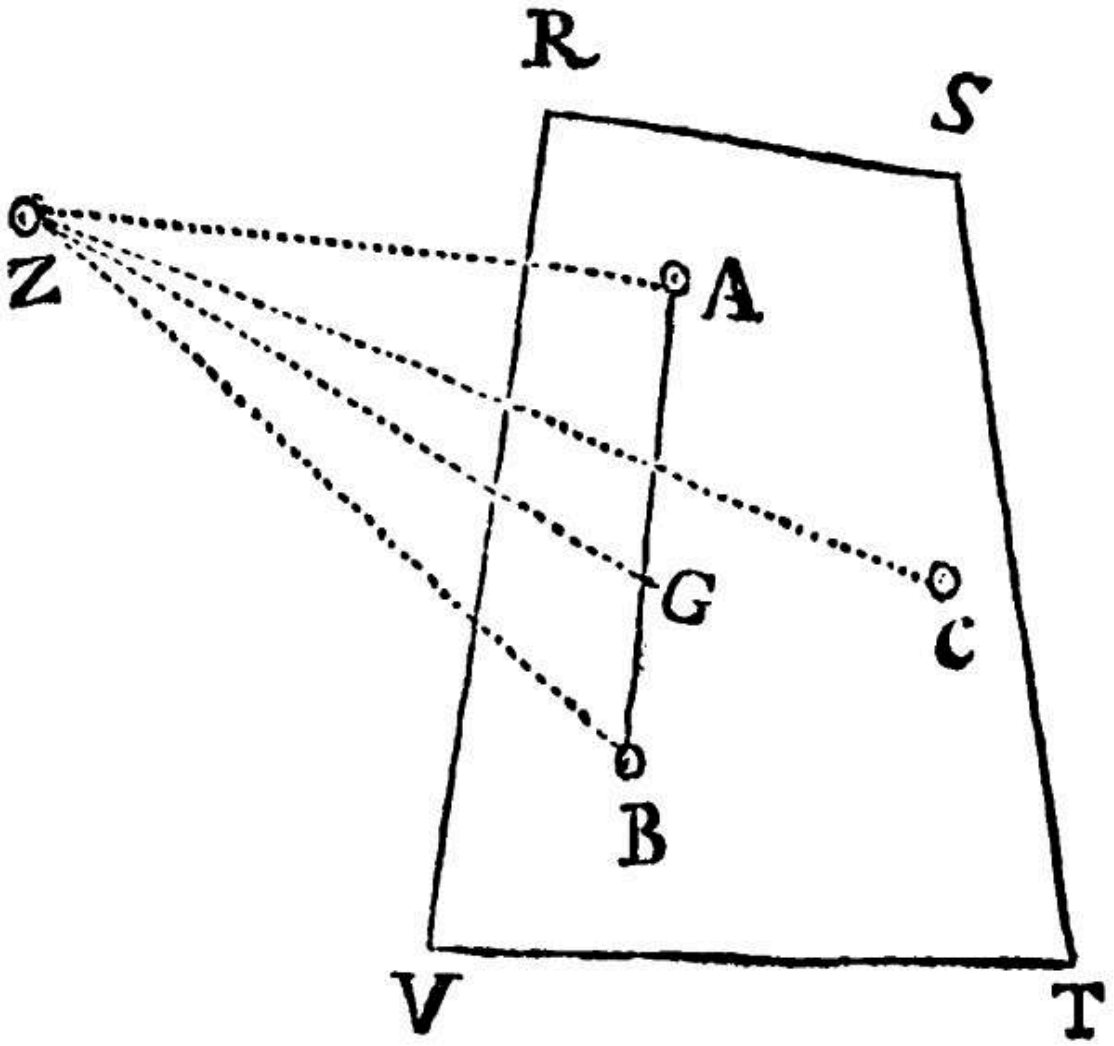
Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* adeoq; tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut *A cub.* ÷ *A quad.* & *B cub.* ÷ *B quad.* id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut *A cub.* ÷ *A cub.* & *B cub.* ÷ *B cub.* id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicata, attractiones in corpora erunt ut *A cub.* ÷ *Aqq.* & *B cub.* ÷ *Bqq.* id est, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

Prop. LXXXVIII. Theor. XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuscunq; vires attractivæ sint ut distantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia consimili & æquali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.



Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpusculum aliquod *Z* viribus quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantiæ *AZ*, *BZ*; sin particulæ statuantur inæquales, sint ut hæ particulæ in distantias suas *AZ*, *BZ* respective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur *AB*, & secetur ea in *G* ut sit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*; & erit *G* commune centrum gravitatis particularum *A* & *B*. Vis $A \times AZ$ per Legum Corol. 2. resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales *A* ad *B* & *BG* ad *AG*, æquantur, adeoq;, cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab *Z* versus centrum *G*, & vim $A + B \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ *A* & *B* consisterent in eorum communi gravitatis centro *G*, globum ibi componentes.

Eodem argumento si adjungatur particula tertia *C*; & componatur hujus vis cum vi $A + B \times GZ$ tendente ad centrum *G*, vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius *G* & particulæ *C*; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum *A*, *B*, *C*; & eadem erit ac si globus & particula *C* consisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunq; *RSTV* ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram globi indueret. Q. E. D.

Corol. Hinc motus corporis attracti *Z* idem erit ac si corpus attrahens *RSTV* esset Sphæricum: & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum, corpus attractum movebitur in Ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

Prop. LXXXIX. Theor. XLVI.

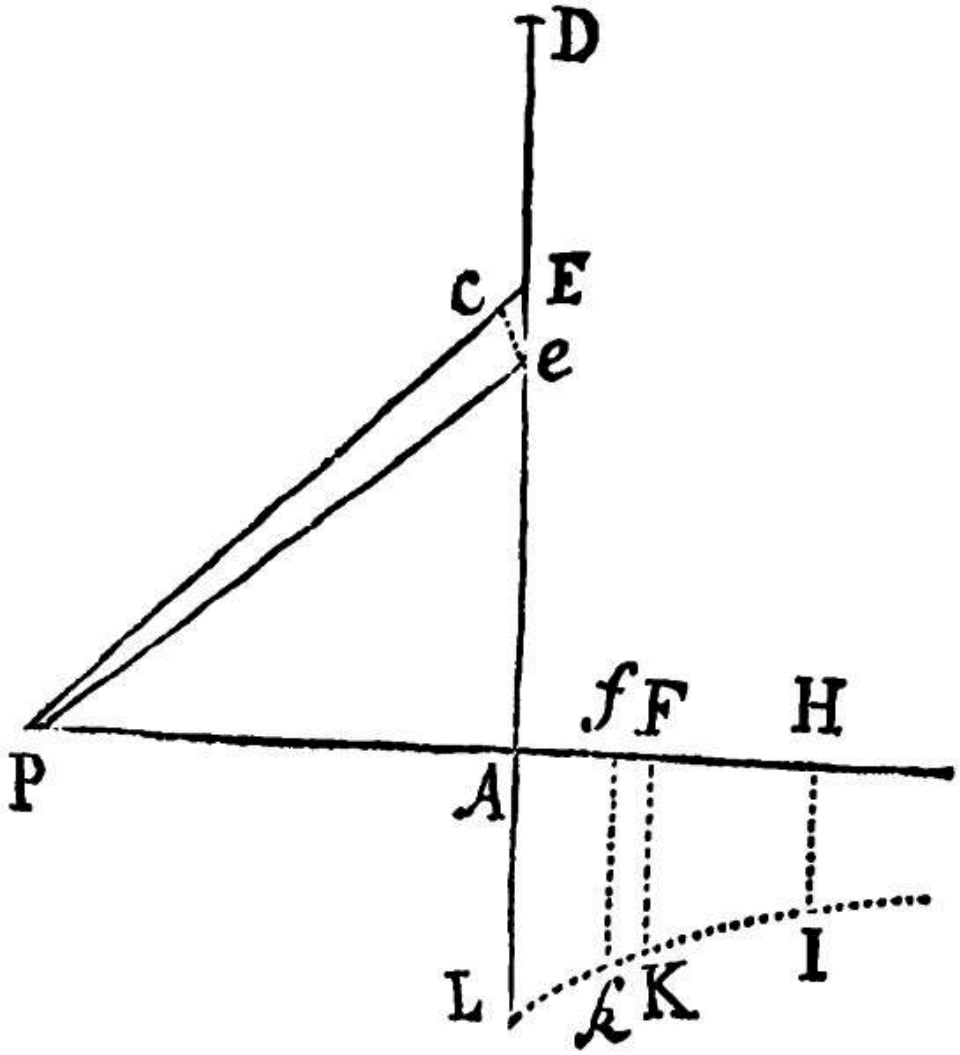
Si Corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, qua corpusculum quodcunq; trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atq; Propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoq; si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta, corpus attractum movebitur in Ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

Prop. XC. Prob. XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunq; puncta tendant vires centripetæ decrescentes in quacunq; distantiarum ratione: invenire vim qua corpusculum attrahitur ubivis in recta quæ ad planum circuli per centrum ejus perpendicularis consistit.



Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano cui recta *AP* perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis qua corpus quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpus attractum *P* agatur recta *PE*: In recta *PA* capiatur *PF* ipsi *PE* æqualis, & erigatur Normalis *FK*, quæ sit ut vis qua punctum *E* trahit corpusculum *P*. Sitq; *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpusculi *P* attractio in circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. Q. E. I.

Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*, & in *PA* capiatur *Pf* ipsi *Pe* æqualis. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis *E* trahit ad se corpus *P*, ponitur esse ut *FK*, & inde vis qua punctum illud trahit corpus *P* versus *A* est ut $AP \times FK \div PE$, & vis qua annulus totus trahit

corpus P versus A, ut annulus & $AP \times FK \div PE$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine Ee, & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & cE) æquatur rectangulo $PE \times cE$ seu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iste trahit corpus P versus A ut $PE \times Ff$ & $AP \times FK \div PE$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times AP \times FK$, sive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. Q. E. D.

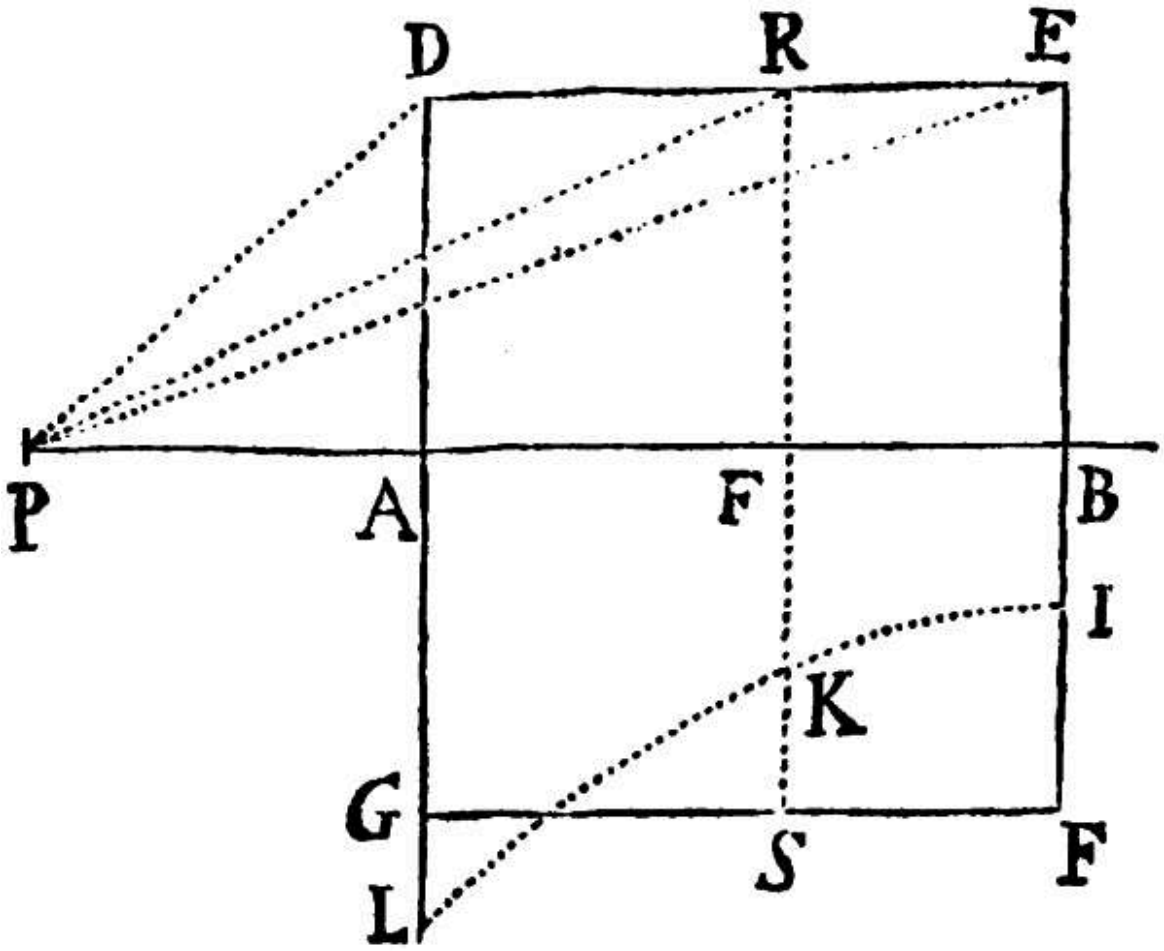
Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $1 \div PF\ quad.$, atq; adeo area $AHIKL$ ut $\{1 \div PA\} - \{1 \div PH\}$; erit attractio corpusculi P in circulum $1 - \{PA \div PH\}$, id est, ut $AH \div PH$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit FK ut $1 \div D^n$, adeoq; area $AHIKL$ ut $\{1 \div PA^{n-}\} - \{1 \div PH^{n-}\}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $\{1 \div PA^{n-}\} - \{PA \div PH^{n-}\}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-}, propterea quod terminus alter $PA \div PH^{n-}$ evanescet.

Prop. XCI. Prob. XLV.

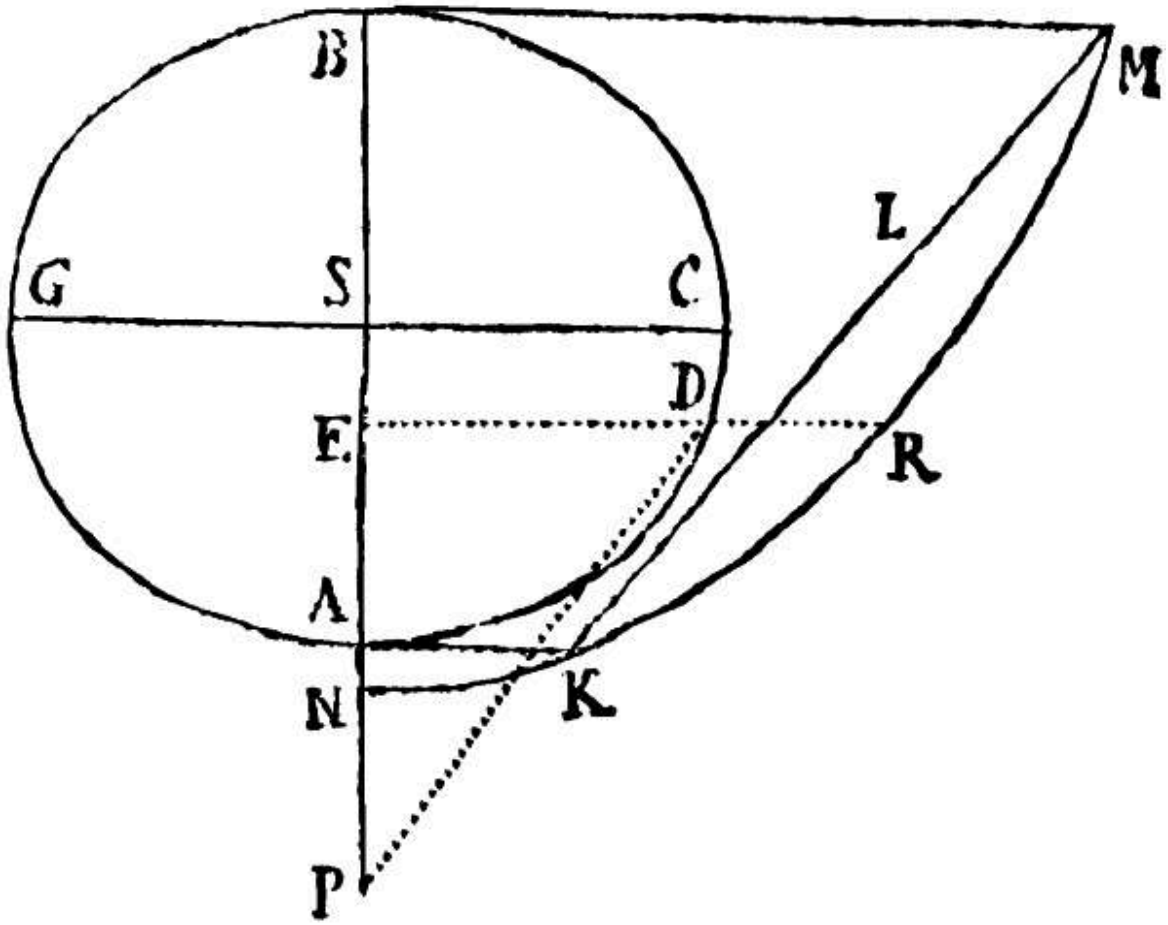
Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi, ad cujus puncta singula tendunt vires centripetæ in quacunq; distantiarum ratione decrescentes.



In solidum *ADEFG* trahatur corpusculum *P*, situm in ejus axe *AB*. Circulo quolibet *RFS* ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in ejus diametro *FS*, in plano aliquo *PALKB* per axem transeunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo *FK* vi qua corpusculum *P* in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum *K* curvam lineam *LKI*, planis extimorum circulorum *AL* & *BI* occurrentem in *A* & *B*; & erit attractio corpusculi *P* in solidum ut area *LABI*. Q. E. D.

Corol. 1. Unde si solidum Cylindrus sit, parallelogrammo *ADEB* circa axem *AB* revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproce ut quadrata distantiarum a punctis: erit attractio corpusculi *P* in hunc Cylindrum ut $BA - PE + PD$. Nam ordinatim applicata *FK* (per Corol. 1. Prop. XC.) erit ut $1 - PF \div PR$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem *AB*, describit aream $1 \times AB$; & pars altera $PF \div PR$ ducta in longitudinem *PB*, describit aream 1 in $PE - AD$ (id quod ex curvæ *LKI* quadratura facile ostendi potest:) & similiter pars eadem ducta in

longitudinem *PA* describit aream 1 in *PD* - *AD*, ductaq; in ipsarum *PB*, *PA* differentiam *AB* describit arearum differentiam 1 in *PE* - *PD*. De contento primo 1 × *AB* auferatur contentum postremum 1 in *PE* - *PD*, & restabit area *LABI* æqualis 1 in *AB* - *PE* + *PD*. Ergo vis huic areæ proportionalis est ut *AB* - *PE* + *PD*.



Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit qua Sphærois *AGBCD* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe suo *AB* situm. Sit *NKRM* Sectio Conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipsi *PE* perpendicularis, æquetur semper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata ista Sphæroidem secat. A Sphæroidis verticibus *A*, *B* ad ejus axem *AB* erigantur perpendicula *AK*, *BM* ipsis *AP*, *BP* æqualia respective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in *K* & *M*; & jungantur *KM* auferens ab eadem segmentum *KMRK*. Sit autem Sphæroidis centrum *S* & semidiameter maxima *SC*: & vis qua Sphærois trahit corpus *P* erit ad vim qua Sphæra, diametro *AB* descripta, trahit idem corpus, ut

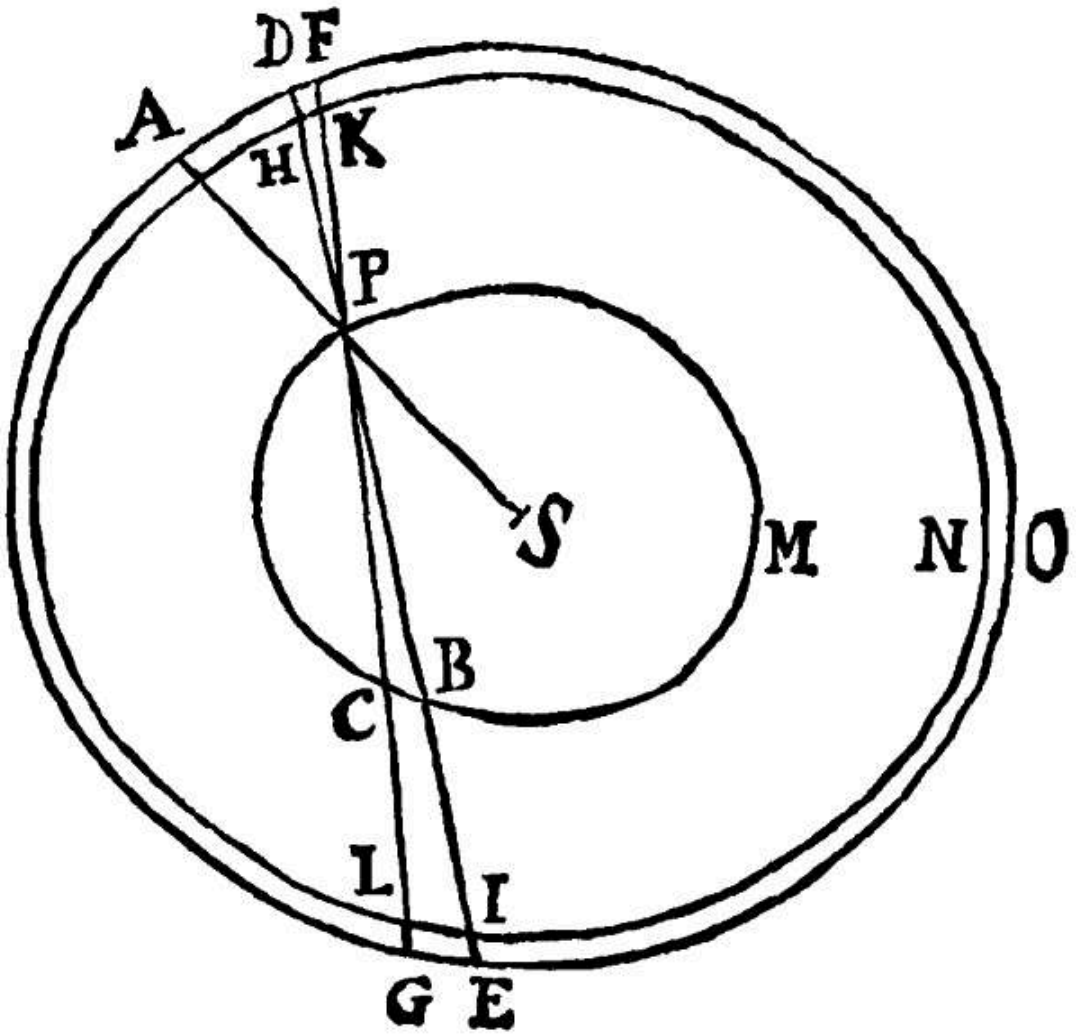
AS × *CSq.* - *PS* × *KMRK*

ad
AS cub.
.

PSq. + *CSq.* - *ASq.*

3*PS quad.*

Et eodem computando fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis.



Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem in data quavis ejusdem diametro collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit *AGOF* Sphærois attrahens, *S* centrum ejus & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur tum semidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* Sphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*: Sintq; *PCM*, *HLN* superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus *P* & secet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, posterior secet easdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* sibi mutuo æquales; propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* designare Conos oppositos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinite parvis descriptos, &

lineas etiam *DH*, *EI* infinite parvas esse; & Conorum particulæ Sphæroidum superficiebus abscissæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo *P*, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus Sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia *DPF*, *EGCB* in particulas, hæ omnes utrinq; æqualiter trahent corpus *P* in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires coni *DPF* & segmenti Conici *EGCB*, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur corpus *P* a sola Sphæroide intima *PCBM*, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, qua corpus *A* trahitur a Sphæroide tota *AGOD*, ut distantia *PS* ad distantiam *AS*. Q. E. I.

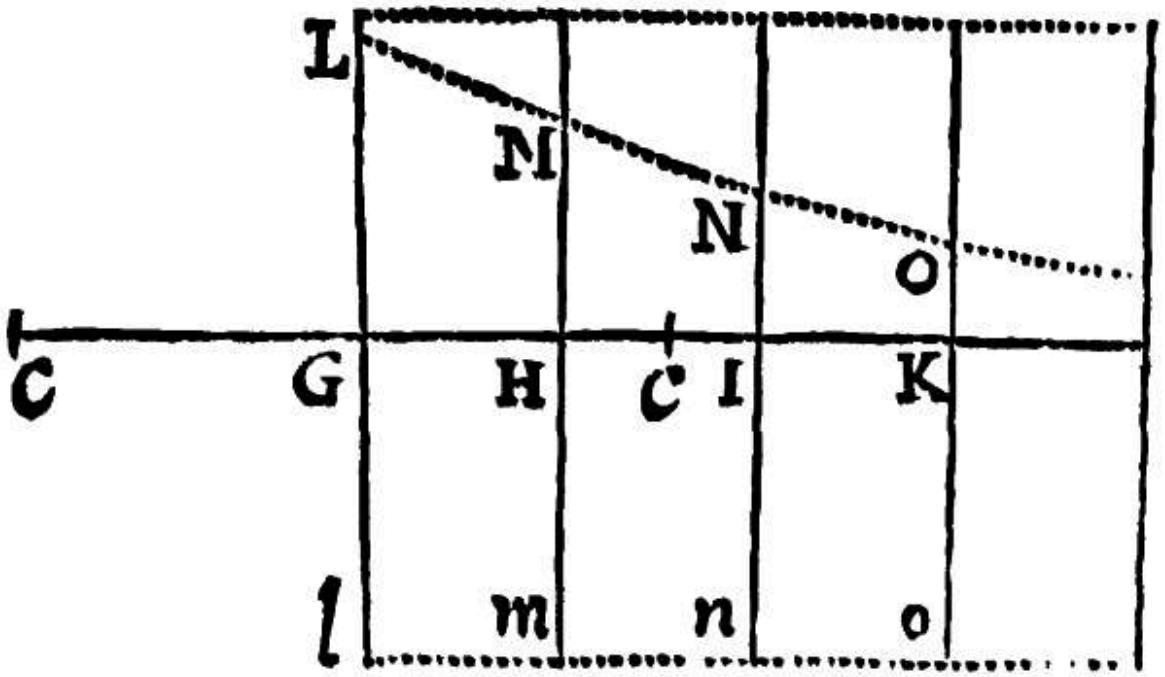
Prop. XCII. Prob. XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E corpore dato formanda est Sphæra vel Cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

Prop. XCIII. Theor. XLVII.

Si solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.



Cas. 1. Sit *LGl* planum quo Solidum terminatur. Jaceat autem solidum ex parte plani hujus versus *I*, inq; plana innumera *mHM*, *nIN* &c. ipsi *GL* parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum *C* extra solidum. Agatur autem *CGHI* planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus *n* ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC) vis qua planum quodvis *mHM* trahit punctum *C* est reciproce ut CH^{n-}. In plano *mHM* capiatur longitudo *HM* ipsi CH^{n-} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut *HM*. Similiter in planis singulis *lGL*, *nIN*, *oKO* &c. capiantur longitudines *GL*, *IN*, *KO* &c. ipsis CG^{n-}, CI^{n-}, CK^{n-} &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoq; summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area *GLOK* in infinitum versus *OK* producta. Sed area illa per notas quadraturarum methodos est reciproce ut CG^{n-}, & propterea vis solidi totius est reciproce ut CG^{n-} Q. E. D.

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum *C* ex parte plani *lGL* intra solidum, & capiatur distantia *CK* æqualis distantiæ *CG*. Et solidi pars *LGloKO*, planis parallelis *lGL*, *oKO* terminata, corpusculum *C* in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum *C* sola vi solidi ultra planum

OK siti trahitur. Hæc autem vis (per Casum primum) est reciproce ut CK^{n-}, hoc est (ob æquales *CG*, *CK*) reciproce ut CG^{n-}. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si solidum *LGIN* planis duobus infinitis parallelis *LG*, *IN* utrinq; terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractiva solidi totius infiniti *LGKO* vim attractivam partis ulterioris *NIKO*, in infinitum versus *KO* productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam decrescet quam proxime in ratione potestatis CG^{n-}.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproxime in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet, propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinite major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. XXVII.) motum corporis recta descendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, secundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, si quæratur Lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ ea conditione ut corpus attractum in data quacunq; curva linea moveatur, solvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in series convergentes. Ut si ad basem *A* in angulo quovis dato ordinatim

applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{m \div n}$; & quæratur vis qua corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel a basi fugatum, moveri possit in curva linea quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit; Suppono basem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $A + O^{m \div n}$ resolvo in Seriem infinitam

$A^{m \div n} +$

m
$OA^{(m - n) \div n} +$
$mm - mn$
$O\ A^{(m - n) \div n}$ &c.

n

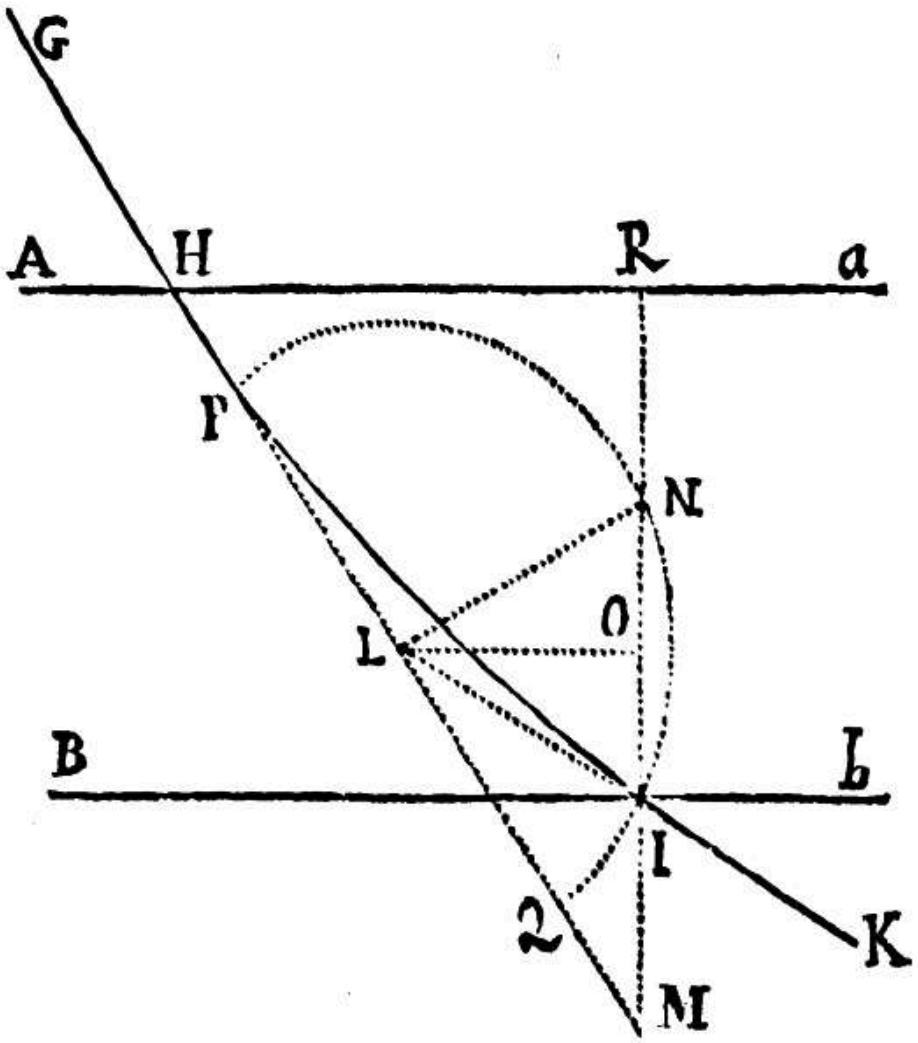
$2nn$

atq; hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est termino $\{mm - mn\} \div 2nn\ O\ A^{(m - n)\div n}$ vim proportionalem esse suppono. Est igitur vis quæsita ut $\{mm - mn\} \div nn\ A^{(m - n)\div n}$, vel quod perinde est, ut $\{mm - mn\} \div nn\ B^{(m - n)\div m}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat, existente $m = 2$, & $n = 1$: fiet vis ut data $2B$, adeoq; dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m = 0 - 1$, & $n = 1$; fiet vis ut $2B$: adeoq; vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed missis hujusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

SECT. XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

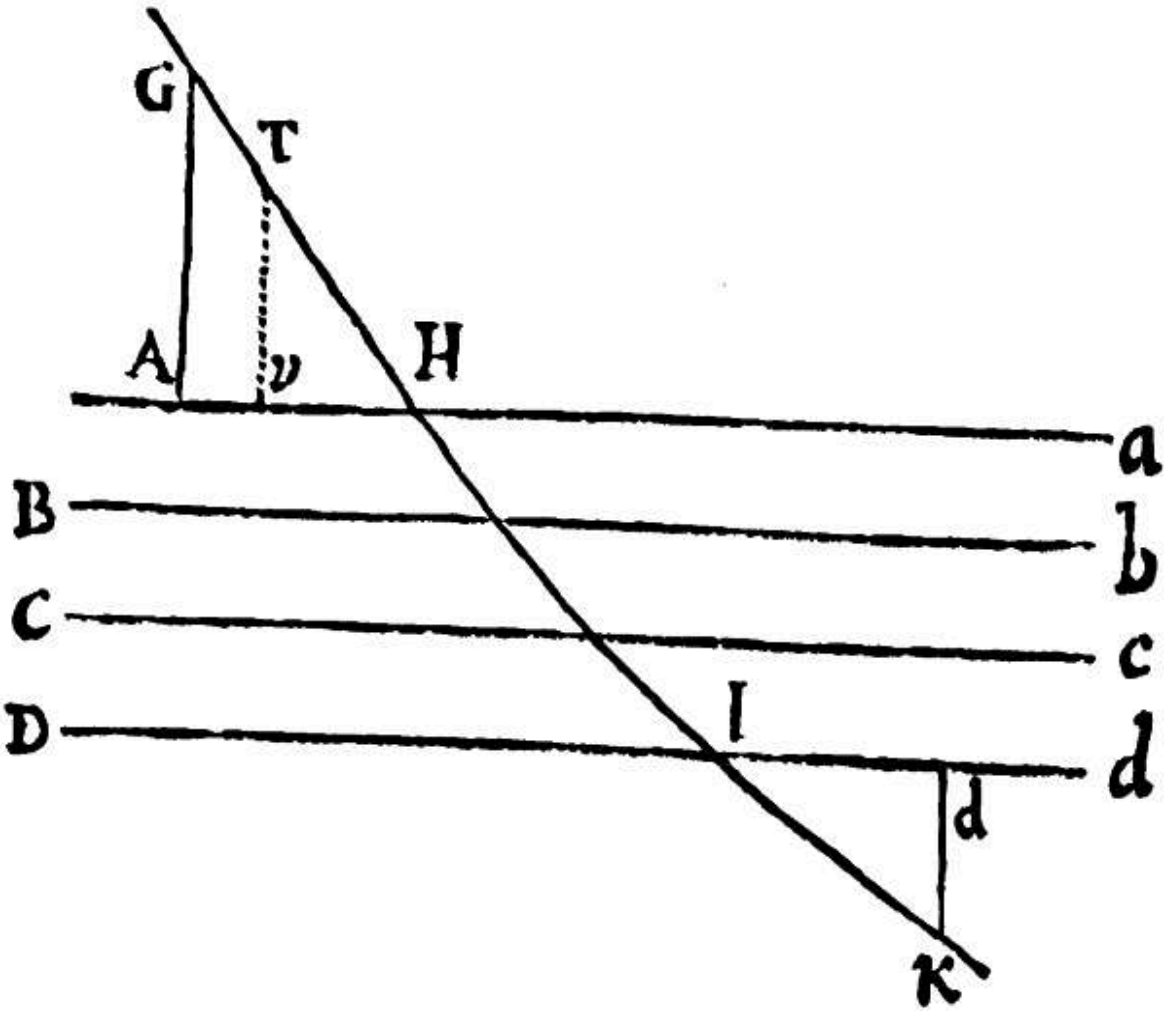
Prop. XCIV. Theor. XLVIII.



Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinq; terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neq; ulla alia vi agitetur vel impediatur; Sit autem attractio, in æqualibus ab utroq; plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubiq; eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

Cas. 1. Sunto *Aa*, *Bb* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *Aa* secundam lineam *GH*, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eaq; actione describat lineam curvam *HI*, & emergat secundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *Bb* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *GH* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *Aa* in *R*; & linea emergentiæ *KI* producta occurrat *HM* in *L*. Centro *L* intervallo *LI* describatur circulus,

secans tam *HM* in *P* & *Q*, quam *MI* productam in *N*; & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilæi*) curva *HI* Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea *IM* æquale sit *HM* quadrato; sed & linea *HM* bisecabitur in *L*. Unde si ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, æquales erunt *MO*, *OR*; & additis æqualibus *IO*, *ON*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Proinde cum *IR* detur, datur etiam *MN*, estq; rectangulum *NMI* ad rectangulum sub latere recto & *IM*, hoc est, ad *HMq.*, in data ratione. Sed rectangulum *NMI* æquale est rectangulo *PMQ*, id est, differentiæ quadratorum *MLq.* & *PLq.* seu *LIq.*; & *HMq.* datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem *LMq.*: ergo datur ratio *MLq.* - *LIq.* ad *MLq.*, & divisim, ratio *LIq.* ad *MLq.*, & ratio dimidiata *LI* ad *ML*. Sed in omni triangulo *LMI*, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ *LMR* ad sinum anguli emergentiæ *LIR*. Q. E. D.



Cas. 2. Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, *AabB*, *BbcC* &c. & agitetur vi quæ sit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; & per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo *Bb*, in data ratione; & hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum *Bb*, erit ad sinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic sinus ad sinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione; & sic in infinitum: & ex æquo sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuatur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulsus actio secundum legem quamcunq; assignatam continua reddatur; & ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. Q. E. D.

Prop. XCV. Theor. XLIX.

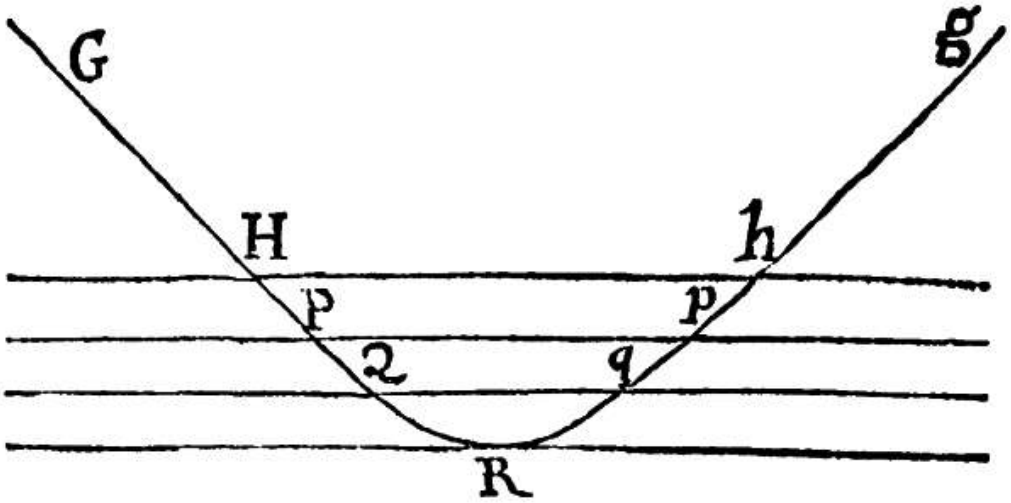
Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.

Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et per Legum Corol. 2. distinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. perpendicularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus agendo secundum lineas perpendiculares nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interq; punctum *I* & lineam *dK*; hoc est, æqualibus temporibus describet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id est, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc est (respectu radii *TH* vel *IK*) ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. Q. E. D.

Prop. XCVI. Theor. L.

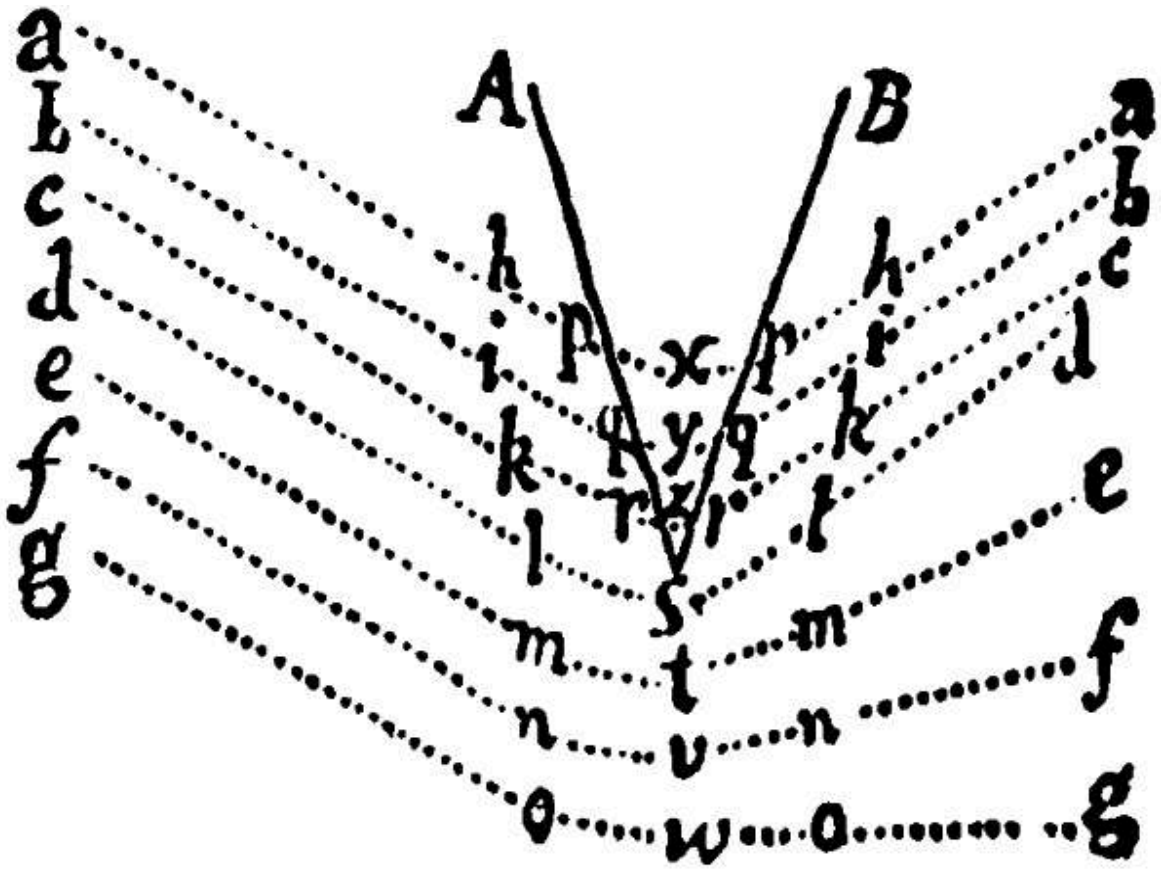
Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, &

angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.



Nam concipe corpus inter plana parallela *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. describere arcus Parabolicos, ut supra; sintq; arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano *Dd*, in spatium *DdeE*: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoq; linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum *Ee*. Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus medium incidentiæ. Revertetur itaq; inter plana *Cc*, *Dd* describendo arcum Parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilæi*) est in *R*; secabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph* &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in *p*, *h* &c. ac prius in *P*, *H* &c. emergetq; tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunq; assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. E. D.

Scholium.

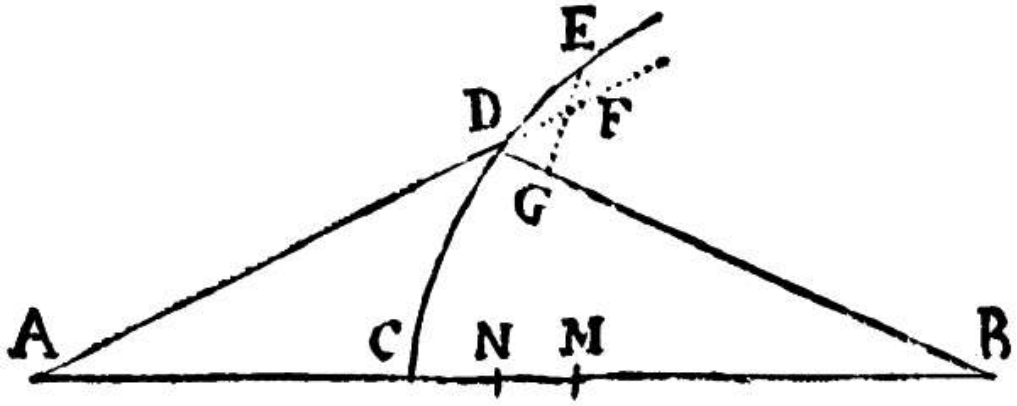


Harum attractionum haud multum dissimiles sunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namq; Lucem successive propagari & spatio quasi decem minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam constat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Observationibus diversorum Astronomorum confirmata. Radii autem in aere existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissa, invenit, & ipse quoq; expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *gowog*, *fnvnf*, *emtme*, *dlsld* sunt radii, arcubus *owo*, *nvn*, *mtm*, *lsl* versus cultrum incurvati; idq; magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum,

debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzkc*, *biyib*, *ahxha* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est Propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorias corporum trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.

Prop. XCVII. Prob. XLVII.

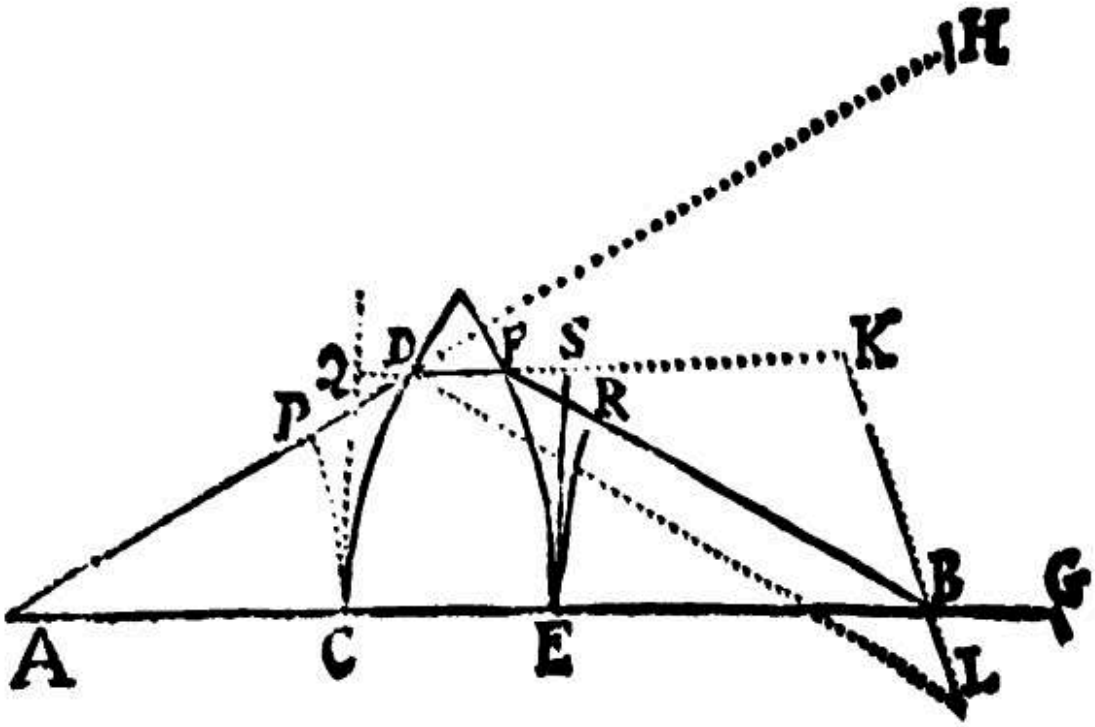
Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione, quodq; incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.



Sit *A* locus a quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revoluta describat superficiem quæsitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demissa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF* qua *AD* augetur, ad lineam *DG* qua *DB* diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea si in axe *AB* sumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* transire debet, & capiatur

ipsius *AC* incrementum *CM*, ad ipsius *BC* decrementum *CN* in data ratione; centrisq; *A*, *B*, & intervallis *AM*, *BN* describantur circuli duo se mutuo secantes in *D*: punctum illud *D* tanget curvam quæsitam *CDE*, eandemq; ubivis tangendo determinabit. Q. E. I.

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur figuræ illæ omnes quas *Cartesius* in Optica & Geometria ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* maximi fecerit & studiose celaverit, visum fuit hic propositione exponere.



Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis *CD*, secundum lineam rectam *AD* lege quavis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DK* semper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atq; adeo lineæ ipsæ *PD*, *QD*, incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.

Prop. XCVIII. Prob. XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem AB descripta superficie quacunq; attractiva CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia

transire debent: invenire superficiem secundam attractivam EF, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

Juncta *AB* secet superficiem primam in *C* & secundam in *E*, puncto *D* utcunq; assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficie secunda ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data *M* ad aliam datam *N*; produc tum *AB* ad *G* ut sit *BG* ad *CE* ut *M* - *N* ad *N*, tum *AD* ad *H* ut sit *AH* æqualis *AG*, tum etiam *DF* ad *K* ut sit *DK* ad *DH* ut *N* ad *M*. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* describe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipsiq; *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta describet superficiem quæsitam. Q. E. F.

Nam concipe lineas *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DF* respective, & lineas *ER*, *ES* ipsis *FB*, *FD* ubiq; perpendiculares esse, adeoq; *QS* ipsi *CE* semper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) *PD* ad *QD* ut *M* ad *N*, adeoq; ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*; & divisim ut *DL* - *FB* seu *PH* - *PD* - *FB* ad *FD* seu *FQ* - *QD*; & composite ut *HP* - *FB* ad *FQ*, id est (ob æquales *HP* & *CG*, *QS* & *CE*) *CE* + *BG* - *FR* ad *CE* - *FS*. Verum (ob proportionales *BG* ad *CE* & *M* - *N* ad *N*) est etiam *CE* + *BG* ad *CE* ut *M* ad *N*: adeoq; divisim *FR* ad *FS* ut *M* ad *N*, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII. superficies *EF* cogit corpus in se secundum lineam *DF* incidens pergere in linea *FR*, ad locum *B*. Q. E. D.

Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphærice figuratis & Aquam inter se claudentibus conflentur, fieri potest ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est, quo minus Optica per figuras vel Sphæricas vel alias quascunq; perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

LIBER SECUNDUS

SECT. I.

De Motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.

Prop. I. Theor. I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentia amissus est ut spatium movendo confectum.

Nam cum motus singulis temporis particulis amissus sit ut velocitas, hoc est ut itineris confecti particula: erit componendo motus toto tempore amissus ut iter totum. Q. E. D.

Corol. Igitur si corpus gravitate omni destitutum in spatiis liberis sola vi insita moveatur, ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum, dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

Lemma I.

Quantitates differentiis suis proportionales, sunt continue proportionales.

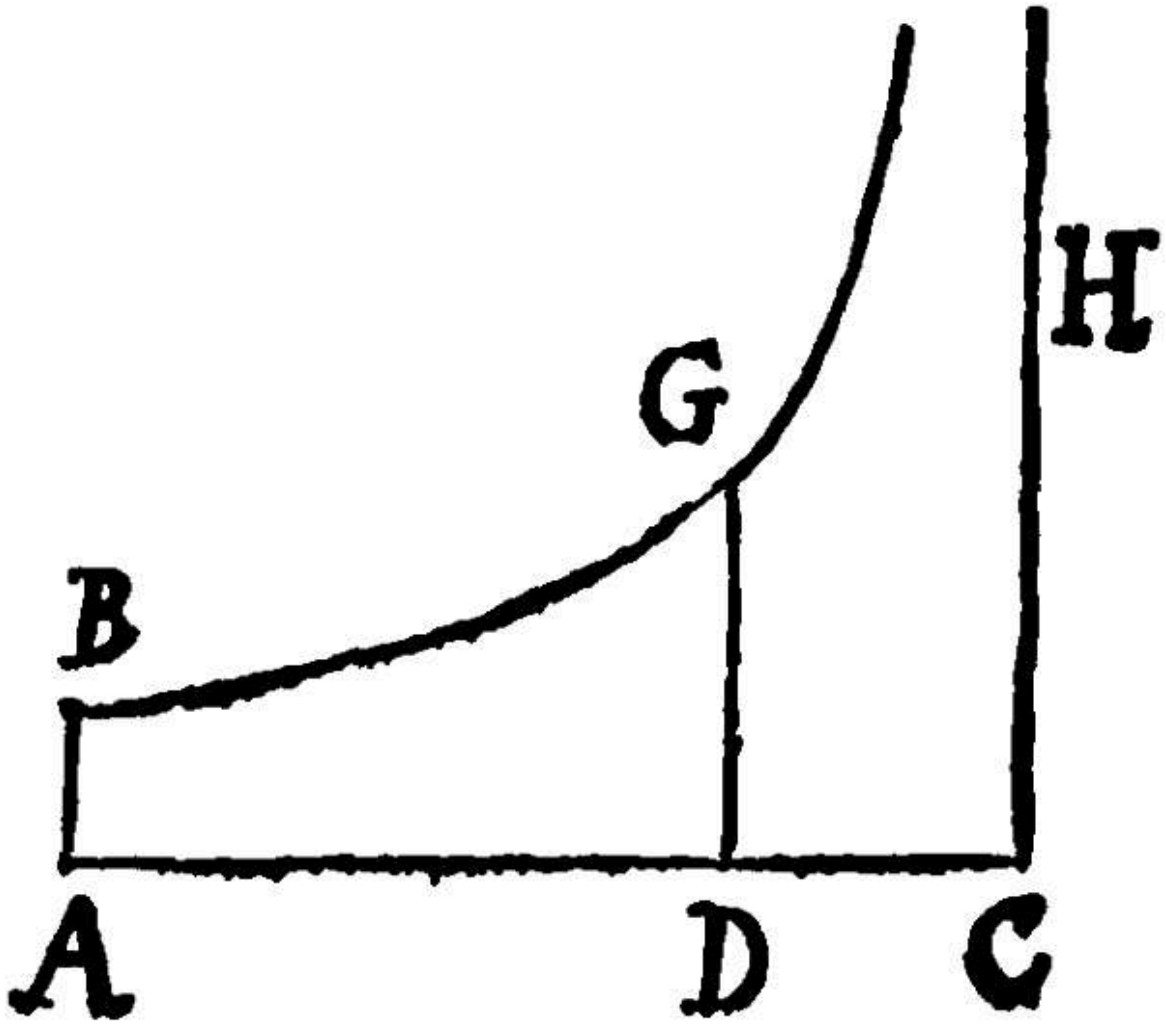
Sit *A* ad *A* - *B* ut *B* ad *B* - *C* & *C* ad *C* - *D* &c. & dividendo fiet *A* ad *B* ut *B* ad *C* & *C* ad *D* &c. Q. E. D.

Prop. II. Theor. II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & sola vi insita per Medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione Geometrica, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales, & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas, erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas.

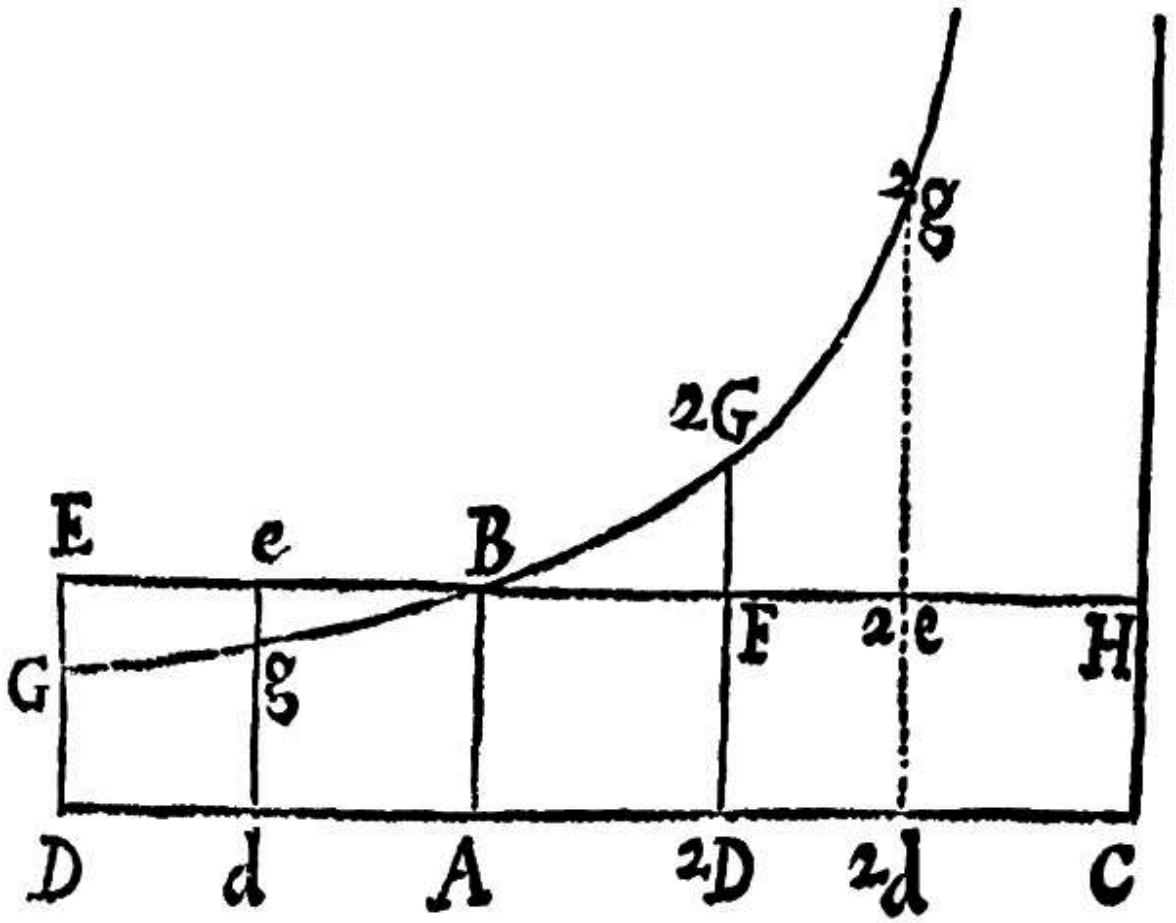
Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per Lem. I. Lib. II.) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continua, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea sunt æquales. Igitur velocitates his terminis proportionales, sunt in progressione Geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus, & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam Casu continue proportionales. Q. E. D.



Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: Spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ, (per Prop. I. Lib. II.) & propterea etiam ut totæ. Q. E. D.

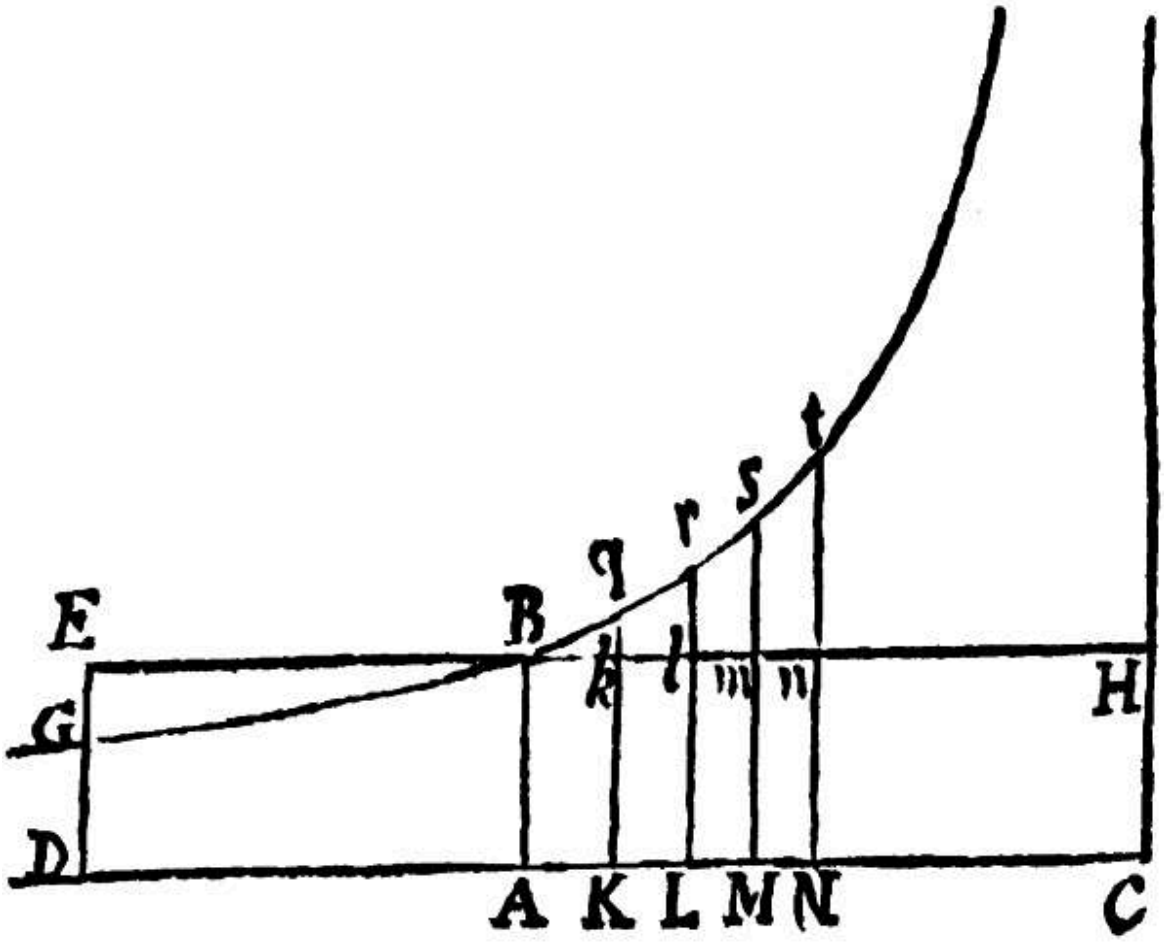
Corol. Hinc si Asymptotis rectangulis *ADC*, *CH* describatur Hyperbola *BG*, sintq; *AB*, *DG* ad Asymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia Medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi potest tempus per aream *ABGD*, & spatium eo tempore descriptum per lineam *AD*. Nam si area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta *DC* in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ *AC* æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eadem ratione.

Prop. III. Prob. I.



Corporis, cui dum in Medio similari recta ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodq; ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BC*, & resistentia Medii initio ascensus per rectangulum *BD* sumptum ad contrarias partes. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur Hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus ascendendo, tempore *DGgd*, describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*, tempore *AB2G2D* spatium descensus *BF2G*, atq; tempore *2D2G2g2d* spatium descensus *2GF2e2g*: & velocitates corporis (resistentiæ Medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABF2D*, *AB2e2d* respective; atq; maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BC*.



Resolvatur enim rectangulum *AH* in rectangula innumera *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus

facta; & erunt nihil, *Ak*, *Al*, *Am*, *An*, &c. ut velocitates totæ, atq; adeo (per Hypothesin) ut resistentia Medii in principio singulorum temporum æqualium. Fiat *AC* ad *AK* vel *ABHC* ad *ABkK*, ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deq; vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *NnHC*, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atq; adeo (per motus Legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn* &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressione Geometrica. Quare si rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn* &c. productæ occurrant Hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t* &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN* &c. æquales, adeoq; tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. Est autem area *ABqK* (per Corol. 3. Lem. VII. & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad ½*kq* seu *AC* ad ½*AK*, hoc est ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. sunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt* &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. sint viribus grauitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est, (per Hypothesin) velocitatibus, atq; adeo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis *ABrL*, describit spatium *Blr*, & tempore *LrtN* spatium *rlnt*. Q. E. D. Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad excessum vis hujus supra vim qua in fine temporis illius resistitur.

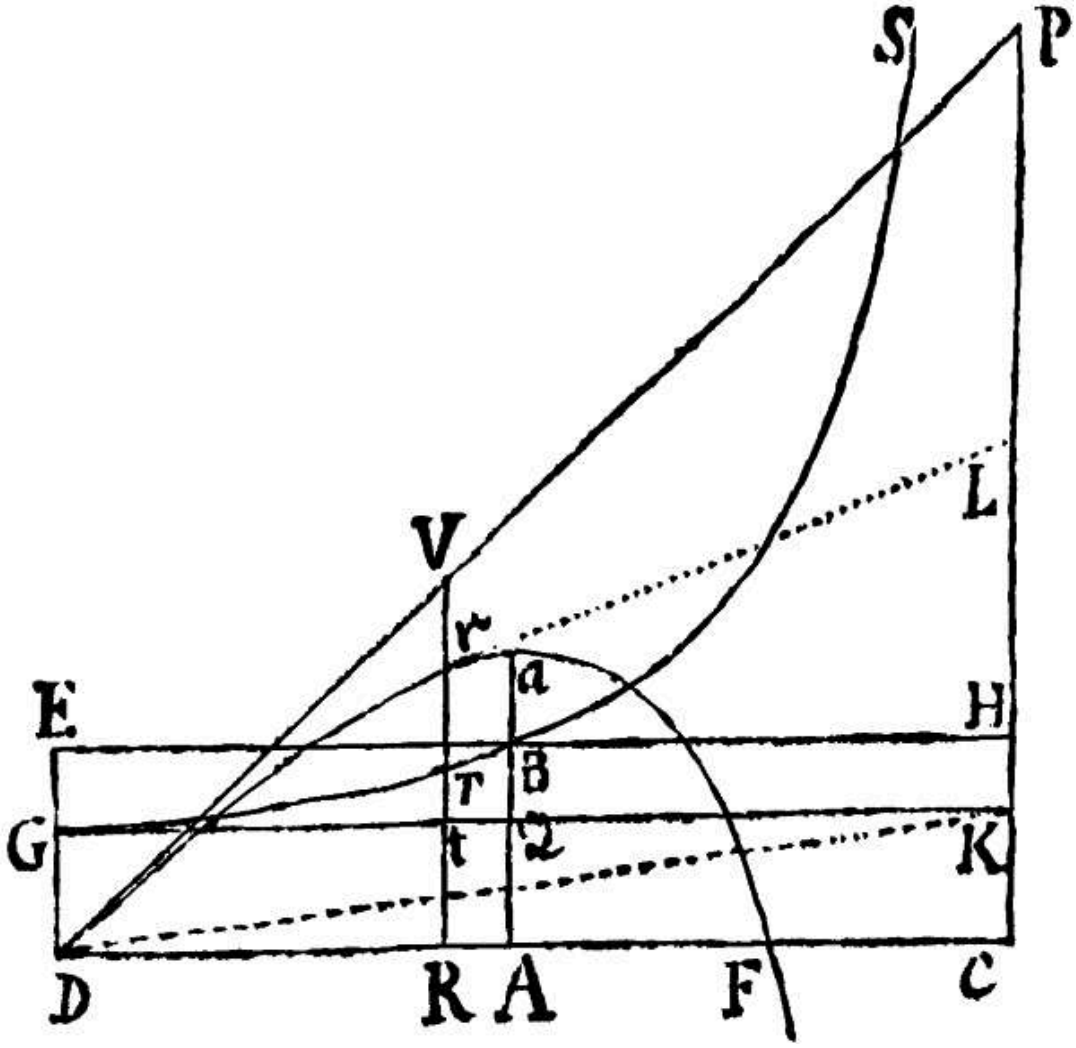
Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione Arithmetica, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu (atq; etiam earundem differentia in descensu) decrescit in progressione Geometrica.

Corol. 3. Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eadem progressione Geometrica.

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se.

Prop. IV. Prob. II.

Posito quod vis gravitatis in Medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis, in eodem resistentiam velocitati proportionalem patientis.



E loco quovis *D* egrediatur Projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam Horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A* ut sit *DA* ad *AC* ut resistentia Medii ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP* ut resistentia tota sub initio motus ad vim Gravitatis. Describatur Hyperbola quævis *GTBS* secans erecta perpendicula *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* secet *AB* in *Q*. Capiatur linea *N* in ratione ad *QB* qua *DC* sit

ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod Hyperbolæ in *T*, & rectis *GK*, *DP* in *t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem *tGT* ÷ *N*, & Projectile tempore *DRTG* perveniet ad punctum *r*, describens curvam lineam *DraF*, quam punctum *r* semper tangit; perveniens autem ad maximam altitudinem *a* in perpendiculo *AB*, & postea semper appropinquans ad Asymptoton *PLC*. Estq; velocitas ejus in puncto quovis *r* ut Curvæ Tangens *rL*. Q. E. I.

Est enim *N* ad *QB* ut *DC* ad *CP* seu *DR* ad *RV*, adeoq; *RV* æqualis *DR* × *QB* ÷ *N*, & *Rr* (id est *RV* - *Vr* seu {*DR* × *QB* - *tGT*} ÷ *N*) æqualis {*DR* × *AB* - *RDGT*} ÷ *N*. Exponatur jam tempus per aream *RDGT*, & (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoq; longitudo a motu ad latus descripta erit (per Prop. II. hujus) ut linea *DR*, altitudo vero (per Prop. III. hujus) ut area *DR* × *AB* - *RDGT*, hoc est, ut linea *Rr*. Ipso autem motus initio area *RDGT* æqualis est rectangulo *DR* × *AQ*, ideoq; linea illa *Rr* (seu {*DR* × *AB* - *DR* × *AQ*} ÷ *N*) tunc est ad *DR* ut *AB* - *AQ* (seu *QB*) ad *N*, id est ut *CP* ad *DC*; atq; adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur *Rr* semper sit ut altitudo, ac *DR* semper ut longitudo, atq; *Rr* ad *DR* sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut *Rr* semper sit ad *DR* ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea *DraF*, quam punctum *r* perpetuo tangit. Q. E. D.

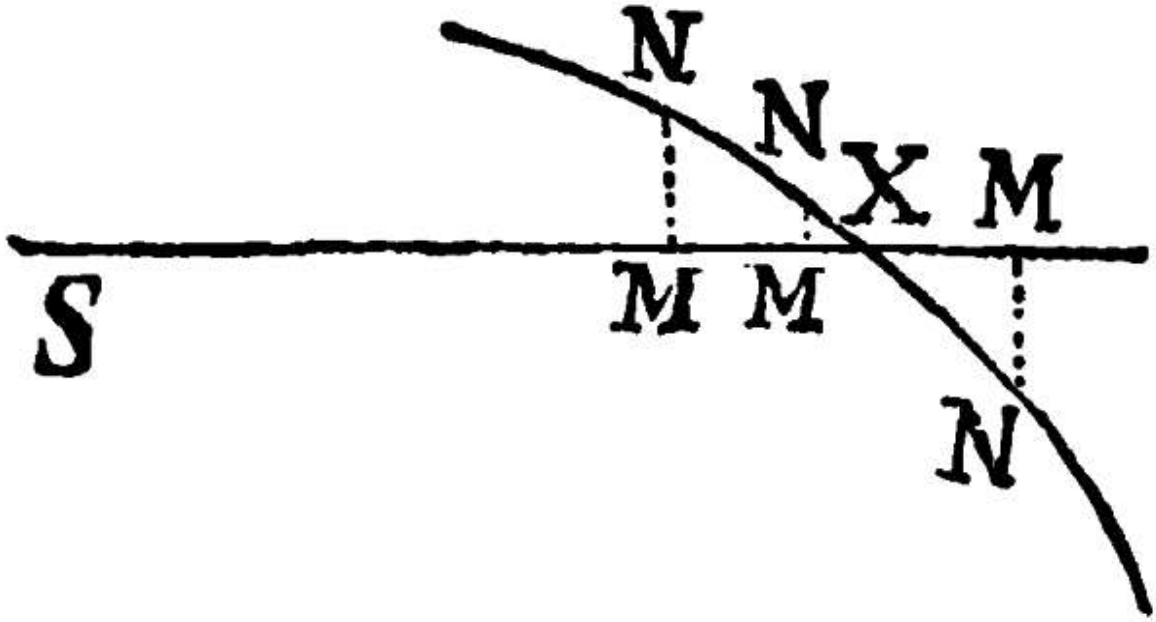
Corol. 1. Hinc si vertice *D*, Diametro *DE* deorsum producta, & latere recto quod sit ad 2*DP* ut resistentia tota, ipso motus initio, ad vim gravitatis, Parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco *D* secundum rectam *DP*, ut in Medio uniformi resistente describat Curvam *DraF*, ea ipsa erit quacum exire debet de eodem loco *D*, secundum eandem rectam *DR*, ut in spatio non resistente describat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipso motus initio, est *DV quad.* ÷ *Vr* & *Vr* est *tGT* ÷ *N* seu *DR* × *Tt* ÷ 2*N*. Recta autem, quæ, si duceretur, Hyperbolam *GTB* tangeret in *G*, parallela est ipsi *DK*, ideoq; *Tt* est *CK* × *DR* ÷ *DC*, & *N* erat *QB* × *DC* ÷ *CP*. Et propterea *Vr* est *DRq.* × *CK* × *CP* ÷ {2*CDq.* × *QB*}, id est (ob proportionales *DR* & *DC*, *DV* & *DP*) *DVq.* × *CK* × *CP* ÷ {2*DPq.* × *QB*}, & Latus rectum *DV quad.* ÷ *Vr* prodit 2*DPq.* × *QB* ÷ {*CK* × *CP*}, id est (ob proportionales *QB* & *CK*, *DA* & *AC*) 2*DPq.* × *DA* ÷ {*AC* × *CP*},

adeoq; ad 2*DP* ut *DP* × *DA* ad *PC* × *AC*; hoc est ut resistentia ad gravitatem. Q. E. D.

Corol. 2. Unde si corpus de loco quovis *D*, data cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam *DP* projiciatur; & resistentia Medii ipso motus initio detur, inveniri potest Curva *DraF*, quam corpus idem describet. Nam ex data velocitate datur latus rectum Parabolæ, ut notum est. Et sumendo 2*DP* ad latus illud rectum ut est vis Gravitatis ad vim resistentiæ, datur *DP*. Dein secando *DC* in *A*, ut sit *CP* × *AC* ad *DP* × *DA* in eadem illa ratione Gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum *A*. Et inde datur Curva *DraF*.

Corol. 3. Et contra, si datur curva *DraF*, dabitur & velocitas corporis & resistentia Medii in locis singulis *r*. Nam ex data ratione *CP* × *AC* ad *DP* × *DA*, datur tum resistentia Medii sub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis *rL*, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis *r*.

Corol. 4. Cum autem longitudo 2*DP* sit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad resistentiam in *D*; & ex aucta Velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem 2*DP* augeri in ratione illa simplici, adeoq; velocitati semper proportionalem esse, neq; ex angulo *CDP* mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoq; velocitas.



Corol. 5. Unde liquet methodus determinandi Curvam *DraF* ex Phænomenis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco *D*, secundum angulos diversos *CDP*, *cDp* (minuscularum literarum locis subintellectis) & cognoscantur loca *F*, *f*, ubi incidunt in horizontale planum *DC*. Tum, assumpta quacunq; longitudine pro *DP* vel *Dp*, fingatur quod resistentia in *D* sit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis *SM*. Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta *DP*, inveniantur longitudines *DF*, *Df*, ac de ratione $Ff \div DF$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ *SM*, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* secans rectam *SMMM* in *X*, & erit *SX* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo *DF* per calculum; & longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem *DP* ut modo inventa longitudo *DF* ad longitudinem eandem per experimentum cognitam, erit vera longitudo *DP*. Qua inventa, habetur tum Curva Linea *DraF* quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.

Scholium.

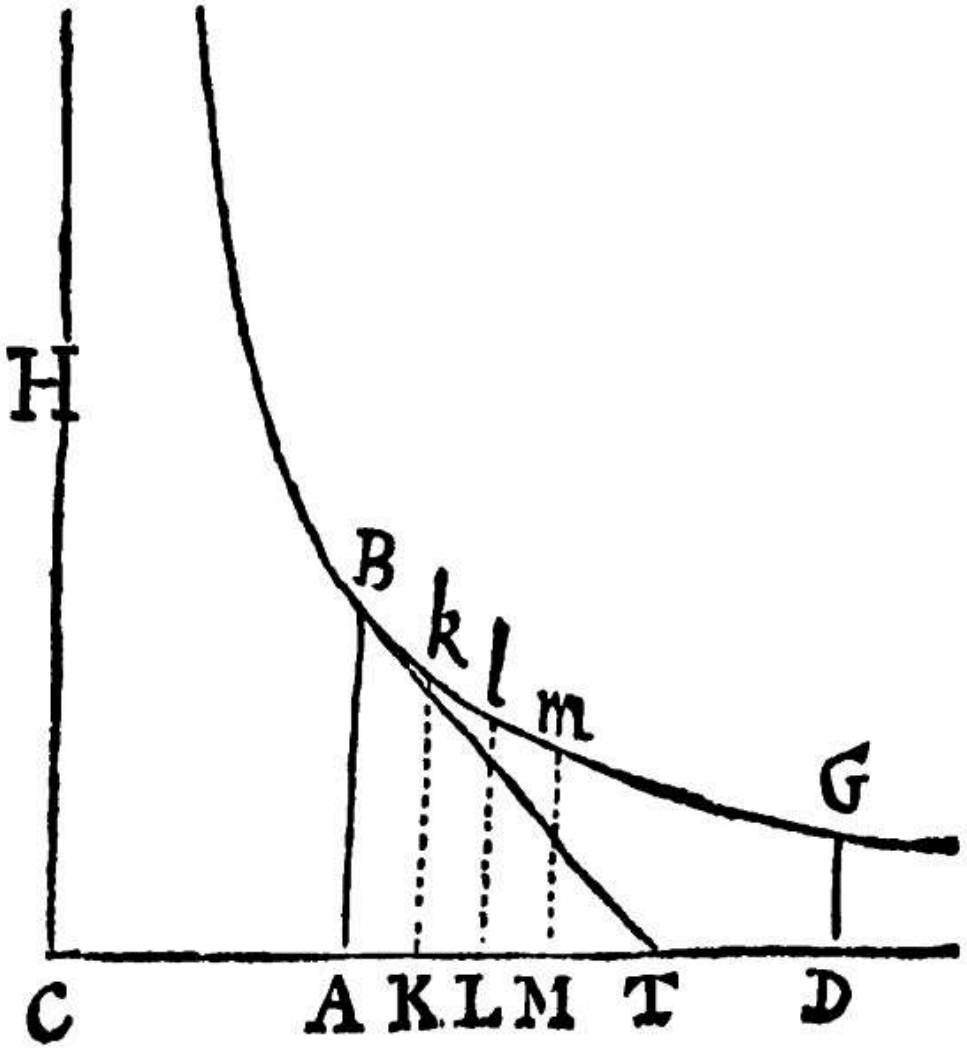
Cæterum corpora resisti in ratione velocitatis Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardissime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant (uti posthac demonstrabitur) corpora resistuntur in duplicata ratione velocitatum. Actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis, adeoq; tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major, estq; resistentia (per motus Legem 2. & 3.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Resistentiæ.

SECT. II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum.

Prop. V. Theor. III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & sola vi insita per Medium similare movetur, tempora vero sumantur in progressione Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione Geometrica inverse, & quod spatia sunt æqualia quæ singulis temporibus describuntur.



Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia Medii, & resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ *AK*, *KL*, *LM*, &c. in recta *CD* sumptæ, & erigantur perpendicula *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. Hyperbolæ *BklmG*, centro *C* Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descriptæ occurrentia in *B*, *k*, *l*, *m*, &c. & erit *AB* ad *Kk* ut *CK* ad *CA*, & divisim *AB* - *Kk* ad *Kk* ut *AK* ad *CA*, & vicissim *AB* - *Kk* ad *AK* ut *Kk* ad *CA*, adeoq; ut *AB* × *Kk* ad *AB* × *CA*. Unde cum *AK* & *AB* × *CA* dentur, erit *AB* - *Kk* ut *AB* × *Kk*; & ultimo, ubi coeunt *AB* & *Kk*, ut *ABq.* Et simili argumento erunt *Kk* - *Ll*, *Ll* - *Mm*, &c. ut *Kkq.*, *Llq.* &c. Linearum igitur *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm* quadrata sunt ut earundem differentiæ, & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiæ, similis erit ambarum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut areæ his lineis descriptæ sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis *AK* exponatur per lineam *AB*, & velocitas initio secundi *KL* per lineam *Kk*, & longitudo primo tempore descripta per arcam *AKkB*, velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes *Ll*, *Mm*, &c. & longitudines descriptæ per areas *Kl*, *Lm*, &c. & composite, si tempus totum exponatur per summam partium suarum *AM*, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum *AMmB*. Concipe jam tempus *AM* ita dividi in partes *AK*, *KL*, *LM*, &c. ut sint *CA*, *CK*, *CL*, *CM*, &c. in progressione Geometrica, & erunt partes illæ in eadem progressione, & velocitates *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. in progressione eadem inversa, atq; spatia descripta *Ak*, *Kl*, *Lm*, &c. æqualia. Q. E. D.

Corol. 1. Patet ergo quod si tempus exponatur per Asymptoti partem quamvis *AD*, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam *AB*; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam *DG*, & spatium totum descriptum per aream Hyperbolicam adjacentem *ABGD*; necnon spatium quod corpus aliquod eodem tempore *AD*, velocitate prima *AB* in Medio non resistente describere posset, per rectangulum *AB* × *AD*.

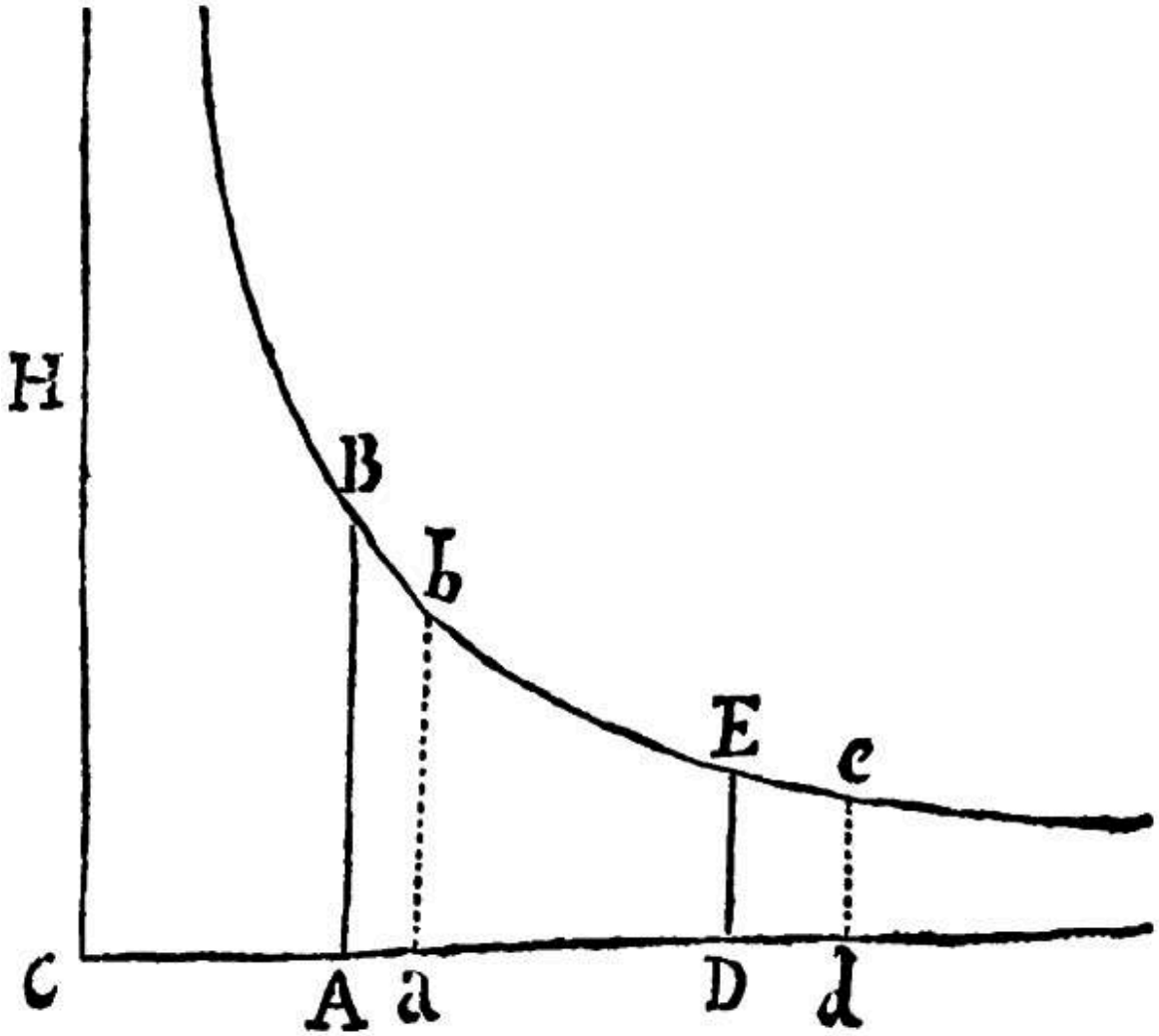
Corol. 2. Unde datur spatium in Medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi *AB* in Medio non resistente simul describi posset, ut est area Hyperbolica *ABGD* ad rectangulum *AB* × *AD*.

Corol. 3. Datur etiam resistentia Medii, statuendo eam ipso motus initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ, in cadente corpore, tempore *AC*, in Medio non resistente, generare posset velocitatem *AB*. Nam si ducatur *BT* quæ tangat Hyperbolam in *B*, & occurrat Asymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipsi *AC*, & tempus exponet quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam *AB*.

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceversa, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam, datur tempus *AC*, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis *AB*; & inde datur punctum *B* per quod Hyperbola Asymptotis *CH*, *CD* describi debet; ut & spatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in Medio similari resistente describere potest.

Prop. VI. Theor. IV.



Corpora Sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descripta Hyperbola quavis *BbEe* secante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Est ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per Hypothesin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura Hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc est spatia descripta æquantur inter se, & velocitates primæ *AB*, *DE* sunt ultimis *ab*, *de*, & propterea (dividendo) partibus etiam suis amissis *AB* - *ab*, *DE* - *de* proportionales. Q. E. D.

Prop. VII. Theor. V.

Corpora Sphærica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directe & resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namq; motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debebit resistentia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut Motus directe & resistentia inverse. Quare temporum particulis in ea ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, adeoq; retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur si æquivelocia corpora resistuntur in duplicata ratione diametrorum, Globi homogenei quibuscunq; cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujusq; erit ut ejus velocitas & Massa conjunctim, id est ut velocitas & cubus diametri; resistentia (per Hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propositionem) est in ratione priore directe & ratione posteriore inverse, id est ut diameter directe & velocitas inverse; adeoq; spatium (tempori & velocitati proportionale) est ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocia corpora resistuntur in ratione sesquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuscunq; cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquialtera ratione diametrorum inverse, amittent partes motuum proportionales totis. Nam tempus augetur in ratione resistentiæ diminutæ, & spatium augetur in ratione temporis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocia corpora resistuntur in ratione dignitatis cujuscunq; diametrorum, spatia quibus Globi homogenei, quibuscunq; cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicata. Sunto diametri D & E; & si resistentiæ sint ut D^n & E^n, spatia quibus amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{-n} & E^{-n}. Igitur describendo spatia ipsis D^{-n} & E^{-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac sub initio.

Corol. 4. Quod si Globi non sint homogenei, spatium a Globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim sub pari velocitate major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc Propositionem) augetur in ratione motus directe, ac spatium descriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et si Globi moveantur in Mediis diversis, spatium in Medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ, & spatium in ratione temporis.

Lemma II.

Momentum Genitæ æquatur momentis Terminorum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex Terminis quibuscunq; in Arithmetica per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium absq; additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt Facti, Quoti, Radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica & similes. Has quantitates ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes hic considero, & eorum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Momenta, quam primum finitæ sunt magnitudinis, desinunt esse momenta. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neq; enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Termini autem cujusq; Generantis coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hunc Terminum.

Igitur sensus Lemmatis est, ut si quantitatum quarumcunq; perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. Momenta, vel mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio rectanguli AB fuerit $Ab + aB$, & contenti ABC momentum fuerit $ABc + AbC + aBC$: & dignitatum A, A, A, $A^{/}_{2}$, $A^{/}_{2}$, $A^{/}_{3}$, $A^{/}_{3}$, $1 \div A$, $1 \div A$, & $1 \div A^{/}_{2}$ momenta $2Aa$, $3aA$, $4aA$, $/_{2}aA^{-/}_{2}$, $/_{2}aA^{/}_{2}$, $/_{3}aA^{-/}_{3}$, $/_{3}aA^{-/}_{3}$, $-aA^{-}$, $-2aA^{-}$, & $-/_{2}aA^{-/}_{2}$ respective. Et generaliter ut dignitatis cujuscunq; $A^{n \div m}$ momentum fuerit $n \div m\ aA^{(n-m) \div m}$. Item ut Genitæ A *quad.* $\times B$ momentum fuerit $2aAB + Ab$; & Genitæ ABC momentum $3aABC + 4AbBC + 2ABCc$; & Genitæ $A \div B$ sive AB^{-} momentum $3aAB^{-} - 2AbB^{-}$: & sic in cæteris. Demonstratur vero Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $½a$ & $½b$, fuit $A - ½a$ in $B - ½b$, seu $AB - ½aB - ½Ab + ¼ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A + ½a$ in $B + ½b$ seu $AB + ½aB + ½Ab + ¼ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $aB + Ab$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + Ab$. Q. E. D.

Cas. 2. Ponatur AB æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (per Cas. 1.) erit $gC + Gc$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB + Ab$) $aBC + AbC + ABc$. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunq;. Q. E. D.

Cas. 3. Ponantur A, B, C æqualia; & ipsius A, id est rectanguli AB, momentum $aB + Ab$ erit $2aA$, ipsius autem A, id est contenti ABC, momentum $aBC + AbC + ABc$ erit $3aA$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunq; A^{n} est naA^{n-}. Q. E. D.

Cas. 4. Unde cum $1 \div A$ in A sit 1, momentum ipsius $1 \div A$ ductum in A, una cum $1 \div A$ ducto in a erit momentum ipsius 1, id est nihil. Proinde momentum ipsius $1 \div A$ seu A^{-} est $-a \div A$. Et generaliter cum $1 \div A^{n}$ in A^{n} sit 1, momentum ipsius $1 \div A^{n}$ ductum in A^{n} una cum $1 \div A^{n}$ in naA^{n-} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $1 \div A^{n}$ seu A^{-n} erit $-na \div A^{n+}$. Q. E. D.

Cas. 5. Et cum $A^{½}$ in $A^{½}$ sit A, momentum ipsius $A^{½}$ in $2A^{½}$ erit a, per Cas. 3: ideoq; momentum ipsius $A^{½}$ erit $a \div 2A^{½}$ sive $2aA^{-½}$. Et generaliter si ponatur $A^{m \div n}$ æqualem B, erit A^{m} æquale B^{n}, ideoq; maA^{m-} æquale nbB^{n}

$^{-}$, & maA^{-} æquale nbB^{-} seu $nb \div A^{m \div n}$, adeoq; $\{m \div n\}aA^{(m-n) \div n}$ æquale b, id est æquale momento ipsius $A^{m \div n}$. Q. E. D.

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuscunq; $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, una cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $maA^{m-} + nbB^{n-}$; idq; sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunq; dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

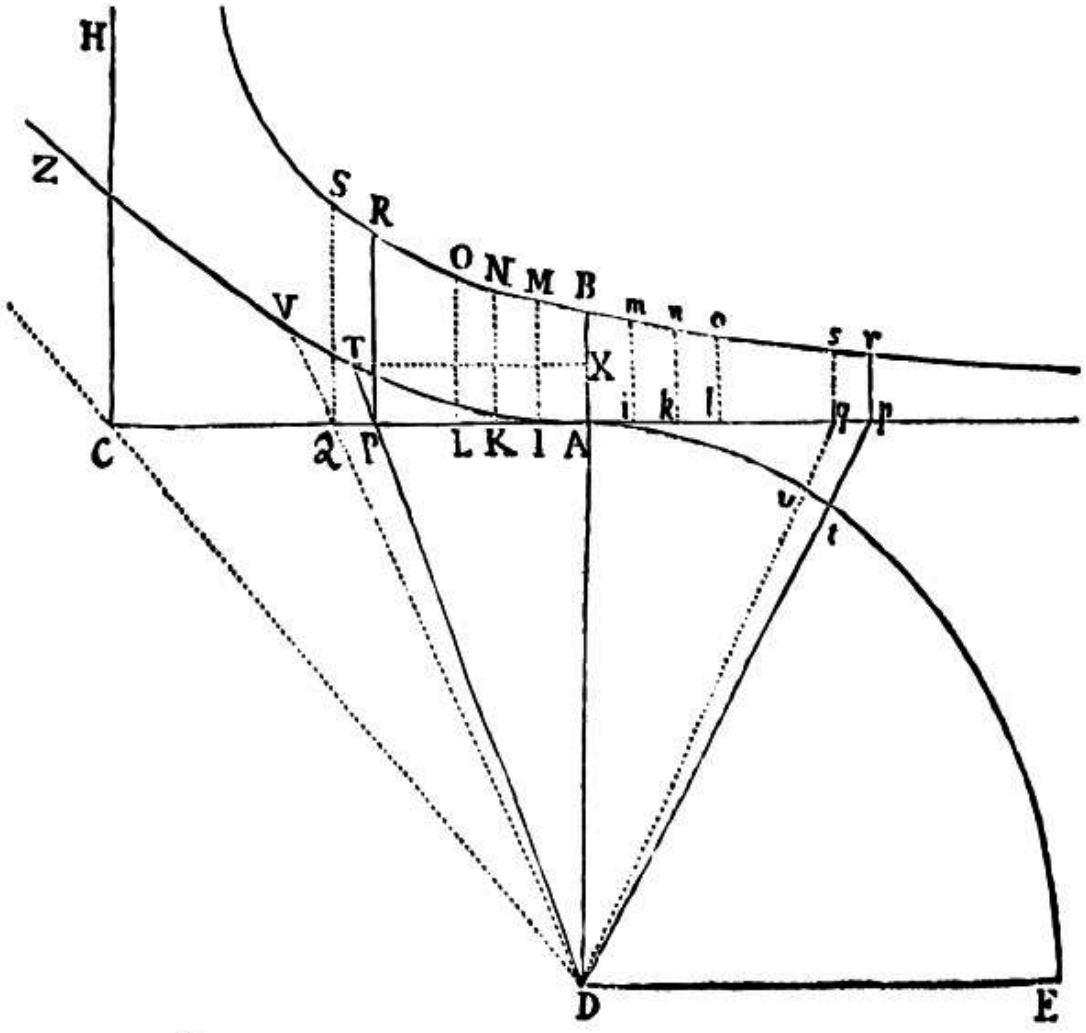
Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus [Data æquatione quotcunq; fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice versa] eandem celarem: rescripsit Vir Clarissimus se quoq; in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis. Utriusq; fundamentum continetur in hoc Lemmate.

Prop. VIII. Theor. VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inq; principiis singularum partium (addendo resistentiam Medii ad vim

gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) colligantur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressione Geometrica.



Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam *AC*; resistentia per lineam indefinitam *AK*; vis absoluta in descensu corporis per differentiam *KC*; velocitas corporis per lineam *AP* (quæ sit media proportionalis inter *AK* & *AC*, ideoq; in dimidiata ratione resistentiæ) incrementum resistentiæ data temporis particula factum per lineolam *KL*, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam *PQ*; & centro *C* Asymptotis rectangulis *CA*, *CH* describatur Hyperbola quævis *BNS*, erectis perpendiculis *AB*, *KN*, *LO*, *PR*, *QS* occurrens in *B*, *N*, *O*, *R*, *S*. Quoniam *AK* est ut *APq.*, erit hujus momentum *KL* ut illius momentum 2*APQ*, id est ut *AP* in *KC*. Nam velocitatis incrementum *PQ*, per motus Leg. 2. proportionale est vi

generanti *KC*. Componatur ratio ipsius *KL* cum ratione ipsius *KN*, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut *AP*. Atqui areæ Hyperbolicæ *KNOL* ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, est æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evanescens est ut *AP*. Componitur igitur area tota Hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. & vires absolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progressione Geometrica. Q. E. D. Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. sunt continue proportionales. Ideoq; si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia Medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* respective; & vice versa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea *AC*.

Corol. 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia Medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in dimidiata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii resistentiam illam cognitam.

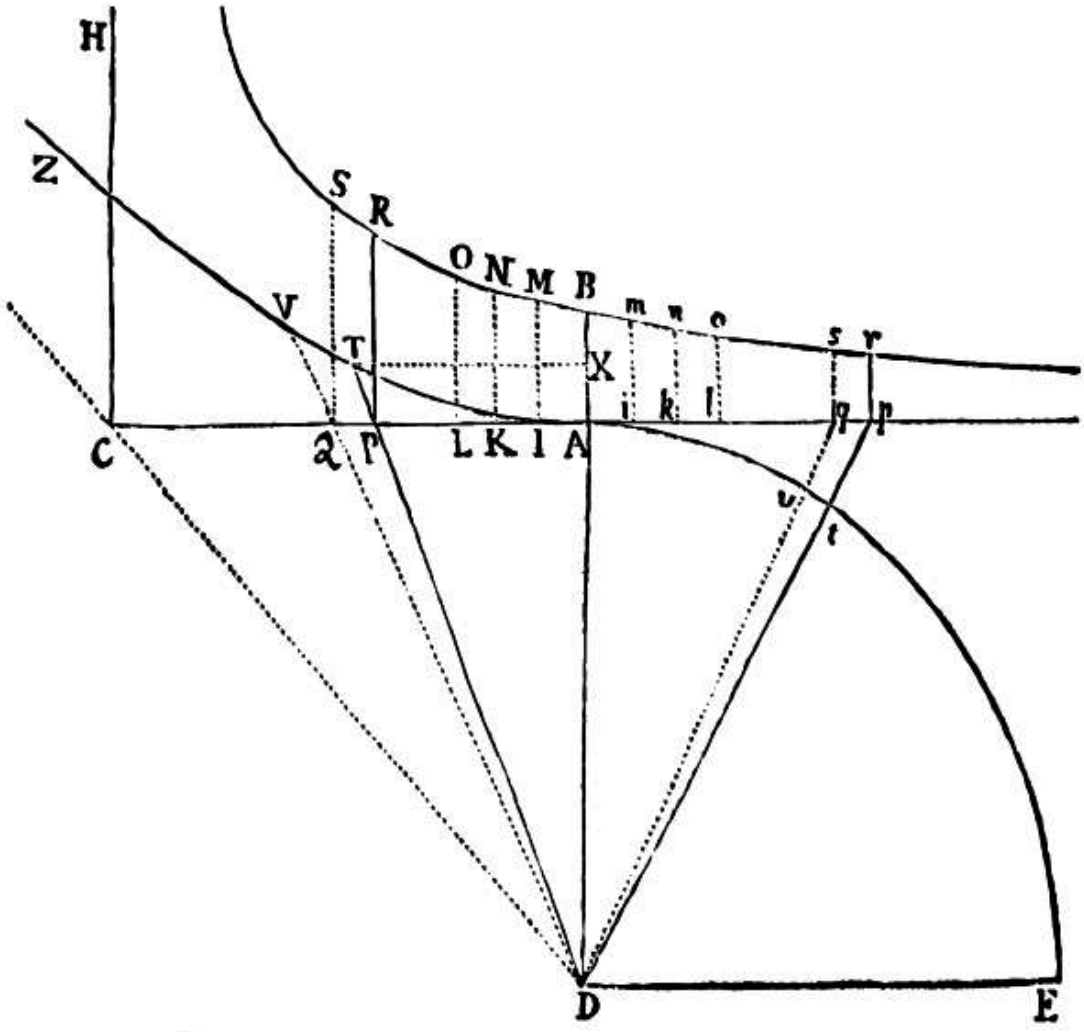
Corol. 4. Sed & particula temporis, quo spatii particula quam minima *NKLO* in descensu describitur, est ut rectangulum $KN \times PQ$. Nam quoniam spatium *NKLO* est ut velocitas ducta in particulam temporis; erit particula temporis ut spatium illud applicatum ad velocitatem, id est ut rectangulum quam minimum $KN \times KL$ applicatum ad *AP*. Erat supra *KL* ut $AP \times PQ$. Ergo particula temporis est ut $KN \times PQ$, vel quod perinde est, ut $PQ \div CK$. Q. E. D.

Corol. 5. Eodem argumento particula temporis, quo spatii particula *nklo* in ascensu describitur, est ut $pq \div Ck$.

Prop. IX. Theor. VII.

Positis jam demonstratis, dico quod si Tangentes angulorum sectoris Circularis & sectoris Hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascensus futuri ut sector Circuli, & tempus omne descensus præteriti ut sector Hyperbolæ.

Rectæ *AC*, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur *AD*. Centro *D* semidiametro *AD* describatur tum circuli Quadrans *AtE*, tum Hyperbola rectangula *AVZ* axem habens *AX*, verticem principalem *A* & Asymptoton *DC*. Jungantur *Dp*, *DP*, & erit sector circularis *AtD* ut tempus ascensus omnis futuri; & Sector Hyperbolicus *ATD* ut tempus descensus omnis præteriti, si modo Sectorem tangentes *Ap* & *AP* sint velocitates.



Cas. 1. Agatur enim *Dvq* abscindens Sectoris *ADt* & trianguli *ADp* momenta, seu particulas quam minimas simul descriptas *tDv* & *pDq*. Cum

particulæ illæ, ob angulum communem *D*, sunt in duplicata ratione laterum, erit particula *tDv* ut *qDp* ÷ *pD quad.* Sed *pD quad.* est *AD quad.* + *Ap quad.* id est *AD quad.* + *Ak* × *AD* seu *AD* × *Ck*; & *qDp* est ½*AD* × *pq*. Ergo Sectoris particula *vDt* est ut *pq* ÷ *Ck*, id est, per Corol. 5, Prop. VIII. ut particula temporis. Et componendo fit summa particularum omnium *tDv* in Sectore *ADt*, ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescentis *Ap* particulis amissis *pq* respondentium, usq; dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, Sector totus *ADt* est ut ascensus totius futuri tempus. Q. E. D.

Cas. 2. Agatur *DQV* abscindens tum Sectoris *DAV*, tum trianguli *DAQ* particulas quam minimas *TDV* & *PDQ*; & erunt hæ particulæ ad invicem ut *DTq.* ad *DPq.* id est (si *TX* & *AP* parallelæ sint) ut *DXq.* ad *DAq.* vel *TXq.* ad *APq.* & divisim ut *DXq.* - *TXq.* ad *ADq.* - *APq.* Sed ex natura Hyperbolæ *DXq.* - *TXq.* est *ADq.*, & per Hypothesin *APq.* est *AD* × *AK*. Ergo particulæ sunt ad invicem ut *ADq.* ad *ADq.* - *AD* × *AK*; id est ut *AD* ad *AD* - *AK* seu *AC* ad *CK*: ideoq; Sectoris particula *TDV* est *PDQ* × *AC* ÷ *CK*, atq; adeo ob datas *AC* & *AD*, ut *PQ* ÷ *CK*; & propterea per Corol. 5. Prop. VIII. Lib. II. ut particula temporis incremento velocitatis *PQ* respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis *AP* particulæ *PQ* generantur, ut summa particularum Sectoris *ADT*, id est tempus totum ut Sector totus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si *AB* æquetur quartæ parti ipsius *AC*, spatium *ABRP*, quod corpus tempore quovis *ATD* cadendo describit, erit ad spatium quod corpus semisse velocitatis maximæ *AC*, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area *ABRP*, qua spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream *ATD* qua tempus exponitur. Nam cum sit *AC* ad *AP* ut *AP* ad *AK*, erit 2*APQ* æquale *AC* × *KL* (per Corol. 1. Lem. II. hujus) adeoq; *KL* ad *PQ* ut 2*AP* ad *AC*, & inde *LKN* ad *PQ* × ½*AD* seu *DPQ* ut 2*AP* × *KN* ad ½*AC* × *AD*. Sed erat *DPQ* ad *DTV* ut *CK* ad *AC*. Ergo ex æquo *LKN* est ad *DTV* ut 2*AP* × *KN* × *CK* ad ½*AC cub.*; id est, ob æquales *CKN* & ¼*ACq.*, ut *AP* ad *AC*; hoc est ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum *ABKN* & *AVD* momenta *LKN* & *DTV* sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideoq; areæ totæ ab initio genitæ *ABKN* & *AVD* ut spatia tota ab initio descensus descripta. Q. E. D.

Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quod spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore descriptum, ut est area *ABnk* ad Sectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum *APD* ad Sectorem Hyperbolicum *ATD*. Nam velocitas in Medio non resistente foret ut tempus *ATD*, & in Medio resistente est ut *AP*, id est ut triangulum *APD*. Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum *ApD* ad Sectorem circularem *AtD*, sive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

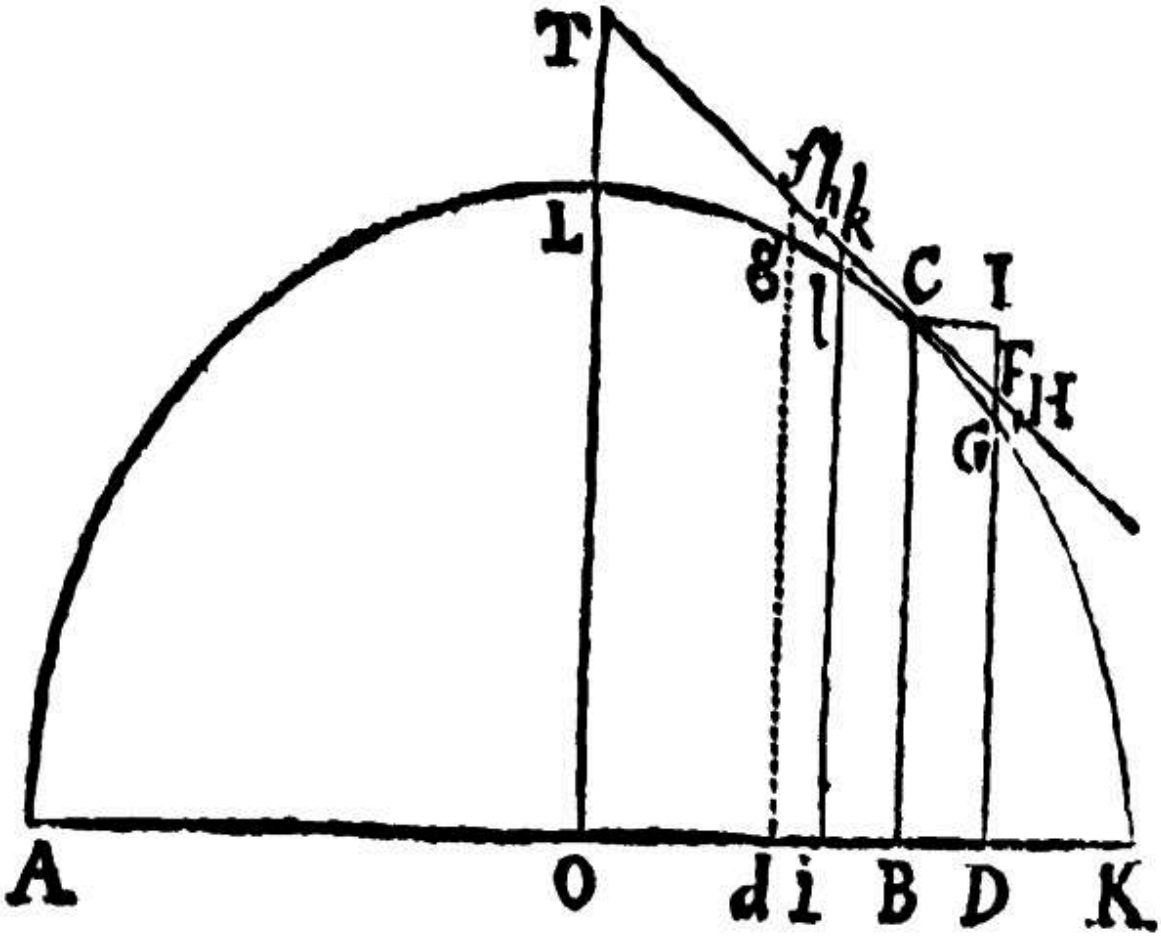
Corol. 5. Est igitur tempus quo corpus in Medio resistente cadendo velocitatem *AP* acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam *AC* in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ut Sector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus, quo velocitatem *Ap* in Medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus *At* ad ejus Tangentem *Ap*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima, per Corol. 2. & 3. Theor. VI, Lib. II. indeq; datur & spatium quod semisse velocitatis illius dato tempore describi potest, & tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo Sectorem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporum; dabitur tum velocitas *AP* vel *Ap*, tum area *ABKN* vel *ABkn*, quæ est ad Sectorem ut spatium quæsitum ad spatium jam ante inventum.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

Prop. X. Prob. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sitq; resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis.



Sit *AK* planum illud plano Schematis perpendiculare; *ACK* linea curva; *C* corpus in ipsa motum; & *FCf* recta ipsam tangens in *C*. Fingatur autem corpus *C* nunc progredi ab *A* ad *K* per lineam illam *ACK*, nunc vero regredi per eandem lineam; & in progressu impediri a Medio, in regressu æque promoveri, sic ut in iisdem locis eadem semper sit corporis progredientis & regredientis velocitas. Æqualibus autem temporibus describat corpus progrediens arcum quam minimum *CG*, & corpus regrediens arcum *Cg*; & sint *CH*, *Ch* longitudines æquales rectilineæ, quas corpora de loco *C* exeuntia, his temporibus, absq; Medii & Gravitatis actionibus describerent: & a punctis *C*, *G*, *g*, ad planum horizontale *AK* demittantur perpendicula *CB*, *GD*, *gd*, quorum *GD* ac *gd* tangenti occurrant in *F* & *f*. Per Medii resistentiam fit ut corpus progrediens, vice longitudinis *CH*, describat solummodo longitudinem *CF*; & per vim gravitatis transfertur corpus de *F* in *G*: adeoq; lineola *HF* vi resistentiæ, & lineola *FG* vi gravitatis simul generantur. Proinde (per Lem. X. Lib. I.) lineola *FG* est ut vis gravitatis &

quadratum temporis conjunctim, adeoq; (ob datam gravitatem) ut quadratum temporis; & lineola *HF* ut resistentia & quadratum temporis, hoc est ut resistentia & lineola *FG*. Et inde resistentia fit ut *HF* directe & *FG* inverse, sive ut $HF \div FG$. Hæc ita se habent in lineolis nascentibus. Nam in lineolis finitæ magnitudinis hæ rationes non sunt accuratæ.

Et simili argumento est *fg* ut quadratum temporis, adeoq; ob æqualia tempora æquatur ipsi *FG*; & impulsus quo corpus regrediens urgetur est ut $hf \div fg$. Sed impulsus corporis regredientis & resistentia progredientis ipso motus initio æquantur, adeoq; & ipsis proportionales $hf \div fg$ & $HF \div FG$ æquantur; & propterea ob æquales *fg* & *FG*, æquantur etiam *hf* & *HF*, suntq; adeo *CF*, *CH* (vel *Ch*) & *Cf* in progressione Arithmetica, & inde *HF* semidifferentia est ipsarum *Cf* & *CF*; & resistentia quæ supra fuit ut $HF \div FG$, est ut $\{Cf - CF\} \div FG$.

Est autem resistentia ut Medii densitas & quadratum velocitatis. Velocitas autem ut descripta longitudo *CF* directe & tempus $\sqrt{FG}$ inverse, hoc est ut $CF \div \sqrt{FG}$, adeoq; quadratum velocitatis ut $CFq. \div FG$. Quare resistentia, ipsiq; proportionalis $\{Cf - CF\} \div FG$ est ut Medii densitas & ut $CFq. \div FG$ conjunctim; & inde Medii densitas ut $\{Cf - CF\} \div FG$ directe & $CFq. \div FG$ inverse, id est ut $\{Cf - CF\} \div CFq.$ Q. E. I.

Corol. 1. Et hinc colligitur, quod si in *Cf* capiatur *Ck* æqualis *CF*, & ad planum horizontale *AK* demittatur perpendiculum *ki*, secans curvam *ACK* in *l*; fiet Medii densitas ut $\{FG - kl\} \div \{CF \times FG + kl\}$. Erit enim *fC* ad *kC* ut $\sqrt{fg}$ seu $\sqrt{FG}$ ad $\sqrt{kl}$, & divisim *fk* ad *kC*, id est $Cf - CF$ ad *CF* ut $\sqrt{FG} - \sqrt{kl}$ ad $\sqrt{kl}$; hoc est (si ducatur terminus uterq; in $\sqrt{FG} + \sqrt{kl}$) ut $FG - kl$ ad $kl + \sqrt{FG} \times kl$, sive ad $FG + kl$. Nam ratio prima nascentium $kl + \sqrt{FG} \times kl$ & $FG + kl$ est æqualitatis. Scribatur itaq; $\{FK - Kl\} \div \{FK + Kl\}$ pro $\{Cf - CF\} \div CF$; & Medii densitas, quæ fuit ut $\{Cf - CF\} \div CF$ *quad.* evadet ut $\{FG - kl\} \div \{CF \times FG + kl\}$.

Corol. 2. Unde cum $2HF$ & $Cf - CF$ æquentur, & *FG* & *kl* (ob rationem æqualitatis) componant $2FG$; erit $2HF$ ad *CF* ut $FG - kl$ ad $2FG$; et inde *HF* ad *FG*, hoc est resistentia ad gravitatem, ut rectangulum *CF* in $FG - kl$ ad $4FG$ *quad.*

Corol. 3. Et hinc si curva linea definiatur per relationem inter basem seu abscissam *AB* & ordinatim applicatam *BC*; (ut moris est) & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos seriei terminos expedite solvetur: ut in Exemplis sequentibus.

Exempl. 1. Sit Linea *ACK* semicirculus super diametro *AK* descriptus, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Bisecetur semicirculi diameter *AK* in *O*; & dic *OK n*, *OB a*, *BC e*, & *BD* vel *Bi o*: & erit *DGq.* seu *OGq.* - *ODq.* æquale *nn* - *aa* - 2*ao* - *oo* seu *ee* - 2*ao* - *oo*; & radice per methodum nostram extracta, fiet *DG* = *e* - *ao* ÷ *e* - *oo* ÷ 2*e* - *aaoo* ÷ 2*e* - *ao* ÷ 2*e* - *ao* ÷ 2*e* &c. Hic scribatur *nn* pro *ee* + *aa* & evadet *DG* = *e* - *ao* ÷ *e* - *nnoo* ÷ 2*e* - *anno* ÷ 2*e* &c.

Hujusmodi Series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva *o* non extat; secundum in quo quantitas illa extat unius dimensionis; tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium est, & sic in infinitum. Et primus terminus, qui hic est *e*, denotabit semper longitudinem ordinatæ *BC* insistentis ad indefinitæ quantitatis initium *B*; secundus terminus qui hic est *ao* ÷ *e*, denotabit differentiam inter *BC* & *DF*, id est lineolam *IF*, quæ abscinditur complendo parallelogrammum *BC* - *ID*, atq; adeo positionem Tangentis *CF* semper determinat: ut in hoc casu capiendo *IF* ad *IC* ut est *ao* ÷ *e* ad *o* seu *a* ad *e*. Terminus tertius, qui hic est *nnoo* ÷ 2*e* designabit lineolam *FG*, quæ jacet inter Tangentem & Curvam, adeoq; determinat angulum contactus *FCG*, seu curvaturam quam curva linea habet in *C*. Si lineola illa *FG* finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium una cum subsequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinite minores tertio, ideoq; negligi possunt. Terminus quartus, qui hic est *anno* ÷ 2*e*, exhibet variationem Curvaturæ; quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum Serierum in solutione Problematum, quæ pendent a Tangentibus & curvatura Curvarum.

Præterea *CF* est latus quadratum ex *CIq.* & *IFq.* hoc est ex *BDq.* & quadrato termini secundi. Estq; *FG* + *kl* æqualis duplo termini tertii, & *FG* - *kl* æqualis duplo quarti. Nam valor ipsius *DG* convertitur in valorem ipsius *il*, & valor ipsius *FG* in valorem ipsius *kl*, scribendo *Bi* pro *BD*, seu -*o* pro +*o*. Proinde cum *FG* sit - *nnoo* ÷ 2*e* - *anno* ÷ 2*e* &c. erit *kl* = - *nnoo* ÷ 2*e* + *anno* ÷ 2*e*, &c. Et horum summa est - *nnoo* ÷ *e*, differentia - *anno* ÷ *e*.

Terminum quintum & sequentes hic negligo, ut infinite minores quam qui in hoc Problemate considerandi veniant. Itaq; si designetur Series universaliter his terminis ± *Qo* - *Roo* - *So* &c. erit *CF* æqualis √*oo* + *QQoo*, *FG* + *kl* æqualis 2*Roo*, & *FG* - *kl* æqualis 2*So*. Pro *CF*, *FG* + *kl* & *FG* - *kl* scribantur hi earum valores, & Medii densitas quæ erat ut {*FG* - *kl*} ÷ {*CF* in *FG* + *kl*} jam fiet ut *S* ÷ {*R* √1 + *QQ*}. Deducendo igitur Problema unumquodq; ad seriem convergentem, & hic pro *Q*, *R* & *S* scribendo terminos seriei ipsis respondentes; deinde etiam ponendo resistentiam Medii in loco quovis *G* esse ad Gravitatem ut *S*√1 + *QQ* ad 2*RR*, & velocitatem esse illam ipsam quacum corpus, de loco *C* secundum rectam *CF* egrediens, in Parabola, diametrum *CB* & latus rectum {1 + *QQ*} ÷ *R* habente, deinceps moveri posset, solvetur Problema.

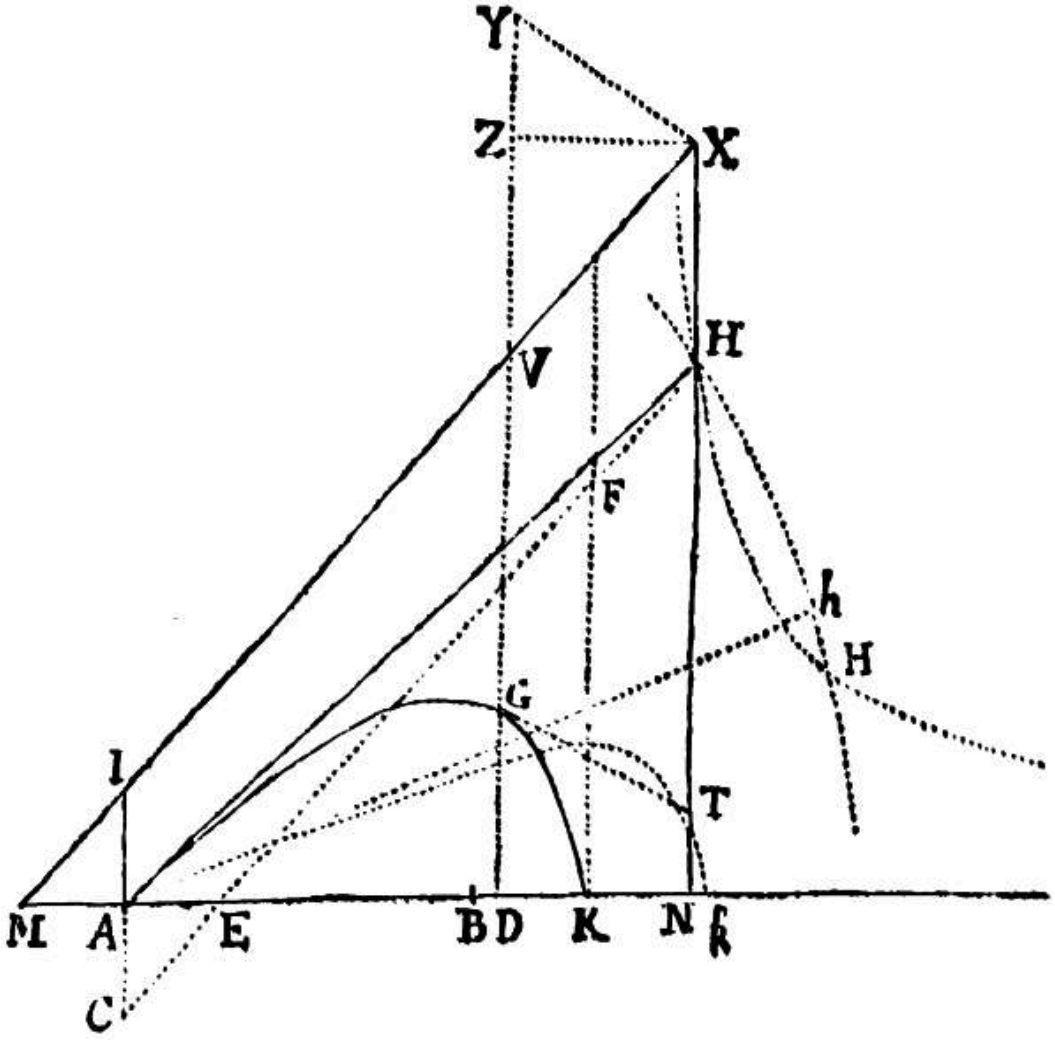
Sic in Problemate jam solvendo, si scribantur √1 + *aa* ÷ *ee* seu *n* ÷ *e* pro √1 + *QQ*, *nn* ÷ 2*e* pro *R*, & *ann* ÷ 2*e* pro *S*, prodibit Medii densitas ut *a* ÷ *ne*, hoc est (ob datam *n*) ut *a* ÷ *e* seu *OB* ÷ *BC*, id est ut Tangentis longitudo illa *CT*, quæ ad semidiametrum *OL* ipsi *AK* normaliter insistentem terminatur, & resistentia erit ad gravitatem ut *a* ad *n*, id est ut *OB* ad circuli semidiametrum *OK*, velocitas autem erit ut √2*BC*. Igitur si corpus *C* certa cum velocitate, secundum lineam ipsi *OK* parallelam, exeat de loco *L*, & Medii densitas in singulis locis *C* sit ut longitudo tangentis *CT*, & resistentia etiam in loco aliquo *C* sit ad vim gravitatis ut *OB* ad *OK*; corpus illud describet circuli quadrantem *LCK*. Q. E. I.

At si corpus idem de loco *A* secundum lineam ipsi *AK* perpendicularem egrederetur, sumenda esset *OB* seu *a* ad contrarias partes centri *O*, & propterea signum ejus mutandum esset, & scribendum -*a* pro +*a*. Quo pacto prodiret Medii densitas ut -*a* ÷ *e*. Negativam autem densitatem (hoc est quæ motus corporum accelerat) Natura non admittit, & propterea naturaliter fieri non potest ut corpus ascendendo ab *A* describat circuli quadrantem *AL*. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a resistente impediri.

Exempl. 2. Sit linea *ALCK* Parabola, axem habens *OL* horizonti *AK* perpendicularem, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut projectile in ipsa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum *ADK* æquale est rectangulo sub ordinata *DG* & recta aliqua data: hoc est, si dicantur recta illa *b*, *AB a*, *AK c*, *BC e* & *BD o*; rectangulum *a* + *o* in *c* - *a* - *o* seu *ac* - *aa* - 2*ao* + *co* - *oo*

æquale est rectangulo b in DG, adeoq; DG æquale $\{ac - aa\} \div b + \{\{c - 2a\} \div b\}o - oo \div b$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\{\{c - 2a\} \div b\}\ o$ pro Qo, & ejus coefficiens $\{c - 2a\} \div b$ pro Q; tertius item terminus $oo \div b$ pro Roo, & ejus coefficiens $1 \div b$ pro R. Cum vero plures non sint termini, debebit quarti termini So coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $S \div \{R\sqrt{1 + QQ}\}$ cui Medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. Q. E. I.



Exempl. 3. Sit linea *AGK* Hyperbola, Asymptoton habens *NX* plano horizontali *AK* perpendicularem; & quæratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit *MX* Asymptotos altera, ordinatim applicatæ *DG* productæ occurrens in *V*, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum *XV* in *VG* dabitur. Datur autem ratio *DN* ad *VX*, & propterea datur etiam rectangulum *DN* in *VG*. Sit illud

bb; & completo parallelogrammo *DNXZ*, dicatur *BN a*, *BD o*, *NX c*, & ratio data *VZ* ad *ZX* vel *DN* ponatur esse *m* ÷ *n*. Et erit *DN* æqualis *a* - *o*, *VG* æqualis *bb* ÷ {*a* - *o*}, *VZ* æqualis *m* ÷ *n a* - *o*, & *GD* seu *NX* - *VZ* - *VG* æqualis *c* - {*m* ÷ *n*}*a* + {*m* ÷ *n*}*o* - *bb* ÷ {*a* - *o*}. Resolvatur terminus *bb* ÷ {*a* - *o*} in seriem convergentem *bb* ÷ *a* + {*bb* ÷ *aa*}*o* + {*bb* ÷ *a*}*oo* + {*bb* ÷ *a*}*o* etc. & fiet *GD* æqualis *c* - {*m* ÷ *n*}*a* - *bb* ÷ *a* + {*m* ÷ *n*}*o* - {*bb* ÷ *aa*}*o* - {*bb* ÷ *a*}*o* - {*bb* ÷ *a*}*o* &c. Hujus seriei terminus secundus {*m* ÷ *n*}*o* - {*bb* ÷ *aa*}*o* usurpandus est pro *Qo*, tertius cum signo mutato {*bb* ÷ *a*}*o* pro *Ro*, & quartus cum signo etiam mutato {*bb* ÷ *a*}*o* pro *So*, eorumq; coefficientes *m* ÷ *n* - *bb* ÷ *aa*, *bb* ÷ *a* & *bb* ÷ *a* scribendæ sunt, in Regula superiore, pro *Q*, *R* & *S*. Quo facto prodit medii densitas ut

bb

a

bb

√

{

1 -

mm

-

2mbb

+

b

}

a

nn

naa

a

seu

√

{

aa

+

mm
aa -
2*mbb*

+

b

}

nn

n

aa

est, si in *VZ* sumatur *VY* æqualis *VG*, ut 1 ÷ *XY*. Namq; *aa* & {*mm* ÷ *nn*}*aa* - 2*mbb* ÷ *n* + *b* ÷ *aa* sunt ipsarum *XZ* & *ZY* quadrata. Resistentia

autem invenitur in ratione ad Gravitatem quam habet *XY* ad *YG*, & velocitas ea est quacum corpus in Parabola pergeret verticem *G* diametrum *DG* & latus rectum *YX quad.* ÷ *VG* habente. Ponatur itaq; quod Medii densitates in locis singulis *G* sint reciproce ut distantiæ *XY*, quodq; resistentia in loco aliquo *G* sit ad gravitatem ut *XY* ad *YG*; & corpus de loco *A* justa cum velocitate emissum describet Hyperbolam illam *AGK*. Q. E. I.

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea *AGK* Hyperbola sit, centro *X* Asymptotis *MX*, *NX*, ea lege descripta, ut constructo rectangulo *XZDN* cujus latus *ZD* secet Hyperbolam in *G* & Asymptoton ejus in *V*, fuerit *VG* reciproce ut ipsius *ZX* vel *DN* dignitas aliqua ND^n, cujus index est numerus *n*: & quæratur Medii densitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro *DN*, *BD*, *NX* scribantur *A*, *O*, *C* respective, sitq; *VZ* ad *ZX* vel *DN* ut *d* ad *e*, & *VG* æqualis $bb \div DN^n$, & erit *DN* æqualis *A* - *O*, $VG = bb \div \{A - O\}^n$, $VZ = d \div e$ in *A* - *O*, & *GD* seu *NX* - *VZ* - *VG* æqualis $C - \{d \div e\}A + \{d \div e\}O - bb \div \{A - O\}^n$. Resolvatur terminus ille $bb \div \{A - O\}^n$ in seriam infinitam

$$bb$$

$$+$$

$$nbbO$$

$$+$$

$$nn + n$$
$$bbO +$$
$$n + 3nn + 2n$$
$$bbO \text{ \&c.}$$

$$A^n$$

$$A^{n+}$$

$2A^{n+}$

$6A^{n+}$

ac fiet *GD* æqualis

C -
d
A -
bb

+

d
O -
nbb
O -
nn + *n*
bbO -
n + 3*nn* + 2*n*
bbO
&c.

e

A^{n}

e

A^{n+}

$2A^{n+}$

$6A^{n+}$

Hujus seriei terminus secundus $\{d \div e\}O$ - $\{nbb \div A^{n+}\}O$ usurpandus est pro *Qo*, tertius $\{\{nn + n\} \div 2A^{n+}\}bbO$ pro *Ro*, quartus $\{\{n + 3nn + 2n\} \div 6A^{n+}\}bbO$ pro *So*. Et inde Medii densitas $S \div \{R \times \sqrt{1 + QQ}\}$, in loco quovis *G*, fit

$n + 2$

3

√

{

$A +$
dd
$A -$
$2dnbb$
$A +$
nnb

}

,

ee

eA^n

A^n

adeoq; si in VZ capiatur VY æqualis $n \times VG$, est reciproce ut XY. Sunt enim A & $\{dd \div ee\}A - 2dnbb \div eA^n$ in $A + nnb \div A^n$ ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem in eodem loco G fit ad Gravitatem ut S in $XY \div A$ ad $2RR$, id est XY ad $\{\{3nn + 3n\} \div \{n + 2\}\}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD & Latus rectum $\{1 + QQ\} \div R$ seu $2XY$ *quad.* $\div \{nn + n$ in $VG\}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Quoniam motus non fit in Parabola nisi in Medio non resistente, in Hyperbolis vero hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam Projectile in Medio uniformiter resistente describit, propius accedit ad Hyperbolas hasce quam ad Parabolam. Est utiq; linea illa Hyperbolici generis, sed quæ circa verticem magis distat ab Asymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta vero non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum sic deducentur.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & ex natura harum Hyperbolarum facile colligitur quod recta GT tangit Hyperbolam in G, ideoq; densitas Medii in G est reciproce ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\{GTq. \div GV\}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\{\{3nn + 3n\} \div \{n + 2\}\}GV$.

Proinde si corpus de loco A secundum rectam AH projectum describat Hyperbolam AGK, & AH producta occurrat Asymptoto NX in H, actaq; AI occurrat alteri Asymptoto MX in I: erit Medii densitas in A reciproce ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\{AHq. \div AI\}}$, ac resistentia ibidem ad Gravitatem ut AH ad $\{3nn + 3n\} \div \{n + 2\}$ in AI. Unde prodeunt sequentes Regulæ.

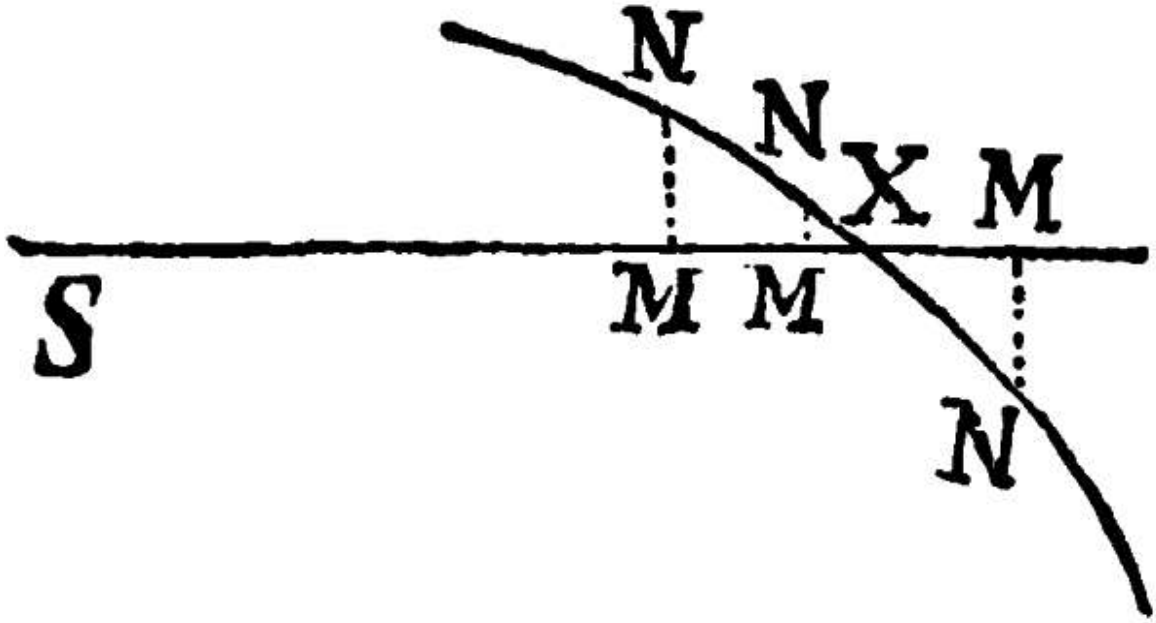
Reg. 1. Si servetur Medii densitas in A & mutetur angulus NAH, manebunt longitudines AH, AI, HX. Ideoq; si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expedite determinari potest.

Reg. 2. Si servetur tum angulus *NAH* tum Medii densitas in *A*, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; servabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus *NAH* quam corporis velocitas in *A*, gravitasq; acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in *A* ad gravitatem motricem augeatur in ratione, quacunque: augebitur proportio *AH* ad *AI* eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eiq; proportionali longitudine *AHq.* ÷ *AI*; & propterea minuetur *AH* in eadem ratione, & *AI* minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine fit minor, vel Medii densitas major, vel resistentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

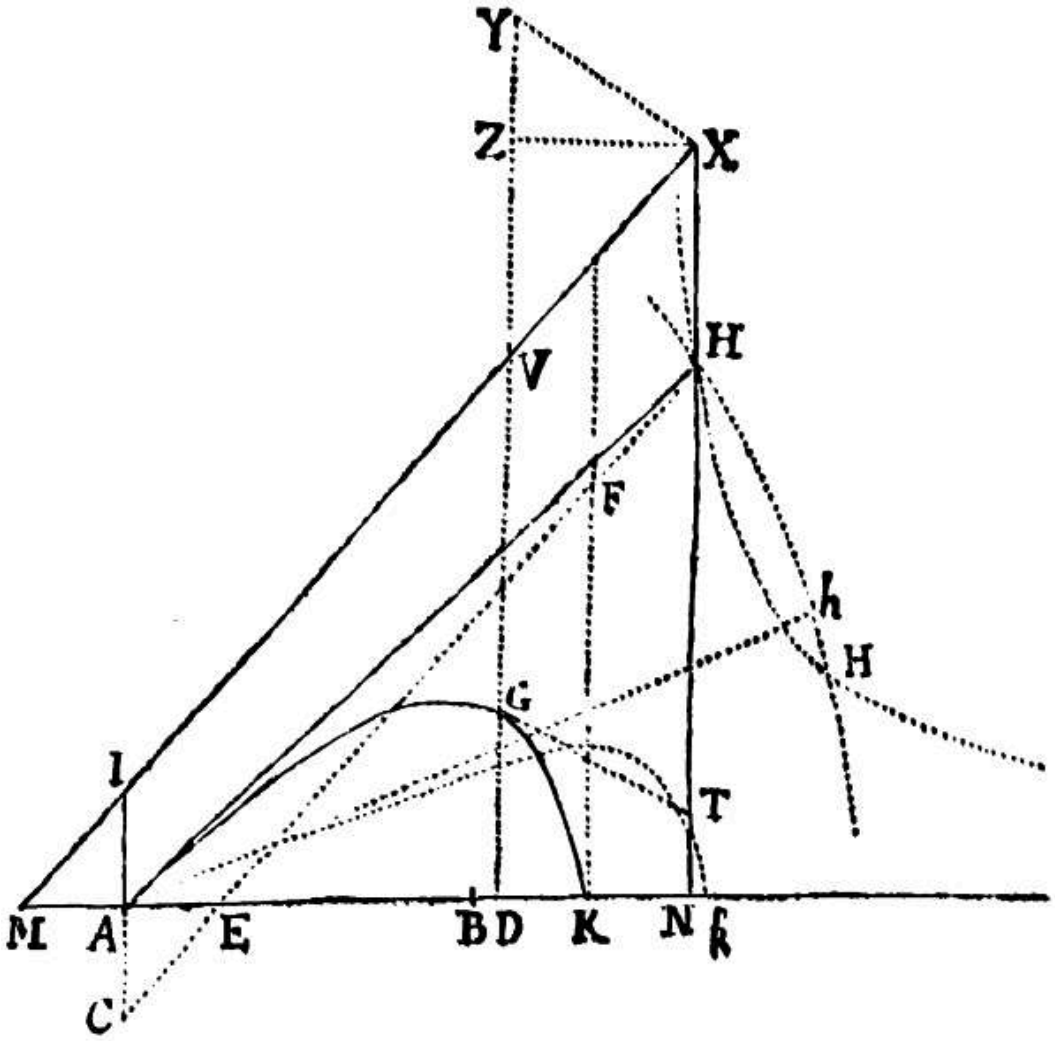
Reg. 4. Quoniam densitas Medii prope verticem Hyperbolæ major est quam in loco *A*, ut servetur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad Tangentem *AH* inveniri, & densitas in *A*, per Regulam tertiam, diminui in ratione paulo minore quam semisummæ Tangentium ad Tangentium *AH*.

Reg. 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & describenda sit figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut sit *HX* æqualis facto sub $n + 1$ & *AI*; centroq; *X* & Asymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* describatur Hyperbola, ea lege ut sit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.



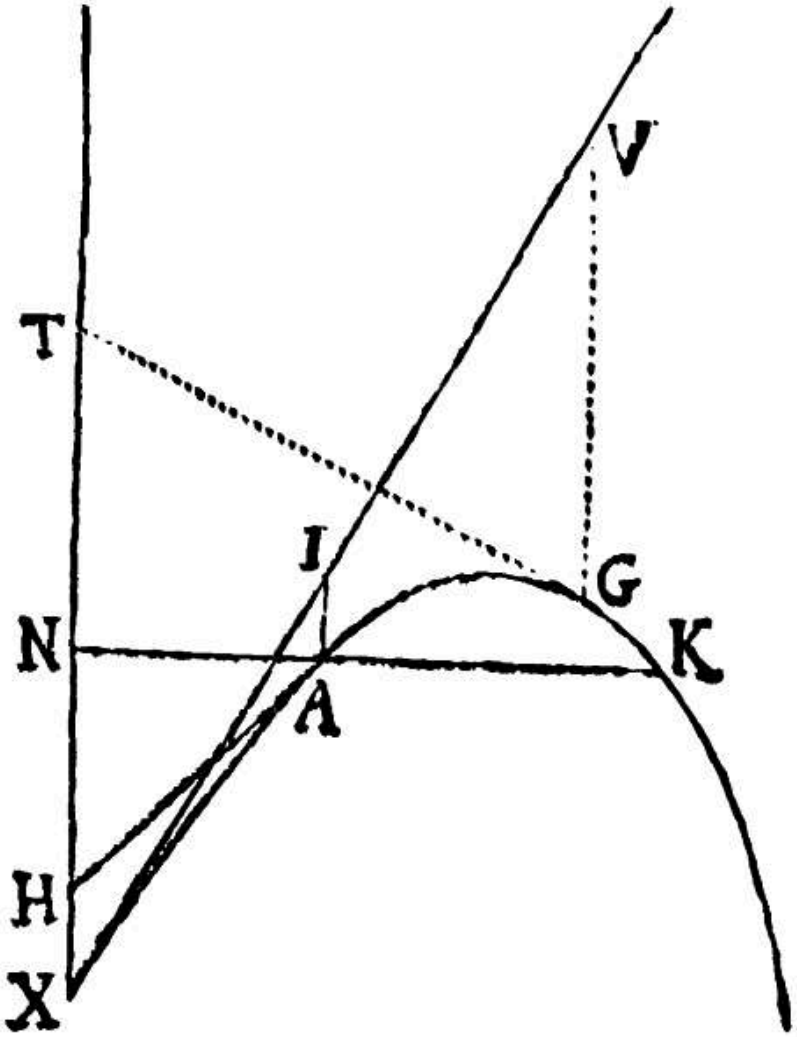
Reg. 6. Quo major est numerus *n*, eo magis accuratæ sunt hæ Hyperbolæ in ascensu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus descensu ad *G*; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, estq; cæteris simplicior. Igitur si Hyperbola sit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* transeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* Asymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & sumatur *NK* ipsi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænomenis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem velocitate, in angulis diversis *HAK*, *hAk*, incidentq; in planum Horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo *AI*, assume utcunq; longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per Reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* sit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte assumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem assumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $AK \div Ak - d \div e$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda sunt plura puncta *N*: & tum demum si per omnia agatur Curva linea regularis *NNXN*, hæc abscindet *SX* quæsitæ longitudini *AH* æqualem. Ad usus Mechanicos sufficit longitudines *AH*, *AI* easdem in angulis omnibus *HAK* retinere. Sin figura ad inveniendam resistentiam Medij accuratius determinanda sit, corrigendæ sunt semper hæ longitudines per Regulam quartam.



Reg. 8. Inventis longitudinibus *AH*, *HX*; si jam desideretur positio rectæ *AH*, secundum quam Projectile data illa cum velocitate emissum incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *AC*, *KF* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorsum tendat, & æquetur ipsi *AI* seu ½*HX*. Asymptotis *AK*, *KF* describatur Hyperbola, cujus Conjugata transeat per punctum *C*, centroq; *A* & intervallo *AH* describatur Circulus secans Hyperbolam illam in puncto *H*; & projectile secundum rectam *AH* emissum incidet in punctum *K*. *Q. E. I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in circulo descripto. Agatur *CH* occurrens ipsis *AK* & *KF*, illi in *C*, huic in *F*, & ob parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & propterea etiam æqualis *KN*. Sed *CE* est ad *AE* ut *FH* ad *KN*, & propterea *CE* & *FH* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in Hyperbolam Asymptotis *AK*, *KF* descriptam, cujus conjugata transit per punctum *C*, atq; adeo reperitur in communi intersectione Hyperbolæ hujus & circuli

descripti. *Q. E. D.* Notandum est autem quod hæc operatio perinde se habet, sive recta *AKN* horizonti parallela sit, sive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodq; ex duabus intersectionibus *H*, *H* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAH*, quorum minor eligendus est; & quod in Praxi mechanica sufficit circulum semel describere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad punctum *C*, ut ejus pars *FH*, circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis sit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *HK* sitæ.



Quæ de Hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad Parabolas. Nam si *XAGK* Parabolam designet quam recta *XV* tangat in vertice *X*, sintq; ordinatim applicatæ *IA*, *VG* ut quælibet abscissarum *XI*, *XV* dignitates XI^n, XV^n; agantur *XT*, *TG*, *HA*, quarum *XT* parallela sit *VG*, & *TG*, *HA* parabolam tangant in *G* & *A*: & corpus de loco quovis *A*, secundum rectam *AH* productam, justa cum velocitate projectum, describet hanc Parabolam,

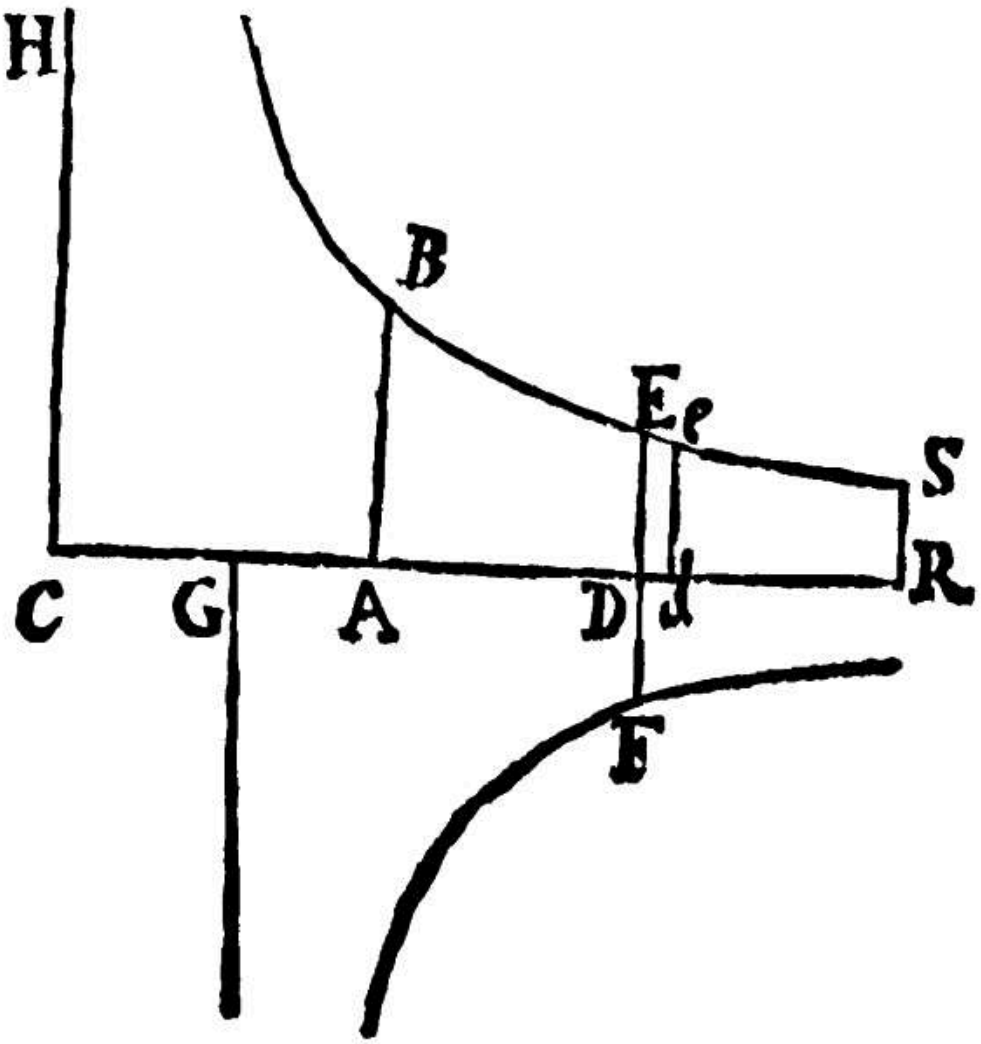
si modo densitas Medij, in locis singulis G, sit reciproce ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quacum Projectile pergeret, in spatio non resistente, in Parabola Conica, verticem G, diametrum VG deorsum productam, & latus rectum $\sqrt{\{2TGq. \div \{nn - n\ XVG\}\}}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim Gravitatis ut TG ad $\{\{3nn - 3n\} \div \{n - 2\}\}VG$. Vnde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate Medij in A, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunq; angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur Parabolæ vertex X, & positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ Projectile transibit.

SECT. III.

De motu corporum quæ resistuntur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.

Prop. XI. Theor. VIII.

Si corpus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & sola vi insita in Medio similari movetur, sumantur autem tempora in progressione Arithmetica: quantitates velocitatibus reciproce proportionales, data quadam quantitate auctæ, erunt in progressione Geometrica.



Centro *C*, Asymptotis rectangulis *CADd* & *CH* describatur Hyperbola *BEeS*, & Asymptoto *CH* parallelæ sint *AB*, *DE*, *de*. In Asymptoto *CD* dentur puncta *A*, *G*: Et si tempus exponatur per aream Hyperbolicam *ABED* uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem *DF*, cujus reciproca *GD* una cum data *CG* componat longitudinem *CD* in progressione Geometrica crescentem.

Sit enim areola *DEed* datum temporis incrementum quam minimum, & erit *Dd* reciproce ut *DE*, adeoque directe ut *CD*. Ipsius autem 1 ÷ *GD* decrementum, quod (per hujus Lem. II.) est *Dd* ÷ *GDq.* erit ut *CD* ÷ *GDq.* seu {*CG* + *GD*} ÷ *GDq.*, id est, ut {1 ÷ *GD*} + {*CG* ÷ *GDq.*}. Igitur tempore *ABED* per additionem datarum particularum *EDde* uniformiter crescente, decrescit 1 ÷ *GD* in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per Hypothesin) ut

summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius 1 ÷ *GD* decrementum est ut summa quantitatum 1 ÷ *GD* & *CG* ÷ *GDq.*, quarum prior est ipsa 1 ÷ *GD*, & posterior *CG* ÷ *GDq.* est ut 1 ÷ *GDq.*. Proinde 1 ÷ *GD*, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas *GD* ipsi 1 ÷ *GD* reciproce proportionalis quantitate data *CG* augeatur, summa *CD*, tempore *ABED* uniformiter crescente, crescet in progressione Geometrica. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si datis punctis *A*, *G*, exponatur tempus per aream Hyperbolicam *ABED*, exponi potest velocitas per ipsius *GD* reciprocam 1 ÷ *GD*.

Corol. 2. Sumendo autem *GA* ad *GD* ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis *ABED*, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

Prop. XII. Theor. IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione Geometrica.

In Asymptoto *CD* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *RS*, quod occurrat Hyperbolæ in *S*, exponatur descriptum spatium per aream Hyperbolicam *RSED*; & velocitas erit ut longitudo *GD*, quæ cum data *CG* componit longitudinem *CD*, in Progressione Geometrica decrescentem, interea dum spatium *RSED* augetur in Arithmetica.

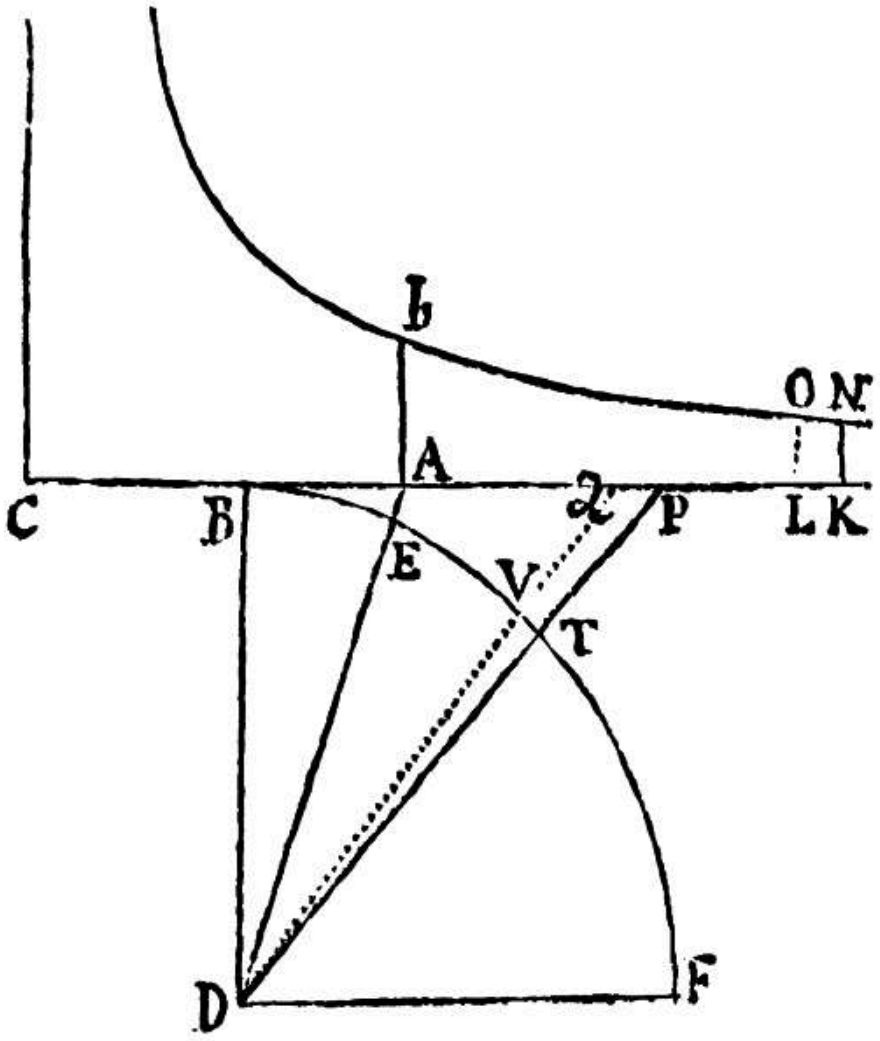
Etenim ob datum spatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decrementum est ipsius *GD*, erit reciproce ut *ED*, adeoq; directe ut *CD*, hoc est ut summa ejusdem *GD* & longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula *DdeE* describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim, id est directe ut summa duarum quantitatum, quarum una est velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas; adeoque directe ut summa dearum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ *GD*, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ semper erunt quantitates decrescentes: nimirum velocitas & linea *GD*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, spatium descriptum erit ut area Hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et si utcunque assumatur punctum *R*, invenietur punctum *G*, capiendo *GD* ad *GR* ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis *ABED* descriptum. Invento autem puncto *G*, datur spatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI. detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propositionem detur spatium ex data velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contra.

Prop. XIII. Theor. X.

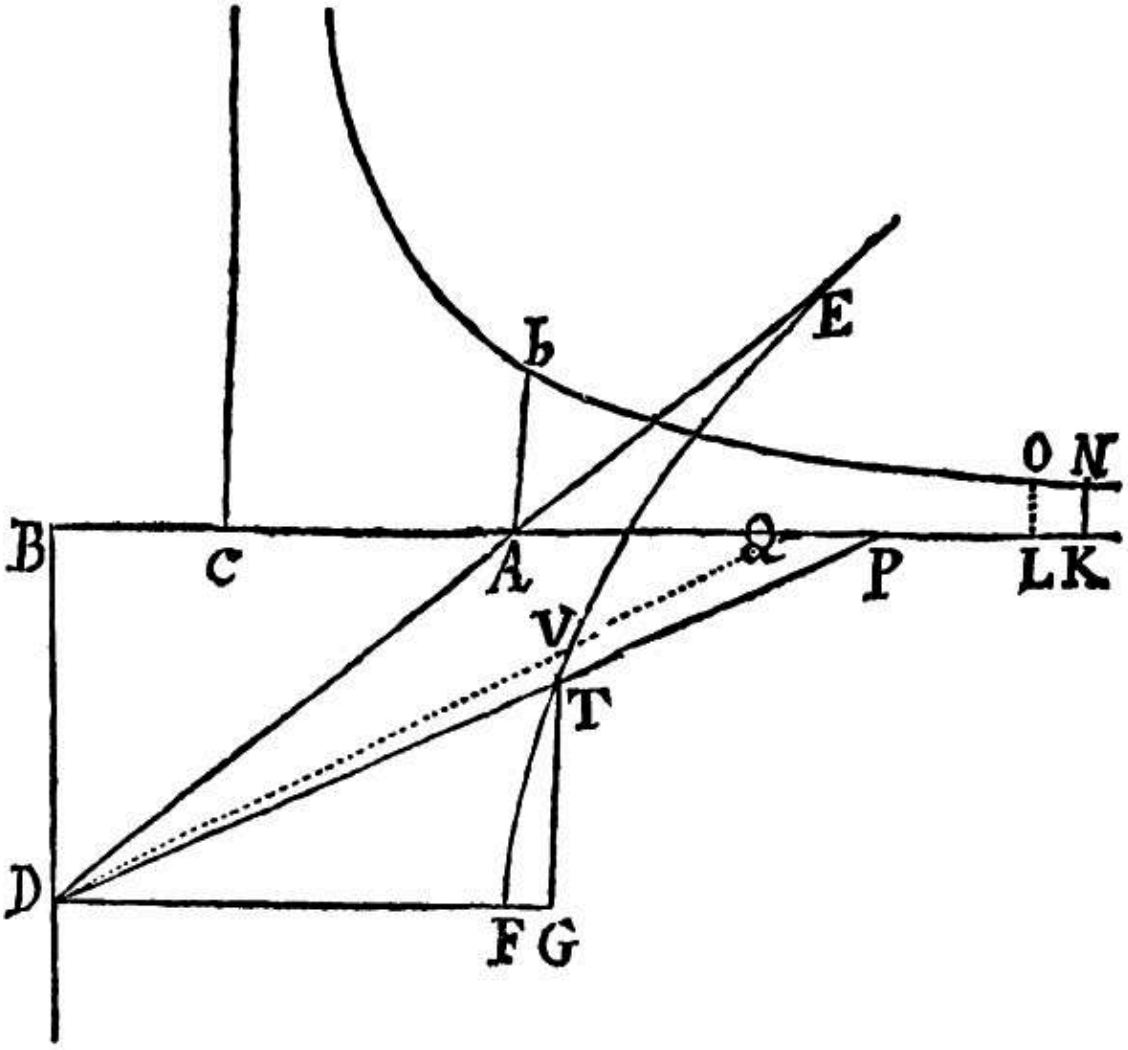


Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum recta ascendit vel descendit, & resistitur partim in ratione velocitatis, partim in

ejusdem ratione duplicata: dico quod si Circuli & Hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque *D* & semidiametro quovis *DB* describatur circuli quadrans *BETF*, & per semidiametri *DB* terminum *B* agatur infinita *BAP*, semidiametro *DF* parallela. In ea detur punctum *A*, & capiatur segmentum *AP* velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars aliqua sit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, fit resistentia tota in *P* ut *AP quad.* + 2*PAB*. Jungantur *DA*, *DP* circulum secantes in *E* ac *T*, & exponatur gravitas per *DA* quadratum, ita ut sit gravitas ad resistentiam in *P* ut *DAq.* ad *APq.* + 2*PAB*: & tempus ascensus omnis futuri erit ut circuli sector *EDTE*.

Agatur enim *DVQ*, abscindens & velocitatis *AP* momentum *PQ*, & Sectoris *DET* momentum *DTV* dato temporis momento respondens: & velocitatis decrementum illud *PQ* erit ut summa virium gravitatis *DBq.* & resistentiæ *APq.* + 2*BAP*, id est (per *Pro. Lib. II.* Elem.) ut *DP quad.* Proinde area *DPQ*, ipsi *PQ* proportionalis, est ut *DP quad.*; & area *DTV*, (quæ est ad aream *DPQ* ut *DTq.* ad *DPq.*) est ut datum *DTq.* Decrescit igitur area *EDT* uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori ascensus futuri proportionalis est. *Q. E. D.*

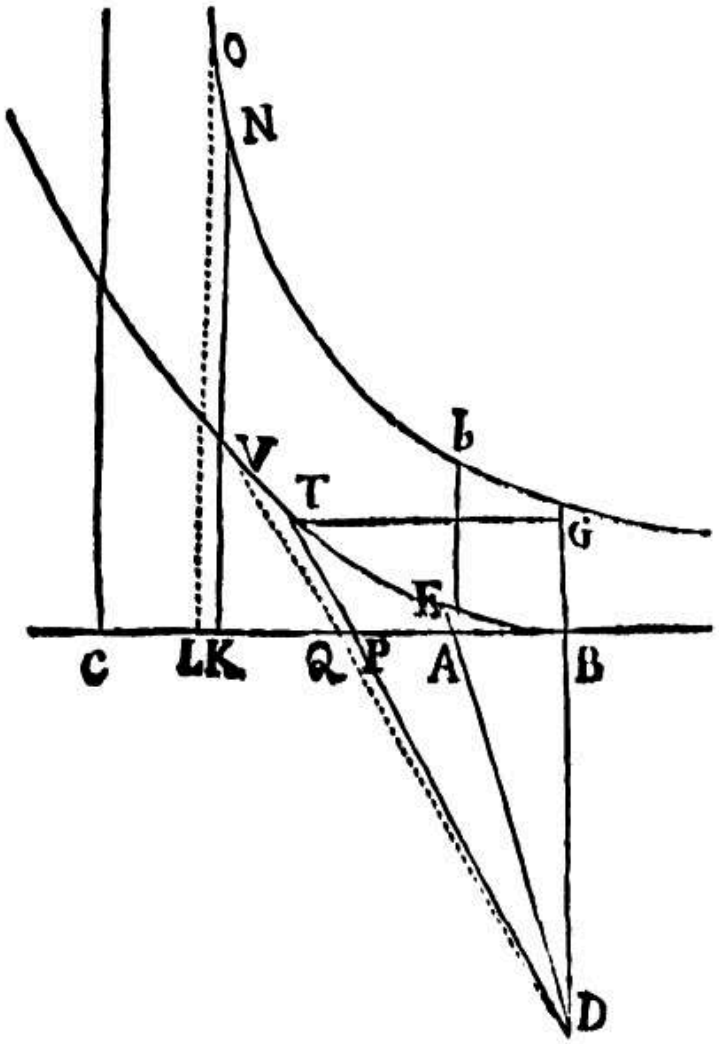


Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem *AP* ut prius, & resistentia ponatur esse ut *APq.* + 2*BAP*, & si vis gravitatis minor sit quam quæ per *DAq.* exponi possit; capiatur *BD* ejus longitudinis, ut sit *ABq.* - *BDq.* gravitati proportionale, sitque *DF* ipsi *DB* perpendicularis & æqualis, & per verticem *F* describatur Hyperbola *FTVE* cujus semidiametri conjugatæ sint *DB* & *DF*, quæq; secet *DA* in *E*, & *DP*, *DQ* in *T* & *V*; & erit tempus ascensus futuri ut Hyperbolæ sector *TDE*.

Nam velocitatis decrementum *PQ*, in data temporis particula factum, est ut summa resistentiæ *APq.* + 2*ABP* & gravitatis *ABq.* - *BDq.* id est ut *BPq.* - *BDq.* Est autem area *DTV* ad aream *DPQ* ut *DTq.* ad *DPq.* adeoque, si ad *DF* demittatur perpendiculum *GT*, ut *GTq.* seu *GDq.* - *DFq.* ad *BDq.* utque *GDq.* ad *PBq.* & divisim ut *DFq.* ad *BPq.* - *DBq.* Quare cum area *DPQ* sit ut *PQ*, id est ut *BPq.* - *BDq.* erit area *DTV* ut datum *DFq*. Decrescit igitur

area *EDT* uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum *DTV*, & propterea tempori proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 3. Sit *AP* velocitas in descensu corporis, & *APq.* + 2*ABP* resistentia, & *DBq.* - *ABq.* vis gravitatis, existente angulo *DAB* recto. Et si centro *D*, vertice principali *B*, describatur Hyperbola rectangula *BETV* secans productas *DA*, *DP* & *DQ* in *E*, *T* & *V*; erit Hyperbolæ hujus sector *DET* ut tempus descensus.



Nam velocitatis incrementum *PQ*, eiq; proportionalis area *DPQ*, est ut excessus gravitatis supra resistentiam, id est, ut *DBq.* - *ABq.* - 2*ABP* - *APq.* seu *DBq.* - *BPq.* Et area *DTV* est ad aream *DPQ* ut *DTq.* ad *DPq.* adeoq; ut *GTq.* seu *GDq.* - *BDq.* ad *BPq.* utque *GDq.* ad *BDq.* & divisim ut *BDq.* ad *BDq.* - *BPq.* Quare cum area *DPQ* sit ut *BDq.* - *BPq.* erit area *DTV* ut datum

BDq. Crescit igitur area *EDT* uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori descensus proportionalis est. *Q. E. D.*

Corol. Igitur velocitas *AP* est ad velocitatem quam corpus tempore *EDT*, in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli *DAP* ad aream sectoris centro *D*, radio *DA*, angulo *ADT* descripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas in Medio non resistente, tempori atque adeo Sectori huic proportionalis est; in Medio resistente est ut triangulum; & in Medio utroq; ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more Sectoris & Trianguli.

Prop. XIV. Prob. IV.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut summa vel differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione Arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione Geometrica.

Capiatur *AC* (*in Fig. tribus ultimis,*) gravitati, & *AK* resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti *A* si corpus ascendit, aliter ad contrarias. Erigatur *Ab* quæ sit ad *DB* ut *DBq.* ad 4*BAC*: & area *AbNK* augebitur vel diminuetur in progressione Arithmetica, dum vires *CK* in progressione Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ *AbNK* supra aream *DET*.

Nam cum *AK* sit ut resistentia, id est ut *APq.* + 2*BAP*; assumatur data quævis quantitas *Z*, & ponatur *AK* æqualis {*APq.* + 2*BAP*} ÷ *Z*; & (per hujus Lem. II.) erit ipsius *AK* momentum *KL* æquale {2*APQ* + 2*BA* × *PB*} ÷ *Z* seu 2*BPQ* ÷ *Z*, & areæ *AbNK* momentum *KLON* æquale 2*BPQ* × *LO* ÷ *Z* seu {*BPQ* × *BD cub.*} ÷ {2*Z* × *CK* × *AB*}.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut *ABq.* + *BDq.* existente *BET* circulo, (*in Fig. Cas. 1. Prop. XIII.*) linea *AC*, quæ gravitati proportionalis est, erit {*ABq.* + *BDq.*} ÷ *Z* & *DPq.* seu *APq.* + 2*BAP* + *ABq.* + *BDq.* erit *AK* × *Z* + *AC* × *Z* seu *CK* × *Z*; ideoque area *DTV* erit ad aream *DPQ* ut *DTq.* vel *DBq.* ad *CK* × *Z*.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut *ABq.* - *BDq.* linea *AC* (*Fig. Cas. 2. Prop. XIII.*) erit {*ABq.* - *BDq.*} ÷ *Z*, & *DTq.* erit ad *DPq.* ut *DFq.*

seu *DBq.* ad *BPq.* - *BDq.* seu *APq.* + 2*BAP* + *ABq.* - *BDq.* id est ad *AK* × *Z* + *AC* × *Z* seu *CK* × *Z*. Ideoque area *DTV* erit ad aream *DPQ* ut *DBq.* ad *CK* × *Z*.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut *BDq.* - *ABq.* & linea *AC* (*Fig. Cas. 3. Prop. præced.*) æquetur {*BDq.* - *ABq.*} ÷ *Z* erit area *DTV* ad aream *DPQ* ut *DBq.* ad *CK* × *Z*: ut supra.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hac ratione; si pro area *DTV*, qua momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta *BD* × *m*, erit area *DPQ*, id est, ½*BD* × *PQ*; ad *BD* × *m* ut *CK* in *Z* ad *BDq.* Atq; inde fit *PQ* in *BD cub.* æquale 2*BD* × *m* × *CK* × *Z*, & areæ *AbNK* momentum *KLON* superius inventum, fit *BP* × *BD* × *m* ÷ *AB*. Auferatur areæ *DET* momentum *DTV* seu *BD* × *m*, & restabit *AP* × *BD* × *m* ÷ *AB*. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis *AP* × *BD* × *m* ÷ *AB*; & propterea (ob datum *BD* × *m* ÷ *AB*) ut velocitas *AP*, id est ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia, & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur si longitudo aliqua *V* sumatur in ea ratione ad arcum *ET*, quam habet linea *DA* ad lineam *DE*; spatium quod corpus ascensu vel descensu toto in Medio resistente describit, erit ad spatium quod in Medio non resistente eodem tempore describere posset, ut arearum illarum differentia ad *BD* × *V* ÷ 4*AB*, ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in Medio non resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut *V*, & ob datas *BD* & *AB*, ut *BD* × *V* ÷ 4*AB*. Tempus autem est ut *DET* seu ½*BD* × *ET*, & harum arearum momenta sunt ut *BD* × *V* ÷ 2*AB* ductum in momentum ipsius *V* & ½*BD* ductum in momentum ipsius *ET*, id est, ut *BD* × *V* ÷ 2*AB* in *DAq.* × 2*m* ÷ *DEq.* & ½*BD* × 2*m*, sive ut {*BD* × *V* × *DAq.* × *m*} ÷ {*AB* × *DEq.*} & *BD* × *m*. Et propterea momentum areæ *V* est ad momentum differentiæ arearum *DET* & *AKNb*, ut {*BD* × *V* × *DA* × *m*} ÷ {*AB* × *DE*} ad *AP* × *BD* × *m* ÷ *AB* sive ut *V* × *DA* ÷ *DE* ad *AP*; adeoque, ubi *V* & *AP* quam minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur est area quam minima *BD* × *V* ÷ 4*AB* differentiæ quam minimæ arearum *DET* & *AKNb*. Unde cum spatia in Medio utroque, in principio descensus vel fine ascensus simul descripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc sunt ad

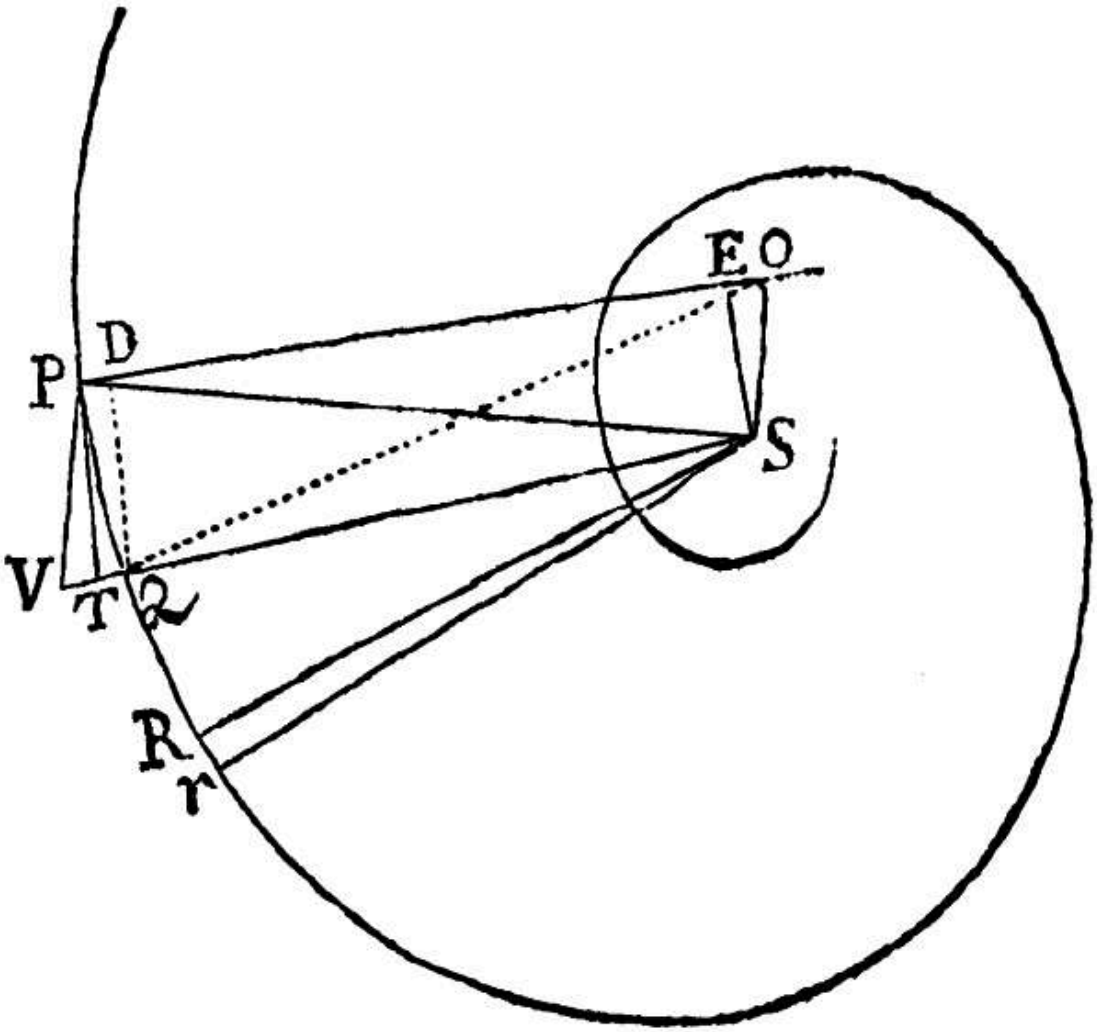
invicem ut area $BD \times V \div 4AB$ & arearum *DET* & *AKNb* differentia; ob eorum analoga incrementa necesse est ut in æqualibus quibuscunque temporibus sint ad invicem ut area illa $BD \times V \div 4AB$ & arearum *DET* & *AKNb* differentia. *Q. E. D.*

SECT. IV.

De Corporum circulari Motu in Mediis resistentibus.

LEM. III.

Sit PQRr *Spiralis quæ secet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* SQ *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico quod si puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*



Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* subducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo circulus qui transit per puncta *O*, *S*, *P* transibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *PQ* tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter secabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in semicirculo rectus. *Q. E. D.*

Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, seu *PO* ad *PS*. Item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad *PO*. Et ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad *PS*. Unde fit *PQq*. æqualis *TQ* × *PS*. *Q. E. D.*

Prop. XV. Theor. XI.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicata ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore Lemmate, & producatur *SQ* ad *V*, ut sit *SV* æqualis *SP*. Temporibus æqualibus describat corpus arcus quam minimos *PQ* & *QR*, sintque areæ *PSQ*, *QSr* æquales. Et quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P est reciproce ut *SPq.* & (per Lem. X. Lib. I.) lineola *TQ*, quæ vi illa generatur, est in ratione composita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus *PQ* describitur, (Nam resistentiam in hoc casu, ut infinite minorem quam vis centripeta negligo) erit $TQ \times SPq.$ id est (per Lemma novissimum) $PQq. \times SP$, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$, & corporis velocitas qua arcus *PQ* illo tempore describitur ut $PQ \div \{PQ \times \sqrt{SP}\}$ seu $1 \div \sqrt{SP}$, hoc est in dimidiata ratione ipsius *SP* reciproce. Et simili argumento velocitas, qua arcus *QR* describitur, est in dimidiata ratione ipsius *SQ* reciproce. Sunt autem arcus illi *PQ* & *QR* ut velocitates descriptrices ad invicem, id est in dimidiata ratione *SQ* ad *SP*, sive ut *SQ* ad $\sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$; & ob æquales angulos *SPQ*, *SQr* & æquales areas *PSQ*, *QSr*, est arcus *PQ* ad arcum *Qr* ut *SQ* ad *SP*. Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus *PQ* ad arcum *Rr* ut *SQ* ad $SP - SP^{½} \times SQ^{½}$, seu $½VQ$; nam punctis *P* & *Q* coeuntibus, ratio ultima $SP - SP^{½} \times SQ^{½}$ ad $½VQ$ fit æqualitatis. In Medio non resistente areæ æquales *PSQ*, *QSr* (Theor. I. Lib. I.) temporibus æqualibus describi deberent. Ex resistentia oritur arearum differentia *RSr*, & propterea resistentia est ut lineolæ *Qr* decrementum *Rr* collatum cum quadrato temporis quo generatur. Nam lineola *Rr* (per Lem. X. Lib. I.) est in duplicata ratione temporis. Est igitur resistentia ut $Rr \div \{PQq. \times SP\}$. Erat autem *PQ* ad *Rr* ut *SQ* ad $½VQ$, & inde $Rr \div \{PQq. \times SP\}$ fit ut $½VQ \div \{PQ \times SP \times SQ\}$ sive ut $½OS \div \{OP \times SPq.\}$. Namque punctis *P* & *Q* coeuntibus, *SP* & *SQ* coincidunt; & ob similia triangula *PVQ*, *PSO*, fit *PQ* ad $½VQ$ ut *OP* ad $½OS$. Est igitur $OS \div \{OP \times SPq.\}$ ut resistentia, id est in ratione densitatis Medii in *P* & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $1 \div SP$, & manebit Medii densitas in *P* ut $OS \div \{OP \times SP\}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem *OS* ad *OP*, densitas Medii in *P* erit ut $1 \div SP$. In Medio igitur cujus densitas est

reciproce ut distantia a centro *SP*, corpus gyrari potest in hac Spirali. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis *P* ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyrari potest in circulo, ad eandem a centro distantiam *SP*.

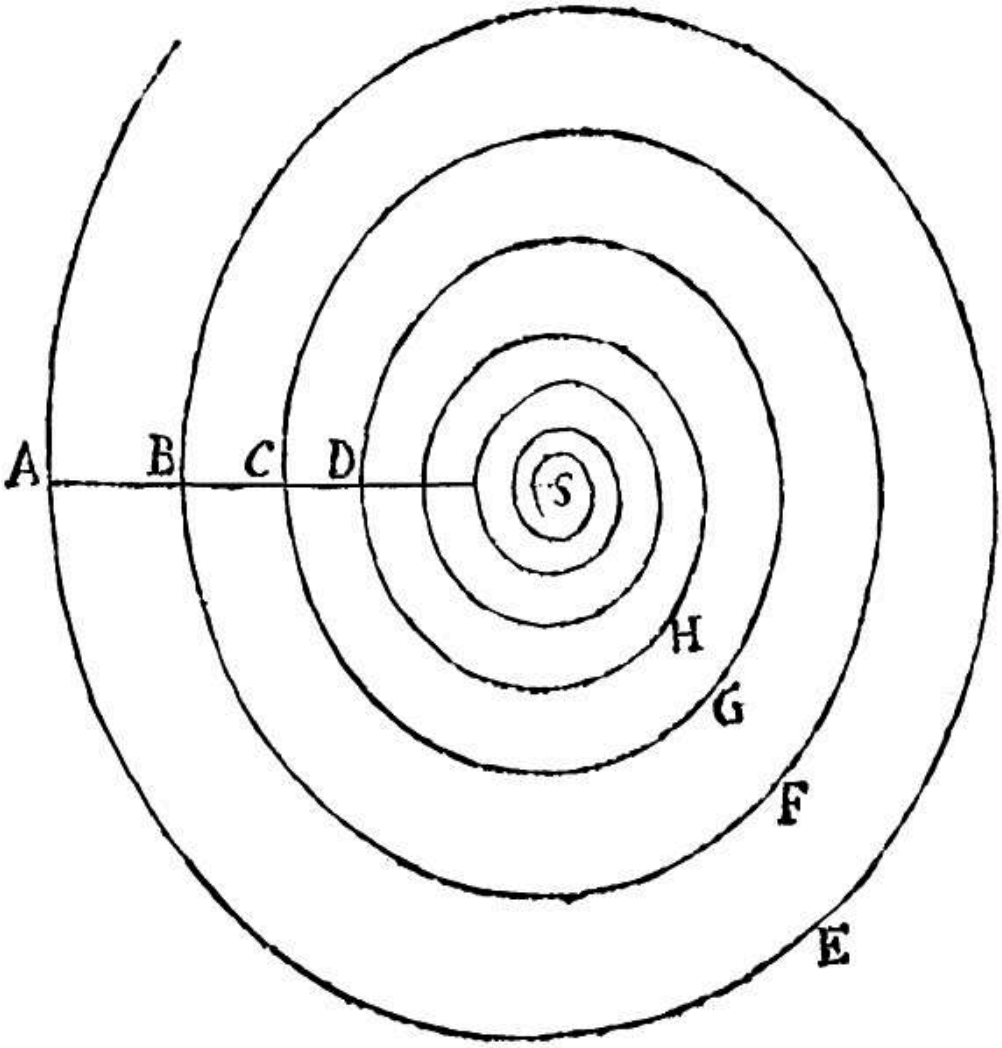
Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia *SP*, est ut $OS \div OP$, sin distantia illa non datur, ut $OS \div \{OP \times SP\}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis *P*, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad *OP*. Nam vires illæ sunt ut lineæ *Rr* & *TQ* seu ut $\frac{1}{2}VQ \times PQ \div SQ$ & $PQq. \div SP$ quas simul generant, hoc est, ut $\frac{1}{2}VQ$ & *PQ*, seu $\frac{1}{2}OS$ & *OP*. Data igitur Spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & viceversa ex data illa proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta *PS*, inque hac recta corpus descendet ad centrum, dimidia semper cum velocitate qua probavimus in superioribus in casu Parabolæ (Theor. X. Lib. I.) descensum in Medio non resistente fieri. Unde tempora descensus hic erunt dupla majora temporibus illis atque adeo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas eadem est in Spirali *PQR* atque in recta *SP*, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ *PS* est in data ratione, nempe in ratione *OP* ad *OS*; tempus descensus in Spirali erit ad tempus descensus in recta *SP* in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro *S* intervallis duobus describantur duo circuli; numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias complere potest, est ut $PS \div OS$, sive ut Tangens anguli quem Spiralis continet cum radio *PS*; tempus vero revolutionum earundem ut $OP \div OS$, id est reciproce ut Medii densitas.



Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque *AEB* circa centrum illud fecerit, & Radium primum *AS* in eodem angulo secuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in *A* reciproce in dimidiata ratione distantiarum a centro (id est ut *BS* ad mediam proportionalem inter *AS* & *CS*:) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones *BFC*, *CGD*, &c. facere, & intersectionibus distinguet Radium *AS* in partes *AS*, *BS*, *CS*, *DS* &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut Perimetri orbitarum *AEB*, *BFC*, *CGD* &c. directe, & velocitates in principiis *A*, *B*, *C*, inverse; id est ut $AS^{1/2}$, $BS^{1/2}$, $CS^{1/2}$. Atq; tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{1/2}$, $BS^{1/2}$, $CS^{1/2}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{1/2}$; id est ut terminus ille

primus $AS^{1/2}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{1/2}$ - $BS^{1/2}$, & quam proxime ut $\frac{2}{3}AS$ ad AB. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præterpropter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro *S* intervallis continue proportionalibus *SA*, *SB*, *SC* &c. describe circulos quotcunque, & statue numerum revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, esse ad numerum revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime; Sed & in eadem quoq; ratione esse Tangentem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium *AS*, ad tangentem anguli quo Spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atq; etiam ut sunt eorundem angulorum secantes ita esse tempora revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum singulas revolutiones eisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi Spiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut dignitas aliqua distantiæ locorum a centro, sitque vis centripeta reciproce ut distantia in dignitatem illam ducta: dico quod corpus gyrari potest in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in *P* sit reciproce ut distantiæ *SP* dignitas quælibet SP^{n+} cujus index est $n + 1$; colligetur ut supra, quod tempus quo corpus describit arcum quemvis *PQ* erit ut $PQ \times SP^{1/2n}$ & resistentia in *P* ut $Rr \div \{PQq. \times SP^{n}\}$ sive

ut $\frac{1}{2}nVQ \div \{PQ \times SP^n \times SQ\}$, adeoque ut $\frac{1}{2}OS \div \{OP \times SP^{n+}\}$. Et propterea densitas in *P* est reciproce ut SP^n.

Scholium.

Cæterum hæc Propositio & superiores, quæ ad Media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major densitas quam ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in Mediis quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

Prop. XVII. Prob. V.

Invenire & vim centripetam & Medii resistentiam qua corpus in data Spirali data lege revolvi potest. Vide *Fig. Prop. XV.*

Sit spiralis illa *PQR*. Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum *PQ* dabitur tempus, & ex altitudine *TQ*, quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum *PSQ* & *QSR*, differentia *RSr*, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac densitas Medii.

Prop. XVIII. Prob. VI.

Data lege vis centripetæ, invenire Medii densitatem in locis singulis, qua corpus datam Spiralem describet.

Ex vi centripeta invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii densitas: ut in Propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decima, & Lemmate secundo; & Lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detenere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia Mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

SECT. V.

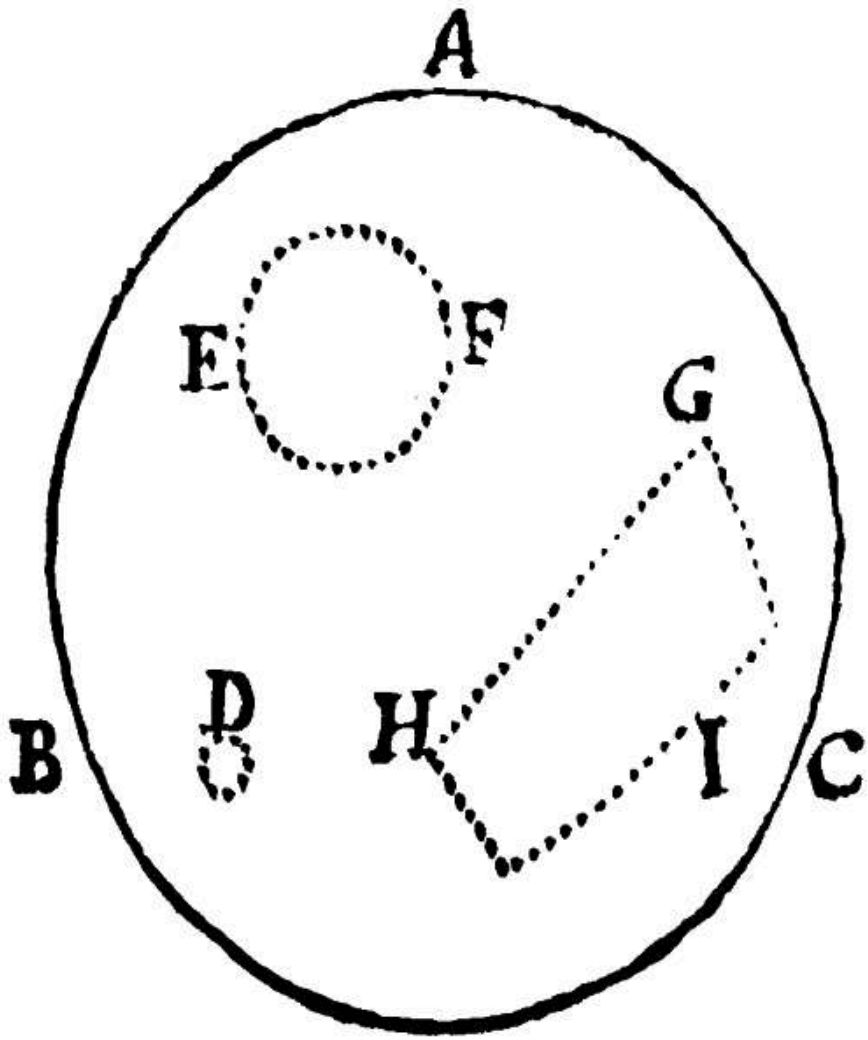
De Densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostatica.

Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile movetur inter se.

Prop. XIX. Theor. XIII.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (seposita Condensationis, gravitatis & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & absque omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.



Cas. 1. In vase sphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes ejusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atq; hoc adeo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra Hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra Hypothesin. Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunq; quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem eodem tempore moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique: sit enim *EF* pars sphærica fluidi, & si hæc undiq; non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usq; dum ipsa undiq; prematur æqualiter; & partes ejus, per casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per casum eundum primum, & additione pressionis novæ movebuntur de locis suis, per definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod Sphæra *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Cas. 3. Dico præterea quod diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed & per Casum secundum, undiq; premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubiq; premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt a partibus Sphæricis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas Sphæricas æqualiter premunt, per Casum 3. & vicissim ab illis æqualiter premuntur, per Motus Legem Tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuo æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est quod Fluidi cujuscunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

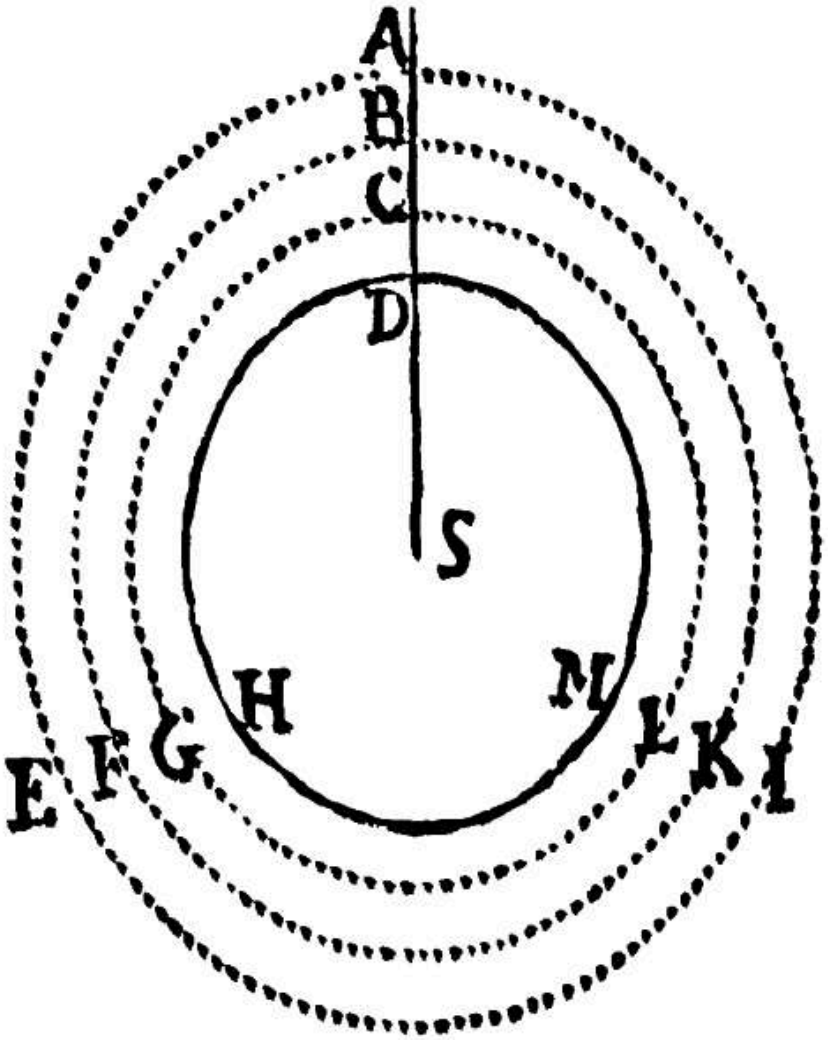
Cas. 6. Igitur si Fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido Fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quam ex alio, sed eidem cedet, idq; in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad æqualitatem in momento temporis absque motu locali; & subinde, partes fluidi, per Casum quintum, se mutuo prement æqualiter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt nisi, quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

Prop. XX. Theor. XIV.

Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus Cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.



Sit *DHM* superficies fundi, & *AEI* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *BFK*, *CGL* distinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo

in superficiem superiorem Orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *AE* vi simplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes & superficies secunda *BFK* (per Prop. XIX.) premuntur. Premitur præterea superficies secunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione & insuper vi propriæ gravitatis, id est pressione tripla, urgetur superficies tertia *CGL*. Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta & sic deinceps. Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus Orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc est gravitati solidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (si modo Orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quavis assignata distantiæ a centro, ut & ubi Fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in Propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantiis eadem semper est pressionis quantitas, sive superficies pressa sit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive fluidum a superficie pressa sursum continuatum surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem Theorematis hujus ad Casus singulos Fluidorum.

Corol. 3. Eadem Demonstratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se, si modo excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si Sphæricum est manebit sphæricum,

non obstante pressione; si quadratum est manebit quadratum: idq; sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido libere innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquesceret & indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet vel descenderet vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet vel descenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui, per Cas. 5. Prop. XIX. jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod specifice gravius est quam Fluidum sibi contiguum subsidebit, & quod specifice levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est Gravitas: altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas absoluta est vis tota qua corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impedientia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in Aere sunt & non prægravant, Vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quam excessus verorum ponderum supra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparative levia sunt non vere, quia descendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa &

apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ vel ab ea superatur. Quæ vero nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in sensu vulgi non gravitant in aqua. Nam similis est horum Casuum Demonstratio.

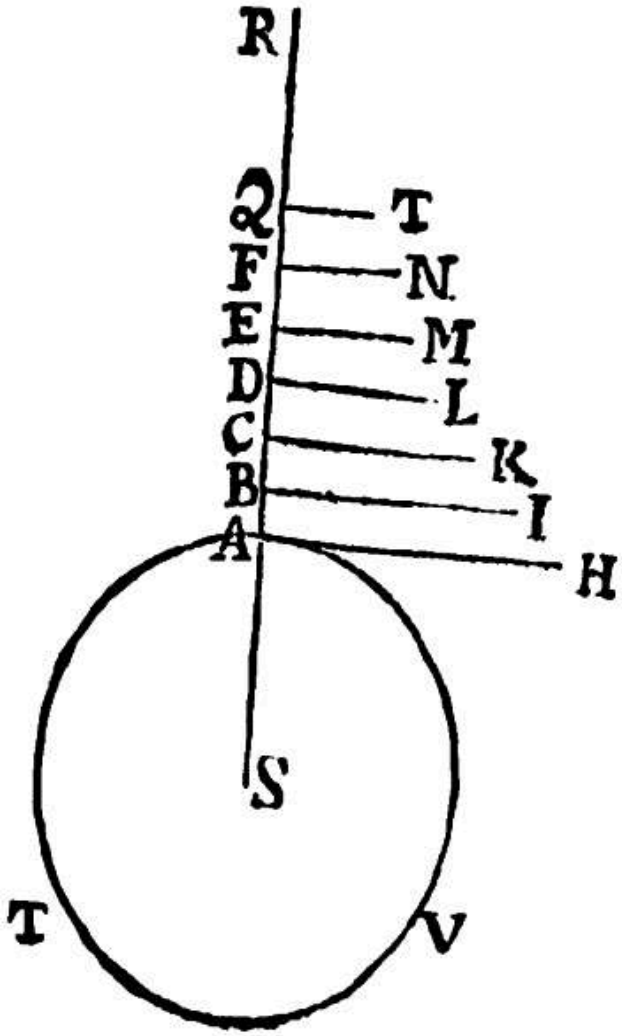
Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunq; vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum Figuras externas, patet insuper, per Corollaria Prop. XIX. quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si Animalia immergantur, & sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corporibus immersis, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora a compressione ne condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum Systematis fluido comprimente circundati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

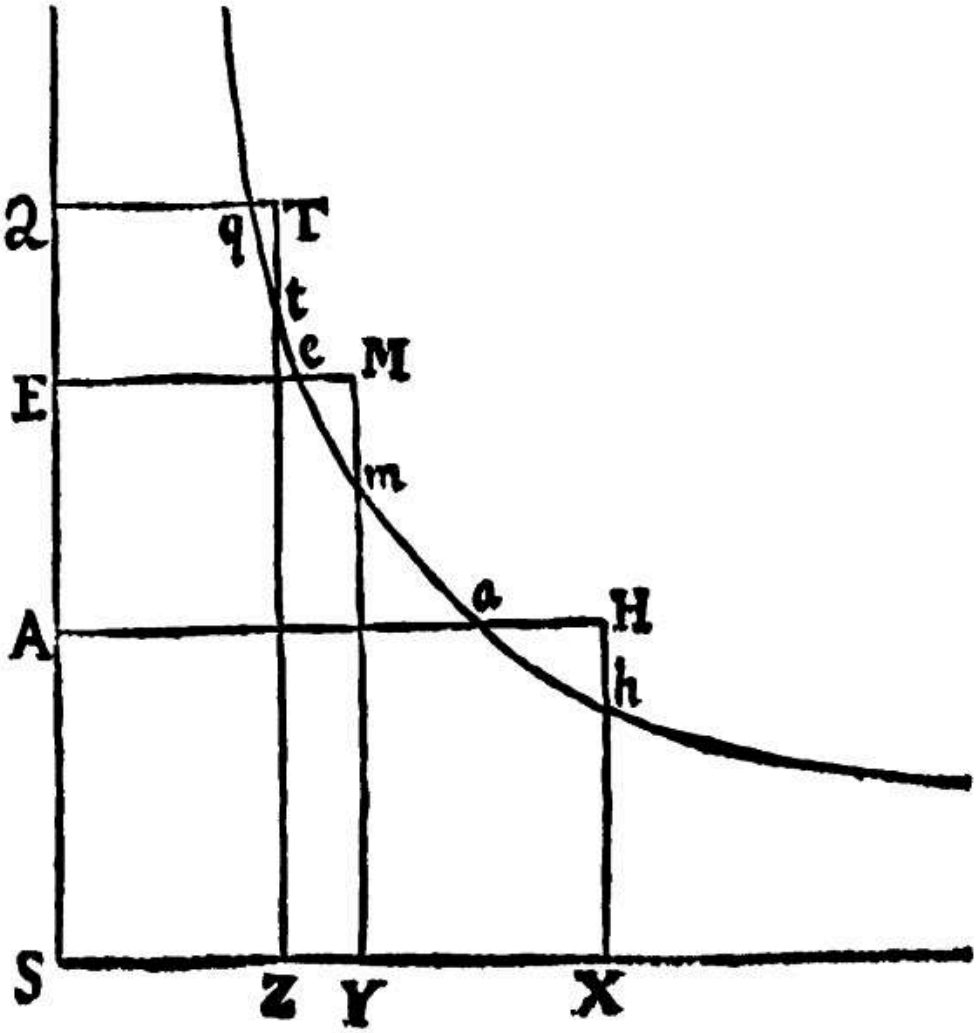
Prop. XXI. Theor. XV.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta distantiis suis a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod si distantiæ illæ sumantur continue proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continue proportionales.



Designet *ATV* fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, *S* centrum, *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. distantias continue proportionales. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, &c. quæ sint ut densitates Medii in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*; & specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut *AH* ÷ *AS*, *BI* ÷ *BS*, *CK* ÷ *CS*, &c. vel, quod perinde est, ut *AH* ÷ *AB*, *BI* ÷ *BC*, *CK* ÷ *CD* &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab *A* ad *B*, a *B* ad *C*, a *C* ad *D* &c. factis per gradus decrementis in punctis *B*, *C*, *D* &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD* &c. conficient pressiones *AH*, *BI*, *CK*, quibus fundum *ATV* (juxta Theorema XIV.) urgetur. Sustinet ergo particula *A* pressiones omnes *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, pergendo in infinitum; & particula *B* pressiones omnes præter primam *AH*; & particula *C* omnes præter duas primas *AH*, *BI*; & sic deinceps: adeoque particulæ primæ *A* densitas *AH* est ad particulæ secundæ *B* densitatem *BI* ut summa omnium

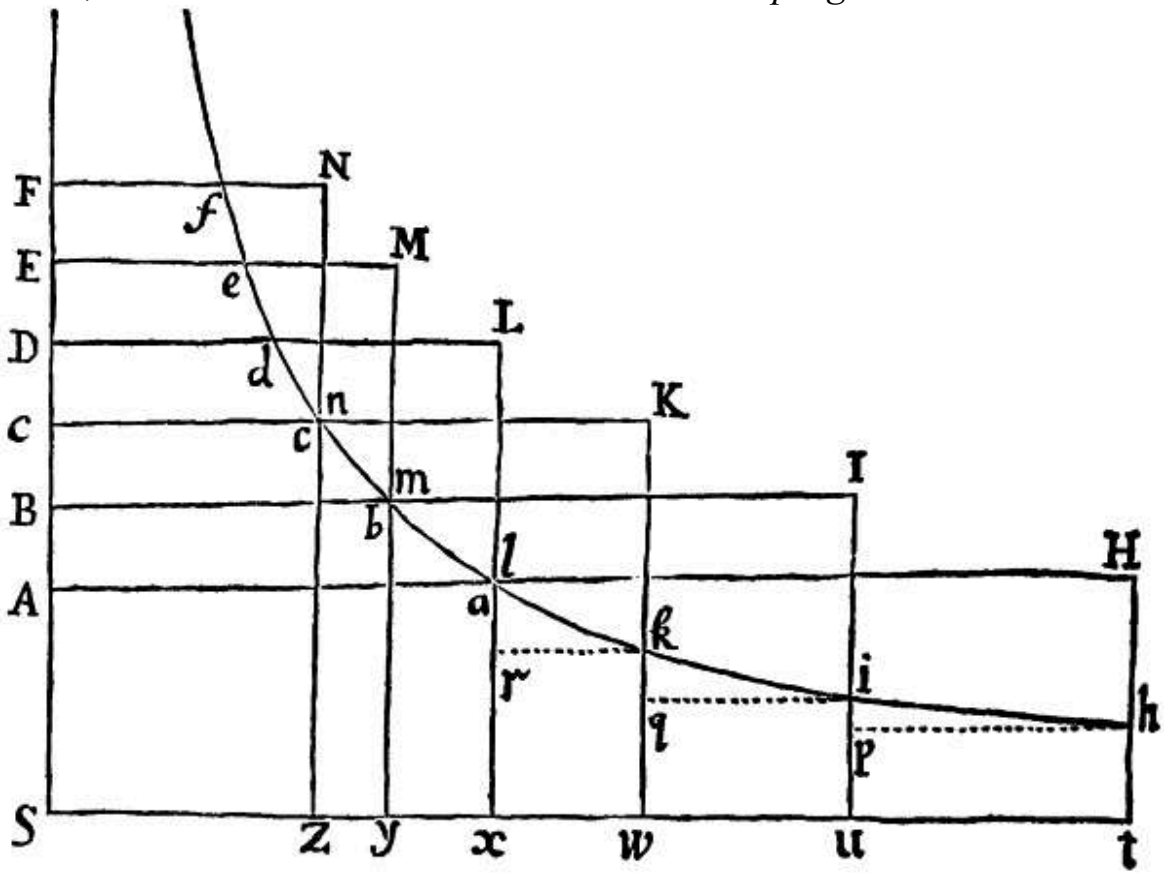
AH + *BI* + *CK* + *DL*, in infinitum, ad summam omnium *BI* + *CK* + *DL*, &c. Et *BI* densitas secundæ *B*, est ad *CK* densitatem tertiæ *C*, ut summa omnium *BI* + *CK* + *DL*, &c. ad summam omnium *CK* + *DL*, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis *AH*, *BI*, *CK*, &c. proportionales, atque adeo continue proportionales per hujus Lem. I. proindeq; differentiæ *AH*, *BI*, *CK*, &c. summis proportionales, sunt etiam continue proportionales. Quare cum densitates in locis *A*, *B*, *C* sint ut *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per saltum, & (ex æquo) in distantiis *SA*, *SC*, *SE* continue proportionalibus, erunt densitates *AH*, *CK*, *EM* continue proportionales. Et eodem argumento in distantiis quibusvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SQ* densitates *AH*, *DL*, *QT* erunt continue proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo *A* ad summitatem Fluidi continua reddatur, & in distantiis quibusvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SQ*, densitates *AH*, *DL*, *QT*, semper existentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*



Corol. Hinc si detur densitas Fluidi in duobus locis, puta *A* & *E*, colligi potest ejus densitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, Asymptotis rectangulis *SQ*, *SX* describatur Hyperbola secans perpendicula *AH*, *EM*, *QT* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *HX*, *MY*, *TZ* ad asymptoton *SX* demissa in *h*, *m*, & *t*. Fiat area *ZYmtZ* ad aream datam *YmhX* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abscindet lineam *QT* densitati proportionalem. Namque si lineæ *SA*, *SE*, *SQ* sunt continue proportionales, erunt areæ *EeqQ*, *EeaA* æquales, & inde areæ his proportionales *YmtZ*, *XhmY* etiam æquales & lineæ *SX*, *SY*, *SZ* id est *AH*, *EM*, *QT* continue proportionales, ut oportet. Et si lineæ *SA*, *SE*, *SQ* obtinent alium quemvis ordinem in serie continue proportionalium, lineæ *AH*, *EM*, *QT*, ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia serie quantitatum continue proportionalium.

Prop. XXII. Theor. XVI.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod si distantiæ sumantur in progressione Musica, densitates Fluidi in his distantiis erunt in progressione Geometrica.



Designet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* distantias in Progressione Geometrica. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. quæ sint ut Fluidi densitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. & ipsius gravitates specificæ in iisdem locis erunt *AH* ÷ *SAq.*, *BI* ÷ *SBq.*, *CK* ÷ *SCq.*, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab *A* ad *B*, secundam a *B* ad *C*, tertiam a *C* ad *D*, &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. vel, quod perinde est, in distantias *SA*, *SB*, *SC*, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes pressionum *AH* ÷ *SA*, *BI* ÷ *SB*, *CK* ÷ *SC*, &c. Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum *AH* - *BI*, *BI* - *CK*, &c. erunt ut summarum differentiæ *AH* ÷ *SA*, *BI* ÷ *SB*, *CK* ÷ *SC*, &c. Centro *S* Asymptotis *SA*, *SX* describatur Hyperbola quævis,

quæ secet perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. in *a*, *b*, *c*; ut & perpendicula ad Asymptoton *SX* demissa *Ht*, *Iu*, *Kw* in *h*, *i*, *k*; & densitatum differentiæ *tu*, *uw*, &c. erunt ut *AH* ÷ *SA*, *BI* ÷ *SB*, &c. Et rectangula *tu* × *th*, *uw* × *ui*, &c. seu *tp*, *uq*, &c. ut *AH* × *th* ÷ *SA* ut *BI* × *ui* ÷ *SB*, &c. id est ut *Aa*, *Bb* &c. Est enim ex natura Hyperbolæ *SA* ad *AH* vel *St*, ut *th* ad *Aa*, adeoque *AH* × *th* ÷ *SA* æquale *Aa*. Et simili argumento est *BI* × *ui* ÷ *SB* æqualis *Bb*, &c. Sunt autem *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis *Aa* - *Bb*, *Bb* - *Cc*, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula *tp*, *uq*, &c. ut & summis differentiarum *Aa* - *Cc* vel *Aa* - *Dd* summæ rectangulorum *tp* + *uq*, vel *tp* + *uq* + *wr*. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum, puta *Aa* - *Ff*, erit summæ omnium rectangulorum, puta *zthn*, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum *A*, *B*, *C*, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ *zthn*, adeoque huic areæ proportionalis est differentia *Aa* - *Ff*. Sumantur jam distantiæ quælibet, puta *SA*, *SD*, *SF* in Progressione Musica, & differentiæ *Aa* - *Dd*, *Dd* - *Ff* erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ *thlx*, *xlnz* æquales erunt inter se, & densitates *St*, *Sx*, *Sz*, id est *AH*, *DL*, *FN*, continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si dentur Fluidi densitates duæ quævis, puta *AH* & *CK*, dabitur area *thkw* harum differentiæ *tw* respondens; & inde invenietur densitas *FN* in altitudine quacunque *SF*, sumendo aream *thnz* ad aream illam datam *thkw* ut est differentia *Aa* - *Ff* ad differentiam *Aa* - *Cc*.

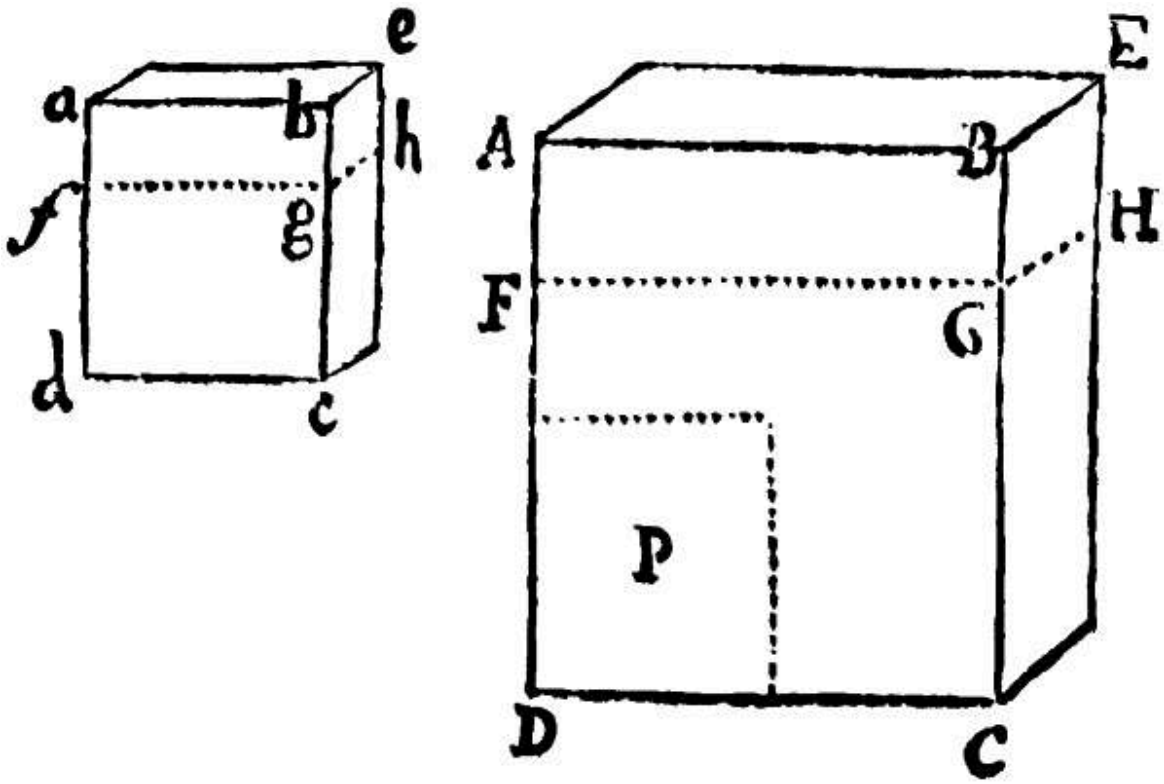
Scholium.

Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro; & quadratorum distantiarum *SA*, *SB*, *SC*, &c. reciproca (nempe *SA cub.* ÷ *SAq.*, *SA cub.* ÷ *SBq.*, *SA cub.* ÷ *SCq.*) sumantur in progressione Arithmetica; densitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progressione Geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta *SA qq.* ÷ *SA cub.*, *SA qq.* ÷ *SB cub.*, *SA qq.* ÷ *SC cub.*) sumantur in progressione Arithmetica; densitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione Arithmetica,

densitates erunt in progressione Geometrica, uti Vir Cl.\ *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ, densitas erit reciproce in sesquiplicata ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicata ratione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiæ, & densitas erit reciproce ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset.

Prop. XXIII. Theor. XVII.

Particulæ viribus quæ sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis. Et vice versa, si Fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantiis centrorum.



Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico *ACE*, dein compressione redigi in spatium cubicum minus *ace*; & particularum similem situm inter se in utroque spatio obtinentium distantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & Medii densitates reciproce ut spatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri cubi minoris *db*; & ex Hypothesi, pressio qua quadratum *DP* urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem qua latus illud quadratum *db* urget Fluidum inclusum, ut Medii densitates ad invicem, hoc est *ab cub.* ad *AB cub.* Sed pressio qua quadratum *DB* urget Fluidum inclusum, est ad pressionem qua quadratum *DP* urget idem Fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc est ut *AB quad.* ad *ab quad.* Ergo ex æquo pressio qua latus *DB* urget Fluidum, est ad pressionem qua latus *db* urget Fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh* per media cuborum ductis distinguatur Fluidum in duas partes, & hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis *AC*, *ac*, hoc est in proportione *ab* ad *AB*: adeoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemq; situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum

FGH in cubo majore, sunt ad vires quas singulæ exercent in singulas secundum planum *fgh* in cubo minore ut *ab* ad *AB*, hoc est reciproce ut distantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versa, si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantiæ, id est reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones laterum *DB*, *db* ut summæ virium; & pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et ex æquo pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id est vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicata ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si *D* ponatur pro distantia, & *E* pro densitate Fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantiæ dignitas quælibet *Dn*, cujus index est numerus *n*; vires comprimentes erunt ut latera cubica Dignitatis E^{n+}, cujus index est numerus $n + 2$; & contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum Virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam nisi forte per particulas intermedias virtute illa auctas exerceant, ex hujusmodi particulis componentur Fluida de quibus actum est in hac propositione. Quod si particulæ cujusq; virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis Fluidi. Ut si particula unaquæq; vi sua, quæ sit reciproce ut distantia locorum a centro suo, fugat alias omnes particulas in infinitum; Vires quibus Fluidum in vasis similibus æqualiter comprimi & condensari possit, erunt ut quadrata diametrorum vasorum: ideoque vis, qua Fluidum in

eodem vase comprimitur, erit reciproce ut latus cubicum quadrato-cubi densitatis. An vero Fluida Elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, Quæstio Physica est. Nos proprietatem Fluidorum ex ejusmodi particulis constantium Mathematice demonstravimus, ut Philosophis ansam præbeamus Quæstionem illam tractandi.

SECT. VI.

De Motu & resistentia Corporum Funependulorum.

Prop. XXIV. Theor. XVIII.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. Jam vero si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

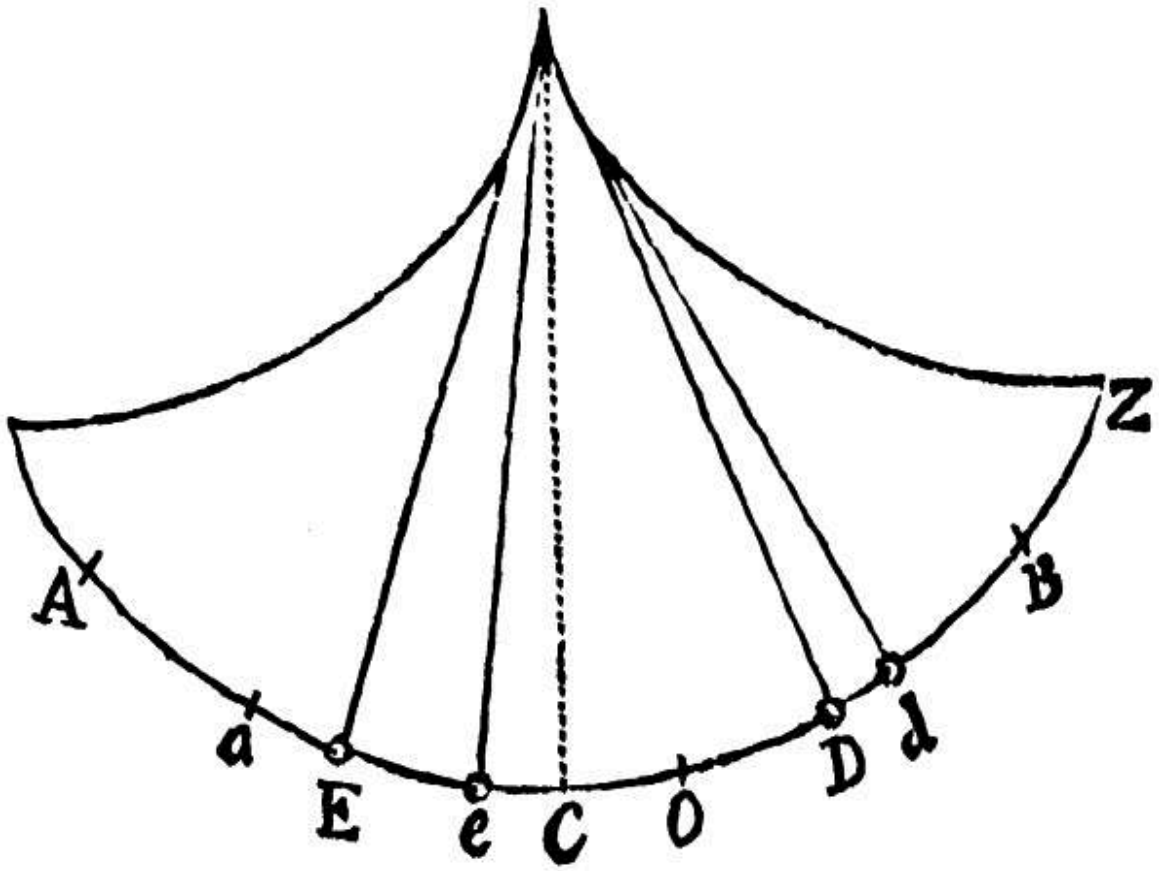
Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverse.

Corol. 6. Sed & in Medio non resistente quantitas Materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverse. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut supra explicui; adeoque idem præstat in tali Medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis, tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

Prop. XXV. Theor. XIX.

Corpora Funependula quæ in Medio quovis resistuntur in ratione momentorum temporis, quæque in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente moventur, oscillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.



Sit *AB* Cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in Medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in *C*, ita ut *C* sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *CD* vel *Cd* vel *CE*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistentia sit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur eadem per datam arcus Cycloidis partem *CO*, & sumatur arcus *Od* in ratione ad arcum *CD* quam habet arcus *OB* ad arcum *CB*: & vis qua corpus in *d* urgetur in Medio resistente, cum sit excessus vis *Cd* supra resistentiam *CO*, exponetur per arcum *Od*, adeoque erit ad vim qua corpus *D* urgetur in Medio non resistente, in loco *D*, ut arcus *Od* ad arcum *CD*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *OB* ad arcum *CB*. Proinde si corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B* & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus *CB* & *OB*, erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eadem ratione. Sunto arcus illi *BD* & *Bd*, & arcus reliqui *CD*, *Od* erunt in eadem ratione. Proinde vires ipsis *CD*, *Od* proportionales manebunt in eadem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* semper

erunt ut arcus toti *CD*, *OB*, & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo *D*, *d* simul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in Medio non resistente ad locum *C*, & alterum in Medio resistente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* sint ut arcus *CB* & *OB*; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo simul describunt, in eadem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis qua corpus *D* in Medio non resistente retardatur in *E* est ut *CE*, & vis qua corpus *d* in Medio resistente retardatur in *e* est ut summa vis *Ce* & resistentiæ *CO*, id est ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates in data illa ratione retardatæ manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in data illa ratione arcuum *CB* & *OB*; & propterea si sumantur arcus toti *AB*, *aB* in eadem ratione, corpora *D*, *d* simul describent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *BE* proportionales sunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ simul describuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velocissimus in Medio resistente non incidit in punctum infimum *C*, sed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus descriptus *aB* bisecatur. Et corpus subinde pergendo ad *a*, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo a *B* ad *O*.

Prop. XXVI. Theor. XX.

Corporum Funependulorum, quæ resistuntur in ratione velocitatum, oscillationes in Cycloide sunt Isochronæ.

Nam si corpora duo a centris suspensionum æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti; resistentiæ velocitatibus proportionales erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus auferantur, conferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales,

generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. *Q. E. D.*

Prop. XXVII. Theor. XXI.

Si corpora Funependula resistuntur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in Medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio resistente describantur arcus inæquales *A*, *B*; resistentia corporis in arcu *A*, erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus *B*, in duplicata ratione velocitatum, id est ut *A quad.* ad *B quad.* quamproxime. Si resistentia in arcu *B* esset ad resistentiam in arcu *A* ut rectangulum *AB* ad *A quad.* tempora in arcubus *A* & *B* forent æqualia per Propositionem superiorem. Ideoque resistentia *A quad.* in arcu *A*, vel *AB* in arcu *B*, efficit excessum temporis in arcu *A* supra tempus in Medio non resistente; & resistentia *BB* efficit excessum temporis in arcu *B* supra tempus in Medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes *AB* & *BB* quam proxime, id est ut arcus *A* & *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in Medio resistente in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente. Nam si verbi gratia arcus sit altero duplo major, differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in Medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in Medio non resistente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora, propterea quod resistentia in descensu corporis qua tempus producitur, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quam resistentia in ascensu subsequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corpora tardescentia paulo minus resistuntur pro ratione velocitatis, & corpora accelerata paulo magis quam quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam

pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque causa tempus producitur.

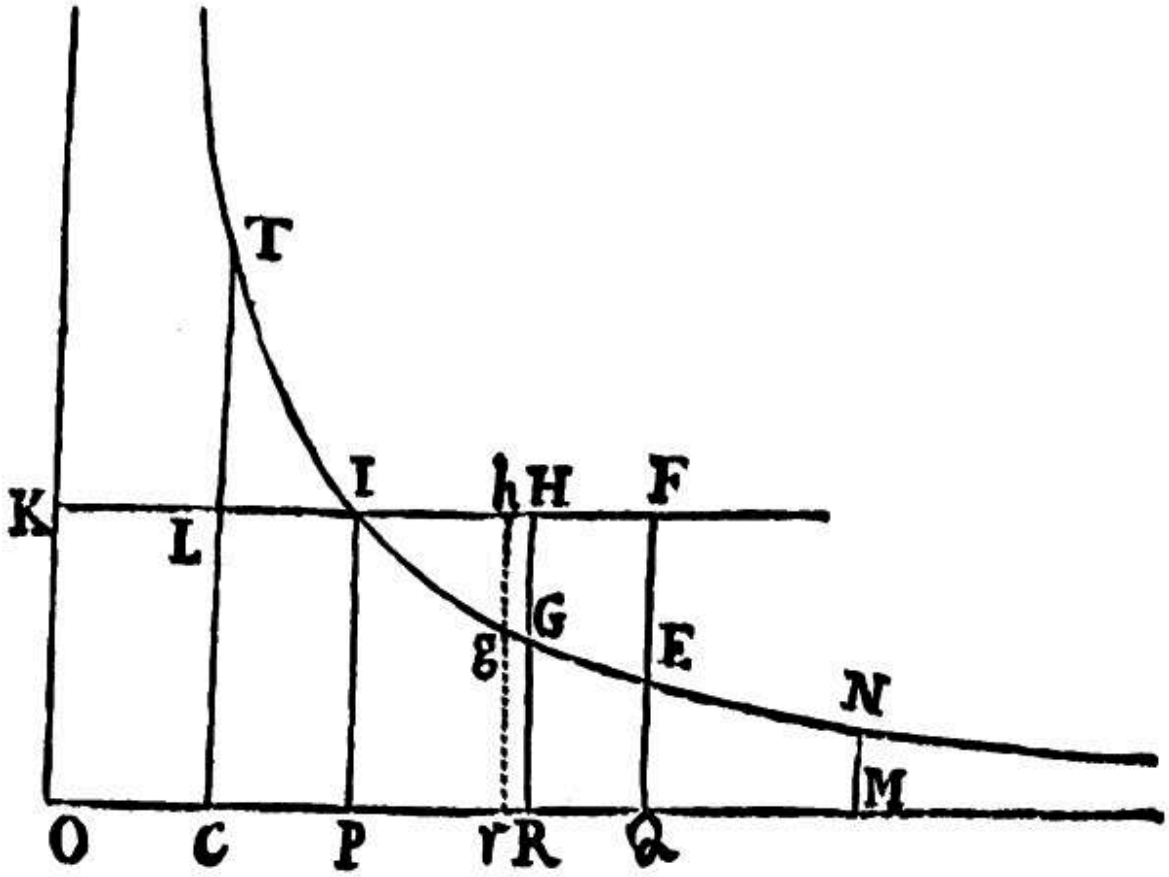
Prop. XXVIII. Theor. XXII.

Si corpus Funependulum in Cycloide oscillans resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet *BC* arcum descensu descriptum, *Ca* arcum ascensu descriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & stantibus quæ in Propositione XXV. constructa & demonstrata sunt, erit vis qua corpus oscillans urgetur in loco quovis *D*, ad uim resistentia ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui semissis est differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis qua corpus oscillans urgetur in Cycloidis principio seu puncto altissimo, id est vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id est (si arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, seu dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

Prop. XXIX. Prob. VII.

Posito quod corpus in Cycloide oscillans resistitur in duplicata ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.



Sit *Ba* (*Fig. Prop. XXV.*) arcus oscillatione integra descriptus, sitque *C* infimum Cycloidis punctum, & *CZ* semissis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *OQ* in punctis *O*, *C*, *P*, *Q* ea lege ut (si erigantur perpendicula *OK*, *CT*, *PI*, *QE*, centroque *O* & Asymptotis *OK*, *OQ* describatur Hyperbola *TIGE* secans perpendicula *CT*, *PI*, *QE* in *T*, *I* & *E*, & per punctum *I* agatur *KF* occurrens Asymptoto *OK* in *K*, & perpendiculis *CT* & *QE* in *L* & *F*) fuerit area Hyperbolica *PIEQ* ad aream Hyperbolicam *PITC* ut arcus *BC* descensu corporis descriptus ad arcum *Ca* ascensu descriptum, & area *IEF* ad aream *ILT* ut *OQ* ad *OC*. Dein perpendiculo *MN* abscindatur area Hyperbolica *PINM* quæ sit ad aream Hyperbolicam *PIEQ* ut arcus *CZ* ad arcum *BC* descensu descriptum. Et si perpendiculo *RG* abscindatur area Hyperbolica *PIGR*, quæ sit ad aream *PIEQ* ut arcus quilibet *CD* ad arcum *BC* descensu toto descriptum: erit resistentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\{OR \div OQ\}$ *IEF* - *IGH* ad aream *PIENM*.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z*, *B*, *D*, *a* urgetur, sint ut arcus *CZ*, *CB*, *CD*, *Ca*, & arcus illi sint ut areæ *PINM*, *PIEQ*,

PIGR, *PITC*; exponatur tum arcus tum vires per has areas respective. Sit insuper *Dd* spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *RGgr* parallelis *RG*, *rg* comprehensam; & producatur *rg* ad *h*, ut sint *GHhg*, & *RGgr* contemporanea arearum *IGH*, *PIGR* decrementa. Et areæ {*OR* ÷ *OQ*} *IEF* - *IGH* incrementum *GHhg* - {*Rr* ÷ *OQ*} *IEF*, seu *Rr* × *HG* - {*Rr* ÷ *OQ*} *IEF*, erit ad areæ *PIGR* decrementum *RGgr* seu *Rr* × *RG*, ut *HG* - {*IEF* ÷ *OQ*} ad *RG*; adeoque ut *OR* × *HG* - {*OR* ÷ *OQ*} *IEF* ad *OR* × *GR* seu *OP* × *PI*: hoc est (ob æqualia *OR* × *HG*, *OR* × *HR* - *OR* × *GR*, *ORHK* - *OPIK*, *PIHR* & *PIGR* + *IGH*) ut *PIGR* + *IGH* - {*OR* ÷ *OQ*} *IEF* ad *OPIK*. Igitur si area {*OR* ÷ *OQ*} *IEF* - *IGH* dicatur *Y*, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, erit incrementum areæ *Y* ut *PIGR* - *Y*.

Quod si *V* designet vim a gravitate oriundam arcui describendo *CD* proportionalem, qua corpus urgetur in *D*; & *R* pro resistentia ponatur: erit *V* - *R* vis tota qua corpus urgetur in *D*, adeoque ut incrementum velocitatis in data temporis particula factum. Est autem resistentia *R* (per Hypothesin) ut quadratum velocitatis, & inde (per Lem. II.) incrementum resistentiæ ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est ut spatium data temporis particula descriptum & *V* - *R* conjunctim; atque adeo, si momentum spatii detur, ut *V* - *R*; id est, si pro vi *V* scribatur ejus exponens *PIGR*, & resistentia *R* exponatur per aliam aliquam aream *Z*, ut *PIGR* - *Z*.

Igitur area *PIGR* per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area *Y* in ratione *PIGR* - *Y*, & area *Z* in ratione *PIGR* - *Z*. Et propterea si areæ *Y* & *Z* simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id adeo quia si resistentia *Z* augeatur, velocitas una cum arcu illo *Ca*, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum *C*, resistentia citius evanescet quam area *Y*. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area *Z* incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio & fine motus, ubi arcus *CD*, *CD* arcubus *CB* & *Ca* æquantur, adeoque ubi recta *RG* incidit in rectas *QE* & *CT*. Et area *Y* seu {*OR* ÷ *OQ*} *IEF* - *IGH* incipit desinitque ubi nulla est, adeoque ubi {*OR* ÷ *OQ*} *IEF* &

IGH æqualia sunt: hoc est (per constructionem) ubi recta *RG* incidit in rectam *QE* & *CT*. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area {*OR* ÷ *OQ*} *IEF* - *IGH* æqualis est areæ *Z*, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream *PINM* per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area {*OP* ÷ *OQ*} *IEF* ad aream *PINM*.

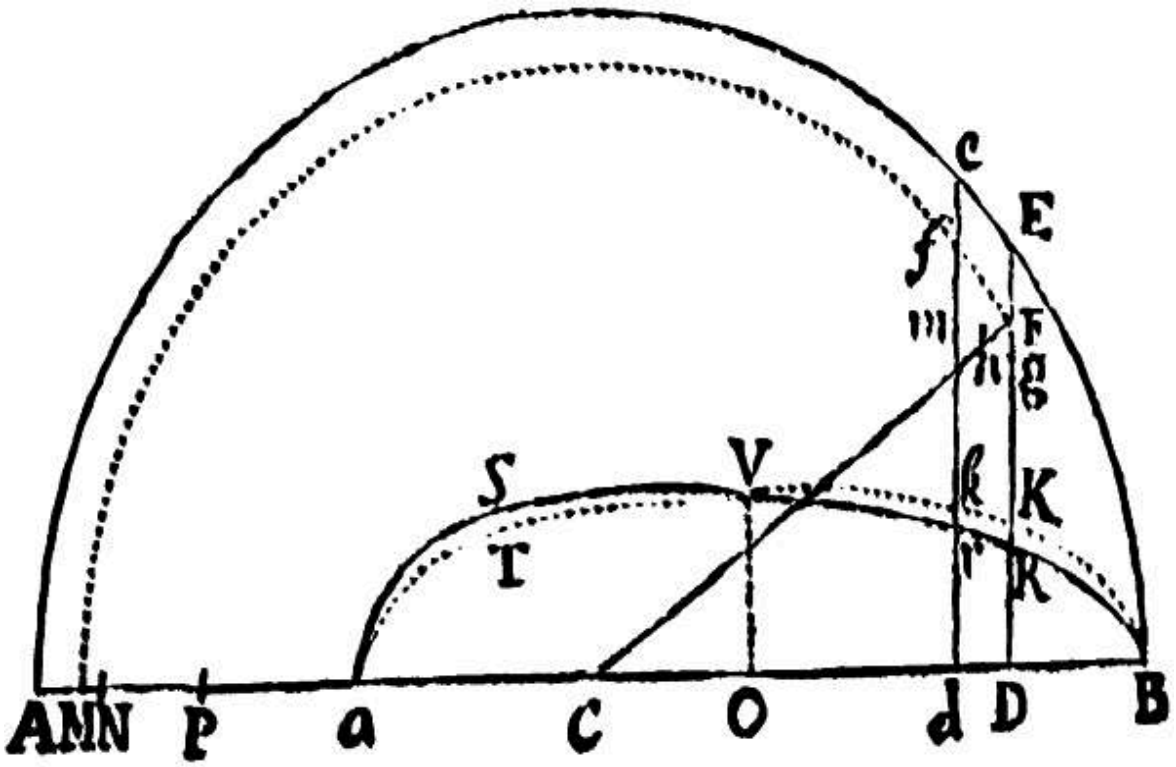
Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* est ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum *PIGR* - *Y*) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in dimidiata ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide absque omni resistentia oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere, quæ & generalior sit & ad usus Philosophicos abunde satis accurata.

Prop. XXX. Theor. XXIII.

Si recta aB *æqualis sit Cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK*, quæ sint ad longitudinem Penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum, & arcum ascensu toto subsequente descriptum, ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* BKaB *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ, quamproxime.*



Exponatur enim tum Cycloidis arcus oscillatione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem *aB*, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem *AB*. Bisecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræsentabit infimum Cycloidis punctum, & erit *CD* ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in *D* secundum Tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli; & si in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longitudinem penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit *DK* exponens resistentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* construatur semicirculus, *BEeA*. Describat autem corpus tempore quam minimo spatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, de circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo a puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc per Prop. LII. Lib. I. Exponantur itaq; hæ velocitates per perpendicula illa *DE*, *de*; sitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in Medio resistente. Et si centro *C* & intervallo *CF* describatur circulus *FfM* occurrens rectis *de* & *AB* in *f* & *M*, erit *M* locus ad quem deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & *df* velocitas quam acquireret in *d*. Unde etiam si *Fg* designet velocitatis momentum quod corpus *D*, describendo

spatium quam minimum *Dd*, ex resistentia Medii amittit, & sumatur *CN* æqualis *Cg*: erit *N* locus ad quem corpus deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & *MN* erit decrementum ascensus ex velocitatis illius amissione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum *Fm*, & velocitatis *DF* decrementum *fg* a resistentia *DK* genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum *fma* vi *CD* genitum, ut vis generans *DK* ad vim generantem *CD*. Sed & ob similia triangula *Fmf*, *Fhg*, *FDC*, est *fm* ad *Fm* seu *Dd*, ut *CD* ad *DF*, & ex æquo *Fg* ad *Dd* ut *DK* ad *DF*. Item *Fg* ad *Fh* ut *CF* ad *DF*; & ex æquo perturbate *Fh* seu *MN* ad *Dd* ut *DK* ad *CF*. Sumatur *DR* ad ½*aB* ut *DK* ad *CF*, & erit *MN* ad *Dd* ut *DR* ad ½*aB*; ideoque summa omnium *MN* × ½*aB*, id est *Aa* × ½*aB*, æqualis erit summæ omnium *Dd* × *DR*, id est areæ *BRrSa*, quam rectangula omnia *Dd* × *DR* seu *DRrd* componunt. Bisecentur *Aa* & *aB* in *P* & *O*, & erit ½*aB* seu *OB* æqualis *CP*, ideoque *DR* est ad *DK* ut *CP* ad *CF* vel *CM*, & divisim *KR* ad *DR* ut *PM* ad *CP*. Ideoque cum punctum *M*, ubi corpus versatur in medio oscillationis loco *O*, incidat circiter in punctum *P*, & priore oscillationis parte versetur inter *A* & *P*, posteriore autem inter *P* & *a*, utroque in casu æqualiter a puncto *P* in partes contrarias errans: punctum *K* circa medium oscillationis locum, id est e regione puncti *O*, puta in *V*, incidet in punctum *R*; in priore autem oscillationis parte jacebit inter *R* & *E*, & in posteriore inter *R* & *D*, utroque in casu æqualiter a puncto *R* in partes contrarias errans. Proinde area quam linea *KR* describit, priore oscillationis parte jacebit extra aream *BRSa*, posteriore intra eandem, idque dimensionibus hinc inde propemodum æquatis inter se; & propterea in casu priore addita areæ *BRSa*, in posteriore eidem subducta, relinquet aream *BKTa* areæ *BRSa* æqualem quam proxime. Ergo rectangulum *Aa* × ½*aB* seu *AaO*, cum sit æquale areæ *BRSa*, erit etiam æquale areæ *BKTa* quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege resistentiæ & arcuum *Ca*, *CB* differentia *Aa*, colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam si uniformis sit resistentia *DK*, figura *aBKkT* rectangulum erit sub *Ba* & *DK*, & inde rectangulum sub ½*Ba* & *Aa* æqualis erit rectangulo sub *Ba* & *DK*, & *DK* æqualis erit ½*Aa*. Quare cum *DK* sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut ½*Aa* ad longitudinem Penduli; omnino ut in Propositione XXVIII. demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, Figura *aBKkT* Ellipsis erit quam proxime. Nam si corpus, in Medio non resistente, oscillatione integra describeret longitudinem *BA*, velocitas in loco quovis *D* foret ut circuli diametro *AB* descripti ordinatim applicata *DE*. Proinde cum *Ba* in Medio resistente & *BA* in Medio non resistente, æqualibus circiter temporibus describantur; adeoque velocitates in singulis ipsius *Ba* punctis, sint quam proxime ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis *BA*, ut est *Ba* ad *BA*; erit velocitas *DK* in Medio resistente ut circuli vel Ellipseos super diametro *Ba* descripti ordinatim applicata; adeoque figura *BKVTa* Ellipsis, quam proxime. Cum resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit *OV* exponens resistentiæ in puncto Medio *O*; & Ellipsis, centro *O*, semiaxibus *OB*, *OV* descripta, figuram *aBKVT*, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quam proxime. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est *Aa* ad *OV* ut area semicirculi, ad quadratum radii sive ut 11 and 7 circiter: Et propterea: $/_{11}Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in *O* ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia *DK* sit in duplicata ratione velocitatis, figura *BKTVa* Parabola erit verticem habens *V* & axem *OV*, ideoque æqualis erit duabus tertiis partibus rectanguli sub *Ba* & *OV* quam proxime. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & *Aa* æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & *OV*, adeoque *OV* æqualis $\frac{3}{4}Aa$, & propterea corporis oscillantis resistentia in *O* ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}Aa$ ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum Ellipsis vel Parabola congruat cum figura *BKVTa* in puncto medio *V*, hæc si ad partem alterutram *BKV* vel *VTa* excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proxime.

Prop. XXXI. Theor. XXIV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione quamproxime.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, adeoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia

retardans. In superiore Propositione rectangulum sub recta ½*aB* & arcuum illorum *CB*, *Ca* differentia *Aa*, æqualis erat areæ *BKT*. Et area illa, si maneat longitudo *aB*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *DK*; hoc est in ratione resistentiæ, adeoque est ut longitudo *aB* & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub *Aa* & ½*aB* est ut *aB* & resistentia conjunctim, & propterea *Aa* ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius; & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius; & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata; & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi resistentiæ hujus pro longitudine arcus descripti, habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

SECT. VII.

De Motu Fluidorum & resistentia Projectilium.

Prop. XXXII. Theor. XXV.

Si corporum Systemata duo ex æquali particularum numero constent & particulæ correspondentes similes sint, singulæ in uno Systemate singulis in altero, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, (eæ inter se quæ in uno sunt Systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt Systemate, nisi in momentis reflexionum, neque

attrahant vel fugent se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod Systematum particulæ ille pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri; & contra.

Corpora similia temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particulæ unius Systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incæptorum motuum, pergent similiter moveri usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. I. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per Legum Corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est ut correspondentium particularum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt per Corol. 1. 2, & 7. Prop. IV. si modo centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter Systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque ad occursus suos primos, & propterea similes occursus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se, donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad Systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum densitates ad invicem ut densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum Systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et si similes & similiter positæ Systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque Systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili

cum motu utcunque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque adeo spatia diametris suis proportionalia describere.

Prop. XXXIII. Theor. XXVI.

Iisdem positis, dico quod Systematum partes majores resistuntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium Systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id est ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantiæ particularum correspondentium inverse & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directe: ideoque (cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum) resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium Systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter eorum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint Fluida duo Elastica ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcunque

projiciantur; vires autem motrices, quibus particulæ Fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in Fluidis, & spatia similia ac diametris suis proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox resistitur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, projectile resisteretur in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur Media tria *A*, *B*, *C* ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes Mediorum *A* & *B* fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut *T* & *V*, illæ Medii *C* ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; sitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in dimidiata ratione virium *T* ad vires *V*; resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *E*, & resistentia corporis *F* ad resistentiam corporis *G* in velocitatum ratione duplicata; & propterea resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *F* ut resistentia corporis *E* ad resistentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medii *C* pro lubitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentiæ corporum *D* & *F* sint ad invicem ut resistentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velocissime moventur, resistentiæ sunt æquales quam proxime: & propterea cum resistentia corporis *F* sit in duplicata ratione velocitatis, erit resistentia corporis *D* in eadem ratione quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elastico velocissime moventis eadem fere est resistentia ac si partes Fluidi viribus suis centrifugis

destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo Fluidi vis Elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur.

Corol. 4. Proinde cum resistentiæ similium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum, sunt etiam æquivelocium & celerrime moventium corporum resistentiæ in Fluido Elastico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus inpingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vicissim (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis Fluidis Elasticis, ubi velocissime moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proxime; sive Fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex Medii subtilitate resistentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Cum autem particulæ Fluidorum, propter vires quibus se mutuo fugiunt, moveri nequeant quin simul agitent particulas alias in circuitu, atque adeo difficilius moveantur inter se quam si viribus istis destituerentur; & quo majores sint earum vires centrifugæ, eo difficilius moveantur inter se: manifestum esse videtur quod projectile in tali Fluido eo difficilius movebitur, quo vires illæ sunt intensiores; & propterea si corporis velocissimi in superioribus Corollariis velocitas diminuatur, quoniam resistentia diminueretur in duplicata ratione velocitatis, si modo vires particularum in eadem ratione duplicata diminuerentur; vires autem nullatenus diminuantur, manifestum est quod resistentia diminuetur in ratione minore quam duplicata velocitatis.

Corol. 7. Porro cum vires centrifugæ eo nomine ad augendam resistentiam conducant, quod particulæ motus suos per Fluidum ad majorem a se distantiam per vires illas propagent; & cum distantia illa minorem habeat rationem ad majora corpora: manifestum est quod augmentum resistentiæ ex viribus illis oriundum in corporibus majoribus minoris sit momenti; & propterea, quo corpora sint majora eo magis accurate resistentia tardescentium decrescet in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 8. Unde etiam ratio illa duplicata magis accurate obtinebit in Fluidis quæ, pari densitate & vi Elastica, ex particulis minoribus constant. Nam si corpora illa majora diminuantur, & particulæ Fluidi, manente ejus densitate & vi Elastica, diminuantur in eadem ratione; manebit eadem ratio resistentiæ quæ prius: ut ex præcedentibus facile colligitur.

Corol. 9. Hæc omnia ita se habent in Fluidis, quorum vis Elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar Lanæ vel ramorum arborum, aut ex alia quavis causa, qua motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in superioribus Corollariis.

Prop. XXXIV. Theor. XXVII.

Quæ in præcedentibus duabus Propositionibus demonstrata sunt, obtinent ubi particulæ Systematum se mutuo contingunt, si modo particulæ illæ sint summe lubricæ.

Concipe particulas viribus quibusdam se mutuo fugere, & vires illas in accessu ad superficies particularum augeri in infinitum, & contra, in recessu ab iisdem celerrime diminui & statim evanescere. Concipe etiam systemata comprimi, ita ut partes eorum se mutuo contingant, nisi quatenus vires illæ contactum impediunt. Sint autem spatia per quæ vires particularum diffunduntur quam angustissima, ita ut particulæ se mutuo quam proxime contingant: & motus particularum inter se iidem erunt quam proxime ac si se mutuo contingerent. Eadem facilitate labentur inter se ac si essent summe lubricæ, & si impingant in se mutuo reflectentur ab invicem ope virium præfatarum, perinde ac si essent Elasticæ. Itaque motus erunt iidem in utroque casu, nisi quatenus perexigua particularum sese non contingentium intervalla diversitatem efficiant: quæ quidem diversitas diminuendo particularum intervalla diminui potest in infinitum. Jam vero quæ in præcedentibus duabus Propositionibus demonstrata sunt, obtinent in particulis sese non contingentibus, idque licet intervalla particularum, diminuendo spatia per quæ vires diffunduntur, diminuantur in infinitum. Et propterea eadem obtinent in particulis sese contingentibus, exceptis solum differentiis quæ tandem differentiis quibusvis datis minores evadant. Dico igitur quod accurate obtinent. Si negas, assigna differentiam in casu

quocunque. Atqui jam probatum est quod differentia minor sit quam data quævis. Ergo differentia falso assignatur, & propterea nulla est. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si Systematum duorum partes omnes quiescant inter se, exceptis duabus, quæ cæteris majores sint & sibi mutuo correspondeant inter cæteras similiter sitæ. Hæ secundum lineas similiter positas utcunque projectæ similes excitabunt motus in Systematibus, & temporibus proportionalibus pergent spatia similia & diametris suis proportionalia describere; & resistentur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis Systematum.

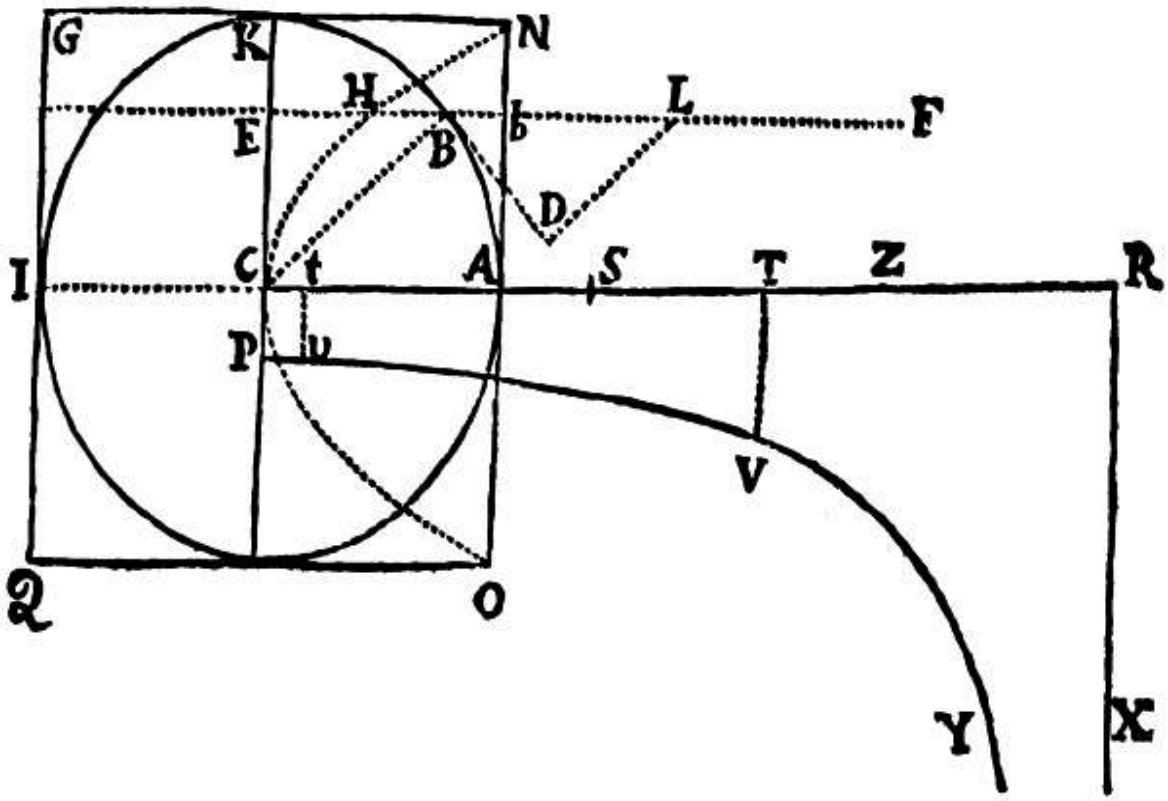
Corol. 2. Unde si Systemata illa sint Fluida duo similia, & eorum partes duæ majores sint corpora in iisdem projecta: sint autem Fluidorum particulæ summe lubricæ, & quoad magnitudinem & densitatem proportionales corporibus: pergent corpora temporibus proportionalibus spatia similia & diametris suis proportionalia describere, & resistentur in ratione Corollario superiore definita.

Corol. 3. Proinde in eodem Fluido Projectile magnitudine datum resistitur in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 4. At si particulæ Fluidi non sint summe lubricæ, vel si viribus quibuscunque se mutuo agitant, quibus motuum libertas diminuitur: Projectilia tardiora difficilius superabunt resistentiam, & propterea magis resistentur quam in velocitatis ratione duplicata.

Prop. XXXV. Theor. XXVIII.

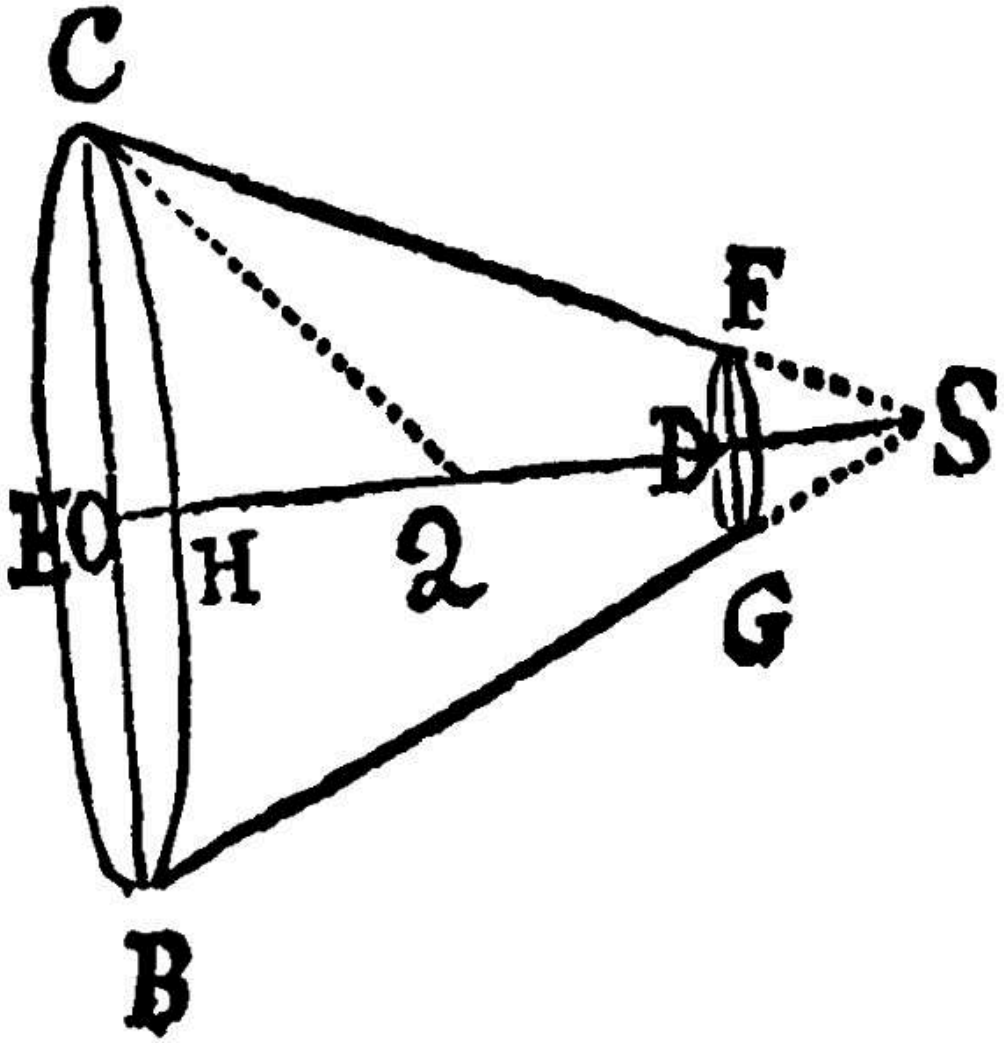
Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris descripti, in Medio raro & Elastico, secundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate celerrime moveantur: erit resistentia Globi duplo minor quam resistentia Cylindri.



Nam quoniam resistentia (per Corol. 3. Prop. XXXIII.) eadem est quam proxime ac si partes Fluidi viribus nullis se mutuo fugerent, supponamus partes Fluidi ejusmodi viribus destitutas per spatia omnia uniformiter dispergi. Et quoniam actio Medii in corpus eadem est (per Legum Corol. 5.) sive corpus in Medio quiescente moveatur, sive Medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur a Medio movente. Designet igitur *ABKI* corpus Sphæricum centro *C* semidiametro *CA* descriptum, & incidant particulæ Medii data cum velocitate in corpus illud Sphæricum, secundum rectas ipsi *AC* parallelas: Sitque *FB* ejusmodi recta. In ea capiatur *LB* semidiametro *CB* æqualis, & ducatur *BD* quæ Sphæram tangat in *B*. In *AC* & *BD* demittantur perpendiculares *BE*, *DL*, & vis qua particula Medii, secundum rectam *FB* oblique incidendo, Globum ferit in *B*, erit ad vim qua particula eadem Cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa Globum descriptum perpendiculariter feriret in *b*, ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam *FB* vel *AC*, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundum plagam determinationis suæ, id est secundum plagam rectæ *BC* qua globum directe

urget, ut *BE* ad *BC*. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ, in globum secundum rectam *FB* oblique incidentis, ad movendum eundem secundum plagam incidentiæ suæ, est ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut *BE* quadratum ad *BC* quadratum. Quare si ad cylindri basem circularem *NAO* erigatur perpendiculum *bHE*, & sit *bE* æqualis radio *AC*, & *bH* æqualis *BE quad.* ÷ *CB*, erit *bH* ad *bE* ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. Et propterea Solidum quod a rectis omnibus *bH* occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus *bE* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed solidum prius est Parabolois vertice *V*, axe *CA* & latere recto *CA* descriptum, & solidum posterius est cylindrus Paraboloidi circumscriptus: & notum est quod Parabolois sit semissis cylindri circumscripti. Ergo vis tota Medii in globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in cylindrum. Et propterea si particulæ Medii quiescerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri. *Q. E. D.*

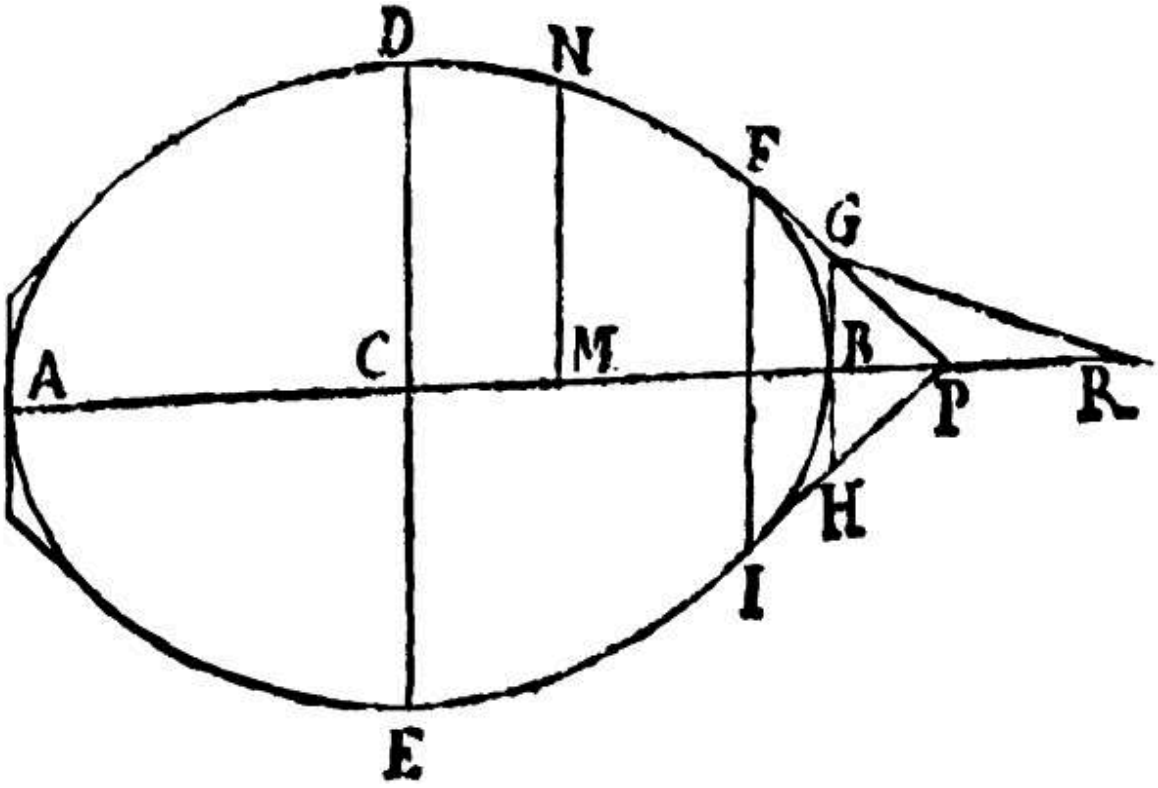
Scholium.



Eadem methodo figuræ aliæ inter se quoad resistentiam comparari possunt, eæque inveniri quæ ad motus suos in Mediis resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si base circulari *CEBH*, quæ centro *O*, radio *OC* describitur, & altitudine *OD*, construendum sit frustum coni *CBGF*, quod omnium eadem basi & altitudine constructorum & secundum plagam axis sui versus *D* progredientium frustorum minime resistatur: biseca altitudinem *OD* in *Q* & produc, *OQ* ad *S* ut sit *QS* æqualis *QC*, & erit *S* vertex coni cujus frustum quæritur.

Unde obiter cum angulus *CSB* semper sit acutus, consequens est, quod si solidum *ADBE* convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis *ADBE* circa axem *AB* facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, ea lege ut *GH* sit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eadem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI*

graduum 135: solidum, quod convolutione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *CB* generatur, minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagam axis sui *AB* progrediatur, & utriusque terminus *B* præcedat. Quam quidem propositionem in construendis Navibus non inutilem futuram esse censeo.



Quod si figura *DNFB* ejusmodi sit ut, si ab ejus puncto quovis *N* ad axem *AB* demittatur perpendiculum *NM*, & a puncto dato *G* ducatur recta *GR* quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in *N*, & axem productum secet in *R*, fuerit *MN* ad *GR* ut *GR cub.* ad $4BR \times GBq.$: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem *AB* facta describitur, in Medio raro & Elastico ab *A* versus *B* velocissime movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum Solidum circulare.

Prop. XXXVI. Prob. VIII.

Invenire resistentiam corporis Sphærici in Fluido raro & Elastico velocissime progredientis. (Vide Fig. Pag. 325.)

Designet *ABKI* corpus Sphæricum centro *C* semidiametro *CA* descriptum. Producatur *CA* primo ad *S* deinde ad *R*, ut sit *AS* pars tertia

ipsius *CA*, & *CR* sit ad *CS* ut densitas corporis Sphærici ad densitatem Medii. Ad *CR* erigantur perpendicula *PC*, *RX*, centroque *R* & Asymptotis *CR*, *RX* describatur Hyperbola quævis *PVY*. In *CR* capiatur *CT* longitudinis cujusvis, & erigatur perpendiculum *TV* abscindens aream Hyperbolicam *PCTV*, & sit *CZ* latus hujus areæ applicatæ ad rectam *PC*. Dico quod motus quem globus, describendo spatium *CZ*, ex resistentia Medii amittet, erit ad ejus motum totum sub initio ut longitudo *CT* ad longitudinem *CR* quamproxime.

Nam (per motuum Legem tertiam) motus quem cylindrus *GNOQ* circa globum descriptus impingendo in Medii particulas amitteret, æqualis est motui quem imprimeret in easdem particulas. Ponamus quod particulæ singulæ reflectantur a cylindro, & ab eodem ea cum velocitate resiliant, quacum cylindrus ad ipsas accedebat. Nam talis erit reflexio, per Legum Corol. 3. si modo particulæ quam minime sint, & vi Elastica quam maxima reflectantur. Velocitas igitur quacum a cylindro resiliunt, addita velocitati cylindri componet totam velocitatem duplo majorem quam velocitas cylindri, & propterea motus quem cylindrus ex reflexione particulæ cujusque amittit, erit ad motum totum cylindri, ut particula duplicata ad cylindrum. Proinde cum densitas Medii sit ad densitatem cylindri ut *CS* ad *CR*; si *Ct* sit longitudo tempore quam minimo a cylindro descripta, erit motus eo tempore amissus ad motum totum cylindri ut $2Ct \times CS$ ad $AI \times CR$. Ea enim est ratio materiæ Medii, a cylindro protrusæ & reflexæ, ad massam cylindri. Unde cum globus sit duæ tertiæ partes cylindri, & resistentia globi (per Propositionem superiorem) sit duplo minor quam resistentia cylindri: erit motus, quem globus describendo longitudinem *L* amittit, ad motum totum globi, ut $Ct \times CS$ ad $\frac{2}{3}AI \times CR$, sive ut *Ct* ad *CR*. Erigatur perpendiculum *tv* Hyperbolæ occurrens in *v*, & (per Corol. 1. Prop. V. Lib. II.) si corpus describendo longitudinem areæ *CtvP* proportionalem, amittit motus sui totius *CR* partem quamvis *Ct*, idem describendo longitudinem areæ *CTVP* proportionalem, amittet motus sui partem *CT*. Sed longitudo *Ct* æqualis est $CPvt \div CP$, & longitudo *CZ* (per Hypothesin) æqualis est $CPTV \div CP$, adeoque longitudo *Ct* est ad longitudinem *CZ* ut area *CPvt* ad aream *CPVT*. Et propterea cum globus describendo longitudinem quam minimam *Ct* amittat motus sui partem, quæ sit ad totum ut *Ct* ad *CR*, is describendo longitudinem aliam quamvis *CZ*, amittet motus sui partem quæ sit ad totum ut *CT* ad *CR*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si detur corporis velocitas sub initio, dabitur tempus quo corpus, describendo spatium *Ct*, amittet motus sui partem *Ct*: & inde, dicendo quod resistentia sit ad vim gravitatis ut ista motus pars amissa ad motum, quem gravitas Globi eodem tempore generaret; dabitur proportio resistentiæ ad gravitatem Globi.

Corol. 2. Quoniam in his determinandis supposui quod particulæ Fluidi per vim suam Elasticam quam maxime a Globo reflectantur, & particularum sic reflexarum impetus in Globum duplo major sit quam si non reflecterentur: manifestum est quod in Fluido, cujus particulæ vi omni Elastica aliaque omni vi reflexiva destituuntur, corpus Sphæricum resistentiam duplo minorem patietur; adeoque eandem velocitatis partem amittendo, duplo longius progredietur quam pro constructione Problematis hujus superius allata.

Corol. 3. Et si particularum vis reflexiva neque maxima sit neque omnino nulla, sed mediocrem aliquam rationem teneat: resistentia pariter, inter limites in constructione Problematis & Corollario superiore positos, mediocrem rationem tenebit.

Corol. 4. Cum corpora tarda paulo magis resistantur quam pro ratione duplicata velocitatis: hæc describendo longitudinem quamvis *CZ* amittent majorem motus sui partem, quam quæ sit ad motum suum totum ut *CT* ad *CR.*

Corol. 5. Cognita autem resistentia corporum celerrimorum, innotescet etiam resistentia tardorum; si modo lex decrementi resistentiæ pro ratione velocitatis inveniri potest.

Prop. XXXVII. Prob. IX.

Aquæ de vase dato per foramen effluentis definire motum.

Si vas impleatur aqua, & in fundo perforetur ut aqua per foramen defluat, manifestum est quod vas sustinebit pondus aquæ totius, dempto pondere partis illius quod foramini perpendiculariter imminet. Nam si foramen obstaculo aliquo occluderetur, obstaculum sustineret pondus aquæ sibi perpendiculariter incumbentis, & fundum vasis sustineret pondus aquæ reliquæ. Sublato autem obstaculo, fundum vasis eadem aquæ pressione eodemve ipsius pondere urgebitur ac prius; & pondus quod obstaculum

sustinebat, cum jam non sustineatur, faciet ut aqua descendat & per foramen defluat.

Unde consequens est, quod motus aquæ totius effluentis is erit quem pondus aquæ foramini perpendiculariter incumbentis generare possit. Nam aquæ particula unaquæque pondere suo, quatenus non impeditur, descendit, idque motu uniformiter accelerato; & quatenus impeditur, urgebit obstaculum. Obstaculum illud vel vasis est fundum, vel aqua inferior defluens; & propterea ponderis pars illa, quam vasis fundum non sustinet, urgebit aquam defluentem & motum sibi proportionalem generabit.

Designet igitur F aream foraminis, A altitudinem aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, P pondus ejus, AF quantitatem ejus, S spatium quod dato quovis tempore T in vacuo libere cadendo describeret, & V velocitatem quam in fine temporis illius cadendo acquisierit: & motus ejus acquisitus $AF \times V$ æqualis erit motui aquæ totius eodem tempore effluentis. Sit velocitas quacum effluendo exit de foramine, ad velocitatem V ut d ad e; & cum aqua velocitate V describere posset spatium $2S$, aqua effluens eodem tempore, velocitate sua $\{d \div e\}V$ describere posset spatium $\{2d \div e\}S$. Et propterea columna aquæ cujus longitudo sit $\{2d \div e\}S$ & latitudo eadem quæ foraminis, posset eo tempore defluendo egredi de vase, hoc est columna $\{2d \div e\}SF$. Quare motus $\{2dd \div ee\}SFV$, qui fiet ducendo quantitatem aquæ effluentis in velocitatem suam, hoc est motus omnis tempore effluxus illius genitus, æquabitur motui $AF \times V$. Et si æquales illi motus applicentur ad FV; fiet $\{2dd \div ee\}S$ æqualis A. Unde est dd ad ee ut A ad $2S$, & d ad e in dimidiata ratione $\frac{1}{2}A$ ad S. Est igitur velocitas quacum aqua exit e foramine, ad velocitatem quam aqua cadens, & tempore T cadendo describens spatium S acquireret, ut altitudo aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, ad medium proportionale inter altitudinem illam duplicatam & spatium illud S, quod corpus tempore T cadendo describeret.

Igitur si motus illi sursum vertantur; quoniam aqua velocitate V ascenderet ad altitudinem illam S de qua deciderat; & altitudines (uti notum est) sint in duplicata ratione velocitatum: aqua effluens ascenderet ad altitudinem $\frac{1}{2}A$. Et propterea quantitas aquæ effluentis; quo tempore corpus cadendo describere posset altitudinem $\frac{1}{2}A$, æqualis erit columnæ aquæ totius AF foramini perpendiculariter imminentis.

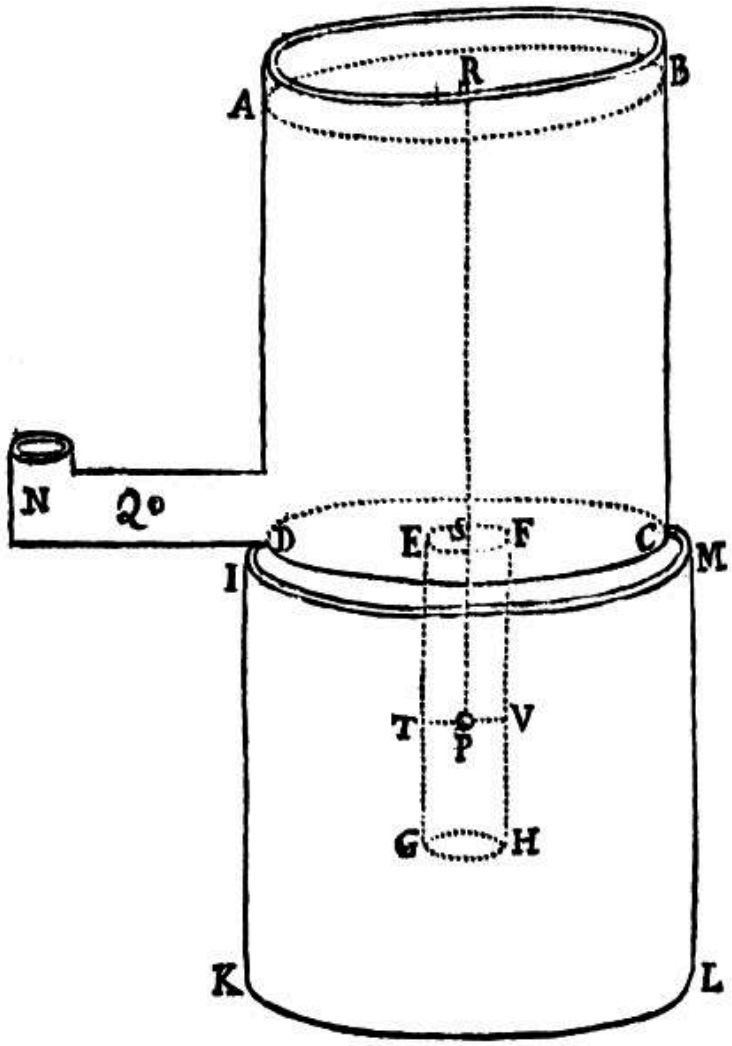
Cum autem aqua effluens, motu suo sursum verso, perpendiculariter surgeret ad dimidiam altitudinem aquæ foramini incumbentis; consequens est quod si egrediatur oblique per canalem in latus vasis, describet in spatiis non resistentibus Parabolam cujus latus rectum est altitudo aquæ in vase supra canalis orificium, & cujus diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur, atque ordinatim applicatæ parallelæ sunt axi canalis.

Hæc omnia de Fluido subtilissimo intelligenda sunt. Nam si aqua ex partibus crassioribus constet, hæc tardius effluet quam pro ratione superius assignata, præsertim si foramen angustum sit per quod effluit.

Denique si aqua per canalem horizonti parallelum egrediatur; quoniam fundum vasis integrum est, & eadem aquæ incumbentis pressione ubique urgetur ac si aqua non efflueret; vas sustinebit pondus aquæ totius, non obstante effluxu, sed latus vasis de quo effluit non sustinebit pressionem illam omnem, quam sustineret si aqua non efflueret. Tolletur enim pressio partis illius ubi perforatur: quæ quidem pressio æqualis est ponderi columnæ aquæ, cujus basis foramini æquatur & altitudo eadem est quæ aquæ totius supra foramen. Et propterea si vas, ad modum corporis penduli, filo prælongo a clavo suspendatur, hoc, si aqua in plagam quamvis secundum lineam horizontalem effluit, recedet semper a perpendiculo in plagam contrariam. Et par est ratio motus pilarum, quæ Pulvere tormentario madefacto implentur, &, materia in flammam per foramen paulatim expirante, recedunt a regione flammæ & in partem contrariam cum impetu feruntur.

Prop. XXXVIII. Theor. XXIX.

Corporum Sphæricorum in Mediis quibusque Fluidissimis resistentiam in anteriore superficie definire.



Defluat aqua de vase Cylindrico *ABCD*, per canalem Cylindricum *EFGH*, in vas inferius *IKLM*; & inde effluat per vasis marginem *IM*. Sit autem margo ille ejusdem altitudinis cum vasis superioris fundo *CD*, eo ut aqua per totum canalem uniformi cum motu descendat; & in medio canalis collocetur Globus *P*, sitque *PR* altitudo aquæ supra Globum, & *SR* ejusdem altitudo supra fundum vasis. Sustineatur autem Globus filo tenuissimo *TV*, lateribus canalis hinc inde affixo. Et manifestum est per proportionem superiorem, quod quantitas aquæ dato tempore defluentis erit ut amplitudo foraminis per quod defluit; hoc est, si Globus tollatur, ut canalis orificium: sin Globus adsit, ut spatium undique inter Globum & canalem. Nam velocitas aquæ defluentis (per superiorem Propositionem) ea erit quam corpus cadendo, & casu suo describendo dimidiam aquæ altitudinem *SR*, acquirere posset: adeoque eadem est sive Globus tollatur, sive adsit. Et propterea aqua defluens erit ut amplitudo spatii per quod transit. Certe

transitus aquæ per spatium angustius facilior esse nequit quam per spatium amplius, & propterea velocitas ejus ubi Globus adest, non potest esse major quam cum tollitur: ideoque major aquæ quantitas, ubi Globus adest, non effluet quam pro ratione spatii per quod transit. Si aqua non sit liquor subtilissimus & fluidissimus, hujus transitus per spatium angustius, ob crassitudinem particularum, erit aliquanto tardior: at liquorem fluidissimum esse hic supponimus. Igitur quantitas aquæ, cujus descensum Globus dato tempore impedit, est ad quantitatem aquæ quæ, si Globus tolleretur, eodem tempore descenderet, ut basis Cylindri circa Globum descripti ad orificium canalis; sive ut quadratum diametri Globi ad quadratum diametri cavitatis canalis. Et propterea quantitas aquæ cujus descensum Globus impedit, æqualis est quantitati aquæ, quæ eodem tempore per foramen circulare in fundo vasis, basi Cylindri illius æquale, descendere posset, & cujus descensus per fundi partem quamvis circularem basi illi æqualem impeditur.

Jam vero pondus aquæ, quod vas & Globus conjunctim sustinent, est pondus aquæ totius in vase, præter partem illam quæ aquam defluentem accelerat, & ad ejus motum generandum sufficit, quæque, per Propositionem superiorem, æqualis est ponderi columnæ aquæ cujus basis æquatur spatio inter Globum & canalem per quod aqua defluit, & altitudo eadem cum altitudine aquæ supra fundum vasis, per lineam *SR* designata. Vasis igitur fundum & Globus conjunctim sustinent pondus aquæ totius in vase sibi ipsis perpendiculariter imminentis. Unde cum fundum vasis sustineat pondus aquæ sibi perpendiculariter imminentis, reliquum est ut Globus etiam sustineat pondus aquæ sibi perpendiculariter imminentis. Globus quidem non sustinet pondus aquæ illius stagnantis & sibi absque omni motu incumbentis, sed aquæ defluenti resistendo impedit effectum tanti ponderis; adeoque vim aquæ defluentis sustinet ponderi illi æqualem. Nam impedit descensum & effluxum quantitatis aquæ quem pondus illud accurate efficeret si Globus tolleretur. Aqua pondere suo, quatenus descensus ejus impeditur, urget obstaculum omne, ideoque obstaculum, quatenus descensum aquæ impedit, vim sustinet æqualem ponderi quo descensus ille efficeretur. Globus autem descensum quantitatis aquæ impedit, quem pondus columnæ aquæ sibi perpendiculariter incumbentis efficere posset; & propterea vim aquæ decurrentis sustinet ponderi illi æqualem. Actio & reactio aquæ per motus Legem tertiam æquantur inter se, & in plagas contrarias diriguntur. Actio Globi in aquam descendentem, ad

ejus descensum impediendum, in superiora dirigitur, & est ut descendendi motus impeditus, eique tollendo adæquate sufficit: & propterea actio contraria aquæ in Globum æqualis est vi quæ motum eundem vel tollere vel generare possit, hoc est ponderi columnæ aquæ, quæ Globo perpendiculariter imminet & cujus altitudo est *RS*.

Si jam canalis orificium superius obstruatur, sic ut aqua descendere nequeat, Globus quidem, pondere aquæ in canali & vase inferiore *IKLM* stagnantis, premetur undique; sed non obstante pressione illa, si ejusdem sit specificæ gravitatis cum aqua, quiescet. Pressio illa Globum nullam in partem impellet. Et propterea ubi canalis aperitur & aqua de vase superiore descendit, vis omnis, qua Globus impellitur deorsum, orietur ab aquæ illius descensu, atque adeo æqualis erit ponderi columnæ aquæ, cujus altitudo est *RS* & diameter eadem quæ Globi. Pondus autem istud, quo tempore data quælibet aquæ quantitas, per foramen basi Cylindri circa Globum descripti æquale, sublato Globo effluere posset, sufficit ad ejus motum omnem generandum; atque adeo quo tempore aqua in Cylindro uniformiter decurrendo describit duas tertias partes diametri Globi, sufficit ad motum omnem aquæ Globo æqualis generandum. Nam Cylindrus aquæ, latitudine Globi & duabus tertiis partibus altitudinis descriptus, Globo æquatur. Et propterea aquæ currentis impetus in Globum quiescentem, quo tempore aqua currendo describit duas tertias partes diametri Globi, si uniformiter continuetur, generaret motum omnem partis Fluidi quæ Globo æquatur.

Quæ vero de aqua in canali demonstrata sunt, intelligenda sunt etiam de aqua quacunque fluente, qua Globus quilibet in ea quiescens urgetur. Quæque de aqua demonstrata sunt obtinent etiam in Fluidis universis subtilissimis. De his omnibus idem valet argumentum.

Jam vero per Legum Corol. 5, vis Fluidi in Globum eadem est, sive Globus quiescat & Fluidum uniformi cum velocitate moveatur, sive Fluidum quiescat & Globus eadem cum velocitate in partem contrariam pergat. Et propterea resistentia Globi in Medio quocunque Fluidissimo uniformiter progredientis, quo tempore Globus duas tertias partes diametri suæ describit, æqualis est vi, quæ in corpus ejusdem magnitudinis cum Globo & ejusdem densitatis cum Medio uniformiter impressa, quo tempore Globus duas tertias partes diametri suæ progrediendo describit, velocitatem Globi in corpore illo generare posset. Tanta est resistentia Globi in superficiei parte præcedente. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si solidum Sphæricum in ejusdem secum densitatis Fluido subtilissimo libere moveatur, & inter movendum eadem vi urgeatur a tergo atque cum quiescit; ejusdem resistentia ea erit quam in Corollario secundo Propositionis xxxvi. descripsimus. Unde si computus ineatur, patebit quod solidum dimidiam motus sui partem prius amittet, quam progrediendo descripserit longitudinem diametri propriæ; Quod si inter movendum minus urgeatur a tergo, magis retardabitur: & contra, si magis urgeatur, minus retardabitur.

Corol. 2. Hallucinantur igitur qui credunt resistentiam projectilium per infinitam divisionem partium Fluidi in infinitum diminui. Si Fluidum sit valde crassum, minuetur resistentia aliquantulum per divisionem partium ejus. At postquam competentem Fluiditatis gradum acquisiverit, (qualis forte est Fluiditas Aeris vel aquæ vel argenti vivi) resistentia in anteriore superficie solidi, per ulteriorem partium divisionem non multum minuetur. Nunquam enim minor futura est quam pro limite quem in Corollario superiore assignavimus.

Corol. 3. Media igitur in quibus corpora projectilia sine sensibili motus diminutione longissime progrediuntur, non solum Fluidissima sunt, sed etiam longe rariora quam sunt corpora illa quæ in ipsis moventur: nisi forte quis dixerit Medium omne Fluidissimum, impetu perpetuo in posticam projectilis partem facto, tantum promovere motum ejus quantum impedit & resistit in parte antica. Et motus quidem illius, quem projectile imprimit in Medium, partem aliquam a Medio circulariter lato reddi corpori a tergo verisimile est. Nam & experimentis quibusdam factis, reperi quod in Fluidis satis compressis pars aliqua redditur. Omnem vero in casu quocunque reddi nec rationi consentaneum videtur, neque cum experimentis hactenus a me tentatis bene quadrat. Fluidorum enim utcunque subtilium, si densa sint, vim ad solida movenda resistendaque permagnam esse, & quomodo vis illius quantitas per experimenta determinetur, plenius patebit per Propositiones duas quæ sequuntur.

Lemma IV.

Si vas Sphæricum Fluido homogeneo quiescente plenum a vi impressa moveatur in directum, motuque progessivo semper accelerato ita pergat ut interea non moveatur in orbem: partes Fluidi inclusi, æqualiter

participando motum vasis, quiescent inter se. Idem obtinebit in vase figuræ cujuscunque. Res manifesta est, nec indiget demonstratione.

Prop. XXXIX. Theor. XXX.

Fluidum omne quod motu accelerato ad modum venti increbescentis progreditur, & cujus partes inter se quiescunt, rapit omnia ejusdem densitatis innatantia corpora, & secum cum eadem velocitate defert.

Nam per Lemma superius si vas Sphæricum, rigidum, Fluidoque homogeneo quiescente plenum, motu paulatim impresso progrediatur; Fluidi motum vasis participantis partis omnes semper quiescent inter se. Ergo si Fluidi partes aliquæ congelarentur, pergerent hæ quiescere inter partes reliquas. Nam quoniam partes omnes quiescunt inter se, perinde est sive fluidæ sint, sive aliquæ earum rigescant. Ergo si vas a vi aliqua extrinsecus impressa moveatur, & motum suum imprimat in Fluidum; Fluidum quoque motum suum imprimet in sui ipsius partes congelatas easque secum rapiet. Sed partes illæ congelatæ sunt corpora solida ejusdem densitates cum Fluido; & par est ratio Fluidi, sive id in vase moto claudatur, sive in spatiis liberis ad modum venti spiret. Ergo Fluidum omne quod motu progressivo accelerato fertur, & cujus partes inter se quiescunt, solida quæcunque ejusdem densitatis inclusa, quæ sub initio quiescebant, rapit secum, & una moveri cogit. *Q. E. D.*

Prop. XL. Prob. X.

Invenire resistentiam solidorum Sphæricorum in Mediis Fluidissimis densitate datis.

In Fluido quocunque dato inveniatur resistentia ultima solidi specie dati, cujus magnitudo in infinitum augetur. Dein dic: ut ejus motus amissus, quo tempore progrediendo longitudinem semidiametri suæ describit, est ad ejus motum totum sub initio, ita motus quem solidum quodvis datum, in Fluido eodem jam facto subtilissimo, describendo diametri suæ longitudinem amitteret, est ad ejus motum totum sub initio quamproxime. Nam si particulæ minimæ Fluidi subtiliati eandem habeant proportionem eundemque situm ad solidum datum in eo movens, quem particulæ totidem minimæ Fluidi non subtiliati habent ad solidum auctum; sintque particulæ

Fluidi utriusq; summe lubricæ, & viribus centrifugis centripetisque omnino destituantur; incipiant autem solida temporibus quibuscunque proportionalibus in his Fluidis similiter moveri: pergent eadem similiter moveri, adeoque quo tempore describunt spatia semidiametris suis æqualia, amittent partes motuum proportionales totis; idque licet partes Medii subtiliati minuantur, & magnitudo solidi in Medio non subtiliato moventis augeatur in infinitum. Ergo ex resistentia solidi aucti in Medio non subtiliato, dabitur per proportionem superiorem resistentia solidi non aucti in Medio subtiliato. *Q. E. I.*

Si particulæ non sunt summe lubricæ, supponendum est quod in utroq; Fluido sunt æqualiter lubricæ, eo ut ex defectu lubricitatis resistentia utrinq; æqualiter augeatur: & Propositio etiamnum valebit.

Corol. 1. Ergo si ex aucta solidi Sphærici magnitudine augeatur ejus resistentia in ratione duplicata, resistentia solidi Sphærici dati ex diminuta magnitudine particularum Fluidi, nullatenus minuetur.

Corol. 2. Sin resistentia, augendo solidum Sphæricum, augeatur in minore quam duplicata ratione diametri; eadem diminuendo particulas Fluidi, diminuetur in ratione qua resistentia aucta deficit a ratione duplicata diametri.

Corol. 3. Unde perspicuum est quod solidi dati resistentia per divisionem partium Fluidi non multum diminui potest. Nam resistentia solidi aucti debebit esse quam proxime ut quantitas materiæ fluidæ resistentis, quam solidum illud movendo protrudit & a locis a se invasis & occupatis propellit: hoc est ut spatium Cylindricum per quod solidum movetur, adeoque in duplicata ratione semidiametri solidi quamproxime.

Corol. 4. Igitur propositis duobus Fluidis, quorum alterum ab altero quoad vim resistendi longissime superatur: Fluidum quod minus resistit est altero rarius; suntque Fluidorum omnium vires resistendi prope ut eorum densitates; præsertim si solida sint magna, & velociter moveantur, & Fluidorum æqualis sit compressio.

Scholium Generale.

Quæ hactenus demonstrata sunt tentavi in hunc modum. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57/_{22}$, diametro digitorum *Londinensium* $6\frac{7}{8}$

fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi, ita ut inter uncum & centrum oscillationis Globi distantia esset pedum 10½. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro suspensionis distans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes quibus Globus quartam motus sui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad distantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totaque oscillatione prima, ex descensu & ascensu subsequente composita, arcum digitorum fere quatuor; idem oscillationibus 164 amisit octavam motus sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor, amisit octavam motus partem oscillationibus 121; ita ut ascensu ultimo describeret arcum digitorum 3½. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor, amisit octavam motus partem oscillationibus 69, 35½, 18½, 9⅔, respective. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum ¼, ½, 1, 2, 4, 8 respective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque; & in oscillatione una mediocri, qua arcus digitorum 3¾, 7½, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $/_{656}$, $/_{242}$, $/_{69}$, $/_{71}$, $/_{37}$, $/_{29}$ partes digiti respective. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicata ratione arcuum descriptorum quam proxime; in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione, & propterea (per Corol. 2. Prop. xxxi. Libri hujus) resistentia Globi, ubi celerius movetur, est in duplicata ratione velocitatis quamproxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione: omnino ut in Corollariis Propositionis xxxii. demonstratum est.

Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum sit $AV + BV^{\prime}_{2} + CV$. Et cum velocitates maximæ in prædictis sex Casibus, sint ut arcuum dimidiorum 1⅞, 3¾, 7½, 15, 30, 60 chordæ, atque adeo ut arcus ipsi quamproxime, hoc est ut numeri ½, 1, 2, 4, 8, 16: scribamus in Casu secundo quarto & sexto numeros 1, 4, & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $/_{242}$ æqualis $A + B + C$ in Casu secundo; & 2 ÷ 35½ æqualis $4A +$

$8B + 16C$ in casu quarto; & $8 \div 9\frac{2}{3}$ æqualis $16A + 64B + 256C$ in casu sexto. Unde si per has æquationes determinemus quantitates A, B, C; habebimus Regulam inveniendi differentiam arcuum pro velocitate quacunque data.

Cæterum cum velocitates maximæ sint in Cycloide ut arcus oscillando descripti, in circulo vero ut semissium arcuum illorum chordæ, adeoque paribus arcubus majores sint in Cycloide quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in circulo sint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca: ut ex resistentia in circulo inveniatur resistentia in Trochoide, debebit resistentia augeri in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam; & diminui in ratione chordæ ad arcum, ob tempus (seu durationem resistentiæ qua arcuum differentia prædicta generatur) diminutum in eadem ratione: id est (si rationes conjungamus) debebit resistentia augeri in ratione arcus ad chordam circiter. Hæc ratio in casu secundo est 6283 ad 6279, in quarto 12566 ad 12533, in sexto 25132 ad 24869. Et inde resistentia $1 \div 242$, $2 \div 35\frac{1}{2}$, & $8 \div 9\frac{2}{3}$ evadunt $6283 \div \{6279 \times 242\}$, $25132 \div \{12533 \times 35\frac{1}{2}\}$ & $201056 \div \{24869 \times 9\frac{2}{3}\}$, id est in numeris decimalibus 0,004135, 0,056486 & 0,8363. Unde prodeunt æquationes $A + B + C = 0{,}004135$: $4A + 8B + 16C = 0{,}05648$ & $16A + 64B + 256C = 0{,}8363$. Et ex his per debitam terminorum collationem & reductionem Analyticam fit $A = 0{,}0002097$, $B = 0{,}0008955$ & $C = 0{,}0030298$. Est igitur differentia arcuum ut $0{,}0002097V + 0{,}0008955V'^2 + 0{,}0030298V$: & propterea cum per Corol. Prop. xxx. resistentia Globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{1}{11}AV + \frac{1}{23}BV'^2 + \frac{3}{4}CV$ ad longitudinem Penduli; si pro A, B, & C scribantur numeri inventi, fiet resistentia Globi ad ejus pondus, ut $0{,}0001334V + 0{,}000623V'^2 + 0{,}00227235V$ ad longitudinem Penduli inter centrum suspensionis & Regulam, id est ad 121 digitos. Unde cum V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus Globi in casu secundo ut 0.003029 ad 121, in quarto ut 0.042875 ad 121, in sexto ut 0.63013 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in Casu sexto descripsit, erat $120 - \{8 \div 9\frac{2}{3}\}$ seu $119\frac{1}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum

Globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum Globi descripsit erat $124/_{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima ob resistentiam Aeris non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si Globus descensu suo toto in Medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62/_{62}$; idque in Cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius Sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum $62/_{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15,278 digitorum describendo acquirere posset. Unde cum corpus tempore minuti unius secundi cadendo (uti per experimenta pendulorum determinavit *Hugenius*) describat pedes *Parisienses* $15/_{12}$, id est pedes *Anglicos* $16/_{24}$ seu digitos 197½, & tempora sint in dimidiata ratione spatiorum; Globus tempore minut. $16^{\text{tert.}}$ $38^{\text{quart.}}$ cadendo describet 15,278 digitos, & velocitatem suam prædictam acquiret; & propterea cum eadem velocitate uniformiter continuata describet eodem tempore longitudinem duplam 30,556 digitorum. Tali igitur cum velocitate Globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,63013 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0,58172 ad 121.

Experimento autem Hydrostatico inveni quod pondus Globi hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213,4 in eadem ratione, erit resistentia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus ut 0,58172 ad 213,4, id est ut 1 ad $366/_{6}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem pedum 30,556, velocitatem illam omnem in Globo cadente generare posset; manifestum est quod vis resistentiæ uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $366/_{6}$, hoc est velocitatis totius partem $1 \div 366/_{6}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ seu digitorum $3/_{16}$ describere posset, eodem amitteret motus sui partem $/_{3262}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente Tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Descensus Primus

2

4

8

16

32

64

Ascensus ultimus
1½
3
6
12
24

48

Num. Oscillat.
374

272

162½

83⅓
41⅔
22⅔

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum duorum & pondere unciarum Romanarum 26¼ suspendi filo eodem, sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum 10½, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Descensus primus

1
2
4
8
16
32

64

Ascensus ultimus
⅞
/4
3½
7
14
28

56

Numerus Oscillat.
226
228
193

140

90½

53

30

Descensus primus
1
2
4
8
16
32

64

Ascensus ultimus
¾
1½
3
6
12
24

48

Numerus Oscillat.
510
518
420
318
204
121

In Tabula priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respective, & generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione prima $/_{193} = A + B + C$, in secunda $2 \div 90½ = 4A + 8B + 16C$, in tertia $/_{30}$ æqu. $16A + 64B + 256C$. Quæ æquationes per reductiones superius expositas dant, $A = 0{,}000145$, $B = 0{,}000247$ & $C = 0{,}0009$. Et inde prodit resistentia Globi cum velocitate V moventis, in ea ratione ad pondus suum unciarum 26¼, quam habet $0{,}000923V + 0{,}000172V'_2 + 0{,}000675V$ ad Penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0{,}000675V$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57/_{22}$ ut $0{,}00227235V$ ad 121: & inde fit resistentia Globi lignei ad resistentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57/_{22}$ in 0,00227235 ad 26¼ in 0,000675, id est ut 130309 ad 17719 seu 7⅓ ad 1. Diametri Globorum duorum erant 6⅞ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut 47¼ & 4, seu $11/_{16}$ & 1 quamproxime. Ergo resistentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa resistentia subduci debet. Hanc accurate definire non potui, sed majorem tamen inveni quam partem tertiam resistentiæ totius minoris penduli, & inde didici quod resistentiæ Globorum, dempta fili resistentia, sunt quamproxime in dimidiata ratione diametrorum. Nam ratio 7⅓ - ⅓ ad 1 - ⅓, id est 7 ad ⅔ seu 10½ ad 1, non longe abest a diametrorum ratione duplicata $11/_{16}$ ad 1.

Cum resistentia fili in Globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat 18¼ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum oscillationis erat digitorum 122¾ inter punctum suspensionis & nodum in filo 109½ dig. Arcus primo penduli descensu a nodo descriptus, 32 dig. arcus ascensu ultimo post oscillationes quinque ab eodem nodo descriptus, 28 dig. Summa

arcuum seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus, 30 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima seu differentia inter descensum & ascensum in oscillatione mediocri /5 dig. Ut radius 109½ ad radium 122½, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri a Nodo descriptus, ad arcum totum 67⅛, oscillatione mediocri a centro Globi descriptum: & ita differentia /5 ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus descripti, augeretur in ratione 126 ad 122½, velocitas ejus diminueretur in ratione illa dimidiata; & arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0,4475 diminueretur in ratione velocitatis, adeoque evaderet 0,4412. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione 67⅛ ad 124/31, differentia ista 0,4412 augeretur in duplicata illa ratione, adeoque, evaderet 1,509. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia Penduli esset in duplicata ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum 124/31 digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1,509 dig. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 313,9. Rursus ubi pendulum superius ex Globo ligneo constructum, centro oscillationis, quod a puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum 124/31 digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptorum fuit /121 in 8 ÷ 9⅔ seu /29, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum 57/22, producit 48,55. Duxi autem differentias hasce in pondera Globorum ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, suntque ut resistentiæ directe & pondera inverse. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 313,9 & 48,55. Pars autem resistentiæ Globi minoris, quæ est in duplicata ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0,58172 ad 0,63013, id est ut 44,4 ad 48,55; & pars resistentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti, adeoque partes illæ sunt ut 313,9 & 44,4 quamproxime, id est ut 7,07 ad 1. Sunt autem Globorum diametri 10¾ & 6⅞; & harum quadrata 351½ & 47/64 sunt ut 7,438 & 1, id est ut Globorum resistentiæ 7,07 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major est quam quæ ex fili resistentia oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt (paribus Globis) ut quadrata velocitatum, sunt etiam (paribus velocitatibus) ut quadrata diametrorum Globorum; & propterea

(per Corollaria Prop. XL. Libri hujus) resistentia quam Globi majores & velociores in aere movendo sentiunt, haud multum per infinitam aeris divisionem & subtiliationem diminui potest, proindeque Media omnia in quibus corpora multo minus resistuntur, sunt aere rariora.

Cæterum Globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minime sollicitus. Optarim itaque (cum demonstratio vacui ex his dependeat) ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi sumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo resistentias diversorum fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166/_6$ unciarum, diametro 3⅝ digitorum, movebatur ut in Tabula sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum 134⅛ digitorum.

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus digitorum.

64
32
16
8
4
2

1

½

¼

Arcus ascensu ultimo descriptus digitorum.
48
24
12
6

3

1½

¾
⅜
/16

Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum.
16
8
4
2

1

½

¼
⅛
/16

Numerus oscillationum in aqua.

/60
1/5
3

7

11¼

12⅔
13⅓

Numerus oscillationum in aere.
85½

287

535

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1/_5$ in aqua amissi sunt. Erant autem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua, nimirum in ratione 44 ad 41. Nam 14⅔ oscillationes in aqua, & 13⅔ in aere simul peragebantur. Et propterea si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, numerus oscillationum $1/_5$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur (ob resistentiam auctam in ratione illa duplicata & tempus diminutum in ratione eadem simplici) diminueretur in eadem illa ratione 44 ad 41, adeoque evaderet $1/_5$ in $/_{44}$ seu $/_{110}$. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $/_{110}$ amissi sunt; ideoque resistentia penduli in aqua est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $/_{110}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in Casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV$ resistentiam Globi in aere cum velocitate V moventis, & cum velocitas maxima, in Casu columnæ, quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ ut 1 ad 8, & resistentia in Casu columnæ quartæ ad resistentiam in Casu columnæ primæ in ratione arcuum differentiæ in his casibus, ad numeros oscillationum applicatæ, id est ut $/_{535}$ ad 16 ÷ 85½ seu ut 85½ ad 4280: scribamus in his Casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque 85½ & 4280 pro resistentiis, & fiet $A + C = 85½$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$, indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449½$ & $C = 64/_{14}$ & $A = 21/_7$; atque adeo resistentia ut $21/_7V + 64/_{14}V$ quamproxime. Quare in Casu columnæ quartæ ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $21/_7 + 64/_{14}$ seu 85½, ad $64/_{14}$; & idcirco resistentia

penduli in aqua est ad resistentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut 85½ ad $64/_{14}$ & 535 ad $/_{110}$ conjunctim, id est ut 637 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aere oscillantis resistentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aqua oscillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc est ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi, quod Arca nimis angusta esset pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustia sua nimis impediebat. Nam si Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur, resistentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Id tentabam construendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aqua, superior & major proxime supra aquam filo affixus esset, & in Aere oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in Tabula sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus

16

8

4

2

1

½

¼

Arcus ascensu ultimo descriptus.
12
6

3

1½

¾
⅜
/16

Arcuum diff. motui amisso proportionalis
4
2

1

½

¼
⅛
/16

Numerus Oscillationum
3⅜
6½
12/12
21/5
34

Resistentia hic nunquam augetur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Et idem in pendulo majore evenire verisimile est, si modo Arca augeatur in ratione penduli. Debebit tamen resistentia tam in aere quam in aqua, si velocitas per gradus in infinitum augeatur, augeri tandem in ratione paulo plusquam duplicata, propterea quod in experimentis hic descriptis resistentia minor est quam pro ratione de corporibus velocissimis in Libri hujus Prop. xxxvi & xxxviii. demonstrata. Nam corpora longe velocissima spatium a tergo relinquent vacuum, ideoque resistentia quam sentiunt in partibus præcedentibus, nullatenus minuetur per pressionem Medii in partibus posticis.

Conferendo resistentias Mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter Globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime supra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque successive oscillante invenirem proportionem resistentiarum: & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter esset quasi ½ vel ⅔ partes digiti, prodibat resistentia argenti vivi in ea ratione ad resistentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine Globi immersi. Ampliato Globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quamproxime. Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora pari densitate

proculdubio magis resistunt quam liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus vini. Verum in liquoribus qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in Aere, in aqua seu dulci seu falsa, in Spiritibus vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fœcibus per destillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & siqui sint alii, qui tam Fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrime in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accurate obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Quare cum Globus aqueus in aere movendo resistentiam patiatur qua motus sui pars $/_{3261}$, interea dum longitudinem semidiametri suæ describat (ut jam ante ostensum est) tollatur, sitque densitas aeris ad densitatem aquæ ut 800 vel 850 ad 1 circiter, consequens est ut hæc Regula generaliter obtineat. Si corpus quodlibet Sphæricum in Medio quocunque satis Fluido moveatur, & spectetur resistentiæ pars illa sola quæ est in duplicata ratione velocitatis, hæc pars erit ad vim quæ totum corporis motum, interea dum corpus idem longitudinem duarum ipsius semidiametrorum motu illo uniformiter continuato describat, vel tollere posset vel eundem generare, ut densitas Medii ad densitatem corporis quamproxime. Igitur resistentia quasi triplo major est quam pro lege in Corollario primo Propositionis xxxviii. allata; & propterea partes quasi duæ tertiæ motus illius omnis quem Globi partes anticæ movendo imprimunt in Medium, restituuntur in Globi partes posticas a Medio in orbem redeunte, inque spatium irruente quod Globus alias vacuum post se relinqueret. Unde si velocitas Globi eousque augeatur ut Medium non posset adeo celeriter in spatium illud irruere, quin aliquid vacui a tergo Globi semper relinquatur, resistentia tandem evadet quasi triplo major quam pro Regula generali novissime posita.

Hactenus experimentis usi sumus oscillantium pendulorum, eo quod eorum motus facilius & accuratius observari & mensurari possint. Motus autem pendulorum in gyrum actorum & in orbem redeundo circulos describentium, propterea quod sint uniformes & eo nomine ad investigandam resistentiam datæ velocitati competentem longe aptiores videantur, in consilium etiam adhibui. Faciendo enim ut pendulum circulariter latum duodecies revolveretur, notavi magnitudines circulorum

duorum, quos prima & ultima revolutione descripsit. Et inde collegi velocitates corporis sub initio & fine. Tum dicendo quod corpus, velocitate mediocri describendo circulos duodecim mediocres, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi resistentiam qua differentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti posset; & resistentia inventa, quanquam hujus generis experimenta minus accurate tentare licuit, probe tamen cum præcedentibus congruebat.

Denique cum receptissima Philosophorum ætatis hujus opinio sit, Medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu suo superiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante Pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tensum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget.) Huic ponderi addebam pondus aeris quam pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis Metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum distracto ac dimisso,

numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insita pyxidis vacui, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque adeo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externa, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quæ resistuntur: erit $78B$ resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ resistentia tota $A + B$ erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam $A + 78B$ ut 77 ad 78, & divisim $A + B$ ad $77B$ ut 77, ad 1, indeque $A + B$ ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ oriatur ab actione Fluidi alicujus subtilis in Metallum inclusum. Ac causam longe aliam esse opinor. Nam tempora oscillationum pyxidis plenæ minora sunt quam tempora oscillationum pyxidis vacuæ, & propterea resistentia pyxidis plenæ in externa superficie major est, pro ipsius velocitate & longitudine spatii oscillando descripti, quam ea pyxidis vacuæ. Quod cum ita sit, resistentia pyxidum in partibus internis aut nulla erit aut plane insensibilis.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsus sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

Eadem methodo qua invenimus resistentiam corporum Sphæricorum in Aqua & argento vivo, inveniri potest resistentia corporum figurarum

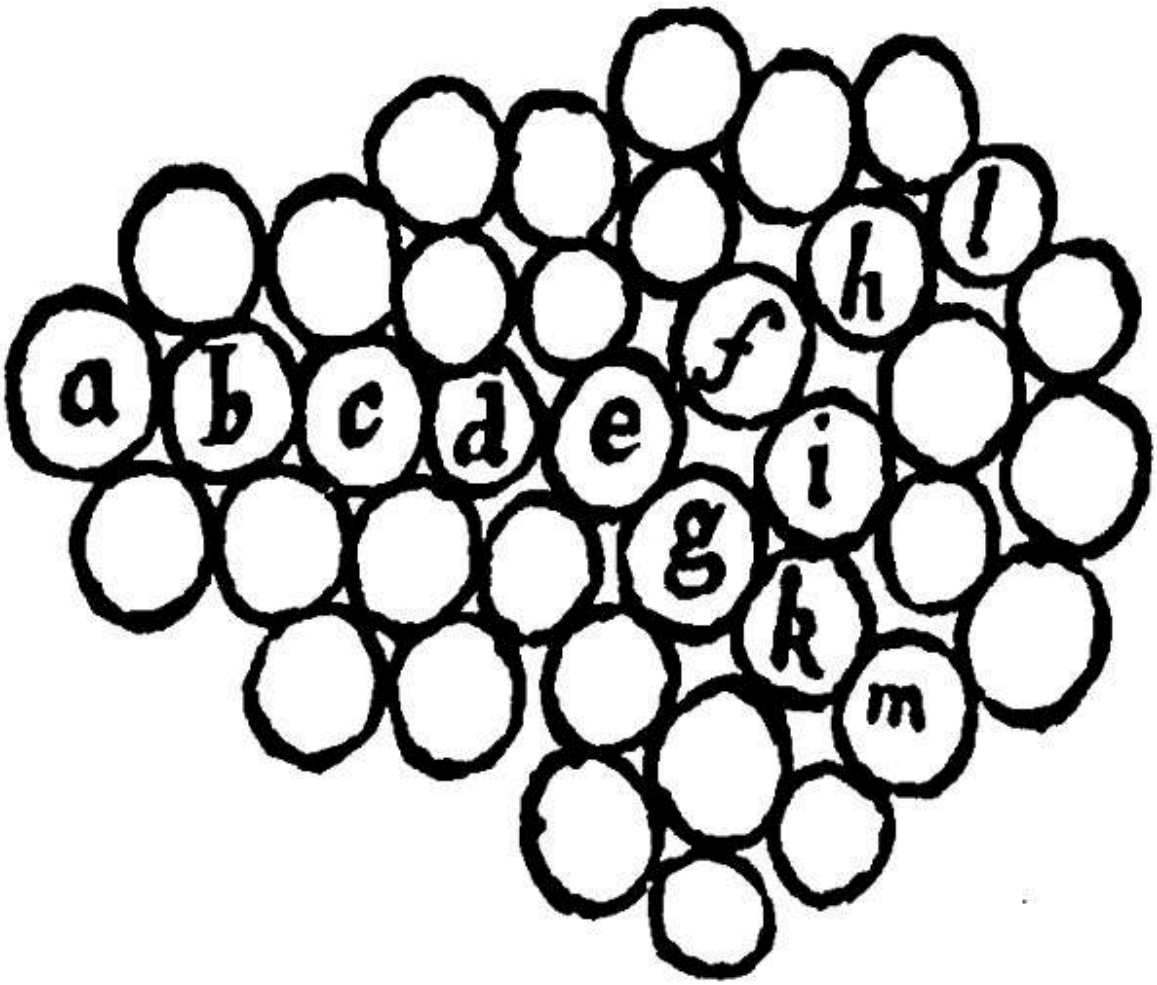
aliarum; & sic Navium figuræ variæ in Typis exiguis constructæ inter se conferri, ut quænam ad navigandum aptissimæ sint, sumptibus parvis tentetur.

SECT. VIII.

De Motu per Fluida propagato.

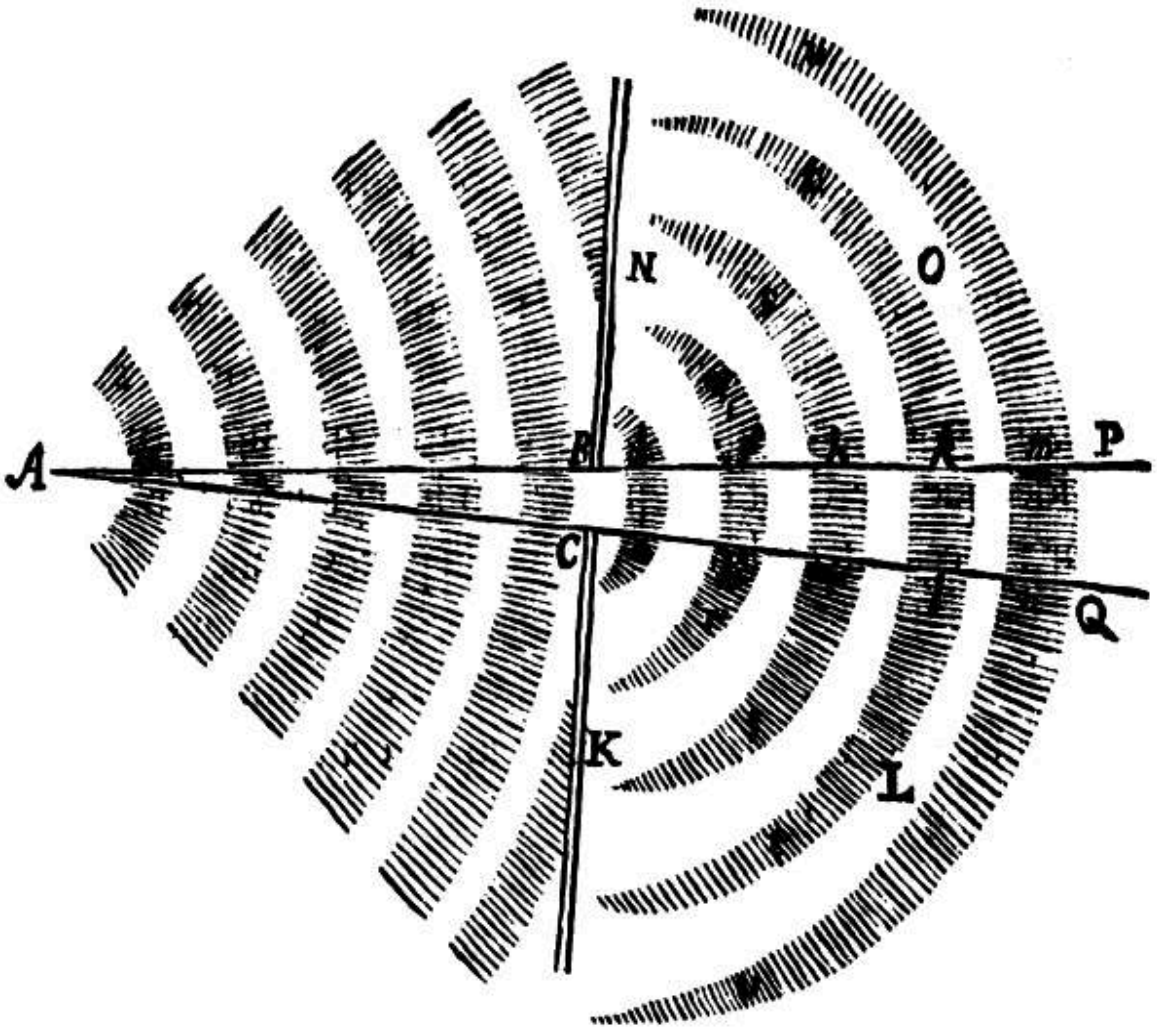
Prop. XLI. Theor. XXXI.

Pressio non propagatur per Fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.



Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, potest quidem pressio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique positas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*

Corol. Si pressionis a dato puncto per Fluidum propagatæ pars aliqua obstaculo intercipiatur, pars reliqua quæ non intercipitur divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quaquaversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit. Planis transversis *de*, *fg*, *hi* distinguatur conus *APQ* in frusta & interea dum conus *ABC*, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius *degf* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fgih* in superficie *fg*, & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motus Legem tertiam) quod frustum primum *defg*, reactione frusti secundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in superficie *fg*, quantum urget & premit frustum illud secundum. Frustum igitur *degf* inter Conum *Ade* & frustum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram suam servare nequit, nisi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus *de*, *fg* conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cum rigidum non sit, sed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, nisi Fluidum ambiens adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi premet tam Fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam frustum *fghi* eodem impetu; & propterea pressio non minus propagabitur a lateribus *df*, *eg* in spatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur a superficie *fg* versus *PQ*. *Q. E. D.*



Prop. XLII. Theor. XXXII.

Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC*, pergatque (si fieri potest) in spatio conico *BCQP*, secundum lineas rectas divergentes a puncto *C*. Et ponamus primo quod motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in Fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde versus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depressior est quam in Fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in

undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* versus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ hinc inde versus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus *KL* & *NO*, eadem velocitate qua undæ ipsæ ab *A* versus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita se habere quilibet in aqua stagnante experiri potest.

Cas. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* designent pulsus a puncto *A* per Medium Elasticum successive propagatos. Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones Medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima Sphæricam occupet superficiem circa centrum *A* descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedant intervalla. Designent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. densissimas pulsuum partes per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus *KL* & *NO*, dilatabit sese tam versus spatia illa *KL*, *NO* utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervalla; eoq; pacto rarius semper evadens e regione intervallorum ac densius e regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur a perpetua relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; & pulsus eadem celeritate sese in Medii partes quiescentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulsus illi eadem celeritate sese dilatabunt undique in spatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; adeoque spatium totum *KLON* occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in sonis, qui vel domo interposita audiuntur, vel in cubiculum per fenestram admissi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non reflexi a parietibus oppositis sed a fenestra directe propagati.

Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio ista non fit nisi quatenus partes Medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur Fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem versus Medii partes omnes quiescentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis,

quam primum per foramen *BC* transiit, dilatari incipiet, & abinde tanquam a principio & centro in partes omnes directe propagari. *Q. E. D.*

Prop. XLIII. Theor. XXXIII.

Corpus omne tremulum in Medio Elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in Medio vero non Elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo compriment easdem & condensabunt; dein reditu suo sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant hasce Medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatæ, ob motum suum progressivum quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. *Q. E. D.* Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per Medium propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centrocommuni, secundum superficies propemodum Sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in Undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum

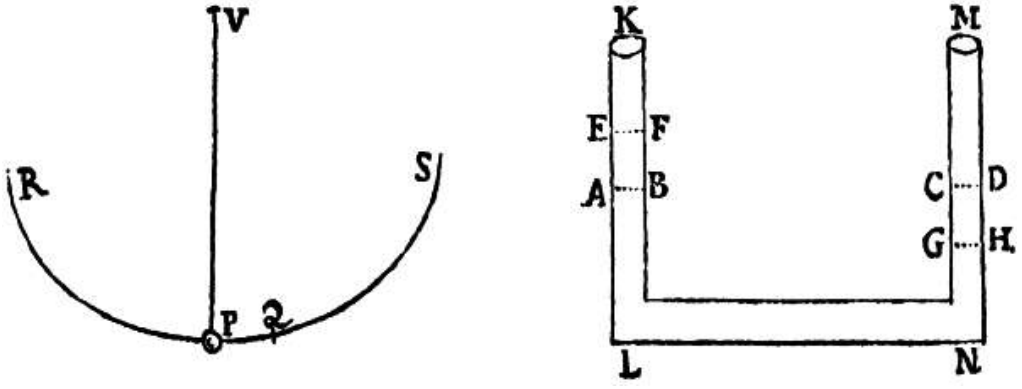
concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum supplet locum vis Elasticæ.

Quod si Medium non sit Elasticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc est ad partes quæ corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum, sed in circulum eundo pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit, & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in Orbem ad partes quæ eidem cedunt.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem per Medium ambiens secundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione sola partium flammæ sed a totius dilatatione derivari.

Prop. XLIV. Theor. XXXIV.

Si Aqua in canalis cruribus erectis KL, MN *vicibus alternis ascendat & descendat; construatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.*



Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando. Designent igitur *AB*, *CD* mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure *KL* ascendit ad altitudinem *EF*, descenderit aqua in crure *MN* ad altitudinem *GH*. Sit autem *P* corpus pendulum, *VP* filum, *V* punctum suspensionis, *SPQR* Cyclois quam Pendulum describat, *P* ejus punctum infimum, *PQ* arcus altitudini *AE* æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque ubi aqua in crure *KL* ascendit ad *EF*, & in crure altero descendit ad *GH*, vis illa est pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea est ad pondus aquæ totius ut *AE* seu *PQ* ad *VP* seu *PR*. Vis etiam, qua pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in Cycloide, est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia *PQ* a loco infimo *P*, ad Cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia *AE*, *PQ* describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque vires illæ, si aqua & pendulum in principio, æquali cum velocitate moveantur; pergent eadem temporibus æqualiter movere, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis & descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt Isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum *Parisiensium* $6/_9$, aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3/_{18}$ longitudinis, tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione dimidiata.

Prop. XLV. Theor. XXXV.

Undarum velocitas est in dimidiata ratione latitudinum.

Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

Prop. XLVI. Prob. XI.

Invenire velocitatem Undarum.

Constituatur Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum

illud oscillationes singulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam quæ vel vallibus imis vel summis culminibus interjacet. Designet *ABCDEF* superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem, sintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc infimæ sunt, mox fiant altissimæ; & vis motrix, qua partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges observabit: & propterea (per Prop. XLIV.) si distantiæ inter undarum loca altissima *A*, *C*, *E*, & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini, partes altissimæ *A*, *C*, *E* tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum Undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est Unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, adeoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Parisienses* $3/_{18}$ latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes 183⅓, & horæ spatio pedes 11000 quamproxime.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in dimidiata ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod partes aquæ recta ascendunt vel recta descendunt; sed ascensus & descensus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propositione non nisi quamproxime definitum esse affirmo.

Prop. XLVII. Theor. XXXVI.

Pulsuum in Fluido Elastico propagatorum velocitates sunt in ratione composita ex dimidiata ratione vis Elasticæ directe & dimidiata ratione densitatis inverse; si modo Fluidi vis Elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

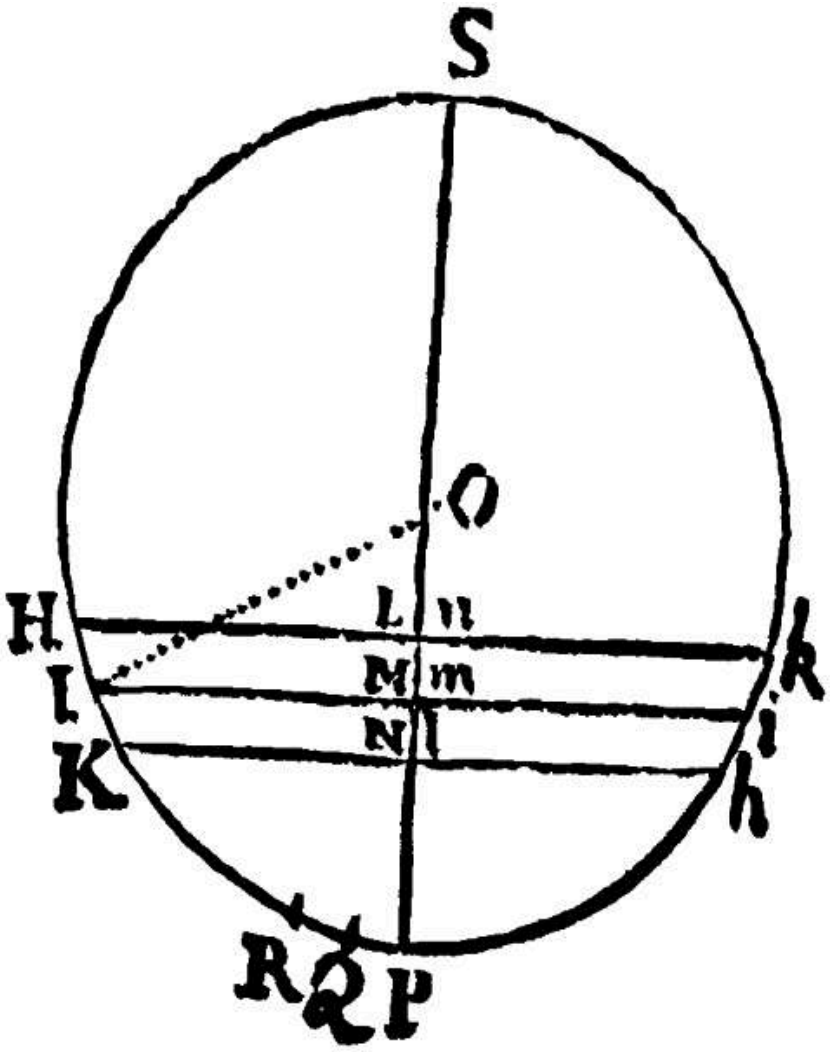
Cas. 1. Si Media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his Mediis æquentur inter se, sed motus in uno Medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verum tamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro Physice accurata haberi potest. Sunt autem vires Elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes, itus & reditus suos per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proxime præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiæ seu longitudines sint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si Media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, est ut pulsuum latitudo; & in eadem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione composita ex ratione dimidiata materiæ & ratione dimidiata spatii, atque adeo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea sunt æquiveloces.

Cas. 3. In Mediis igitur densitate & vi elastica paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si Medii vel densitas vel vis Elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in dimidiata ratione densitatis, ac diminuetur in dimidiata ratione vis Elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione composita ex ratione dimidiata densitatis Medii inverse & ratione dimidiata vis Elasticæ directe. *Q. E. D.*

Prop. XLVIII. Theor. XXXVII.

Pulsibus per Fluidum propagatis, singulæ Fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis Penduli.



Designent *AB*, *BC*, *CD*, &c. pulsuum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsuum ab *A* versus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria Physica Medii quiescentis, in recta *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *Ee*, *Ff*, *Gg*, spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco singulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas Physicas seu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatas in loca εφ, φγ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Bisecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* describatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSh*, si demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur *Ee* æqualis *PL* vel *Pl*, punctum Physicum *E* reperiatur in ε. Hac lege punctum quodvis *E* eundo

ab *E* per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad *E* iisdem accelerationis ac retardationis gradibus, vibrationes singulas peraget cum oscillante Pendulo. Probandum est quod singula Medii puncta Physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia *PHSh* capiantur æquales arcus *HI*, *IK* vel *hi*, *ik*, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ *EF*, *FG* ad pulsuum intervallum totum *BC*. Et demissis perpendiculis *IM*, *KN* vel *im*, *kn*; quoniam puncta *E*, *F*, *G* motibus similibus successive agitantur, si *PH* vel *PHSk* sit tempus ab initio motus puncti *E*, erit *PI* vel *PHSi* tempus ab initio motus puncti *F*, & *PK* vel *PHSh* tempus ab initio motus puncti *G*; & propterea *E*ε, *F*φ, *G*γ erunt ipsis *PL*, *PM*, *PN* in itu punctorum, vel ipsis *Pn*, *Pm*, *Pl* in punctorum reditu, æquales respective. Unde εγ in itu punctorum æqualis erit *EG* - *LN*, in reditu autem æqualis *EG* + *ln*. Sed εγ latitudo est seu expansio partis Medii *EG* in loco εγ, & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem ut *EG* - *LN* ad *EG*; in reditu autem ut *EG* + *ln* seu *EG* + *LN* ad *EG*. Quare cum sit *LN* ad *KH* ut *IM* ad radium *OP*, & *EG* ad *BC* ut *HK* ad circumferentiam *PHShP*, & vicissim *EG* ad *HK* ut *BC* ad circumferentiam *PHShP*, id est (si circumferentia dicatur *Z*) ut *OP* × *BC* ÷ *Z* ad *OP*, & ex æquo *LN* ad *EG* ut *IM* ad *OP* × *BC* ÷ *Z*: erit expansio partis *EG* in loco εγ ad expansionem mediocrem quam habet in loco suo primo *EG*, ut {*OP* × *BC* ÷ *Z*} - *IM* ad *OP* × *BC* ÷ *Z* in itu, utque {*OP* × *BC* ÷ *Z*} + *im* ad *OP* × *BC* ÷ *Z* in reditu. Unde si *OP* × *BC* ÷ *Z* dicatur *V*, erit expansio partis *EG*, punctive Physici *F*, ad ejus expansionem mediocrem in itu, ut *V* - *IM* ad *V*, in reditu ut *V* + *im* ad *V*; & ejusdem vis elastica ad vim suam elasticam mediocrem in itu, ut 1 ÷ {*V* - *IM*} ad 1 ÷ *V*; in reditu, ut 1 ÷ {*V* + *im*} ad 1 ÷ *V*. Et eodem argumento vires Elasticæ punctorum Physicorum *E* & *G* in itu, sunt ut 1 ÷ {*V* - *HL*} & 1 ÷ {*V* - *KN*} ad 1 ÷ *V*; & virium differentia ad Medii vim elasticam mediocrem, ut

HL - *KN*

ad

1

.

$$\frac{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}{V}$$

Hoc est (si ob brevitatem pulsuum supponamus *HK* & *KN* indefinite minores esse quantitate *V*) ut {*HL* - *KN*} ÷ *VV* ad 1 ÷ *V*, sive ut *HL* - *KN* ad *V*. Quare cum quantitas *V* detur, differentia virium est ut *HL* - *KN*, hoc est (ob proportionales *HL* - *KN* ad *HK*, & *OM* ad *OI* vel *OP*, datasque *HK* & *OP*) ut *OM*; id est, si *Ff* bisecetur in Ω, ut Ωφ. Et eodem argumento differentia virium Elasticarum punctorum Physicorum ε & γ, in reditu lineolæ Physicæ εγ est ut Ωφ. Sed differentia illa (id est excessus vis Elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ,) est vis qua interjecta Medii lineola Physica εγ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Physicæ εγ est ut ipsius distantia a Medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) recte exponitur per arcum *PI*; & Medii pars linearis εγ lege præscripta movetur, id est lege oscillantis Penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. *Q. E. D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola Physica εγ, quamprimum ad locum suum primum redierit, quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

Prop. XLIX. Prob. XII.

Datis Medii densitate & vi Elastica, invenire velocitatem pulsuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris nostri comprimi, sitque *A* altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate Medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis sit *A*: & quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio *A* descripti æquale.

Nam stantibus quæ in Propositione superiore constructa sunt, si linea quævis Physica, *EF* singulis vibrationibus describendo spatium *PS*, urgeatur in extremis itus & reditus cujusque locis *P* & *S*, a vi Elastica quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus Perimeter tota longitudini *PS* æqualis est, oscillari posset: id adeo quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cum oscillationum tempora sint in dimidiata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis Penduli cujus longitudo est *A*, in dimidiata ratione longitudinis ½*PS* seu *PO* ad longitudinem *A*. Sed vis Elastica qua lineola Physica *EG*, in locis suis extremis *P*, *S* existens, urgetur, erat (in demonstratione Propositionis superioris) ad ejus vim totam Elasticam ut *HL* - *KN* ad *V*, hoc est (cum punctum *K* jam incidat in *P*) ut *HK* ad *V*: & vis illa tota, hoc est pondus incumbens, qua lineola *EG* comprimitur, est ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo *A* ad lineolæ longitudinem *EG*; adeoque ex æquo, vis qua lineola *EG* in locis suis *P* & *S* urgetur, est ad lineolæ illius pondus ut *HK* × *A* ad *V* × *EG*. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in dimidiata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elastica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in dimidiata ratione *V* × *EG* ad *HK* × *A*, atque adeo ad tempus oscillationis Penduli cujus longitudo est *A*, in dimidiata ratione *V* × *EG* ad *HK* × *A* & *PO* ad *A* conjunctim; id est (cùm fuerit, in superiore Propositione, *V* æqualis *PO* × *BC* ÷ *Z*, & *HK* æqualis *EG* × *Z* ÷ *BC*) in dimidiata ratione *PO qu.* × *BC* × *EG* ÷ *Z* ad *EG* × *Z* × *A qu.* ÷ *BC* seu *PO qu.* × *BC qu.* ad *Z qu.* × *A qu.* hoc est in ratione *PO* × *BC* ad *Z* × *A*, seu *BC* ad *Z* × *A* ÷ *PO*. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compositæ,

pulsus progrediendo conficit latitudinem suam *BC*. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium *BC*, est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut *BC* ad $Z \times A \div PO$, id est ut *BC* ad circumferentiam circuli cujus radius est *A*. Tempus autem, quo pulsus percurret spatium *BC*, est ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Prop. L. Prob. XIII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Schol.

Spectant Propositiones novissimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola (per Prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quàm aeris pulsus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modò vehementes sint & graves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cùm pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad 13⅔ circiter, & ubi *Mercurius* in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 850 circiter: erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11617. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis, cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 348500 digitorum seu pedum *Anglicorum* 29042. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus *A*. Circuli radio 29042 pedum descripti circumferentia est pedum 182476. Et cum

Pendulum digitos $39/_5$ longum, oscillationem ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; pendulum pedes 29042, seu digitos 348500, longum, oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $188/_7$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 182476, adeoque tempore minuti unius secundi pedes 968. Scribit *Mersennus*, in Balisticæ suæ Prop. XXXV. se factis experimentis invenisse quod sonus minutis quinque secundis hexapedas *Gallicas* 1150 (id est pedes *Gallicos* 6900) percurrat. Unde cum pes *Gallicus* sit ad *Anglicum* ut 1068 ad 1000, debebit sonus tempore minuti unius secundi pedes *Anglicos* 1474 conficere. Scribit etiam idem *Mersennus Robervallum* Geometram clarissimum in Obsidione *Theodonis* observasse tormentorum fragorem exauditum esse post 13 vel 14 ab igne viso minuta secunda, cùm tamen vix dimidiam *Leucam* ab illis Tormentis abfuerit. Continet *Leuca Gallica* hexapedas 2500, adeoque sonus tempore 13 vel 14 secundorum, ex Observatione *Robervalli*, confecit pedes *Parisienses* 7500, ac tempore minuti unius secundi pedes *Parisienses* 560, *Anglicos* verò 600 circiter. Multum differunt hæ Observationes ab invicem, & computus noster medium locum tenet. In porticu Collegii nostri pedes 208 longa, sonus in termino alterutro excitatus quaterno recursu Echo quadruplicem efficit. Factis autem experimentis inveni quod singulis soni recursibus pendulum quasi sex vel septem digitorum longitudinis oscillabatur, ad priorem soni recursum eundo & ad posteriorem redeundo. Longitudinem penduli satis accuratè definire nequibam: sed longitudine quatuor digitorum, oscillationes nimis celeres esse, ea novem digitorum nimis tardas judicabam. Unde sonus eundo & redeundo confecit pedes 416 minore tempore quàm pendulum digitorum novem, & majore quàm pendulum digitorum quatuor oscillatur; id est minore tempore quàm 28¾ minutorum tertiorum, & majore quàm $19/_6$; & propterea tempore minuti unius secundi conficit pedes *Anglicos* plures quàm 866 & pauciores quàm 1272, atque adeò velocior est quàm pro Observatione *Robervalli,* ac tardior quàm pro Observatione *Mersenni*. Quinetiam accuratioribus postea Observationibus definivi quod longitudo penduli major esse deberet quàm digitorum quinque cum semisse, & minor quàm digitorum octo; adeoque quòd sonus tempore minuti unius secundi confecit pedes *Anglicos* plures quàm 920 & pauciores quàm 1085. Igitur motus sonorum, secundum calculum Geometricum superius allatum, inter

hos limites consistens, quadrat cum Phænomenis, quatenus hactenus tentare licuit. Proinde cùm motus iste pendeat ab aeris totius densitate, consequens est quod soni non in motu ætheris vel aeris cujusdam subtilioris, sed in aeris totius agitatione consistat.

Refragari videntur experimenta quædam de sono in vasis aere vacuis propagato, sed vasa aere omni evacuari vix possunt; & ubi satis evacuantur soni notabiliter imminui solent; *Ex. gr.* Si aeris totius pars tantùm centesima in vase maneat, debebit sonus esse centuplo languidior, atque adeò non minus audiri quàm si quis sonum eundem in aere libero excitatum audiendo, subinde ad decuplam distantiam à corpore sonoro recederet. Conferenda sunt igitur corpora duo æqualiter sonora, quorum alterum in vase evacuato, alterum in aere libero consistat, & quorum distantiæ ab auditore sint in dimidiata ratione densitatum aeris: & si sonus corporis prioris non superat sonum posterioris objectio cessabit.

Cognita sonorum velocitate, innotescunt etiam intervalla pulsuum. Scribit *Mersennus* (Lib. I. Harmonicorum Prop. IV.) se (factis experimentis quibusdam quæ ibidem describit) invenisse quod nervus tensus vicibus 104 recurrit spatio minuti unius secundi, quando facit Unisonum cum organica Fistula quadrupedali aperta vel bipedali obturata, quam vocant Organarii *C fa ut*. Sunt igitur pulsus 104 in spatio pedum 968, quos sonus tempore minuti secundi describit: adeoque pulsus unus occupat spatium pedum 9¼ circiter; id est duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde verisimile est quòd latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porrò cur Soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutiùs audiuntur ubi longissimè distamus à corporibus sonoris, quàm cum proximè absumus, patet ex Corollario Propositionis XLVIII. Libri hujus. Sed & cur soni in Tubis Stenterophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus à causa generante augeri solet. Motus autem in Tubis dilatationem sonorum impedientibus tardiùs amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECT. IX.

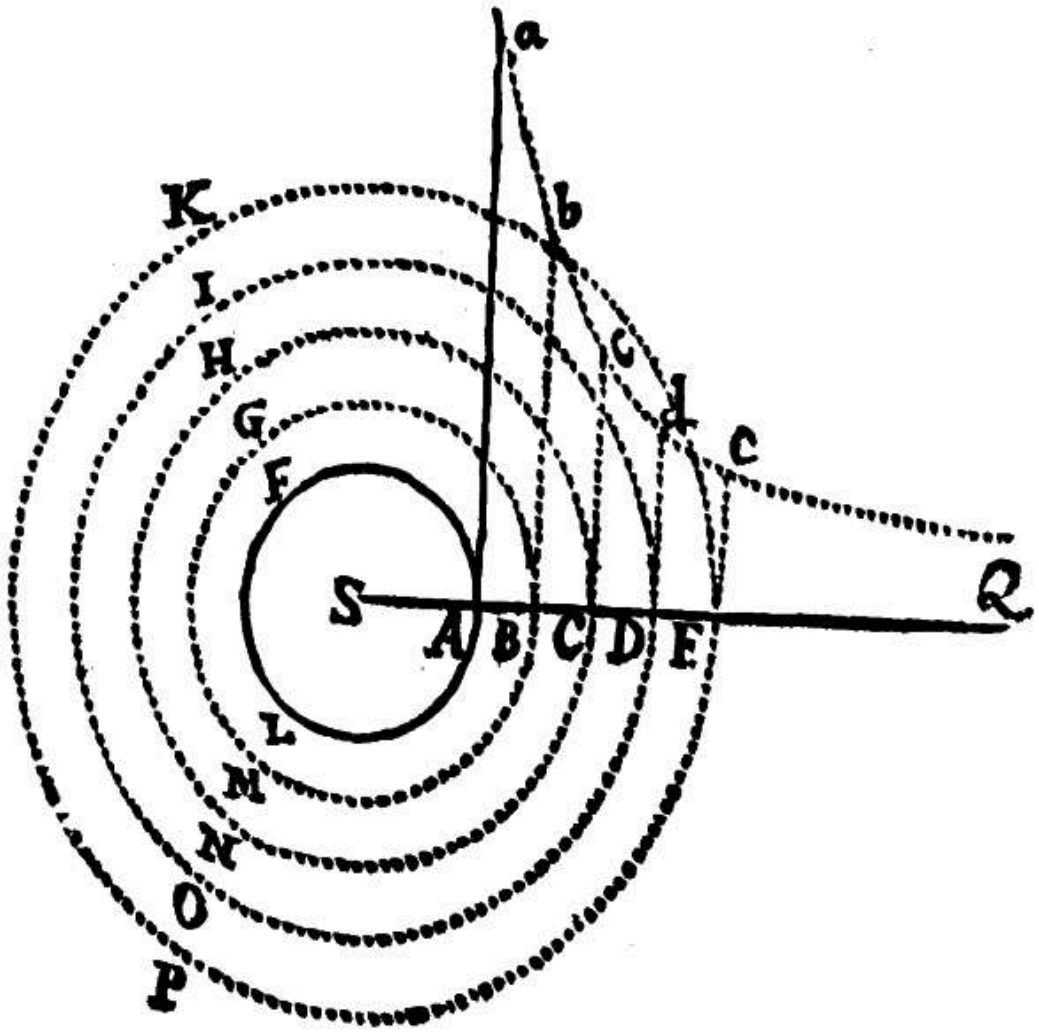
De motu Circulari Fluidorum.

Hypothesis.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes Fluidi separantur ab invicem.

Prop. LI. Theor. XXXVIII.

Si Cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in Orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.



Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuò factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor, ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impressio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit prout in eandem regionem cum ipsius motu, vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cùm impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inversè ut superficies, hoc est

inversè ut superficierum distantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est (conjunctis rationibus) ut quadrata distantiarum inversè. Quare si ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt summæ distantiarum, hoc est motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id est, si ad constituendum Medium uniformiter fluidum orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ Hyperbolicæ his summis Analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. & tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis *D* reciprocè ut area *DdQ*, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directè ut distantia *SD*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe Cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineantur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo: erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi Systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter, communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quàm fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare, & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecùs impressa motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aqua profunda stagnante experiri licet.

Prop. LII. Theor. XXXIX.

Si Sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro Sphæræ. Fig. Prop. LI.

Cas. 1. Sit *AFL* sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuò factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impressio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, hoc est inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est (conjunctis rationibus) ut cubi distantiarum inversè. Quare si ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summæ distantiarum, hoc est,

motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis *DIO* reciprocè ut area *DdQ*, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directè ut quadratum distantiæ *SD*. Id quod volui primò demonstrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuò superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet à globo in infinitum rectà pergens movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus est, neque adeò motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui à centro æqualiter distant, vel citiùs revolverentur vel tardiùs juxta polos quàm juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum à centro globi. Quod volui secundo demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut priùs. His sectionibus annuli omnes quamminimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam quàm ad

polos; debebit causa aliqua adesse qua particulæ singulæ in circulis suis retineantur, ne materia quæ ad Eclipticam est recedat semper à centro & per exteriora Vorticis migret ad polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro globi, & velocitates absolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quàm tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actione perpetuò communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui planè invariatam; patet quod motus perpetuò transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eò quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum à quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat quam imprimit in materiam vorticis. Absque tali principio necesse est ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primò revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latiùs serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuò ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti.

Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli, eadem ratione qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeò ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuò paulatim excurrent; globiq; per actiones vorticum in se mutuò, perpetuò movebuntur de locis suis; uti in Lemmate superiore expositum est; neq; certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto assignatam paulatim requiescet & in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si Fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintq; eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quàm sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum à centro vorticis. Alia nulla Vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum inclusum & globus servent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone tempus revolutionis hujus esse ad summam hujus temporis & temporis revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus erunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem, data cum velocitate quacunq; moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si Systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neq; prius desinent fluidum & vas accelerari, quàm sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad statum motus in Corollariis 8. 9 & 10 definiti, nec in alio unquam statu quocunq; perseverabit. Deinde verò si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur Systema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neq; motus suos in se mutuò per fluidum propagare prius cessabunt, quàm eorum tempora periodica æquantur inter se, & Systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus suppono fluidum ex materia quoad densitatem & fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes & æquales, ad æquales semper à se distantias, ubivis in fluido constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac pressione fit attritus partium fortior & separatio ab invicem difficilior; & per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minùs fluida est magis cohærebit & segnior erit, adeoq; motum tardiùs recipiet & longiùs propagabit quàm pro ratione superiùs assignata. Si figura vasis non sit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt

ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quamproximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores; neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo à spatiis angustioribus in latiora recedent paulò longiùs à centro, sed isto recessu tardescent; & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, & sic per vices tardescent & accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio Vorticum innotescit per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem siqua ratione Phænomena cœlestia per Vortices explicari possint. Nam Phænomenon est quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica sunt in ratione sesquialtera distantiarum à centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utrisque quam accuratissimè, quatenus observationes Astronomicæ hactenus prodidêre. Ideoq; si Planetæ illi à Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum à centro motus: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquialteram reduci, nisi vel materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat à centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quàm ea est in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ (nisi graves sint in centrum) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi Demonstrationum gratia Hypothesin talem initio Sectionis hujus proposuerim ut Resistentia velocitati proportionalis esset, tamen Resistentia in minori sit ratione quàm ea velocitatis est. Quo concesso tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quàm duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celeriùs moveantur prope centrum, dein tardiùs usque ad certum limitem, tum denuò celeriùs juxta circumferentiam; certè nec ratio sesquialtera neque alia quævis certa ac determinata obtinere

potest. Viderint itaq; Philosophi quo pacto Phænomenon illud rationis sesquialteræ per Vortices explicari possit.

Prop. LIII. Theor. XL.

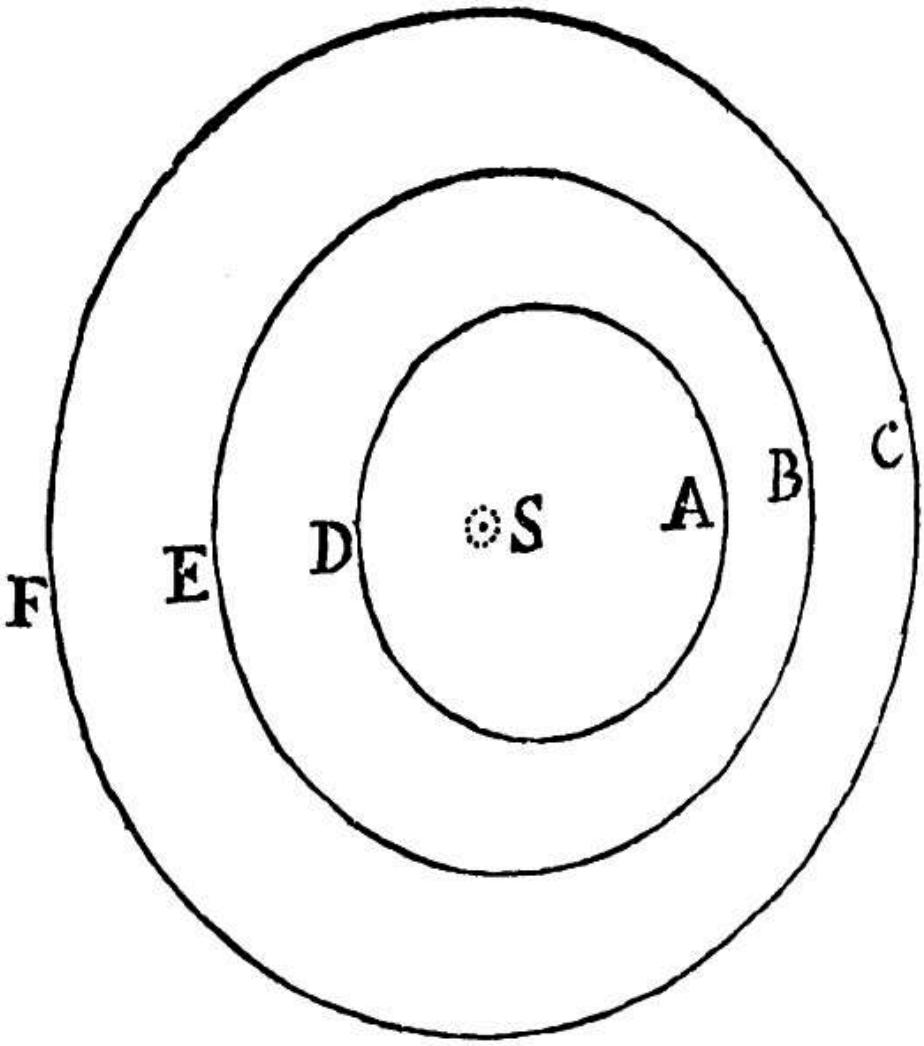
Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt ejusdem sunt densitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipsius partibus (quoad velocitatem & cursus determinationem) moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neq; quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contra, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium à centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in Fluidum resolutum fit pars Vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materia proximè ambiente relative quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quàm priùs; adeoq; Vorticis vim illam, qua priùs in Orbita sua tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet à centro & revolvendo describet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi à centro Vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo solidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem semper redit, relativè quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro Vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.



Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ secundum Hypothesin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipsibus umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa Solem *S* descriptos, quorum extimus *CF* circulus sit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia sint *A*, *B*, & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardiùs movebitur in Aphelio *B* & velociùs in Perihelio *C*, secundum leges Astronomicas; cum tamen secundum leges Mechanicas materia Vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C* velociùs moveri debeat quàm in spatio latiore inter *D* & *F*; id est, in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo

repugnant inter se. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbes Martis & Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio Signi Piscium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piscium debet esse velocior quàm in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo angustius est spatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra in hac Materia cœlesti relativè quiescens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, & in principio Piscium minor quàm minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teste) apparens iste Solis motus major sit in principio Piscium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piscium. Itaq; Hypothesis Vorticum cum Phænomenis Astronomicis omninò pugnat, & non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo verò motus isti in spatiis liberis absque Vorticibus peraguntur intelligi potest ex Libro primo, & in Mundi Systemate pleniùs docebitur.

DE MUNDI SYSTEMATE

LIBER TERTIUS

In Libris præcedentibus principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philosophica sed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philosophiam maximè spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi Scholiis quibusdam Philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maximè fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem Systematis Mundani. De hoc argumento composueram Librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus Principia posita satis intellecta non fuerint, ij vim consequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent quibus à multis retro annis insueverunt: & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in Propositiones, more Mathematico, ut ab iis solis legantur qui principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematicè doctis moram nimiam injicere possint, author esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit siquis Definitiones, Leges motuum & sectiones tres priores Libri primi sedulò legat, dein transeat ad hunc Librum de Mundi Systemate, & reliquas Librorum priorum Propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

HYPOTHESES.

Hypoth. I. *Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & vera sint & earum Phænomenis explicandis sufficiunt.*

Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

Hypoth. II. *Ideoque effectuum naturalium ejusdem generis eædem sunt causæ.*

Uti respirationis in Homine & in Bestia; descensus lapidum in *Europa* & in *America*; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in Terra & in Planetis.

Hypoth. III. *Corpus omne in alterius cujuscunque generis corpus transformari posse, & qualitatum gradus omnes intermedios sucessivè induere.*

Hypoth. IV. *Centrum Systematis Mundani quiescere.*

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram alii Solem in centro quiescere contendat.

Hypoth. V. *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquialtera distantiarum ab ipsius centro.*

Constat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica esse in sesquialtera semidiametrorum orbium consentiunt Astronomici: & *Flamstedius*, qui omnia Micrometro & per Eclipses Satellitum accuratius definivit, literis ad me datis, quinetiam numeris suis mecum communicatis, significavit rationem illam sesquialteram tam accuratè obtinere, quàm sit possibile sensu deprehendere. Id quòd ex Tabula sequente manifestum est.

Satellitum tempora periodica.

1d. 18h. $28'/_{5}$. 3d. 13h. $17'/_{10}$. 7d. 3h. $59'/_{5}$. 16d. 18h. $5'/_{5}$.

Distantiæ Satellitum à centro Jovis.

Ex Observationibus

1.

2

3
4

Cassini
5.
8.
13.

23.

Semidiam.
Jovis.

Borelli
5⅔.
8⅔.

14.

24⅔.

Tounlei *per Micromet.*
5,51.
8,78.
13,47.
24,72.

Flamstedii *per Microm.*
5,31.
8,85.
13,98.
24,23.

Flamst. *per Eclips. Satel.*
5,578.
8,876.
14,159.
24,903.

Ex temporibus periodicis.
5,578.
8,878.
14,168.
24,968.

Hypoth. VI. *Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.*

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem siti sunt, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem; per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur.

Hypoth. VII. *Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica esse in ratione sesquialtera mediocrium distantiarum à Sole.*

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eædemq; orbium dimensiones, sive Planetæ circa Terram, sive iidem circa Solem revolvantur. Ac de mensura quidem temporum periodicorum convenit inter Astronomos universos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentissimè ex Observationibus determinaverunt: & distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibiliter à distantiis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula sequente videre licet.

Planetarum ac Telluris Distantiæ mediocres à Sole.

Secundum *Keplerum*
951000.
519650.
152350.
100000.
72400.

38806.

Secundum *Bullialdum*
954198.
522520.
152350.
100000.
72398.

38585.

Secundum tempora periodica
953806.
520116.
152399.
100000.
72333.

De distantiis Mercurii & Veneris à Sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De distantiis etiam superiorum Planetarum à Sole tollitur omnis disputatio per Eclipses Satellitum Jovis. Etenim per Eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter se collatis determinatur distantia Jovis.

Hypoth. VIII. *Planetas primarios radiis ad Terram ductis areas describere temporibus minimè proportionales; at radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales percurrere.*

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est Astronomis notissima, & in Jove apprimè demonstratur per Eclipses Satellitum, quibus Eclipsibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & distantias à Sole determinari diximus.

Hypoth. IX. *Lunam radio ad centrum terræ ducto aream tempori proportionalem describere.*

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, sed errorum insensibiles minutias Physicis in hisce Hypothesibus negligo.

Prop. I. Theor. I.

Vires, quibus Planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, & esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior Propositionis per Hypoth. V. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars posterior per Hypoth. V. & Corol. 6. Prop. IV. ejusdem Libri.

Prop. II. Theor. II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus suis retinentur, respicere Solem, & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior Propositionis per Hypoth. VIII. & Prop. II. Lib. I. & pars posterior per Hypoth. VII. & Prop. IV. ejusdem Libri. Accuratissimè autem demonstratur hæc pars Propositionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apsidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

Prop. III. Theor. III.

Vim qua Luna retinetur in Orbe suo respicere terram, & esse reciprocò ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior, per Hypoth. IX. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars posterior per motum tardissimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim, per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I. quod si distantia Lunæ à centro Terræ dicatur *D*, vis à qua motus talis oriatur, sit reciproce ut $D^{/}_{243}$, id est reciprocè ut ea ipsius *D* dignitas, cujus index est $2/_{243}$, hoc est in ratione distantiæ paulo majore quam duplicata inverse, sed quæ vicibus 60¾ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Tantillus autem accessus meritò contemnendus est. Oritur verò ab actione Solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. Restat igitur ut vis illa, quæ ad Terram spectat, sit reciprocè ut *D*; id quod etiam plenius constabit, conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propositione sequente.

Prop. IV. Theor. IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi semper à motu rectilineo, & in orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris à centro Terræ est semidiametrorum terrestrium, secundum plerosque Astronomorum 59, secundum *Vendelinum* 60, secundum *Copernicum* 60⅓, secundum *Kircherum* 62½, & secundum *Tychonem* 56½. Ast *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam

Lucis) majores quam fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, auxerunt Parallaxin Lunæ scrupulis totidem, hoc est quasi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & distantia evadet quasi 61 semidiametrorum terrestrium, fere ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum; & Lunarem periodum respectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Astronomis statuitur; atque ambitum Terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti à Gallis mensurantibus nuper definitum est: & si Luna motu omni privari fingatur, ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe suo retinetur, descendat in terram; hæc spatio minuti primi cadendo describet pedes Parisienses $15/_{12}$. Colligitur hoc ex calculo, vel per Propositionem xxxvi Libri primi, vel (quod eodem recedit) per Scholium Propositionis quartæ ejusdem Libri, confecto. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicata distantiæ ratione inversâ, adeoque ad superficiem Terræ major sit vicibus 60 × 60 quam ad Lunam, corpus vi illa in regionibus nostris cadendo describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses 60 × 60 × $15/_{12}$, & spatio minuti unius secundi pedes $15/_{12}$. Atqui corpora in regionibus nostris vi gravitatis cadendo describunt tempore minuti unius secundi pedes Parisienses $15/_{12}$, uti *Hugenius*, factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonstravit: & propterea vis qua Luna in orbe suo retinetur, illa ipsa est quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab ea diversa est, corpora viribus utrisque conjunctis Terram petendo duplo velocius descendent, & spatio minuti unius secundi cadendo describent pedes Parisienses $30/_{6}$: omnino contra experientiam.

Calculus hic fundatur in Hypothesi quod Terra quiescit. Nam si Terra & Luna circa Solem moveantur, & interea quoque circa commune gravitatis centrum revolvantur: distantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit 60½ semidiametrorum terrestrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

Prop. V. Theor. V.

Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, & circumsolares in Solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis

retineri.

Nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & Mercurii ac Veneris reliquorumque circumsolarium circa Solem sunt Phænomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Hypoth. II. à causis ejusdem generis dependent: præsertim cùm demonstratum sit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis ac Solis, & recedendo à Jove & Sole decrescant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decrescit in recessu à Terra.

Corol. 1. Igitur gravitas datur in Planetas universos. Nam Venerem, Mercurium cæterosque esse corpora ejusdem generis cum Jove nemo dubitat. Certe Planeta Hugenianus, eodem argumento quo Satellites Jovis gravitant in Jovem, gravis est in Saturnum. Et cum attractio omnis (per motus legem tertiam) mutua sit, Saturnus vicissim gravitabit in Planetam Hugenianum. Eodem argumento Jupiter in Satellites suos omnes, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque respicit, ese reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Prop. VI. Theor. VI.

Corpora omnia in Planetas singulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus distantiis à centro Planetæ, proportionalia esse quantitati materiæ in singulis.

Descensus gravium omnium in Terram (dempta saltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua resistentia oritur) æqualibus temporibus fieri jamdudum observarunt alii; & accuratissimè quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arena, sale communi, ligno, aqua, tritico. Comparabam pixides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus suspendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oscillationis. Pixides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes constituebant Pendula, quoad pondus, figuram & aeris resistentia omnino paria: Et paribus oscillationibus juxta positæ ibant unà & redibant diutissime. Proinde copia materiæ in auro (per Corol. 1. & 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejusdem actionem in totum lignum; hoc est ut pondus ad pondus.

Et sit in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quàm pars millesima materiæ totius, his experimentis manifestò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in Planetas eandem esse atque in Terram non est dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terrestria ad usque Orbem Lunæ, & una cum Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram simul cadant; & per jam ante ostensa certum est quod temporibus æqualibus describent æqualia Spatia cum Luna, adeoque quod sunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera sua ad ipsius pondus. Porrò quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquialtera distantiarum a centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciprocè ut quadrata distantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus à Jove distantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo describerent æqualia Spatia, perinde ut fit in gravibus, in hac Terra nostra. Et eodem argumento Planetæ circumsolares ab æqualibus à Sole distantiis dimissi, descensu suo in Solem æqualibus temporibus æqualia spatia describerent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, sunt ut corpora; hoc est pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porrò Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia esse quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam si horum aliqui magis traherentur in Solem pro quantitate materiæ suæ quàm cæteri, motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole distantiis) Satelles aliquis gravior esset in Solem pro quantitate materiæ suæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ suæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: distantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis major semper foret quam distantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione dimidiata quam proximè; uti calculis quibusdam initis inveni. Et si Satelles minus gravis esset in Solem in ratione illa *d* ad *e*, distantia centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quàm distantia centri Jovis à Sole in ratione illa dimidiata. Igitur si in æqualibus à Sole distantiis, gravitas acceleratrix Satellitis cujusvis in Solem major esset vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum millesima gravitatis totius; foret distantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quàm distantia Jovis à Sole parte $/_{2600}$ distantiæ

totius, id est parte quinta distantiæ Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis excentricitas foret valde sensibilis. Sed Orbes Satellitum sunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitis ejus in Solem, in æqualibus à Sole distantiis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla sunt, vel earum massis accuratè proportionalia.

Quinetiam pondera partium singularum Planetæ cujusque in alium quemcunque sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quàm pro quantitate materiæ, Planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minus quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si verbi gratia corpora Terrestria, quæ apud nos sunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera essent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iisdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam supra ostensum est.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari possent, forent majora vel minora pro varietate formarum in æquali materia; omninò contra experientiam.

Corol. 2. Igitur corpora universa quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Nam si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino destitueretur vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret, quoniam id non differt ab aliis corporibus nisi in forma materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, (per Hypoth. III.) & vicissim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Itaque Vacuum necessariò datur. Nam si spatia omnia plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; & propterea nec aurum neque

aliud quodcunque corpus in aere descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specificè graviora sint, minimè descendunt.

Corol. 4. Gravitatem diversi generis esse à vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Estque vis magnetica longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis: sed & in eodem corpore intendi potest & remitti; in recessu verò à magnete decrescit in ratione distantiæ plusquam duplicata, per Prop. LXXXV. Lib. I.; propterea quod vis longe fortior sit in contactu, quam cum attrahentia vel minimum separantur ab invicem.

Prop. VII. Theor. VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde consequens est, (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porrò cum Planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis sit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuò, cùm tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: Respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in Terram

totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor est quam quæ sentiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

Prop. VIII. Theor. VIII.

Si Globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiæ inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciprocè proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi tota ex viribus pluribus composita, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio illa in majoribus distantiis satis obtineret, at prope superficiem Planetæ, ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, per Prop. LXXV. Libri primi & ipsius Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium sunt (per Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad superficies Planetarum aliasve quasvis à centro distantias majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicata ratione distantiarum inversa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circa Solem dierum 224⅔, Satellitis extimi circumjovialis circa Jovem dierum 16¾, Satellitis Hugeniani circa Saturnum dierum 15 & horarum 22⅔, & Lunæ circa Terram 27 *dier.* 7 *hor.* 43 *min.* collatis cum distantia mediocri Veneris à Sole; cum Elongatione maxima Heliocentrica Satellitis extimi circumjovialis, quæ (in mediocri Jovis à Sole distantia juxta observationes *Flamstedii*) est 8′. 13″; cum elongatione maximæ Heliocentrica Satellitis Saturnii 3′. 20″; & cum distantia Lunæ à Terra, ex Hypothesi quod Solis parallaxis horizontalis seu semidiameter Terræ è Sole visæ sit quasi 20″; calculum ineundo inveni quod corporum æqualium & à Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter

distantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $/_{1100}$, $/_{2360}$ & $/_{28700}$ respectivè. Est autem Solis semidiameter mediocris apparens quasi 16′. 6″. Illam Jovis è Sole visam *Flamstedius*, ex umbræ Jovialis diametro per Eclipses Satellitum inventa, determinavit esse ad elongationem Satellitis extimi ut 1 ad 24,9 adeoque cum elongatio illa sit 8′. 13″ semidiameter Jovis è Sole visi erit 19″¾. Diameter Saturni est ad diametrum Annuli ejus ut 4 ad 9, & diameter annuli è Sole visi (mensurante *Flamstedio*) 50″, adeoque semidiameter Saturnie è Sole visi 11″. Malim dicere 10″ vel 9″, propterea quod globus Saturni per lucis inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur. Hinc inito calculo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1063, 889, & 208. Unde cum pondera æqualium corporum à centris Solis, Jovis, Saturni ac Telluris æqualiter distantium sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, $/_{1100}$, $/_{2360}$, $/_{28700}$ respective, & auctis vel diminutis distantiis diminuuntur vel augentur pondera in duplicata ratione; erunt pondera eorundem æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum & Terram, in distantiis 10000, 1063, 889 & 208 ab eorum centris, atque adeo in eorum superficiebus versantium, ut 10000, 804½, 536 & 805½ respectivè. Pondera corporum in superficie Lunæ ferè duplo minora esse quam pondera corporum in superficie Terræ dicemus in sequentibus.

Corol. 2. Igitur pondera corporum æqualium, in superficiebus Terræ & Planetarum, sunt fere in ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole visarum. De Terræ quidem diametro è Sole visa nondum constat. Hanc assumpsi 40″, propterea quod observationes *Kepleri*, *Riccioli* & *Vendelini* non multo majorem esse permittunt; eam *Horroxii* & *Flamstedii* observationes paulo minorem adstruere videntur. Et malui in excessu peccare. Quòd si fortè diameter illa & gravitas in superficie Terræ mediocris sit inter diametros Planetarum & gravitatem in eorum superficiebus: quoniam Saturni, Jovis, Martis, Veneris & Mercurii è Sole visorum diametri sunt 18″, 39″½, 8″, 28″, 20″ circiter, erit diameter Terræ quasi 24″, adeoque Parallaxis Solis quasi 12″, ut *Horroxius* & *Flamstedius* propemodum statuere. Sed diameter paulo major melius congruit cum Regula hujus Corollarii.

Corol. 3. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates illæ sunt ut Planetarum Vires in distantiis à se æqualibus; id est

in Sole, Jove, Saturno ac Terra ut 1, $/_{1100}$, $/_{2360}$, $/_{28700}$ respectivè. Si Parallaxis Solis statuatur minor quam 20″, debebit quantitas materiæ in Terra diminui in triplicata ratione.

Corol. 4. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam corporum æqualium & homogeneorum pondera in Sphæras homogeneas in superficiebus Sphærarum, sunt ut Sphærarum diametri per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera applicata ad diametros. Erant autem veræ Solis, Saturni, Jovis ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 889, 1063 & 208, & pondera in eosdem ut 10000, 536, 804½ & 805½, & propterea densitates sunt ut 100, 60, 76, 387. Densitas autem Terræ, quæ hic colligitur, non pendet à Parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hic recte definitur. Est igitur Sol paulo densior quàm Jupiter, & Terra multo densior quàm Sol.

Corol. 5. Planetarum autem densitates inter se fere sunt in ratione composita ex ratione distantiarum à Sole & ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole visarum. Nempe Saturni, Jovis, Terræ & Lunæ densitates 60, 76, 387 & 700, fere sunt ut distantiarum reciproca $/_{9538}$, $/_{5201}$, $/_{1000}$ & $/_{1000}$, ducta in radices diametrorum apparentium 18″, 39″½, 40″, & 11″. Diximus utique, in Corollario secundo, gravitatem ad superficies Planetarum esse quam proximè in ratione dimidiata apparentium diametrorum è Sole visarum; & in Lemmate quarto densitates esse ut gravitates illæ applicatæ ad diametros veras: ideoque densitates fere sunt ut radices diametrorum apparentium applicatæ ad diametros veras, hoc est reciproce ut distantiæ Planetarum à Sole ductæ in radices diametrorum apparentium. Collocavit igitur Deus Planetas in diversas distantiis à Sole, ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore fruatur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturne, rigesceret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quàm apud nos; & Thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium verò non est quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hac nostra; cum materia omnis densior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

Prop. IX. Theor. IX.

Gravitatem pergendo à superficiebus Planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum à centro quam proximè.

Si materia Planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

Prop. X. Theor. X.

Motus Planetarum in Cœlis diutissimè conservari posse.

In Scholio Propositionis XL. Lib. II. ostensum est quod globus Aquæ congelatæ in Aere nostro, liberè movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentia Aeris amitteret motus sui partem $/_{3200}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè (per Prop. XL. Lib. II.) in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò Globum Terræ nostræ densiorem esse quam si totus ex Aqua constaret, sic colligo. Si Globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quàm aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent. Eaque de causa Globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione opposita. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento maculæ Solares leviores sunt quàm materia lucida Solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore massa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius in Terra quasi quintuplo vel sextuplo major sit quàm si tota ex aqua constaret; præsertim cum Terram quasi quintuplo densiorem esse quàm Jovem jam ante ostensum sit. Igitur si Jupiter paulo densior sit quàm aqua, hic spatio dierum viginti & unius, quibus longitudinem 320 semidiametrorum suarum describit, amitteret in Medio ejusdem densitatis cum Aere nostro motus sui partem fere decimam. Verum cum resistentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quæ vicibus 13⅔ levior est quàm argentum vivum, minus resistat in eadem ratione; & aer, qui vicibus 800

levior est quàm aqua, minus resistat in eadem ratione: si ascendatur in cœlos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia prope cessabit.

Prop. XI. Theor. XI.

Commune centrum gravitas Terræ Solis & Planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypothesin quartam.

Prop. XII. Theor. XII.

Solem motu perpetuo agitari sed nunquam longe recedere à communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum, per Corol. 3. Prop. VIII. materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1100 ad 1, & distantia Jovis à Sole sit ad semidiametrum Solis in eadem ratione circiter; commune centrum gravitatis Jovis & Solis incidet fere in superficiem Solis. Eodem argumento cùm materia in Sole sit ad materiam in Saturno ut 2360 ad 1, & distantia Saturni à Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo minori: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra superficiem Solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo si Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro à centro Solis distaret. Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quiescit, Sol pro vario Planetarum situ in omnes partes movebitur, sed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum est. Nam cùm Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in se mutuò, & propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motûs perpetuò agitentur: perspicuum est quod horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum esset in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cum autem Sol

moveatur, eligendum erit punctum quiescens, à quo centrum Solis quam minimè discedit, & à quo idem adhuc minus discederet, si modò Sol densior esset & major, ut minus moveretur.

Prop. XIII. Theor. XIII.

Planetæ moventur in Ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes à priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro Solis; si Sol quiesceret & Planetæ reliqui non agerent in se mutuò, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areæ describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. 1. Prop. XIII. Lib. I.) Actiones autem Planetarum in se mutùo perexiguæ sunt (ut possint contemni) & motus Planetarum in Ellipsibus circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quàm si motus isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantiis) ut 1 ad 1100; adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni à Jove est ad distantiam Saturni à Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16 × 1100 seu 1 ad 217 circiter. Error tamen omnis in motu Saturni circa Solem, à tanta in Jovem gravitate oriundus, evitari fere potest constituendo umbilicum Orbis Saturni in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus est vix superat minutos duos primos. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 & {16 × 81 × 2360} ÷ 25 seu 122342, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 122342 seu 1 ad 1867. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio

orbis Jovialis longe minor est quàm ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores.

Prop. XIV. Theor. XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. & quiescentibus planis quiescunt Nodi. Attamen à Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione Systematis nostri.

Prop. XV. Theor. XV.

Invenire Orbium transversas diametros.

Capiendæ sunt hæ in ratione sesquialtera temporum periodicorum per Prop. XV. Lib. I. deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum Solis & Planetæ cujusque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter summam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. I.

Prop. XVI. Prob. I.

Invenire Orbium Excentricitates & Aphelia.

Problema confit per Prop. XVIII. Lib. I.

Prop. XVII. Theor. XVI.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I, & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam verò Lunæ, circa axem suum uniformiter revolventis, dies menstruus est; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipsius semper respiciet, & propterea pro situ umbilici illius deviabit hinc inde à Terra. Hæc est libratio

in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta est ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porrò hæc ita se habere, ex Phænomenis manifestum est.

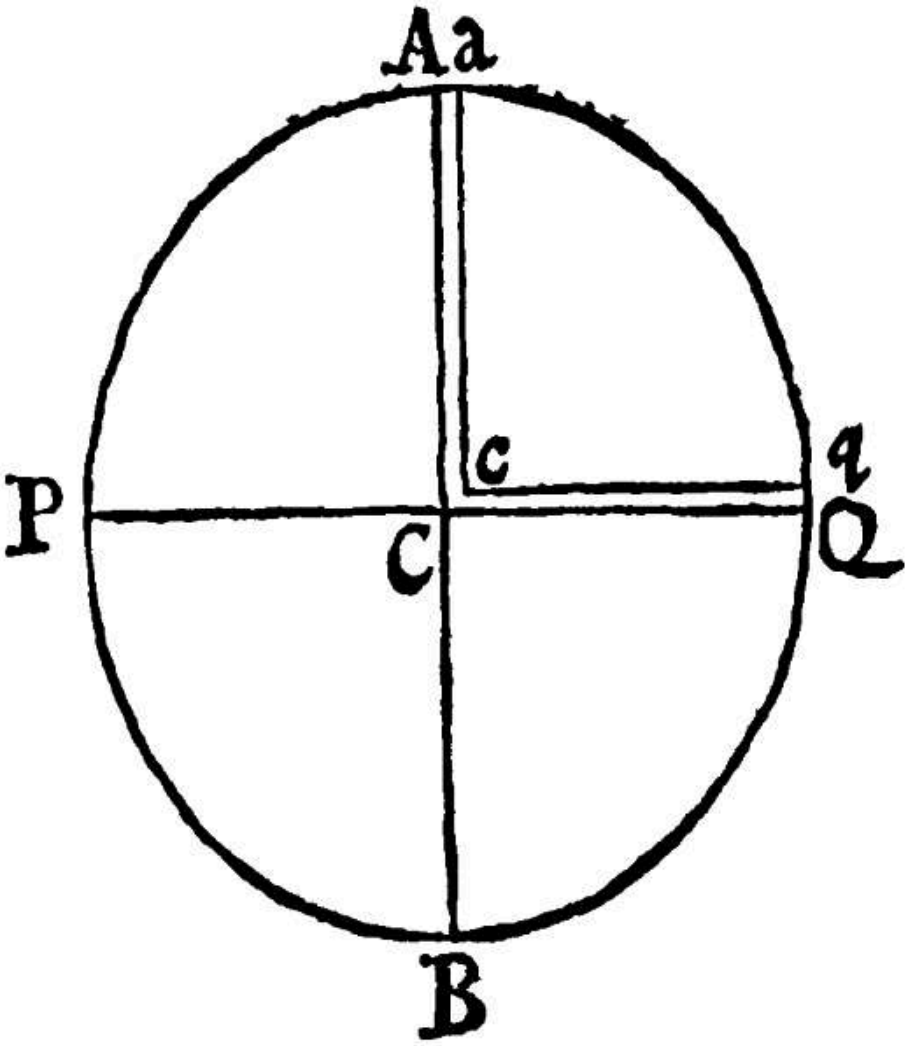
Prop. XVIII. Theor. XVII.

Axes Planetarum dimetris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia si fluida sit ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus observationibus *Cassini* & *Flamstedii*) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi Terra nostra paulò altior esset sub æquatore quàm ad polos, Maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

Prop. XIX. Prob. II.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.



Ad hujus Problematis solutionem requiritur computatio multiplex, quæ facilius exemplis quàm præceptis addiscitur. Inito igitur calculo invenio, per Prop. IV. Lib. I. quod vis centrifuga partium Terræ sub æquatore, ex motu diurno oriunda, sit ad vim gravitatis ut 1 ad $290/_5$. Unde si *APBQ* figuram Terræ designet revolutione Ellipseos circa axem minorem *PQ* genitam; sitque *ACQqca* canalis aquæ plena, à polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad æquatorem *Aa* pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca* esse ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 291 ad 290, eò quòd vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 291 sustinebit & detrahet, & pondus 290 in altero crure sustinebit partes reliquas. Porrò (ex Propositionis XCI. Corollario secundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis *PQ* ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in

loco *Q* in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco *Q* sphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* descriptam, ut $126/_{15}$ ad $125/_{15}$. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in Sphæroidem, convolutione Ellipseos *APBQ* circa axem *AB* descriptam, est ad gravitatem in eodem loco *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, ut $125/_{15}$ ad $126/_{15}$. Est autem gravitas in loco *A* in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram, propterea quod Sphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AP*, *PQ* perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in *A*, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proximè. Est igitur gravitas in *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, ad gravitatem in *A* in Terram ut 126 ad 125½, & gravitas in loco *Q* in Sphæram centro *C* radio *QC* descriptam, est ad gravitatem in loco *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est ut 100 ad 101: Conjungantur jam hæ tres rationes, $126/_{15}$ ad $125/_{15}$, 125½ ad 126 & 100 ad 101 & fiet gravitas in loco *Q* in Terram ad gravitatem in loco *A* in Terram, ut 126 × 126 × 100 ad 125 × 125½ × 101, seu ut 501 ad 500.

Jam cum per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I. gravitas in canalis crure utrovis *ACca* vel *QCcq* sit ut distantia locorum à centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure *ACca* ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id est ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eò ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 290. Hoc est, vis centripeta quæ deberet esse ponderis pars $/_{505}$ est tantum pars $/_{290}$, & propterea dico, secundum Regulam auream, quod si vis centrifuga $/_{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* superet altitudin aquæ in crure *QCcq* parte centesima totius altitudinis: vis centrifuga $/_{290}$ faciet ut excessus altitudinis in crure *ACca* sit altitudinis in crure altero *QCcq* pars

tantum $/_{689}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 692 ad 689. Ideoque cùm Terræ semidiameter mediocris, juxta nuperam Gallorum mensuram, sit pedum Parisiensium 19615800 seu milliarium 3923 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000;) Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos, excessu pedum 85200 seu milliarium 17.

Si Planeta vel major sit vel densior, minorve aut rarior quàm Terra, manente tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur in eadem duplicata ratione. Unde cum Terra respectu fixarum revolvatur horis 23, 56′ *Jupiter* autem horis 9, 56′, sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, differentia diametrorum *Jovis* erit ad ipsius diametrum minorem ut $\{29 \times 3\} \div \{5 \times 689\}$ ad 1, seu 1 ad $39/_5$. Est igitur diameter *Jovis* ab oriente in occidentem ducta, ad ipsius diametrum inter polos ut $40/_5$ ad $39/_5$ quam proximè. Hæc ita se habent ex Hypothesi quod uniformis sit Planetarum materia. Nam si materia densior sit ad centrum quàm ad circumferentiam, diameter, quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Prop. XX. Prob. III.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in regionibus diversis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciprocè ut crura, id est reciprocè ut 692 ad 689. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciprocè ut crura, id est reciprocè ut distantiæ corporum à centro Terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut distantiæ eorum à centro. Et eodem argumento

pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciprocè ut distantiæ locorum à centro; & propterea, ex Hypothesi quod Terra Sphærois sit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis, pergendo ab Æquatore ad Polos, sit quam proximè ut Sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde est ut quadratum Sinus recti Latitudinis. Exempli gratia, Latitudo *Lutetiæ Parisiorum* est 48 *gr.* 45′: Ea Insulæ *Goree* prope *Cape Verde* 14 *gr.* 15′: ea *Cayennæ* ad littus *Guianæ* quasi 5 *gr.* ea locorum sub Polo 90 *gr.* Duplorum 97½ *gr.* 28½ *gr.* 10 *gr.* & 180 *gr.* Sinus versi sunt 11305, 1211, 152, & 20000. Proinde cum gravitas in Polo sit ad gravitatem sub Æquatore ut 692 ad 689, & excessus ille gravitatis sub Polo ad gravitatem sub Æquatore ut 3 ad 689; erit excessus gravitatis *Lutetiæ*, in Insula *Goree* & *Cayennæ*, ad gravitatem sub æquatore ut {3 × 11305} ÷ 20000, {3 × 1211} ÷ 20000 & {3 × 152} ÷ 20000 ad 689, seu 33915, 3633, & 456 ad 13780000, & propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 13813915, 13783633, 13780456, & 13780000. Quare cum longitudines Pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & *Lutetiæ Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & $/_{24}$ partium digiti; longitudines Pendulorum in Insulâ *Goree*, in illâ *Cayennæ* & sub Æquatore, minutis singulis secundis oscillantium superabuntur à longitudine Penduli Parisiensis excessibus $/_{1000}$, $/_{1000}$ & $/_{1000}$ partium digiti. Hæc omnia ita se habebunt, ex Hypothesi quod Terra ex uniformi materia constat. Nam si materia ad centrum paulò densior sit quàm ad superficiem, excessus illi erunt paulò majores; propterea quod, si materia ad centrum redundans, qua densitas ibi major redditur, subducatur & seorsim spectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter densam erit reciprocè ut distantia ponderis à centro; in materiam verò redundantem reciprocè ut quadratum distantiæ à materia illa quam proximè. Gravitas igitur sub æquatore minor erit in materiam illam redundantem quàm pro computo superiore, & propterea Terra ibi propter defectum gravitatis paulò altius ascendet quàm in præcedentibus definitum est. Jam verò Galli factis experimentis invenerunt quod Pendulorum minutis singulis secundis oscillantium longitudo *Parisiis* major sit quàm in Insula *Goree*, parte decima digiti, & major quàm *Cayennæ* parte octava. Paulò majores sunt hæ differentiæ quam differentiæ

$/_{1000}$ & $/_{1000}$ quæ per computationem superiorem prodiere: & propterea (si crassis hisce Observationibus satìs confidendum sit) Terra aliquanto altior erit sub æquatore quàm pro superiore calculo, & densior ad centrum quàm in fodinis prope superficiem. Si excessus gravitatis in locis hisce Borealibus supra gravitatem ad æquatorem, experimentis majori cum diligentia institutis, accuratè tandem determinetur, deinde excessus ejus ubique sumatur in ratione Sinus versi latitudinis duplicatæ; determinabitur tum Mensura Universalis, tum Æquatio temporis per æqualia pendula in locis diversis indicati, tum etiam proportio diametrorum Terræ ac densitas ejus ad centrum; ex Hypothesi quod densitas illa, pergendo ad circumferentiam, uniformiter decrescat. Quæ quidem Hypothesis, licet accurata non sit, ad ineundum tamen calculum assumi potest.

Prop. XXI. Theor. XVIII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ singulis revolutionibus nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

Prop. XXII. Theor. XIX.

Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis Principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna nostra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5 Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvam, atque adeò propius accedit ad Terram, in Syzygiis quàm in Quadraturis, nisi quatenus impedit motus Excentricitatis. Excentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis versatur, & minima ubi idem in Quadraturis consistit; & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior

in Syzygiis quàm in Quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7 & 8 Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis suis, tardius regreditur in Quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quiescunt in Syzygiis suis, & velocissimè regrediuntur in Quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in Syzygiis: & motus medius velocior in Perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipsius Aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab Astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam nondum observatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeò perturbantur, ut nulla hactenus lege ad Regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Astronomico, ad Prostaphæresin Lunæ referri solet, & cum ea confundi.

Prop. XXIII. Prob. IV.

Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi Lunarum seu Satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis est ad motum medium Nodorum Lunæ nostræ, in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iste 9 *gr.* 34′. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujusque in

consequentia est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia ut motus Apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujusque fere sunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ respectivè, ut motus Nodorum & Augis Satellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis è Jove spectati, est ad Variationem Lunæ ut sunt toti motus Nodorum temporibus periodicis Satellitis & Lunæ ad invicem, per idem Corollarium, adeoque in Satellite extimo non superat 6″. 22‴. Parvitate harum inæqualitatum & tarditate motuum fit ut motus Satellitum summè regulares reperiantur, utque Astronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut asserant tardissimè retrogradum. Nam *Flamstedius* collatis suis cum *Cassini* Observationibus Nodos tarde regredi deprehendit.

Prop. XXIV. Theor. XX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri debere.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quàm Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum Luminarium ad Meridianum loci minori quàm sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quàm supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

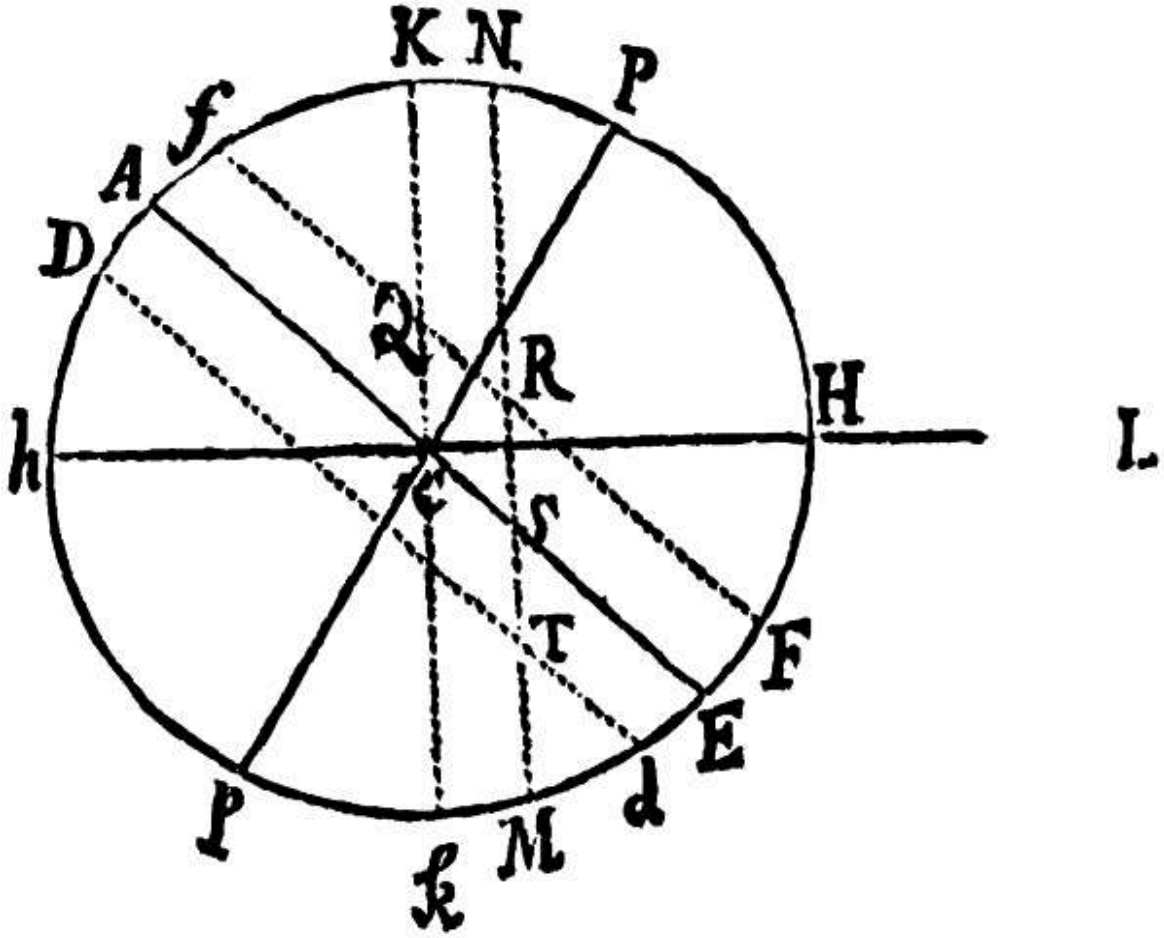
Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium Conjunctione vel Oppositione conjugentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque

ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ à Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo post Octantes Lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam Lunarem in transitu Lunæ à Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantiis à Terra. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in Syzygiis paulo majores sint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; & Luna in Perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quàm ante vel post dies quindecim, ubi in Apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in Syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius Declinatione seu distantia ab Æquatore. Nam si Luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis intensione & remissione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum versus effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in Syzygiis Solstitialibus quàm in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in Quadraturis Æquinoctialibus; eò quod Lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maxime superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in Syzygiis comitatur semper minimus in Quadraturis, ut experientiâ compertum est. Per minorem autem distantiam Solis à Terra, tempore hyberno quàm tempore æstivo, fit ut æstus

maximi & minimi sæpius præcedant Æquinoctium vernum quàm sequantur, & sæpius sequantur autumnale quàm præcedant.



Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Designet *ApEP* Tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *Pp*, polos; *AE* Æquatorem; *F* locum quemvis extra Æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei respondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem Luna tribus ante horis occupabat; *H* locum Telluris ei perpendiculariter subjectum; *h* locum huic oppositum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 distantia, *CH*, *Ch* Maris altitudines maximas mensuratas à centro Telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas; & si axibus *Hh*, *Kk* describatur Ellipsis, deinde Ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* describatur Sphærois *HPKhpk*; designabit hæc figuram Maris quam proximè, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines Maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam si in præfata Ellipseos revolutione punctum quodvis *N* describat circulum *NM*, secantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibusvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo Maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, sitis in

hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem; postea defluxus maximus in *Q* hora tertia post occasum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimò defluxus maximus in *Q* hora tertia post ortum Lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in *F*. Distinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemisphæricos, unum in Hemisphærio *KHkC* ad Boream vergentem, alterum in Hemisphærio opposito *KhkC*; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuò oppositi veniunt per vices ad Meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum Lunarium duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Australes magis Australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra æquatorem. Æstus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem, & Lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solstitiorum; præsertim si Lunæ Nodus ascendens versatur in principio Arietis. Sic experientiâ compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superent vespertinos & vespertini tempore æstivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* verò altitudine quindecim digitorum: Observantibus *Colepressio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proximè post Syzygias majores reddit, eosque proximè post Quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Plymuthum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus non sint primi à Syzygiis sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeò ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & Fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti à Syzygiis.

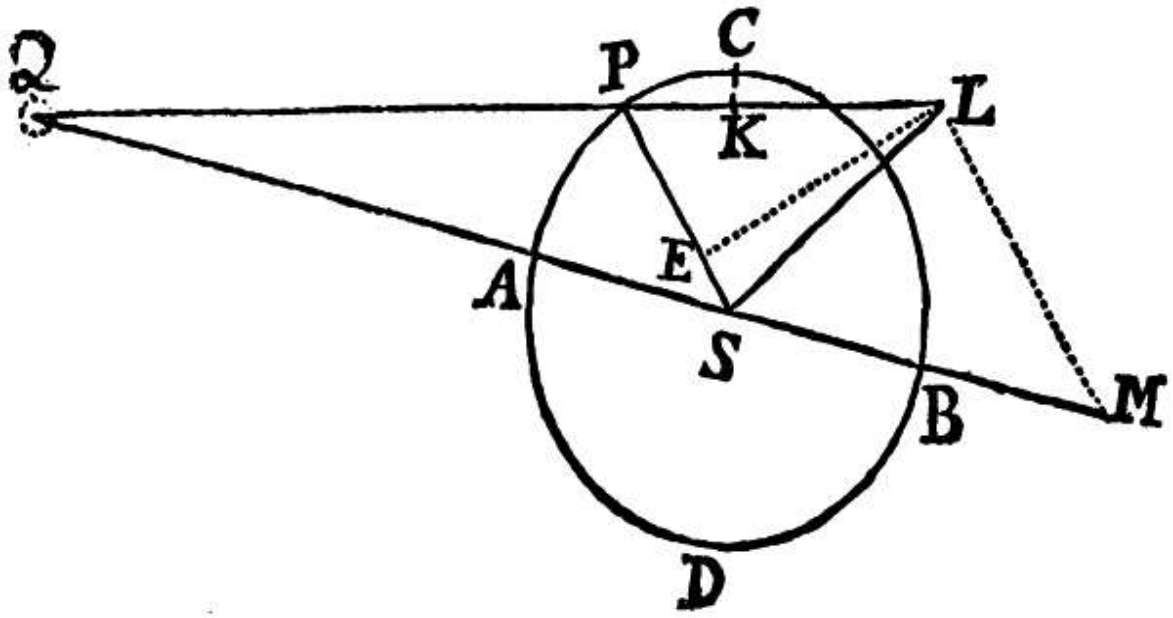
Porrò fieri potest ut æstus propagetur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quàm per alia, quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere

possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales à diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad Meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquillè stagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam; & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad Meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batsham*, sub latitudine Boreali 20 *gr.* 50 *min. Halleius* ex Nautarum Observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum Lunæ per Æquatorem sequente stagnat, dein Lunâ ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum, dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit, quibus antea creverat; & Lunâ declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinensi* inter Continentem & Insulam *Luconiam*, alter à Mari *Indico* inter Continentem & Insulam *Borneo*. An æstus spatio horarum duodecim à Mari *Indico*, & spatio horarum sex à Mari *Sinensi* per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujusmodi motus; sitne alia Marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus causas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere.

Prop. XXV. Prob. V.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

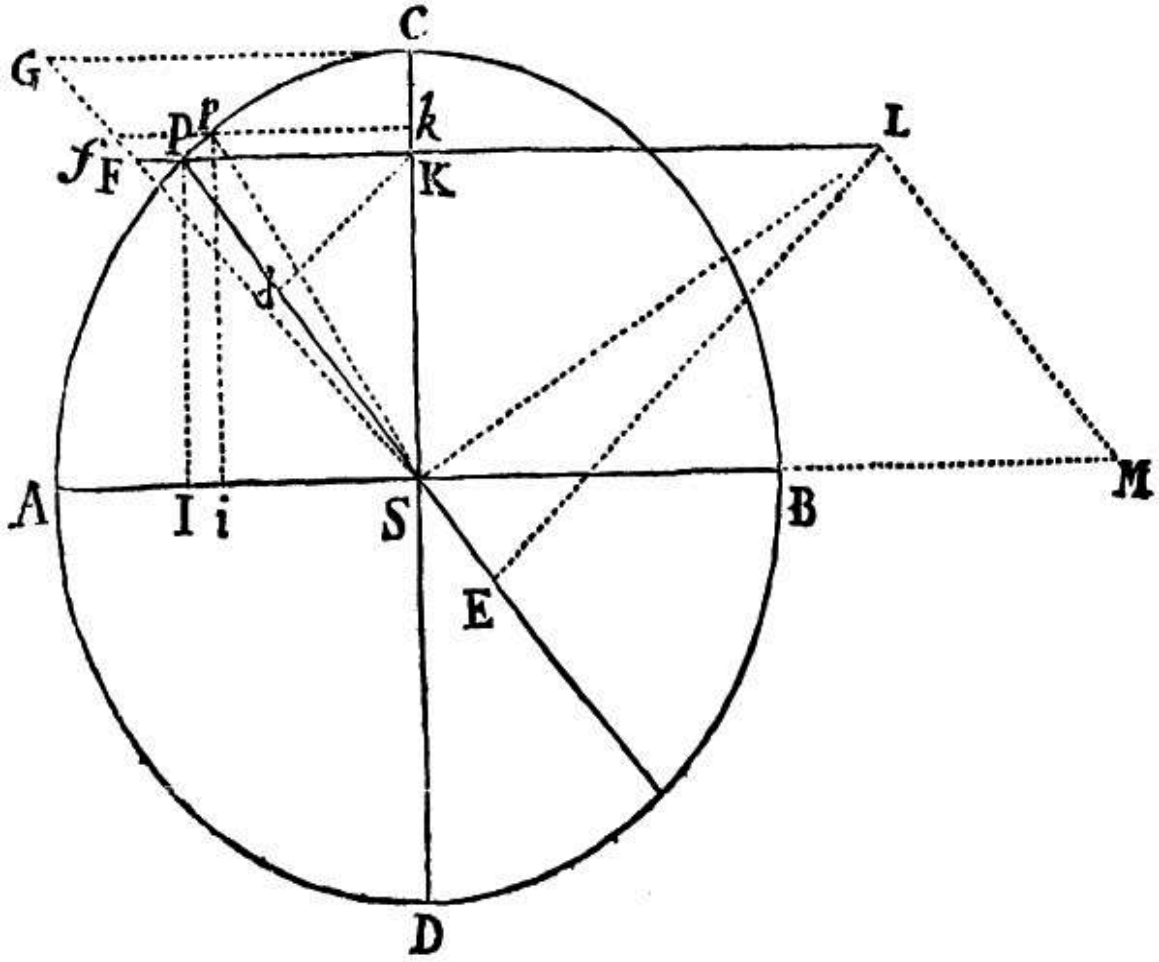


Designet *Q* Solem, *S* Terram, *P* Lunam, *PADB* orbem Lunæ. In *QP* capiatur *QK* æqualis *QS*; sitque *QL* ad *QK* in duplicata ratione *QK* ad *QP* & ipsi *PS* agatur parallela *LM*; & si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per distantiam *QS* vel *QK*, erit *QL* gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus *QM*, *LM*, quarum *LM* & ipsius *QM* pars *SM* perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expositum est. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur motus Terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas *SM* & *ML* designare. Vis *ML* (in mediocri sua quantitate) est ad vim gravitatis, qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam *PS* revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est in duplicata ratione dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. ad dies 365. *hor.* 6. *min.* 9. id est ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178/_{11}$. Vis qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem, ad distantiam *PS* semidiametrorum terrestrium 60½ revolvi posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut 60½ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60 × 60. Ideoque

vis mediocris *ML* est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut 1 × 60½ ad 60 × 60 × 60 × 178/$_{11}$ seu 1 ad 638092,6. Unde ex proportione linearum *SM*, *ML* datur etiam vis *SM*: & hæ sunt vires Solis quibus motus Lunæ perturbantur. *Q. E. I.*

Prop. XXVI. Prob. VI.

Invenire incrementum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit.



Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, ea sola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem verò Solis distantiam ponamus etiam lineas *QP*, *QS* sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis *LM* reducetur semper ad

mediocrem suam quantitatem *SP*, ut & vis *SM* ad mediocrem suam quantitatem 3*PK*. Hæ vires, per Legum Corol. 2. componunt vim *SL*; & hæc vis, si in radium *SP* demittatur perpendiculum *LE*, resolvitur in vires *SE*, *EL*, quarum *SE*, agendo semper secundum radium *SP*, nec accelerat nec retardat descriptionem areæ *QSP* radio illo *SP* factam; & *EL* agendo secundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipsam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in transitu ipsius à Quadratura *C* ad conjunctionem *A*, singulis temporis momentis facta, est ut ipsa vis accelerans *EL*, hoc est ut $3PK \times SK \div SP$. Exponatur tempus per motum medium Lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum *CSP*, vel etiam per arcum *CP*. Ad *CS* erigatur Normalis *CG* ipsi *CS* æqualis. Et diviso arcu quadrantali *AC* in particulas innumeras æquales *Pp* &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi possint, ductâque *pk* perpendiculari ad *CS*, jungatur *SG* ipsis *KP*, *kp* productis occurrens in *F* & *f*; & erit *Kk* ad *PK* ut *Pp* ad *Sp*, hoc est in data ratione, adeoque $FK \times Kk$ seu area *FKkf* ut $3PK \times SK \div SP$ id est ut *EL*; & compositè, area tota *GCKF* ut summa omnium virium *EL* tempore toto *CP* impressarum in Lunam, atque adeò etiam ut velocitas hac summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ *CSP*, seu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quiescentem ad distantiam *SP*, tempore suo periodico *CADBC* dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore *CS* cadendo, describeret longitudinem ½*CS*, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in orbe suo movetur. Patet hoc per Schol. Prop. IV. Lib. I. Cum autem perpendiculum *Kd* in *SP* demissum sit ipsius *EL* pars tertia, & ipsius *SP* seu *ML* in octantibus pars dimidia, vis *EL* in Octantibus, ubi maxima est, superabit vim *ML* in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore suo periodico circa Terram quiescentem revolvi posset, ut 100 ad ⅔ × 17872½ seu 11915, & tempore *CS* velocitatem generare deberet quæ esset pars $/_{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem *CPA* velocitatem majorem generaret in ratione *CA* ad *CS* seu *SP*. Exponatur vis maxima *EL* in Octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}SP \times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis *CP* generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor *EL* eodem tempore generat ut rectangulum $\frac{1}{2}SP \times CP$ ad aream *KCGF*: tempore autem toto *CPA*, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}SP \times CA$ &

triangulum *SCG*, sive ut arcus quadrantalis *CA* ad radium *SP*. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitatis posterior, toto tempore genita, erit pars $/_{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915 summa 11915 + 50 seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia *A*, ac differentia 11915 - 50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium *FKCG* ad triangulum *SCG* (vel quod perinde est, ut quadratum Sinus *PK* ad quadratum Radii *SP*, id est ut *Pd* ad *SP*) & summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio *P*.

Hæc omnia ita se habent, ex Hypothesi quod Sol & Terra quiescunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris verè sit dierum 29. *hor.* 12. & *min.* 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $/_{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $/_{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut 11023 - 50 ad 11023 + 50, seu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio *P* versatur, ut 10973 ad 10973 + *Pd*, existente videlicet *SP* æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proximè ut summa numeri $219/_{100}$ & Sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi Variatio in Octantibus est magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille versus in eadem ratione.

Prop. XXVII. Prob. VII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam à Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, singulis temporis momentis, describit, est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ à Terrâ conjunctim; & propterea distantia Lunæ à Terrâ est in ratione compositâ ex

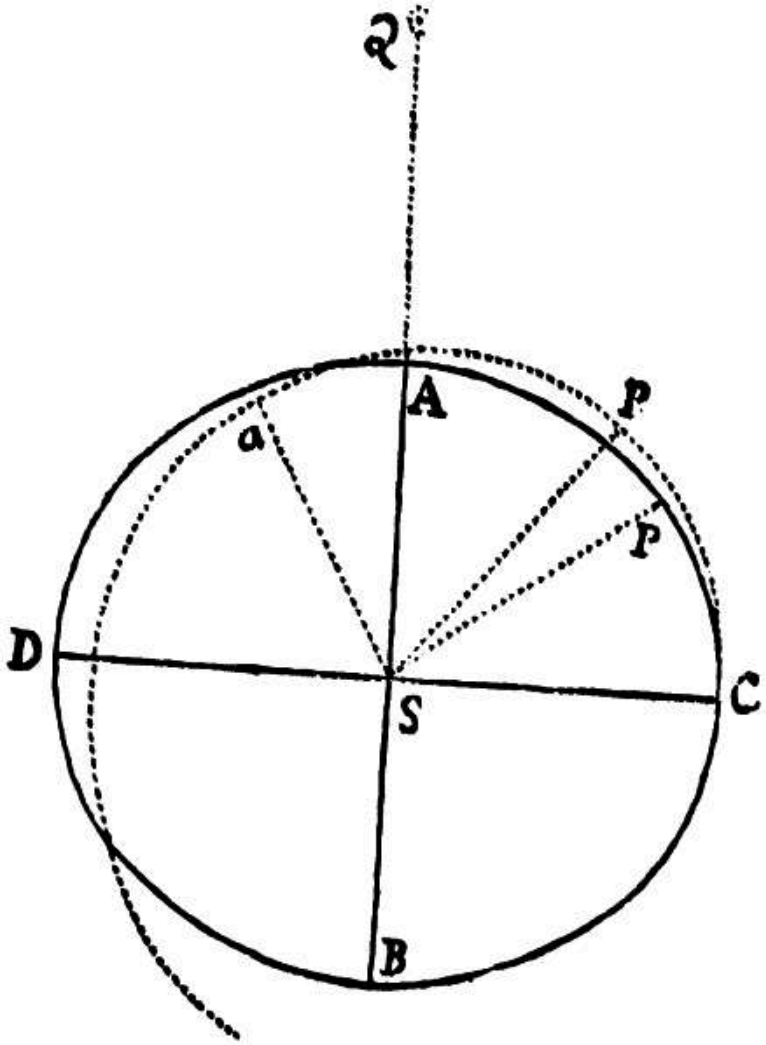
dimidiatâ ratione Areæ directè & dimidiatâ ratione motus horarii inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciprocè ut ipsius distantia à Terra. Tentent Astronomi quàm probè hæc Regula cum Phænomenis congruat.

Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratiùs ex Phænomenis quàm antehac definiri potest.

Prop. XXVIII. Prob. VIII.

Invenire diametros Orbis in quo Luna absque excentricitate moveri deberet.



Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, si secundum Trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. Curvaturas linearum pono esse inter se in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem 2*PK* (Vide *Figur. pag. 434.*) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris *KS*, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, si {*AS* + *CS*} ÷ 2 dicatur *N*, sunt ut 178725 ÷ *ASq.* - 2000 ÷ {*CS* × *N*} & 178725 ÷ *CSq.* + 1000 ÷ {*AS* × *N*} quam proxime; seu ut 178725*N* in *CSq.* - 2000*ASq.* in *CS*, & 178725*N* in *ASq.* + 1000 *CSq.* × *AS*. Nam se gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per numerum 178725, vis mediocris *ML*, quæ in Quadraturis est *PS* vel *SK* & Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris *SM* in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris *ML* subducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis distrahitur à Terra, quamque jam ante nominavi 2*PK*. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis *A* & *B* est ad ipsius velocitatem in Quadraturis *C* & *D* ut *CS*, ad *AS* & momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem areæ in Quadraturis conjunctim; id est ut 11073*CS* ad 10973*AS*. Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior semel directè, & fiet Curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejusdem Curvaturam in Quadraturis ut 120407 × 178725*ASq.* × *CSq.* × *N* - 120407 × 2000*AS qq.* × *CS* ad 122611 × 178725*ASq.* × *CSq.* × *N* + 122611 × 1000*CS qq.* × *AS*, id est ut 2151969*AS* × *CS* × *N* - 24081*AS cub.* ad 2191371*AS* × *CS* × *N* + 12261*CS cub.*

Quoniam figura orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin *DBCA*, in cujus centro *S* Terra collocetur, & cujus axis major *DC* Quadraturis, minor *AB* Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria, cujus Curvaturam consideramus, describi debet in plano quod motu omni angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est Figura *Cpa*, cujus puncta singula *p* inveniuntur capiendo punctum quodvis *P* in Ellipsi, quod locum Lunæ representet, & ducendo *Sp* æqualem *SP*, ea lege ut angulus *PSp* æqualis sit motui apparenti Solis à tempore Quadraturæ *C* confecto; vel (quod eodem

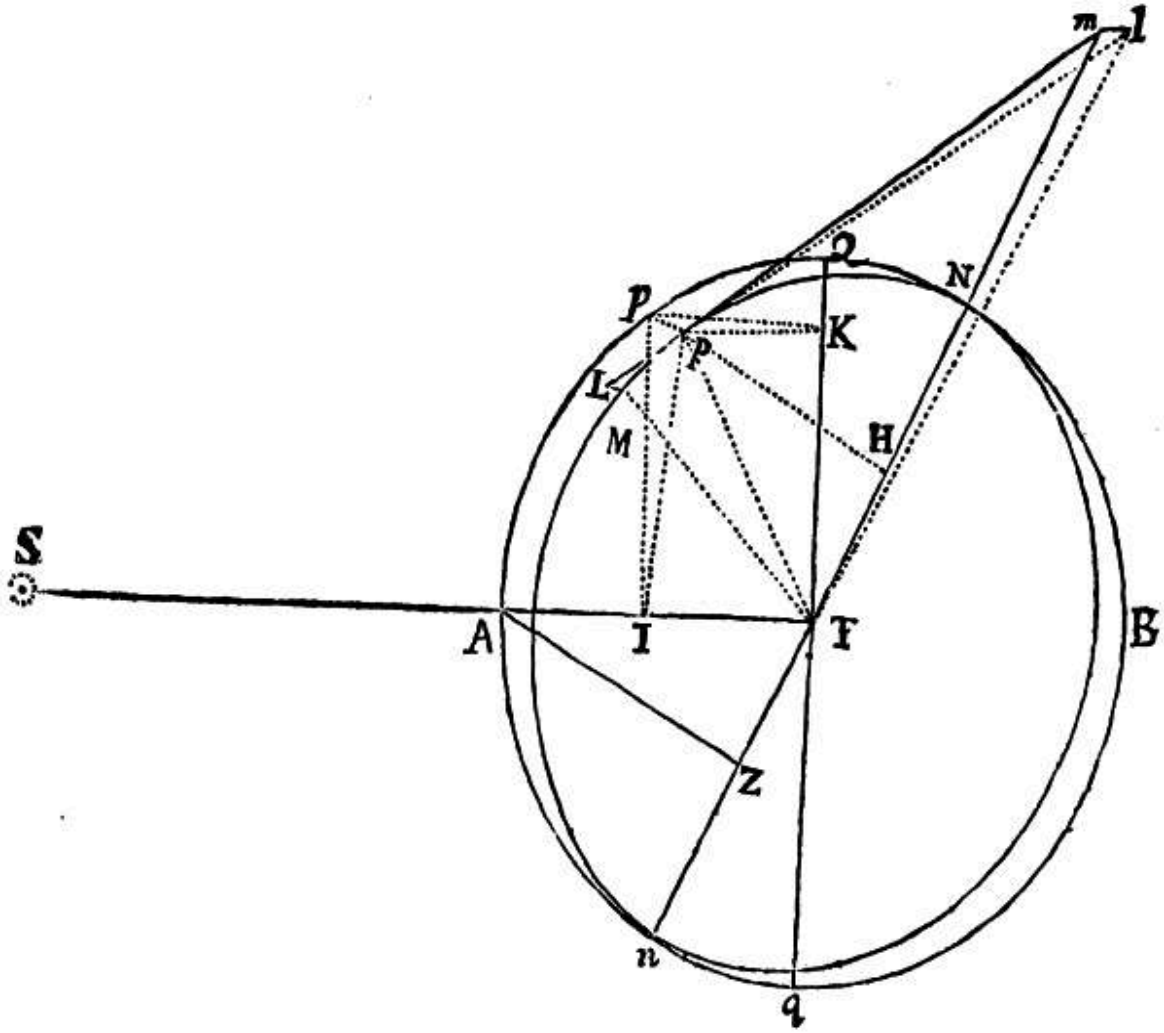
fere recidit) ut angulus *CSp* sit ad angulum *CSP* ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ seu 29 *d.* 12. *h.* 44′, ad 27 *d.* 7 *h.* 43′. Capiatur igitur angulus *CSa* in eadem ratione ad angulum rectum *CSA*, & sit longitudo *Sa* æqualis longitudini *SA*; & erit *a* Apsis ima & *C* Apsis summa orbis hujus *Cpa*. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis *Cpa* in vertice *a*, & curvaturam circuli centro *S* intervallo *SA* descripti, sit ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice *A* & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli *CSP* ad angulum *CSp*; & quod curvatura Ellipseos in *A* sit ad curvaturam circuli illius in duplicata ratione *SA* ad *SC*; & curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro *S* intervallo *SC* descripti ut *SC* ad *SA*; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in *C* in duplicata ratione *SA* ad *SC*; & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice *C* & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Spa* in vertice *C* & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli *CSP* ad angulum *CSp*. Quæ quidem rationes ex Sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facilè colliguntur. Collatis autem his rationibus inter se, prodit curvatura figuræ *Cpa* in *a* ad ipsius curvaturam in *C*, ut *AS cub.* + $/_{100000}$*CSq.* × *AS* ad *CS cub.* + $/_{100000}$*ASq.* × *CS*. Ubi numerus $/_{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum *CSP* & *CSp* applicatam ad Quadratum anguli minoris *CSP*, seu (quod perinde est) differentiam Quadratorum temporum 27 *d.* 7 *h.* 43′, & 29 *d.* 12 *h.* 44′, applicatam ad Quadratum temporis 27 *d.* 7 *h.* 43′.

Igitur cum *a* designet Syzygiam Lunæ, & *C* ipsius Quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio *CS* ad *AS*, duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad *AS* × *CS* applicati, fiunt 2062,79*CS qq.* - 2151969*N* × *CS cub.* + 368682*N* × *AS* × *CSq.* + 36342*ASq.* × *CSq.* - 362046*N* × *ASq.* × *CS* + 2191371*N* × *AS cub.* + 4051,4*AS qq.* = 0. Hic pro terminorum *AS* & *CS* semisummâ *N* scribo 1, & pro eorundem semidifferentia ponendo *x*, fit *CS* = 1 + *x*, & *AS* = 1 - *x*: quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur *x* æqualis 0,0072036, & inde semidiameter *CS* fit 1,0072, & semidiameter *AS* 0,9928, qui numeri sunt ut $69/_{12}$ & $68/_{12}$ quam proximè. Est igitur distantia Lunæ à Terra in

Syzygiis ad ipsius distantiam in Quadraturis (seposita scilicet excentricitatis consideratione) ut $68/_{12}$ ad $69/_{12}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

Prop. XXIX. Prob. IX.

Invenire Variationem Lunæ.

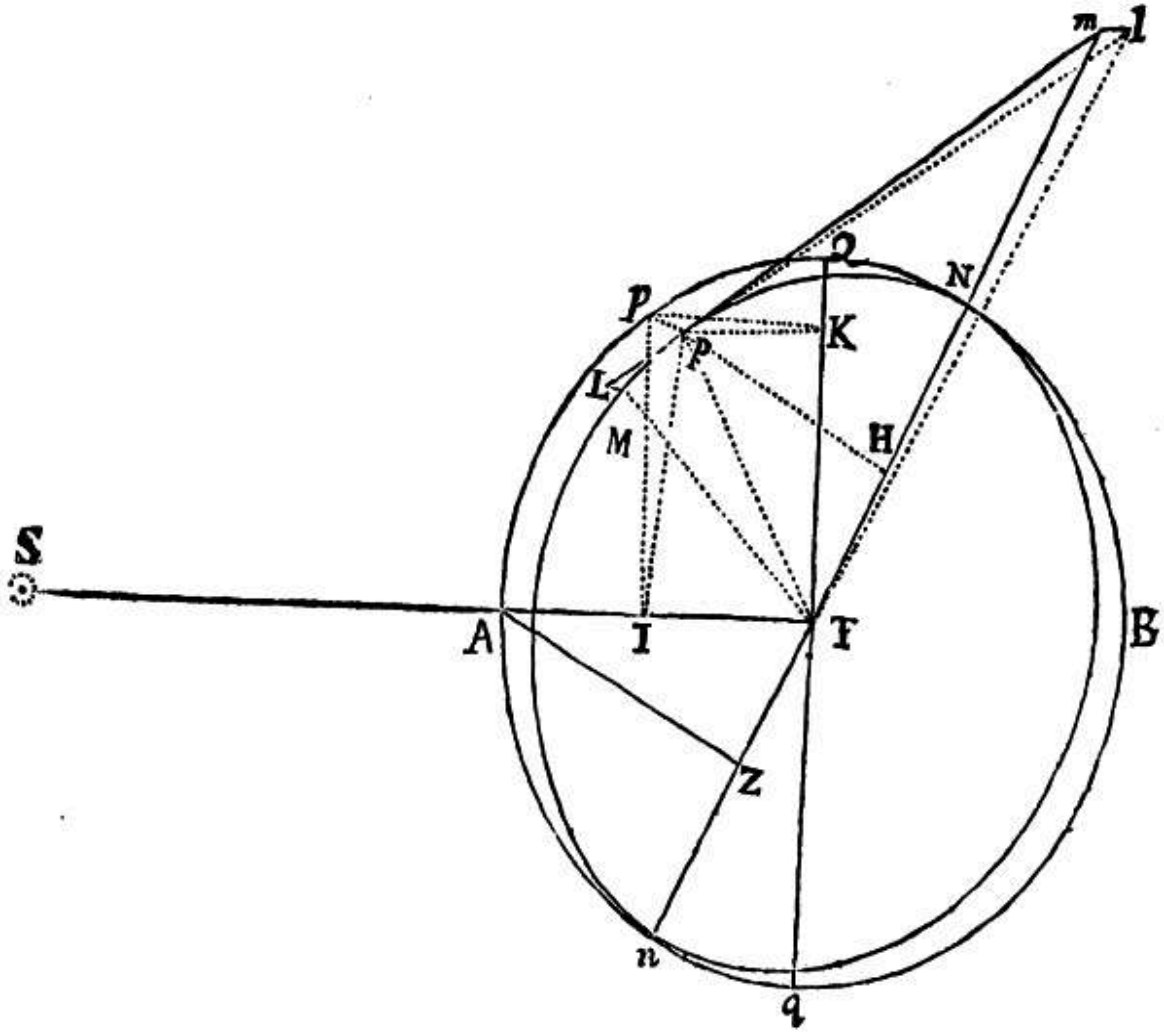


Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto describit. Si Luna *P* in Ellipsi *DBCA* circa Terram in centro Ellipseos quiescentem moveretur, & radio *SP* ad Terram ducto describeret aream *CSP* tempori proportionalem; esset autem Ellipseos semidiameter maxima *CS* ad semidiametrum minimam *SA* ut $69/_{12}$ ad $68/_{12}$: foret Tangens anguli *CSP* ad Tangentem anguli motus medii à quadratura *C* computati, ut Ellipseos semidiameter *SA* ad ejusdem semidiametrum *SC* seu $68/_{12}$ ad $69/_{12}$. Debet

autem descriptio areæ *CSP*, in progressu Lunæ à Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utq; excessus momenti in loco quovis intermedio *P* supra momentum in Quadratura sit ut quadratum Sinus anguli *CSP*. Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli *CSP* diminuatur in dimidiata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est in ratione numeri $68/_{10000}$ ad numerum $68/_{12}$. Quo pacto tangens anguli *CSP* jam erit ad tangentem motus medii ut $68/_{10000}$ ad $69/_{12}$, & angulus *CSP* in Octantibus, ubi motus medius est 45 *gr.* invenietur 44 *gr.* 27′. 29″: qui subductus de angulo motus medii 45 *gr.* relinquit Variationem 32′. 31″. Hæc ita se haberent si Luna, pergendo à Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum *CSA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in antecedentia motu apparente transfertur, Luna, priusquam Solem assequitur, describit angulum *CSa* angulo recto majorem in ratione revolutionis Lunaris Synodicæ ad revolutionem periodicam, id est in ratione 29 *d.* 12 *h.* 44′. ad 27 *d.* 7 *h.* 43′. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *S* dilatantur in eadem ratione, & Variatio quæ secus esset 32′. 31″. jam aucta in eadem ratione, fit 35′. 9″. Hæc ab Astronomis constituitur 40′, & ex recentioribus Observationibus 38′. *Halleius* autem recentissimè deprehendit esse 38′ in Octantibus versus oppositionem Solis, & 32′ in Octantibus Solem versus. Unde mediocris ejus magnitudo erit 35′: quæ cum magnitudine à nobis inventa 35′. 9″ probe congruit. Magnitudinem enim mediocrem computavimus, neglectis differentiis, quæ à curvaturâ Orbis magni, majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in Gibbosam & plenam, oriri possint.

Prop. XXX. Prob. X.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.



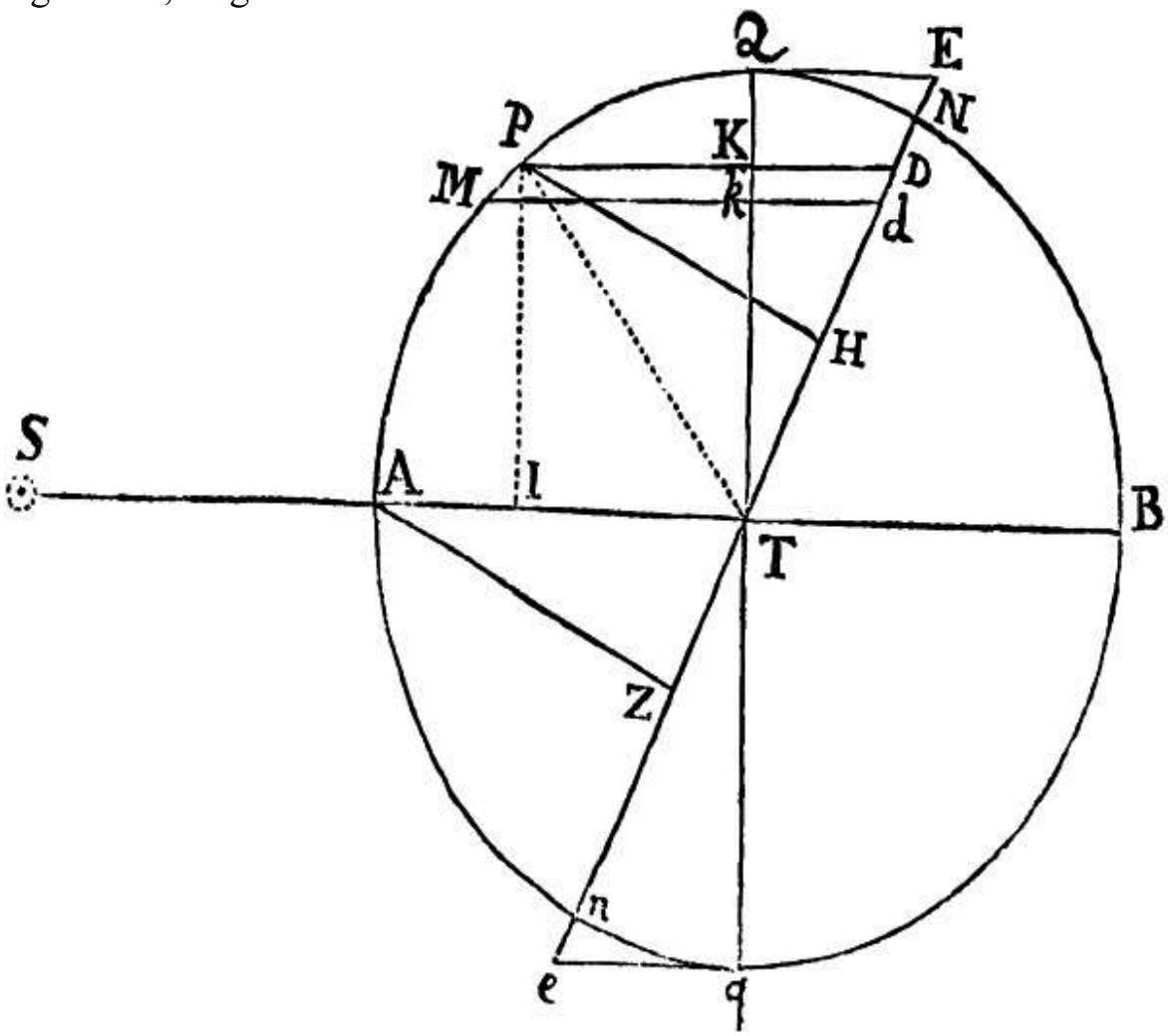
Designet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *NPn* Orbem Lunæ, *Npn* vestigium Orbis in plano Eclipticæ; *N*, *n*, Nodos, *nTNm* lineam Nodorum infinitè productam, *PI*, *PK*; perpendicula demissa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demissum in planum Eclipticæ; *Q*, *q* Quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ & *pK* perpendiculum in lineam *Qq* Quadraturis intrajacentem. Et vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. XXV.) duplex erit, altera lineæ 2*IT* vel 2*Kp*, altera lineæ *PI* proportionalis. Et Luna vi priore in Solem, posteriore in lineam *ST* trahitur. Componitur autem vis posterior *PI* ex viribus *IT* & *PT*, quarum *PT* agit secundum planum orbis Lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis autem *IT* cum vi 2*IT* componit vim totam 3*IT*, qua planum Orbis Lunaris perturbatur. Et hæc vis per Prop. XXV. est ad vim qua Luna in circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico revolvi posset, ut 3*IT* ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut *IT* ad Radium

multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantum auget in aliis; & Nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Designet jam *PM* arcum, quem Luna dato tempore quam minimo describit, & *ML* lineolam quam Luna, impellente vi præfata 3*IT*, eodem tempore describere posset. Jungantur *PL*, *MP*, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi secent planum Eclipticæ; inque *Tm* demittatur perpendiculum *PH*. Et quoniam *ML* parallela est ipsi *ST*, si *ml* parallela sit ipsi *ML*, erit *ml* in plano Eclipticæ, & contra. Ergo *ml*, cum sit in plano Eclipticæ, parallela erit ipsi *ML*, & similia erunt triangula *LMP*, *Lmp*. Jam cum *MPm* sit in plano Orbis, in quo Luna in loco *P* movebatur, incidet punctum *m* in lineam *Nn* per Orbis illius Nodos *N*, *n*, ductam. Et quoniam vis qua lineola *LM* generatur, si tota simul & semel in loco *P* impressa esset, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus Chorda esset *LP*, atque adeò transferret Lunam de plano *MPmT* in planum *LPlT*; motus Nodorum à vi illa genitus æqualis erit angulo *mTl*. Est autem *ml* ad *mP* ut *ML* ad *MP*, adeoque cum *MP* ob datum tempus data sit, est *ml* ut rectangulum $ML \times mP$, id est ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus *mTl*, si modo angulus *Tml* rectus sit, est ut $ml \div Tm$, & propterea ut $IT \times Pm \div Tm$ id est (ob proportionales *Tm* & *mP*, *TP* & *PH*) ut $IT \times PH \div TP$, adeoque ob datam *TP*, ut $IT \times PH$. Quod si angulus *Tml*, seu *STN* obliquus sit, erit angulus *mTl* adhuc minor, in ratione Sinus anguli *STN* ad Radium. Est igitur velocitas Nodorum ut $IT \times PH$ & Sinus anguli *STN* conjunctim, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum *TPI*, *PTN* & *STN*.

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia existentibus, recti sint, lineola *ml* abibit in infinitum, & angulus *mTl* evadet angulo *mPl* æqualis. Hoc autem in casu, angulus *mPl* est ad angulum *PTM*, quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit ut 1 ad 59,575. Nam angulus *mPl* æqualis est angulo *LPM*, id est angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quam præfata vis Solaris 3*IT* dato illo tempore generare possit; & angulus *PTM* æqualis est angulo deflexionis Lunæ à recto tramite,

quem vis illa, qua Luna in Orbe suo retinetur, eodem tempore generat. Et hæ vires, uti supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (respectu fixarum) sit 32′. 56″. 27‴. $12^{iv}½$, motus horarius Nodi in hoc casu erit 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}. ut contentum sub sinibus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (seu distantiarum Lunæ à Quadratura, Lunæ à Nodo & Nodi à Sole) ad cubum Radii. Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus feruntur in antecedentia.



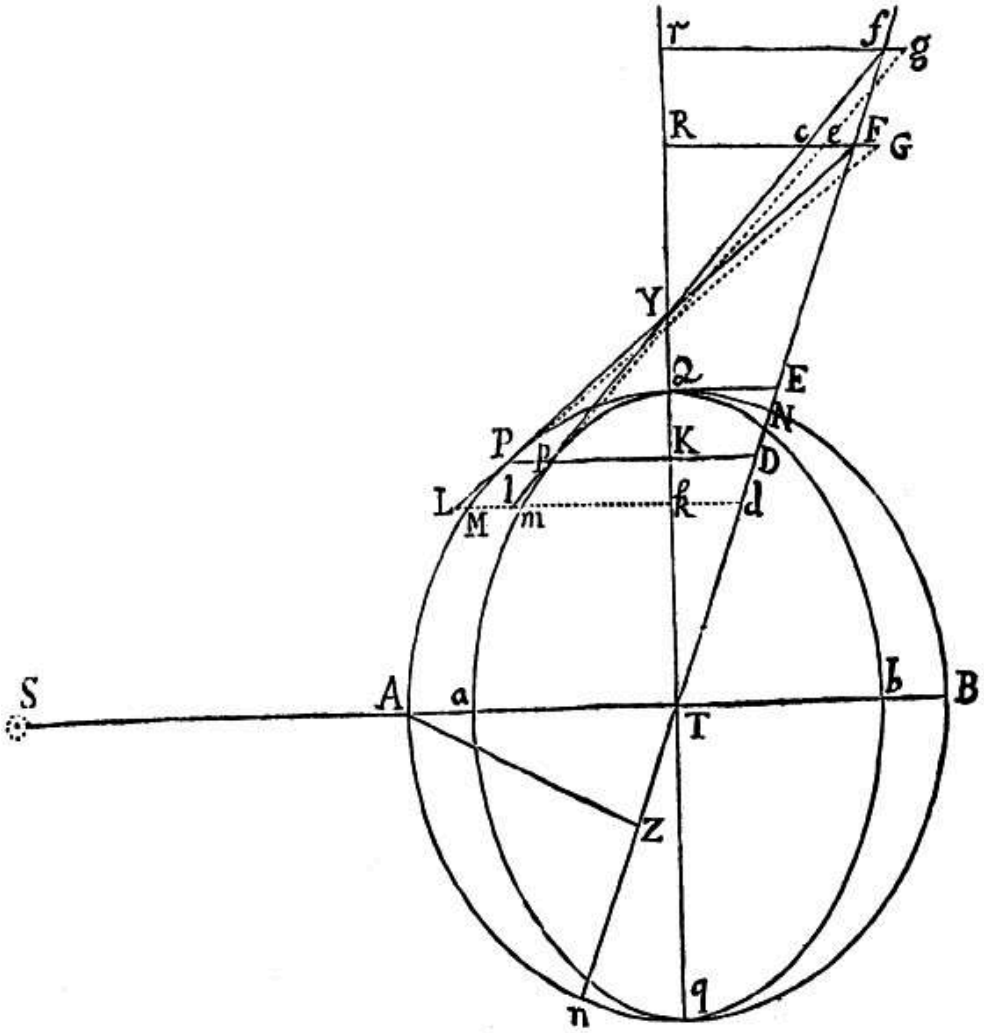
Corol. 1. Hinc si a dati arcus quam minimi *PM* terminis *P* & *M* ad lineam Quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec secent lineam Nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius Nodorum ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim *PK*, *PH* & *AZ* prædicti tres Sinus. Nempe *PK* Sinus distantiæ Lunæ à Quadratura, *PH* Sinus distantiæ Lunæ à Nodo, & *AZ* Sinus distantiæ Nodi à Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum $PK \times PH \times AZ$. Est autem *PT* ad *PK* ut *PM* ad *Kk*, adeoque ob datas *PT* & *PM* est *Kk* ipsi *PK* proportionalis. Est & *AT* ad *PD* ut *AZ* ad *PH*, & propterea *PH* rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id est ut area *PDdM*, & *AZ qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 2. In data quavis Nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque est ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}.$ ut quadratum Sinus distantiæ Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii, sive ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semicirculum *QAq*, summa omnium arearum *PDdM*, quo tempore Luna pergit à *Q* ad *M*, erit area *QMdE* quæ ad circuli tangentem *QE* terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum *n*, summa illa erit area tota *EQAn* quam linea *PD* describit; dein Luna pergente ab *n* ad *q*, linea *PD* cadet extra circulum, & aream *nqe* ad circuli tangentem *qe* terminatam describet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam verò progrediuntur, subduci debet de area priore, & cum æqualis sit areæ *QEN*, relinquet semicirculum *NQAn*. Igitur summa omnium arearum *PDdM*, quo tempore Luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore Luna circulum describit est area circuli totius. At area *PDdM*, ubi Luna versatur in Syzygiis, est rectangulum sub arcu *PM* & radio *MT*; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quàm rectangulum prius. Proinde Nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in Syzygiis Lunaribus, spatium duplo majus describerent quàm revera describunt; & propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium à se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semissis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde

cum motus orarius maximus, si Nodi in Quadraturis versantur, sit 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}, motus mediocris horarius in hoc casu erit 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. Et cum motus horarius Nodorum semper sit ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id est (ob datam aream *PDdM* in Syzygiis descriptam) ut *AZ qu.* erit etiam motus mediocris ut *AZ qu.* atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas versantur, erit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT qu. Q. E. D.*

Prop. XXXI. Prob. XI.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.



Designet *Qpmaq* Ellipsim, axe majore *Qq*, minore *ab* descriptam, *QAq* circulum circumscriptum, *T* Terram in utriusque centro communi, *S* Solem,

p Lunam in Ellipsi moventem, & *pm* arcum quem data temporis particula quam minima describit, *N* & *n* Nodos linea *Nn* junctos, *pK* & *mk* perpendicula in axem *Qq* demissa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in *P* & *M*, & lineæ Nodorum in *D* & *d*. Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus Nodi in Ellipsi ut area *pDdm*.

Nam si *PF* tangat circulum in *P*, & producta occurrat *TN* in *F*, & *pf* tangat Ellipsin in *p* & producta occurrat eidem *TN* in *f*, conveniant autem hæ Tangentes in axe *TQ* ad *Y*; & si *ML* designet spatium quod Luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum *PM*, urgente & impellente vi prædicta 3*IT*, motu transverso describere posset, & *ml* designet spatium quod Luna in Ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi 3*IT*, describere posset; & producantur *LP* & *lp* donec occurrant plano Eclipticæ in *G* & *g*; & jungantur *FG* & *fg*, quarum *FG* producta secet *pf*, *pg* & *TQ* in *c*, *e* & *R* respectivè, & *fg* producta secet *TQ* in *r*: Quoniam vis 3*IT* seu 3*PK* in circulo est ad vim 3*IT* seu 3*pK* in Ellipsi, ut *PK* ad *pK*, seu *AT* ad *aT*; erit spatium *ML* vi priore genitum, ad spatium *ml* vi posteriore genitum, ut *PK* ad *pK*, id est ob similes figuras *PYKp* & *FYRc*, ut *FR* ad *cR*. Est autem *ML* ad *FG* (ob similia triangula *PLM*, *PGF*) ut *PL* ad *PG*, hoc est (ob parallelas *Lk*, *PK*, *GR*) ut *pl* ad *pe*, id est (ob similia triangula *plm*, *cpe*) ut *lm* ad *ce*; & inversè ut *LM* est ad *lm*, seu *FR* ad *cR*, ita est *FG* ad *ce*. Et propterea si *fg* esset ad *ce* ut *fY* ad *cY*, id est ut *fr* ad *cR*, (hoc est ut *fr* ad *FR* & *FR* ad *cR* conjunctim, id est ut *fT* ad *FT* & *FG* ad *ce* conjunctim,) quoniam ratio *FG* ad *ce* utrinque ablata relinquit rationes *fg* ad *FG* & *fT* ad *FT*, foret *fg* ad *FG* ut *fT* ad *FT*; propterea quod anguli, quos *FG* & *fg* subtenderent ad Terram *T*, æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione exposuimus) sunt motus Nodorum, quo tempore Luna in circulo arcum *PM*, in Ellipsi arcum *pm* percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo *fg* esset ad *ce* ut *fY* ad *cY*, id est si *fg* æqualis esset $ce \times fY \div cY$. Verum ob similia triangula *fgp*, *cep*, est *fg* ad *ce* ut *fp* ad *cp*; ideoque *fg* æqualis est $ce \times fp \div cp$, & propterea angulus, quem *fg* revera subtendit, est ad angulum priorem, quem *FG* subtendit, hoc est motus Nodorum in Ellipsi ad motum Nodorum in Circulo, ut hæc *fg* seu $ce \times fp \div cp$ ad priorem *fg* seu $ce \times fY \div cY$, id est ut $fp \times cY$ ad $cp \times fY$, seu *fp* ad *fY* & *cY* ad *cp*; hoc est, si *pb* ipsi *TN* parallela occurrat *FP* in *b*, ut *Fb* ad *FY* & *FY* ad *FP*; hoc est ut *Fb* ad *FP* seu *Dp* ad *DP*, adeoque

ut area *Dpmd* ad aream *DPMd*. Et propterea, cum area posterior proportionalis sit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipsi. *Q. E. D.*

Corol. Igitur cum, in data Nodorum positione, summa omnium arearum *pDdm*, quo tempore Luna pergit à Quadratura ad locum quemvis *m*, sit area *mpQEd*, quæ ad Ellipseos Tangentem *QE* terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integra, sit area Ellipseos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipsi erit ad motum mediocrem Nodorum in circulo, ut Ellipsis ad circulum, id est ut *Ta* ad *TA*, seu $68/_{12}$ ad $69/_{12}$. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in circulo sit ad 16″. 35″ ′. 16^{iv}. 36^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* si capiatur angulus 16″. 21‴. 2^{iv}. 36^{v}. ad angulum 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut $68/_{12}$ ad $69/_{12}$, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipsi ad 16″. 21‴. 2^{iv}. 36^{v}. ut *AZq.* ad *ATq.*; hoc est ut quadratum Sinus distantiæ Nodi à Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in Syzygiis quàm in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073; & propterea momentum mediocre in Octantibus est ad excessum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in singulis Orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad excessum temporis in Quadrantibus, ac defectum in Syzygiis, ab hac causa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem à Quadraturis ad Syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in Quadraturis, sit ut quadratum Sinus distantiæ Lunæ à Quadrantibus quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in Octantibus, est ut differentia inter quadratum Sinus distantiæ Lunæ à Quadraturis & quadratum Sinus graduum 45, seu semissem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis singulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias est in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Est enim motus iste,

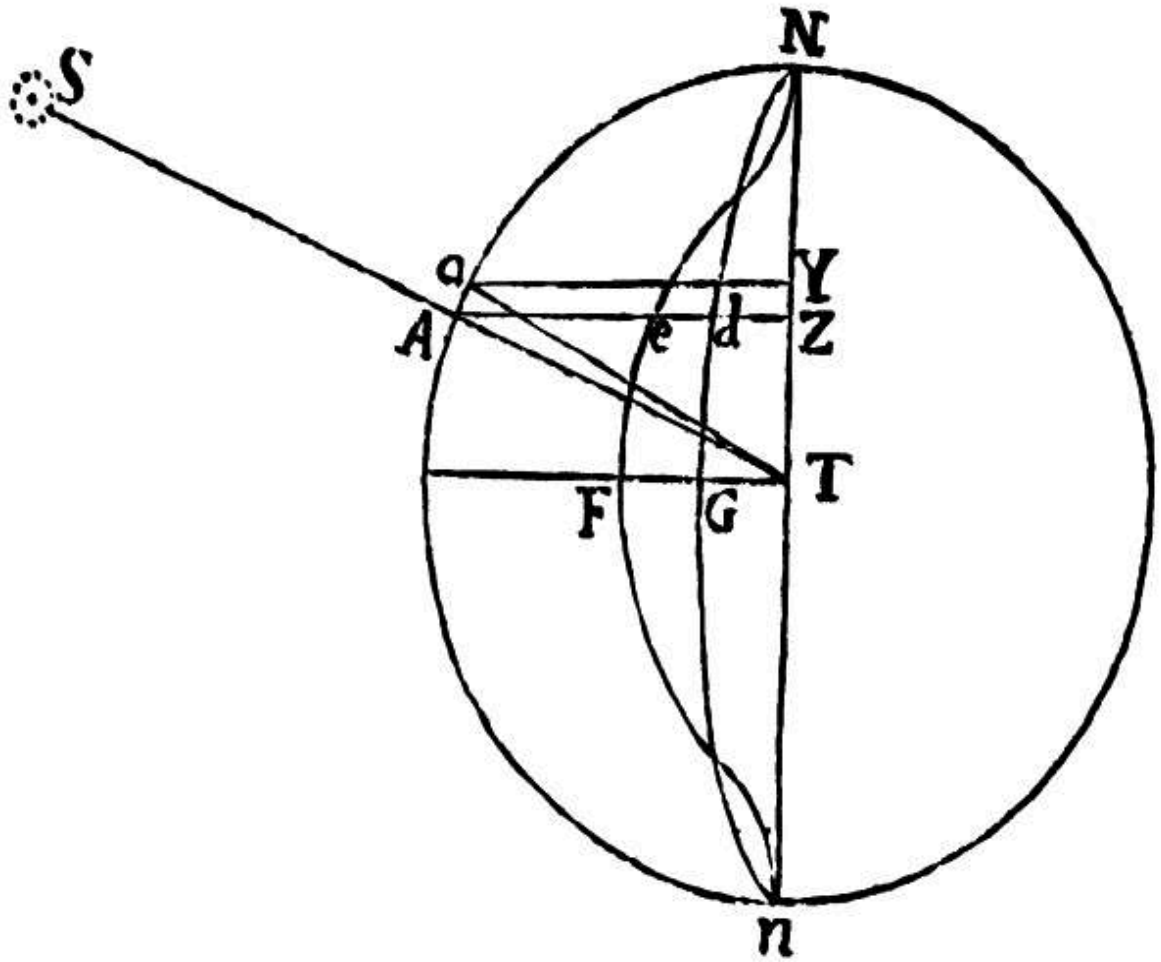
dum Luna percurrit *PM*, (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* est in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut 100 ad 11073 quam proximè. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, est quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum Sinus distantiæ Lunæ à Quadratura & semissem quadrati Radii ad semissem quadrati Radii, conjunctim. Unde si Nodi in Quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde distantia, & alia duo à Syzygiâ & Quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duabus inter Syzygiam & Octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem ineunti facilè constabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem describere supponebatur) erat $32''.\ 42'''.\ 5^{iv}.\ 12^{v}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud est $17'''.\ 43^{iv}.\ 10^{v}$, cujus pars quarta $4'''.\ 25^{iv}.\ 48^{v}$, motui horario mediocri superius invento $16''.\ 21'''.\ 2^{iv}.\ 36^{v}$. subducta, relinquit $16''.\ 16'''.\ 36^{iv}.\ 48^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

Si Nodi versantur extra Quadraturas, & spectentur loca bina à Syzygiis hinc inde æqualiter distantia; summa motuum Nodorum, ubi Luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi Luna in iisdem locis & Nodi in Quadraturis versantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et decrementa motuum, à causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum situ, ad $16''.\ 16'''.\ 36^{iv}.\ 48^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id est ut quadratum Sinus distantiæ Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii.

Prop. XXXII. Prob. XII.

Invenire motum medium Nodorum Lunæ.

Motus medius annuus est summa motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum versari in *N*, & singulis horis completis retrahi in locum suum priorem, ut non obstante motu suo proprio, datum semper servet situm ad Stellas Fixas. Interea verò Solem *S*, per motum Terræ, progredi à Nodo, & cursum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad Solem semper ducta, intersectione sua & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo describit: & motus horarius mediocris (per jam ostensa) erit ut *AZq.* id est (ob proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum sub *AZ* & *ZY*, hoc est ut area *AZYa*. Et summa omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut summa omnium arearum *aYZA*, id est ut area *NAZ*. Est autem maxima *AZYa* æqualis rectangulo sub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea summa omnium rectangulorum in circulo toto ad summam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum sub circumferentia tota & radio; id est ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo respondens, erat 16″. 16″′. 36^{iv}. 48^{v}. Et hic motus, anno toto sidereo dierum 365. 6 *hor.* 9 *min.* fit 39 *gr.* 38′. 5″. 39‴. Ideoque hujus dimidium 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½ est motus medius Nodorum circulo toti respondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab *N* ad *A*, est ad 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½ ut area *NAZ* ad circulum totum.



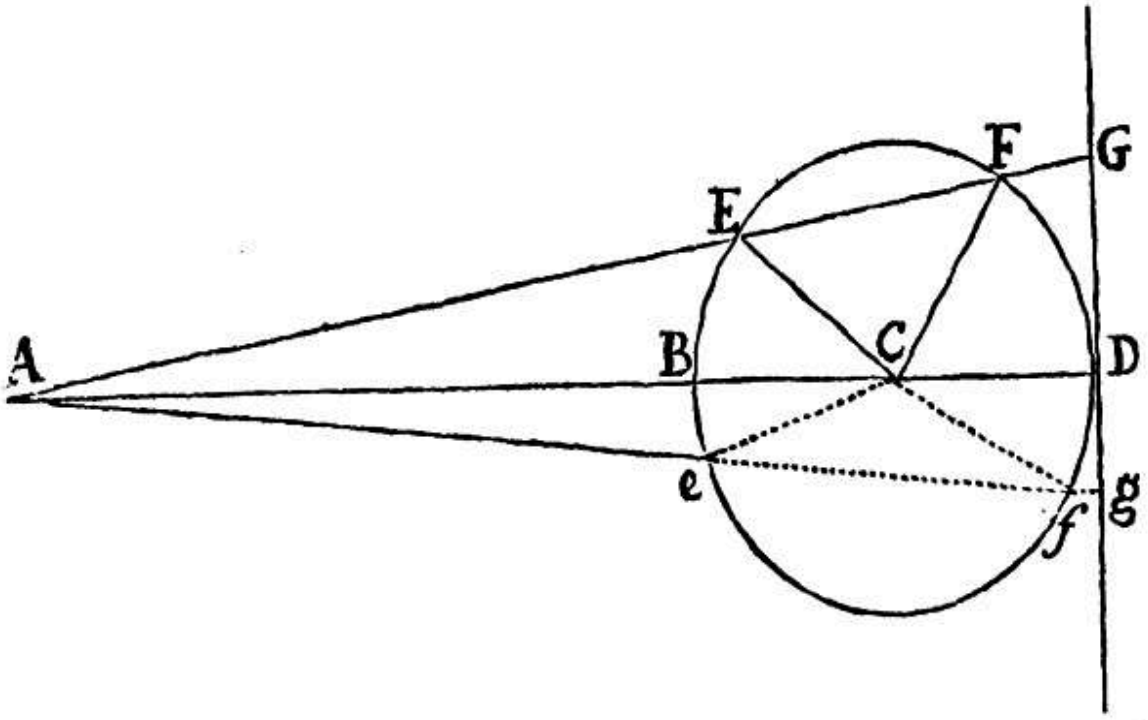
Hæc ita se habent, ex Hypothesi quod Nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut Sol anno toto completo ad Nodum eundem redeat à quo sub initio digressus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. Cum Sol anno toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret 39 *gr.* 38′. 5″. 39‴. seu 39,6349 gradus; & motus mediocris Nodi in loco quovis *N* sit ad ipsius motum mediocrem in Quadraturis suis, ut *AZq.* ad *ATq.* erit motus Solis ad motum Nodi in *N*, ut 360 *ATq.* ad 39,6349 *AZq.*; id est ut 9,0829032 *ATq.* ad *AZq.* Unde si circuli totius circumferentia *NAn* dividatur in particulas æquales *Aa*, tempus quo Sol percurrat particulam *Aa*, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum Nodis circa centrum *T* revolvatur, reciprocè ut 9,0829032 *ATq.* ad 9,0829032 *ATq.* + *AZq.* Nam tempus est reciprocè ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol absque motu Nodi percurreret

arcum *NA*, exponatur per Sectorem *NTA*, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum *Aa*, exponatur per Sectoris particulam *ATa*; & (perpendiculo *aY* in *Nn* demisso) si in *AZ* capiatur *dZ*, ejus longitudinis ut sit rectangulum *dZ* in *ZY* ad Sectoris particulam *ATa* ut *AZq.* ad 9,0829032 *ATq.* + *AZq.* id est ut sit *dZ* ad ½*AZ* ut *ATq.* ad 9,0829032 *ATq.* + *AZq.*; rectangulum *dZ* in *ZY* designabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus *Aa* percurritur. Et si punctum *d* tangit curvam *NdGn*, area curvilinea *NdZ* erit decrementum totum, quo tempore arcus totus *NA* percurritur; & propterea excessus Sectoris *NAT* supra aream *NdZ* erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area *AaYZ* diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in *AZ* longitudo *eZ*, quæ sit ad longitudinem *AZ* ut *AZq.* ad 9,08299032 *ATq.* + *AZq.* Sic enim rectangulum *eZ* in *ZY* erit ad aream *AZYa* ut decrementum temporis, quo arcus *Aa* percurritur, ad tempus totum, quo percurreretur si Nodus quiesceret: Et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus Nodi. Et si punctum *e* tangat curvam *NeFn*, area tota *NeZ*, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus *AN* percurritur; & area reliqua *NAe* respondebit motui reliquo, qui verus est Nodi motus quo tempore arcus totus *NA*, per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam verò si circuli radius *AT* ponatur 1, erit area semicirculi 1,570796; & area figuræ *NeFnT*, per methodum Serierum infinitarum quæsita, prodibit 0,1188478. Motus autem qui respondet circulo toti erat 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½; & propterea motus, qui figuræ *NeFnT* duplicatæ respondet, est 1 *gr.* 29′. 57″. 51‴½. Qui de motu priore subductus relinquit 18 *gr.* 19′. 4″. 58‴. motum totum Nodi inter sui ipsius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit 341 *gr.* 40′. 55″. 2‴. motum Solis inter easdem Conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360 *gr.* ut Nodi motus jam inventus 18 *gr.* 19′. 4″. 58‴. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit 19 *gr.* 18′. 0″. 22‴. Hic est motus medius Nodorum in anno sidereo. Idem per Tabulas Astronomicas est 19 *gr.* 20′. 31″. 1‴. Differentia minor est parte quadringentesima motus totius, & ab Orbis Lunaris Excentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Excentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus

Inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

Prop. XXXIII. Prob. XIII.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.



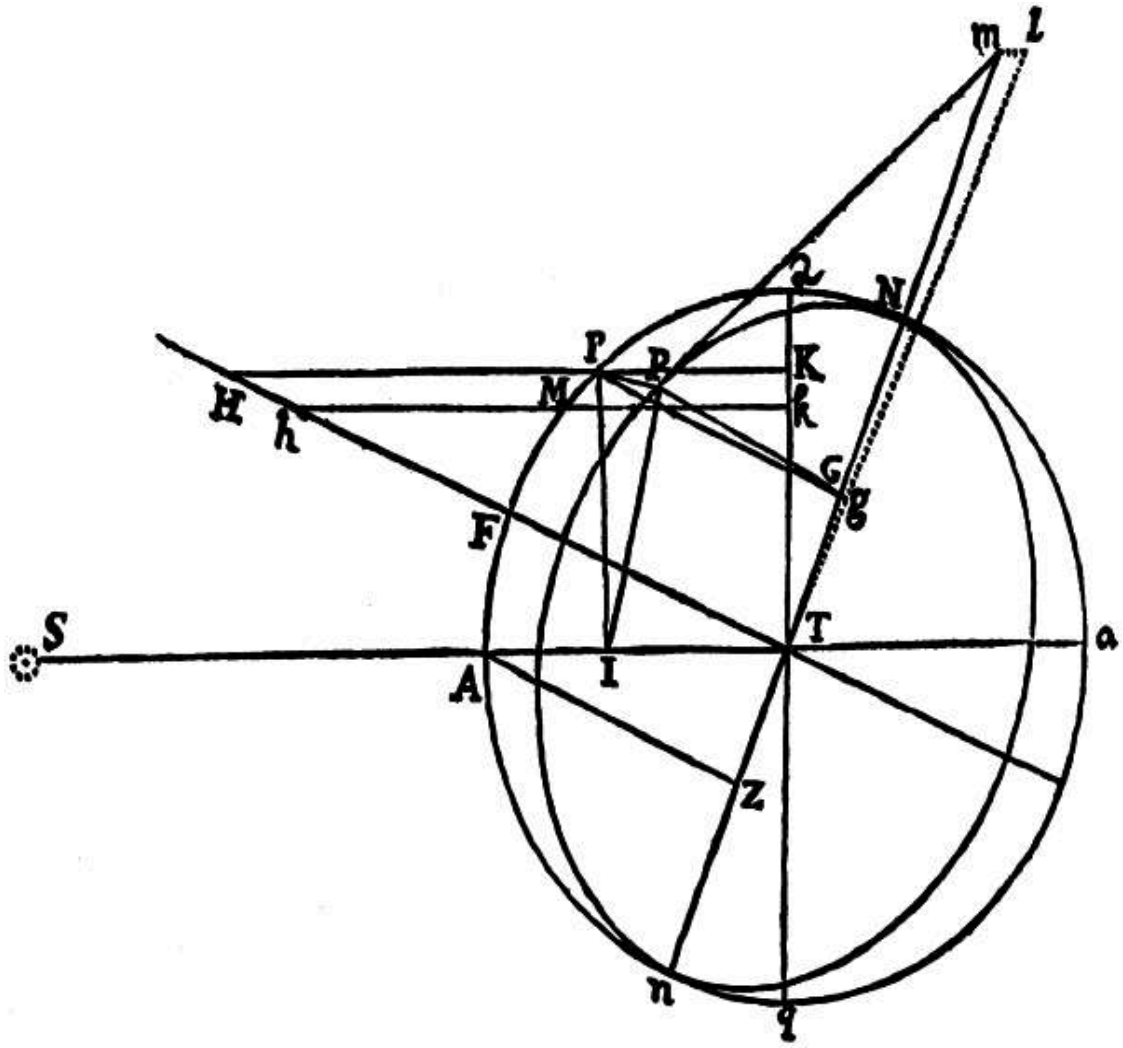
In tempore quod est ut area *NTA - NdZ*, (*in Fig. præced.*) motus iste est ut area *NAeN*, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro *C*, intervallo quovis *CD*, describatur circulus *BEFD*. Producatur *DC* ad *A*, ut sit *AB* ad *AC* ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi Nodi sunt in Quadraturis: (id est ut 19 *gr.* 18′. 0″. 22‴. ad 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½, atque adeo *BC* ad *AC* ut motuum differentia 0 *gr.* 31′. 2″. 27‴½, ad motum posteriorem 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½, hoc est, ut 1. ad 38⅓) dein per punctum *D* ducatur infinita *Gg*, quæ tangat circulum in *D*; & si capiatur angulus *BCE* vel *BCF* æqualis semissi distantiæ Solis à loco Nodi, per motum medium invento; & agatur *AE* vel *AF* secans perpendiculum *DG* in *G*; & capiatur angulus qui sit ad motum Nodi inter ipsius Syzygias (id est ad 9 *gr.* 10′. 40″.) ut tangens *DG* ad circuli *BED* circumferentiam totam, atque angulus iste ad motum medium Nodorum addatur; habebitur eorum motus verus.

Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream *NTA* - *NdZ*, & motum Nodi per aream *NAeN*; ut rem perpendenti constabit. Hæc est æquatio annua motus Nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minimè necessaria est. Nam cum Variatio inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri annuæ, alteri autem menstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua Nodorum ita se mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi possint.

Corol. Ex hac & præcedente Propositione liquet quod Nodi in Syzygiis suis quiescunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario 16″. 18‴. 41^{iv}½. Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus sit 1 *gr.* 30′. Quæ omnia cum Phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Prop. XXXIV. Prob. XIV.

Invenire Variationem horariam inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.



Designent *A* & *a* Syzygias; *Q* & *q* Quadraturas; *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe suo; *p* vestigium loci illius in plano Eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum Nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*, & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Luna versatur in *P*; & angulus *Pgp* inclinatio ejusdem post momentum temporis completum, adeoque angulus *GPg* Variatio momentanea inclinationis. Est autem hic angulus *GPg* ad angulum *GTg* ut *TG* ad *PG* & *Pp* ad *PG* conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus *GTg* (per Prop. XXX.) sit ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut *IT* × *PG* × *AZ* ad *AT cub.* erit angulus *GPg* (seu inclinationis horaria Variatio) ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut *IT* × *AZ* × *TG* × *Pp* ÷ *PG* ad *AT cub. Q. E. I.*

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod Luna in Orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille Ellipticus sit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam Sinus *IT*. Inclinationis autem Variatio tantum augebitur per decrementum Sinus *IT*, quantum diminuitur per decrementum motus Nodorum; & propterea idem manebit atque prius.

Corol. 1. Si ad *Nn* erigatur perpendiculum *TF*, sitque *pM* motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula *pK*, *Mk* in *QT* demissa & utrinque producta occurrant *TF* in *H* & *h*: erit *Kk* ad *Mp* ut *pK* seu *IT* ad *AT*, & *TZ* ad *AT* ut *TG* ad *Hp*; ideoque $IT \times TG$ æquale $Kk \times Hp \times TZ \div Mp$, hoc est æquale areæ *HpMh* ductæ in rationem $TZ \div Mp$: & propterea inclinationis Variatio horaria ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut *HpMh* ducta in $AZ \times \{TZ \div Mp\} \times \{Pp \div PG\}$ ad *AT cub.*

Corol. 2. Ideoque si Terra & Nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore mensis illius foret ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$, ut aggregatum omnium arearum *HpMh*, in revolutione puncti *p* generatarum, & sub signis propriis + & - conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times Pp \div PG$, ad $Mp \times AT$ *cub.* id est ut circulus totus *QAqa* ductus in $AZ \times TZ \times Pp \div PG$ ad $Mp \times AT$ *cub.* hoc est ut circumferentia *QAqa* ducta in $AZ \times TZ \times Pp \div PG$ ad $2MP \times AT$ *quad.*

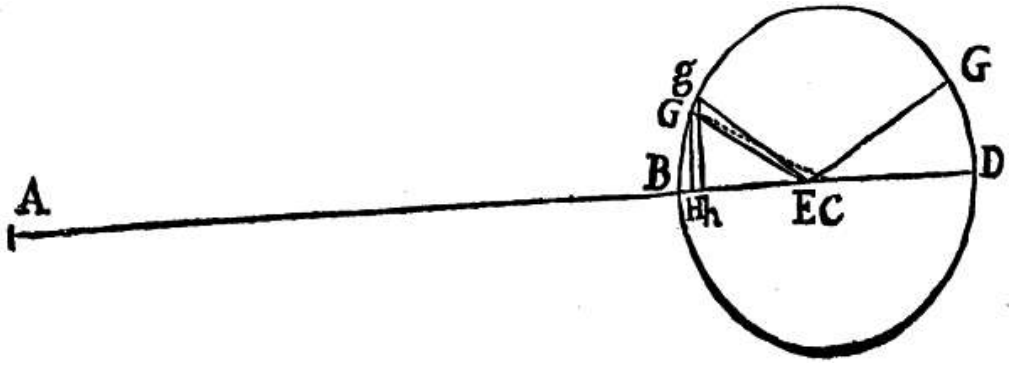
Corol. 3. Proinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuatâ Variatio illa menstrua generari posset, est ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $AZ \times TZ \times Pp \div PG$ ad $2ATq.$ id est (cum *Pp* sit ad *PG* ut Sinus Inclinationis prædictæ ad Radium, & $AZ \times TZ \div AT$ sit ad $\frac{1}{2}AT$ ut sinus duplicati anguli *ATn* ad Radium) ut inclinationis ejusdem Sinus ductus in Sinum duplicatæ distantiæ Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per Propositionem superiorem) ad angulum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times Pp \div PG$ ad *AT cub.* id est ut $\{IT \times TG \div AT\} \times \{Pp \div PG\}$ ad *AT*; hoc est ut Sinus duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ductus in $Pp \div PG$ ad radium duplicatum: summa omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam,

(id est spatio horarum $177/_{6}$,) erit ad summam totidem angulorum 33″. 10‴. 33^{iv}. seu 5878″½, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ducta in *Pp* ÷ *PG* ad summam totidem diametrorum; hoc est ut diameter ducta in *Pp* ÷ *PG*, ad circumferentiam; id est si inclinatio sit 5 *gr.* 2′, ut 7 × $/_{10000}$ ad 22, seu 279 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex summa omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, est 164″, seu 2′. 44″.

Prop. XXXV. Prob. XV.

Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.



Sit *AD* Sinus inclinationis maximæ, & *AB* Sinus Inclinationis minimæ. Bisecetur *BD* in *C*, & centro *C*, intervallo *BC*, describatur Circulus *BGD*. In *AC* capiatur *CE* in ea ratione ad *EB* quam *EB* habet ad 2*BA*: Et si dato tempore constituatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Quadraturis, & ad *AD* demittatur perpendiculum *GH*: erit *AH* Sinus inclinationis quæsitæ.

Nam *GEq.* æquale est *GHq.* + *HEq.* = *BHD* + *HEq.* = *HBD* + *HEq.* - *BHq.* = *HBD* + *BEq.* - 2*BH* × *BE* = *BEq.* + 2*EC* × *BH* = 2*EC* × *AB* + 2*EC* × *BH* = 2*EC* × *AH*. Ideoque cum 2*EC* detur, est *GEq.* ut *AH*. Designet jam *AEg* distantiam Nodorum à Quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, & arcus *Gg*, ob datum angulum *GEg*, erit ut distantia *GE*. Est autem *Hh* ad *Gg* ut *GH* ad *GC*, & propterea *Hh* est ut contentum *GH* × *Gg* seu *GH* × *GE*; id est ut {*GH* ÷ *GE*} × *GE qu.* seu {*GH* ÷ *GE*} × *AH*, id est ut *AH* & sinus anguli *AEG* conjunctim. Igitur si *AH* in casu aliquo sit Sinus inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, & propterea sinui illi æqualis semper manebit. Sed *AH* ubi punctum *G* incidit in punctum

alterutrum *B* vel *D* huic Sinui æqualis est, & propterea eidem semper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hac demonstratione supposui angulum *BEG*, qui distantia est Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum *BEG* rectum esse, & *Gg* esse augmentum horarium distantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & inclinationis Variatio horaria (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut contentum sub inclinationis Sinu *AH* & Sinu anguli recti *BEG*, qui est duplicata distantia Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii; id est ut mediocris inclinationis Sinus *AH* ad radium quadruplicatum; hoc est (cum inclinatio illa mediocris sit quasi 5 *gr.* 8′½.) ut ejus Sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 224 ad 10000. Est autem Variatio tota, Sinuum differentiæ *BD* respondens, ad variationem illam horariam ut diameter *BD* ad arcum *Gg*; id est ut diameter *BD* ad semicircumferentiam *BGD* & tempus horarum 2080, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est ut 7 ad 11 & 2080 ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota *BD* ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut 224 × 7 × 2080 ad 110000, id est ut 2965 ad 100, & inde Variatio illa *BD* prodibit 16′. 24″.

Hæc est inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si Nodi in Syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, inclinatio major est ubi Luna versatur in Syzygiis, quàm ubi ea versatur in Quadraturis, excessu 2′. 44″; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio 1′. 22″ Variatio tota mediocris *BD* in Quadraturis Lunaribus diminuta fit 15′. 2″, in ipsius autem Syzygiis aucta fit 17′. 46″. Si Luna igitur in Syzygiis constituatur, Variatio tota, in transitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit 17′. 46″. adeoque si Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis versantur, sit 5 *gr.* 17′. 46″. eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit 5 *gr.* Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus. Nam statuunt Astronomi Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Nodi sunt in Quadraturis & Luna in oppositione Solis, esse quasi 5 *gr.* Ubi verò Nodi sunt in Syzygiis, eandem docent esse 5 *gr.* 17′½ vel 5 *gr.* 18′.

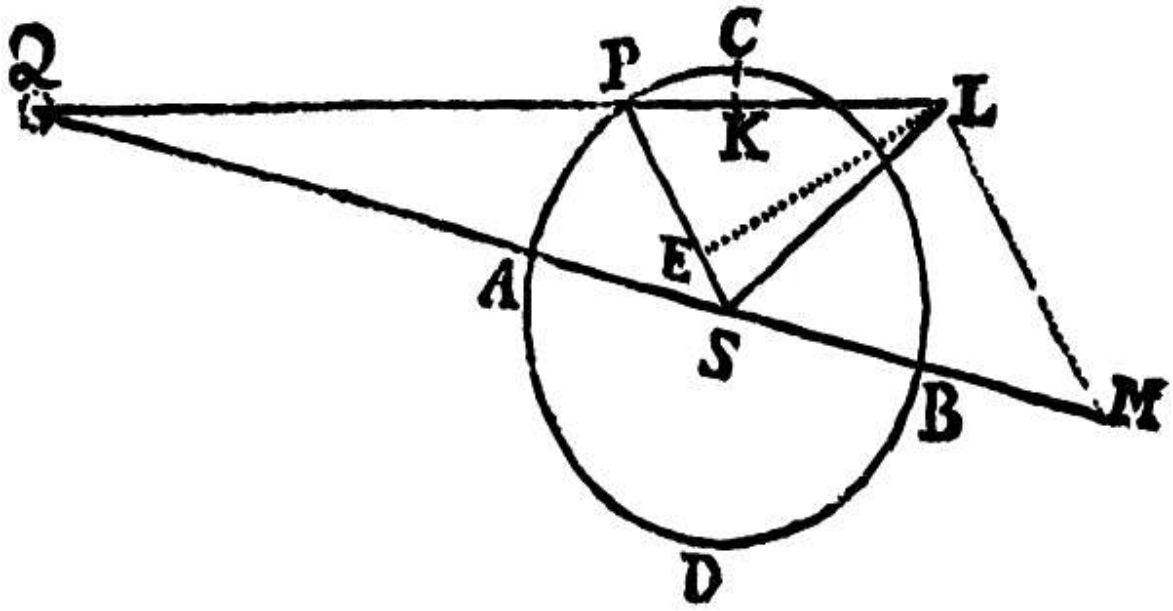
Si jam desideretur Orbis Inclinatio illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat *AB* ad *AD* ut Sinus 5 *gr.* ad Sinum 5 *gr.* 17′. 46″, & capiatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Quadraturis; & erit *AH* Sinus Inclinationis quæsitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis est ejusdem Inclinatio, ubi Luna distat 90 *gr.* à Nodis. Aliis in Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus Nodorum, (ut supra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi potest.

Scholium.

Hactenus de motibus Lunæ quatenus Excentricitas Orbis non consideratur. Similibus computationibus inveni, quod Apogæum ubi in Conjunctione vel Oppositione Solis versatur, progreditur singulis diebus 23′ respectu Fixarum; ubi verò in Quadraturis est, regreditur singulis diebus 16⅓ circiter: quodque ipsius motus medius annuus sit quasi 40 *gr.* Per Tabulas Astronomicas à *Cl. Flamstedio* ad Hypothesin *Horroxii* accommodatas, Apogæum in ipsius Syzygiis progreditur cum motu diurno 24′. 28″, in Quadraturis autem regreditur cum motu diurno 20′. 12″, & motu medio annuo 40 *gr.* 41′ fertur in consequentia. Quod differentia inter motum diurnum progressivum Apogæi in ipsius Syzygiis, & motum diurnum regressivum in ipsius Quadraturis, per Tabulas sit 4′. 16″, per computationem verò nostram 6′⅔, vitio Tabularum tribuendum esse suspicamur. Sed neque computationem nostram satis accuratam esse putamus. Nam rationem quandam ineundo prodiere Apogæi motus diurnus progressivus in ipsius Syzygiis, & motus diurnus regressivus in ipsius Quadraturis, paulo majores. Computationes autem, ut nimis perplexas & approximationibus impeditas, neque satis accuratas, apponere non lubet.

Prop. XXXVI. Prob. XVI.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.



Solis vis *ML* seu *PS*, in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 638092,6. Et vis *SM* - *LM* seu 2*PK* in Syzygiis Lunaribus est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum à centro Terræ, id est in ratione 60½ ad 1; adeoque vis prior in superficie Terræ est ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi Mare deprimitur in locis quæ 90 *gr.* distant à Sole. Vi alterâ quæ duplo major est Mare elevatur, & sub Sole & in regione Soli opposita. Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 *gr.* distant à Sole, sive elevet eandem in regionibus sub Sole & Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac si tota in regionibus sub Sole & Soli oppositis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 *gr.* distant à Sole nil ageret.

Corol. Hinc cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 291, efficiat ut altitudo Aquæ sub Æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensura pedum Parisiensium 85200, vis Solaris, de qua egimus, cum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 291 ad 12868200 seu 1 ad 44221, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub Sole & Soli oppositis superet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus distant à Sole, mensura tantum pedis unius Parisiensis & digitorum undecim. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85200 ut 1 ad 44221.

Prop. XXXVII. Prob. XVII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda est ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii *Avonæ*, ad lapidem tertium infra *Bristoliam*, tempore verno & autumnali totus aquæ ascensus in Conjunctione & Oppositione Luminarium (observante *Samuele Sturmio*) est pedum plus minus 45, in Quadraturis autem est pedum tantum 25: Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore versantium & mediocriter à Terra distantium, sunto vires *S* & *L*. Et quoniam Luna in Quadraturis, tempore verno & autumnali extra Æquatorem in declinatione graduum plus minus 23½ versatur, & Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad mare movendum minor sit, idque (quantum sentio) in duplicata ratione Sinus complementi declinationis quam proximè, vis Lunæ in Quadraturis, (cum sinus ille sit ad radium ut 91706 ad 100000) erit $/_{1000}$ *L*, & summa virium in Syzygiis erit *L* + *S*, ac differentia in Quadraturis $/_{1000}$ *L* - *S*, adeoque *L* + *S* erit ad $/_{1000}$ *L* - *S* ut 45 ad 25 seu 9 ad 5, & inde 5*L* + 5*S* æqualis erit $/_{1000}$ *L* - 9*S*, & 14*S* æqualis $/_{1000}$ *L*, & propterea *L* ad *S* ut 14000 ad 2569 seu $5/_{15}$ ad 1. In Portu *Plymuthi* æstus maris (ex observatione *Samuelis Colepressi*) ad pedes plus minus sexdecim, altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æstus in Syzygiis Lunæ superare potest altitudinem ejus in Quadraturis pedibus septem vel octo. Si excessus mediocris his temporibus sit pedum septem cum dimidio; æstus in Syzygiis ascendet ad pedes 19¾, in Quadraturis ad pedes 12¼, & sic *L* + *S* erit ad $/_{1000}$ *L* - *S* ut 19¾ ad 12¼, & inde *L* ad *S* ut 734 ad 100 seu 7⅓ ad 1. Est igitur vis Lunæ ad vim Solis per computationem priorem ut $5/_{15}$ ad 1, per posteriorem ut 7⅓ ad 1. Donec aliquid certius ex Observationibus accuratius institutis constiterit, usurpabimus proportionem mediocrem 6⅓ ad 1. Unde cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821.

Corol. 1. Igitur cum aqua vi Solis agitata ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum ascendat, eadem vi Lunæ ascendet ad altitudinem pedum duodecim. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos

abunde sufficit, & quantitati motuum probe respondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem latè patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius est & latius patet, æstus dicuntur esse majores quàm in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus sit æstus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor esse debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, ascensus aquæ intra Tropicos minor est quàm in Zonis temperatis, propter angustiam Maris inter *Africam* & Australem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit ascendere nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa fluxus & refluxus in Insulis, quæ à littoribus longissimè absunt, perexiguus esset solet. In Portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus sunt solito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepstowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa Milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40 vel 50 & amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadosorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad littora verò quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo æstus respondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cum vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821, perspicuum est quod vis illa sit longè minor quàm quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. In æstu solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum est ad Solis vim consimilem ut 6⅓ ad 1, & vires illæ sunt ut densitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; erit densitas Lunæ ad densitatem Solis ut 6⅓ ad 1 directè & cubus diametri Solis ad cubum diametri Lunæ inversè, id est (cum diametri mediocres apparentes Solis &

Lunæ sint 31′. 27″. & 32′. 12″.) ut 34 ad 5. Densitas autem Solis erat ad densitatem Terræ ut 100 ad 387, & propterea densitas Lunæ est ad densitatem Terræ ut 600 ad 387, seu 9 ad 5 quam proximè. Est igitur corpus Lunæ densius & magis terrestre quàm Terra nostra.

Corol. 4. Unde cum vera diameter Lunæ sit ad veram diametrum Terræ ut 1 ad 3,6½, erit massa Lunæ ad massam Terræ ut 1 ad 26 quam proximè.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in superficie Lunæ, erit quasi duplo minor quàm gravitas acceleratrix in superficie Terræ.

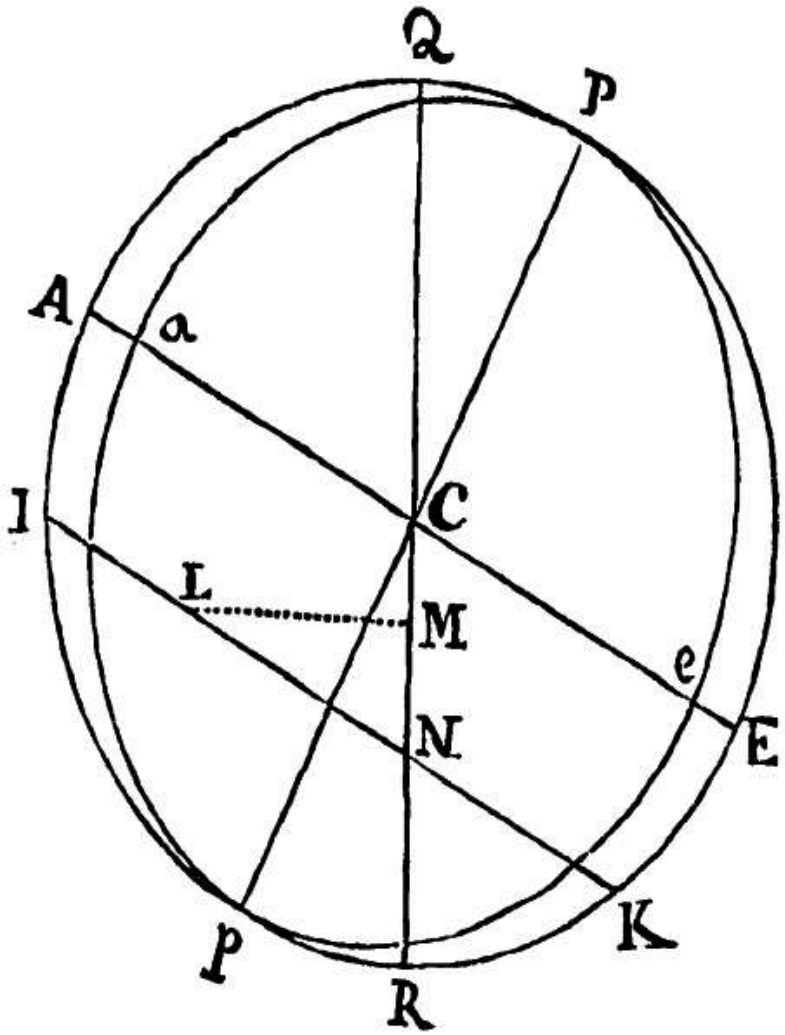
Prop. XXXVIII. Prob. XVIII.

Invenire figuram corporis Lunæ.

Si corpus Lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, esset ad vim Lunæ, qua mare nostrum in partibus & sub Luna & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id est ut 26 ad 1 & 5 ad 18 conjunctim seu 65 ad 9. Unde cum mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes duodecim, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes fere nonaginta. Eaque de causa figura Lunæ Sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum Terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 180. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Corol. Inde verò fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes ob parvitatem virium agitantium essent longè tardissimæ: adeò ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem superius allatam respicere, neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

Lemma I.



Si APEp *Terram designet uniformiter densam, centroque* C *& polis* P, p *& æquatore* AE *delineatam; & si centro* C *radio* CP *describi intelligatur sphæra* Pape*; sit autem* QR *planum, cui recta à centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; & Terræ totius exterioris* PapAPepE*, quæ Sphærâ modò descriptâ altior est, particulæ singulæ conantur recedere hinc inde à plano* QR*, sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia à plano: erit vis & efficacia tota particularum omnium, ad Terram circulariter movendam, quadruplo minor quàm vis tota particularum totidem in Æquatoris circulo* AE*, uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam. Et motus iste circularis circa axem in plano* QR *jacentem, & axi* Pp *perpendiculariter insistentem, peragetur.*

Sit enim *IK* circulus minor Æquatori *AE* parallelus, sitque *L* particula Terræ in circulo illo extra globum *Pape* sita. Et si in planum *QR* demittatur perpendiculum *LM*, vis tota particulæ illius ad Terram circa ipsius centrum convertendum proportionalis erit eidem *LM*: & si hæc vis *LM* (per Legum Corol. 2.) distinguatur in vires *LN*, *NM*; efficacia virium *MN* particularum omnium *L*, in circuitu Terræ totius extra globum *Pape* consistentium, ad Terram circa ipsius centrum secundum ordinem literarum *ApEP* convertendam, erit ad efficaciam virium *LN* particularum omnium *L*, ad Terram circa ipsius centrum secundum ordinem contrarium earundem literarum convertendam, ut tria ad duo. Ideoque efficacia virium omnium *MN* erit ad excessum efficaciæ hujus supra efficaciam virium omnium *LN* ut tria ad unum. Et si particulæ illæ omnes locarentur in Æquatore, efficacia virium omnium *LN* evanesceret, & efficacia virium omnium *MN* augeretur in ratione quatuor ad tria. Quare excessus ille, qui est efficacia absoluta particularum in locis propriis, est pars quarta efficaciæ particularum earundem in Æquatore. Motus autem æquinoctiorum est ut hæc efficacia. Singula examinet qui volet. Brevitati consulo.

Lemma II.

Motus autem Terræ totius circa axem illum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli circa axem eundem, in ratione composita ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque, ad duo quadrata ex diametro; id est in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 & 1000000.

Est enim motus Cylindri circa axem suum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuissimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circa axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circa diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

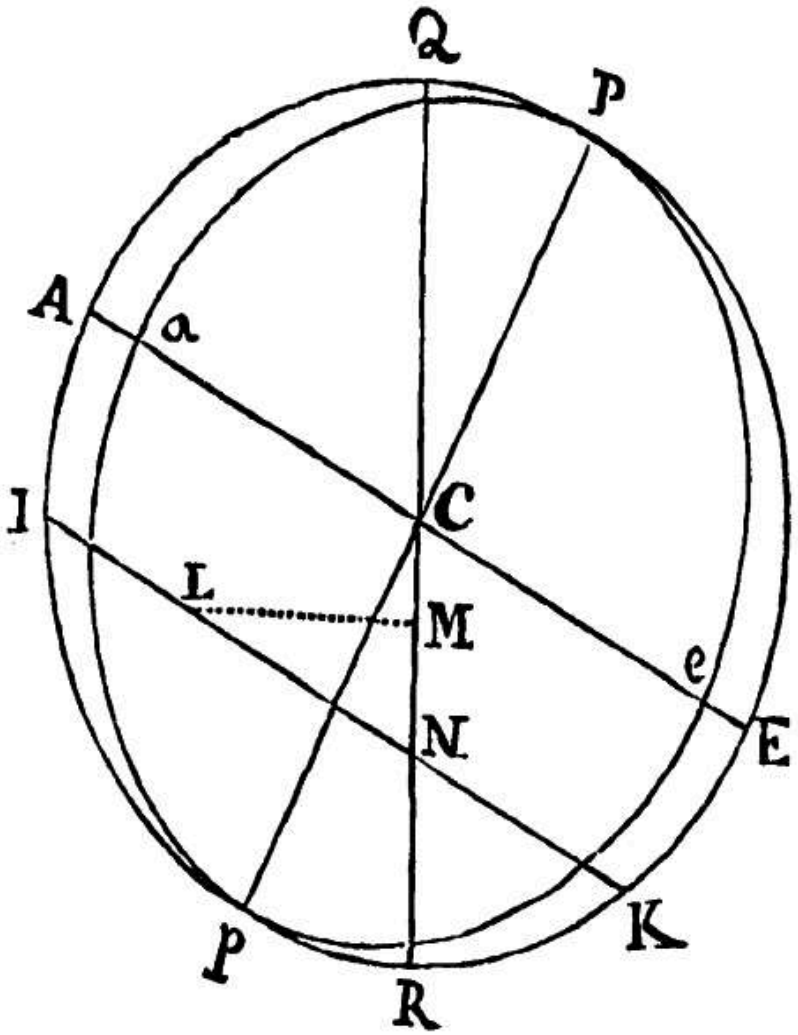
Lemma III.

Si annulus, Terra omni reliqua sublata, solus in orbe Terræ motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum 23½ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida & firma constaret.

Prop. XXXIX. Prob. XIX.

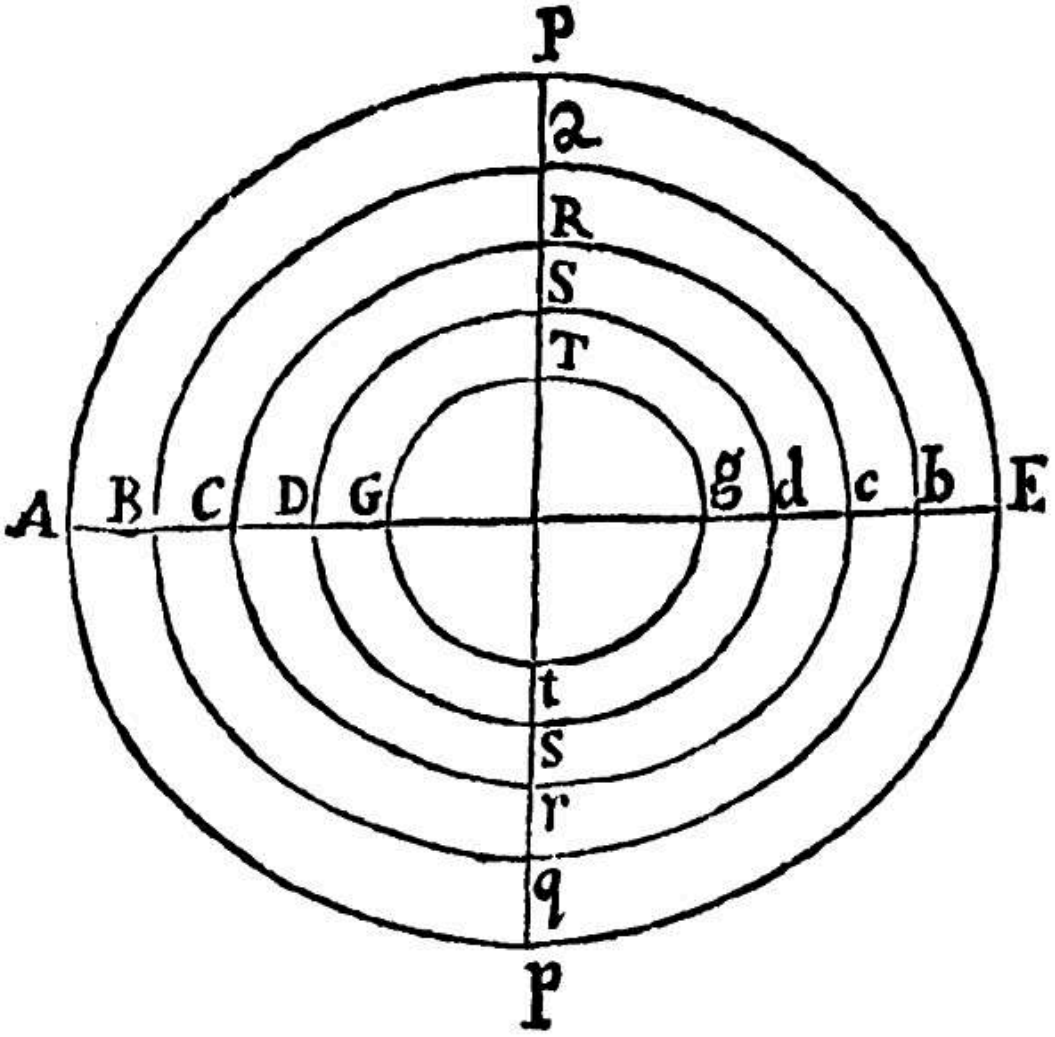
Invenire Præcessionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi sunt in Quadraturis, erat 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. & hujus dimidium 8″. 17‴. 38^{iv}. 18^{v}. (ob rationes & supra explicatas) est motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto sidereo 20 *gr.* 11′. 46″. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim 20 *gr.* 11′. 46″. in antecedentia; & si plures essent Lunæ motus Nodorum cujusque, per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent reciprocè ut tempora periodica; & propterea si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad 20 *gr.* 11′. 46″. ut dies sidereus horarum 23. 56′. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id est ut 1436 ad 39343. Et par est ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuò non contingant, sive liquescant & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.



Fingamus igitur quod annulus iste quoad quantitatem materiæ æqualis sit Terræ omni *PapAPepE*, quæ globo *PapE* superior est; & quoniam globus iste est ad Terram illam superiorem ut *aC qu.* ad *AC qu.* - *aC qu.* id est (cum Terræ diameter minor *PC* vel *aC* sit ad diametrum majorem *AC* ut 689 ad 692) ut 4143 ad 474721 seu 1000 ad 114585; si annulus iste Terram secundum æquatorem cingeret, & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus Lem. II.) ut 4143 ad 474721 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est ut 4143 ad 439248: ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli & globi, ut 4143 ad 443991. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius Nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem ut 4143 ad 443391; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in

eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex globo & annulo compositi, ad motum 20 *gr.* 11′. 46″, ut 1436 ad 39343 & 4143 ad 443391 conjunctim, id est ut 1 ad 2932. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque adeò quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3*IT*, *in Fig. pag. 444.*) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. I.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ *PapAPepE*, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet quadruplo minor quàm prius. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad 20 *gr.* 11′. 46″. ut 1 ad 11728, ac proinde fieret 6″. 12‴. 2^{iv}. Hæc est præcessio Æquinoctiorum à vi Solis oriunda. Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis ut 6⅓ ad 1, & hæc vis pro quantitate sua augebit etiam præcessionem Æquinoctiorum. Ideoque præcessio illa ex utraque causa oriunda jam fiet major in ratione 7⅓ ad 1, & sic erit 45″. 24‴. 15^{iv}. Hic est motus punctorum æquinoctialium ab actionibus Solis & Lunæ in partes Terræ, quæ globo *Pape* incumbunt, oriundus. Nam Terra ab actionibus illis in globum ipsum exercitis nullam in partem inclinari potest.



Designet jam *APEp* corpus Terræ figurâ Ellipticâ præditum, & ex uniformi materiâ constans. Et si distinguatur idem in figuras innumeras Ellipticas concentricas & consimiles, *APEp*, *BQbq*, *CRcr*, *DSds*, &c. quarum diametri sint in progressione Geometrica: quoniam figuræ consimiles sunt, vires Solis & Lunæ, quibus puncta æquinoctialia regrediuntur, efficerent ut figurarum reliquarum seorsim spectatarum puncta eadem æquinoctialia eadem cum velocitate regrederentur. Et par est ratio motus orbium singulorum *AQEq*, *BRbr*, *CScs*, &c. qui sunt figurarum illarum differentiæ. Orbis uniuscujusque, si solus esset, puncta æquinoctialia eadem cum velocitate regredi deberent. Nec refert utrum orbis quilibet densior sit an rarior, si modò ex materia uniformiter densa confletur. Unde etiam si orbes ad centrum densiores sint quàm ad circumferentiam, idem erit motus æquinoctiorum Terræ totius ac prius; si

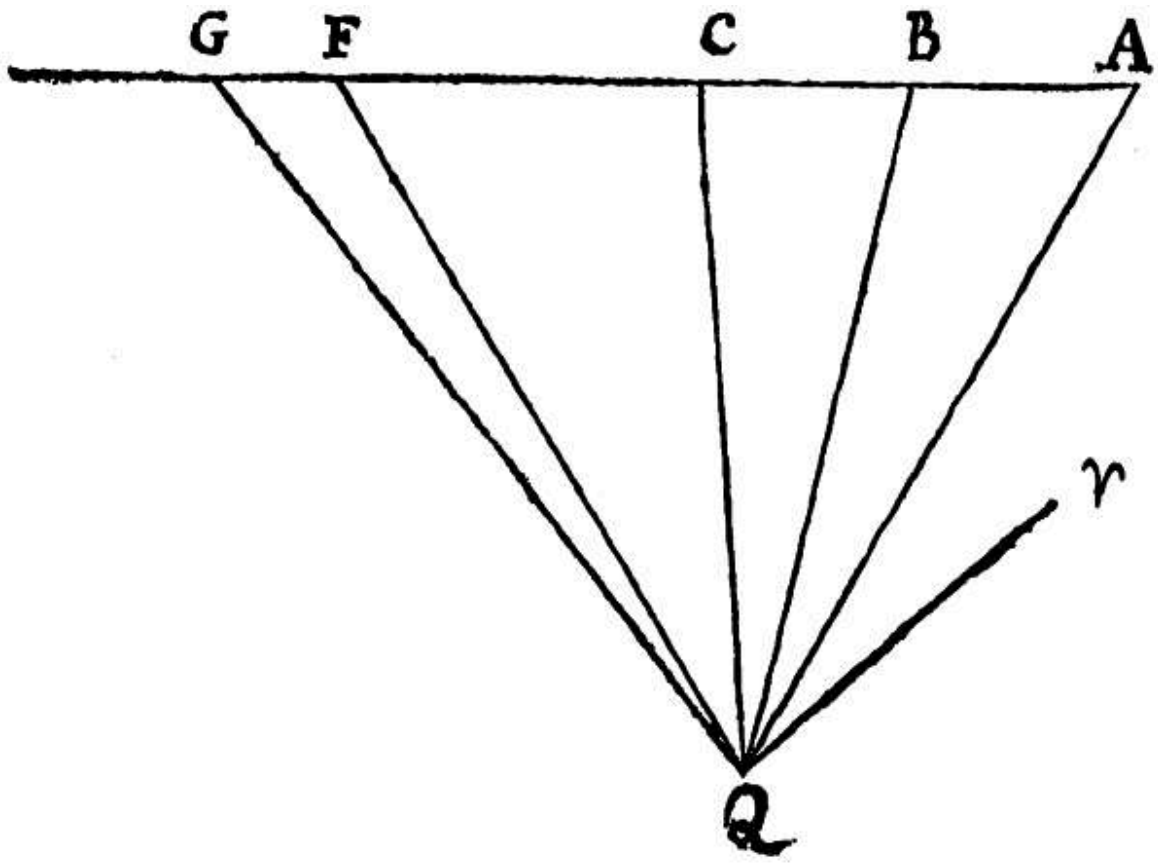
modo orbis unusquisque seorsim spectatus ex materia uniformiter densa constet, & figura orbis non mutetur. Quod si figuræ orbium mutentur, Terraque ad æquatorem *AE*, ob densitatem materiæ ad centrum, jam altius ascendat quàm prius; regressus æquinoctiorum ex aucta altitudine augebitur, idque in orbibus singulis seorsim existentibus, in ratione majoris altitudinis materiæ juxta orbis illius æquatorem; in Terra autem tota in ratione majoris altitudinis materiæ juxta æquatorem orbis non extimi *AQEq*, non intimi *Gg*, sed mediocris alicujus *CScs*. Terram autem ad centrum densiorem esse, & propterea sub Æquatore altiorem esse quàm ad polos in majore ratione quàm 692 ad 689, in superioribus insinuavimus. Et ratio majoris altitudinis colligi ferè potest ex majore diminutione gravitatis sub æquatore, quàm quæ ex ratione 692 ad 689 consequi debeat. Excessus longitudinis penduli, quod in Insula *Goree* & in illâ *Cayennæ* minutis singulis secundis oscillatur, supra longitudinem Penduli quod *Parisiis* eodem tempore oscillatur, à *Gallis* inventi sunt pars decima & pars octava digiti, qui tamen ex proportione 692 ad 689 prodiere $/_{1000}$ & $/_{1000}$. Major est itaque longitudo Penduli *Cayennæ* quàm oportet, in ratione ⅛ ad $/_{1000}$, seu 1000 ad 712; & in Insula *Goree* in ratione $/_{10}$ ad $/_{1000}$ seu 1000 ad 810. Si sumamus rationem mediocrem 1000 ad 760; minuenda erit gravitas Terræ ad æquatorem, & ibidem augenda ejus altitudo, in ratione 1000 ad 760 quam proximè. Unde motus æquinoctiorum (ut supra dictum est) auctus in ratione altitudinis Terræ, non ad orbem extimum, non ad intimum, sed ad intermedium aliquem, id est, non in ratione maxima 1000 ad 760, non in minima 1000 ad 1000, sed in mediocri aliqua, puta 10 ad 8⅓ vel 6 ad 5, evadet annuatim 54″. 29‴. 6^{iv}.

Rursus hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus est, idque in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Nam distantia particulæ cujusque terrestris à plano *QR*, quo tempore particula illa à plano Eclipticæ longissimè distat, in Tropico suo (ut ita dicam) consistens, diminuitur, per inclinationem planorum Eclipticæ & Æquatoris ad invicem, in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Et in ratione distantiæ illius diminuitur etiam vis particulæ ad æquinoctia movenda. In eadem quoque ratione diminuitur summa virium particulæ ejusdem, in locis hinc inde à Tropico æqualiter distantibus: uti ex prædemonstratis facilè ostendi possit: & propterea vis tota particulæ illius, in revolutione integrâ, ad æquinoctia movenda, ut & vis tota particularum omnium, & motus æquinoctiorum à vi illa oriundus, diminuitur in eadem ratione. Igitur cum inclinatio illa sit 23½ *gr.* diminuendus est motus 54″. 29″ ′. in ratione Sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum 23½) ad Radium 100000. Qua ratione motus iste jam fiet 49″. 58‴. Regrediuntur igitur puncta æquinoctiorum motu annuo (juxta computationem nostram) 49″. 58‴, fere ut Phænomena cœlestia requirunt. Nam regressus ille annuus ex observationibus Astronomorum est 50″.

Descripsimus jam Systema Solis, Terræ & Planetarum: superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

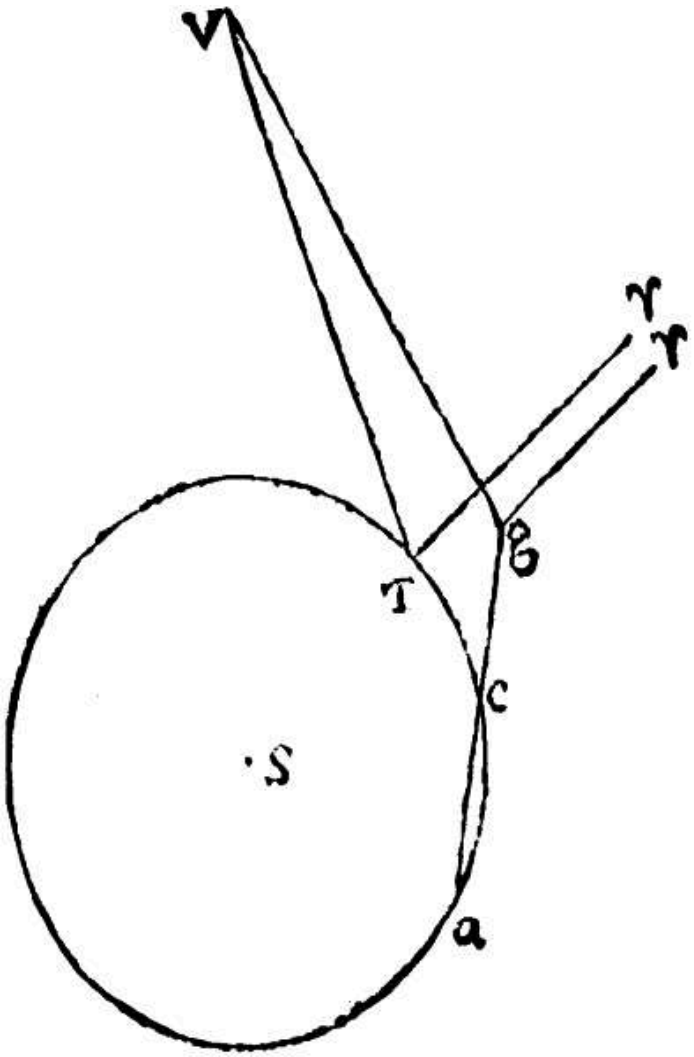
Lemma IV.

Cometas esse Lunâ superiores & in regione Planetarum versari.



Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem, at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs moveri videntur, nunc verò celeriùs. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem celerius fertur, Cometa è Terra spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardiùs fertur, motus Cometæ, (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunto *QA*, *QB*, *QC* observatæ tres longitudines

Cometæ, sub initio motus, sitque *QF* longitudo ultimò observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut sit *AG* ad *AB* ut tempus inter observationem primam & ultimam, ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur *QG*. Et si Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus *QG* longitudo Cometæ tempore Observationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo *AQG*, & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in easdem partes cum Terra, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modò exposui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ meritò



habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri possit. Distantia verò Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet *S* Solem, *acT* Orbem magnum, *a* locum Terræ in observatione prima, *c* locum Terræ in observatione secunda, *T* locum Terræ in observatione ultima, & *T* lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus *TV* æqualis angulo *QF*, hoc est æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut sit *ag* ad *ac* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur *g* ipsi *T* parallela, & capiatur angulus *gV* angulo *QG* æqualis, erit hic angulus *gV* æqualis longitudini Cometæ è loco *g* spectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur à translatione Terræ de loco *g* in

locum *T*: ac proinde *V* locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe Jovis inferior esse solet.

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex Parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas meo computo collocavit disparentes Cometas satis longè infra Jovem. Unde consequens est quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis à Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam à Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ in ratione integra diametri ad diametrum directè & ratione dimidiata lucis ad lucem inversè. Sic minima Capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum à *Cl. Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce verò & claritate capitis superabit caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantiæ Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad √4 inversè, & 12″ ad 30″ directè, id est ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense *Aprili*, ut Author est *Hevelius*, claritate sua pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus,

plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter Capillitii Cometarum rarò superet 8′ vel 12′, diameter verò Nuclei seu stellæ centralis sit quasi decima vel fortè decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux eorum cum luce Saturni non rarò conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certè ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quàm Planetæ, qui hic sunt, illustrantur à Stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis à se reflexa Planetas æmuletur. Inde verisimile fit Cometas longe infra Sphæram Saturni descendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia Cometarum, ne fumus à Capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quàm capillitii ad Nucleum capitis. Igitur si imaginemur lucem hanc omnem congregari & intra discum Nuclei coarctari, Nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illustrabitur à Sole, adeoque erit Soli multò propior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu Cometarum à Terra Solem versus, ac decrescente in eorum recessu à Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior Anni 1665 (observante *Hevelio*,) ex quo conspici cæpit, remittebat semper de motu suo, adeoque præterierat Perigæum; Splendor verò capitis nihilominus indies crescebat, usque dum

Cometa radiis Solaribus obtectus desiit apparere. Cometa Anni 1683, observante eodem *Hevelio*, in fine Mensis *Julii* ubi primum conspectus est, tardissimè movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur usque ad *Sept. 4.* quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug. 6.* esse tantum 6′. 5″ inclusâ comâ, at *Sept. 2.* esse 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Mensis *Decembris*, & iste Anni 1680 circa finem ejusdem Mensis, celerrimè movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modò exierant de radiis Solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decem. 1.* majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decem. 16.* (jam in Perigæo existens) magnitudine parùm, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan. 7. Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem graduum à Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decem. 15 & 17* apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore Nubium juxta Solem occidentum. *Decem. 26.* velocissimè motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan. 3.* apparebat ut Stella quartæ, *Jan. 9.* ut Stella quintæ, *Jan. 13.* ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. *Jan. 25.* vix æquabat Stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à Terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga Solis maximè splenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissimè moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ vicinioris qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quàm in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quàm sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longè major sita est à latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ Soli ut plurimum viciniores magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus suos etiam contra cursum Planetarum diutissimè conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si è Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata, situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

Prop. XL. Theor. XXI.

Cometas in Sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt, orbes erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in ratione

sesquialtera transversorum axium. Ideoque Cometæ maxima ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis orbis Cometæ sit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est ad annos 30, ut 4√4 (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

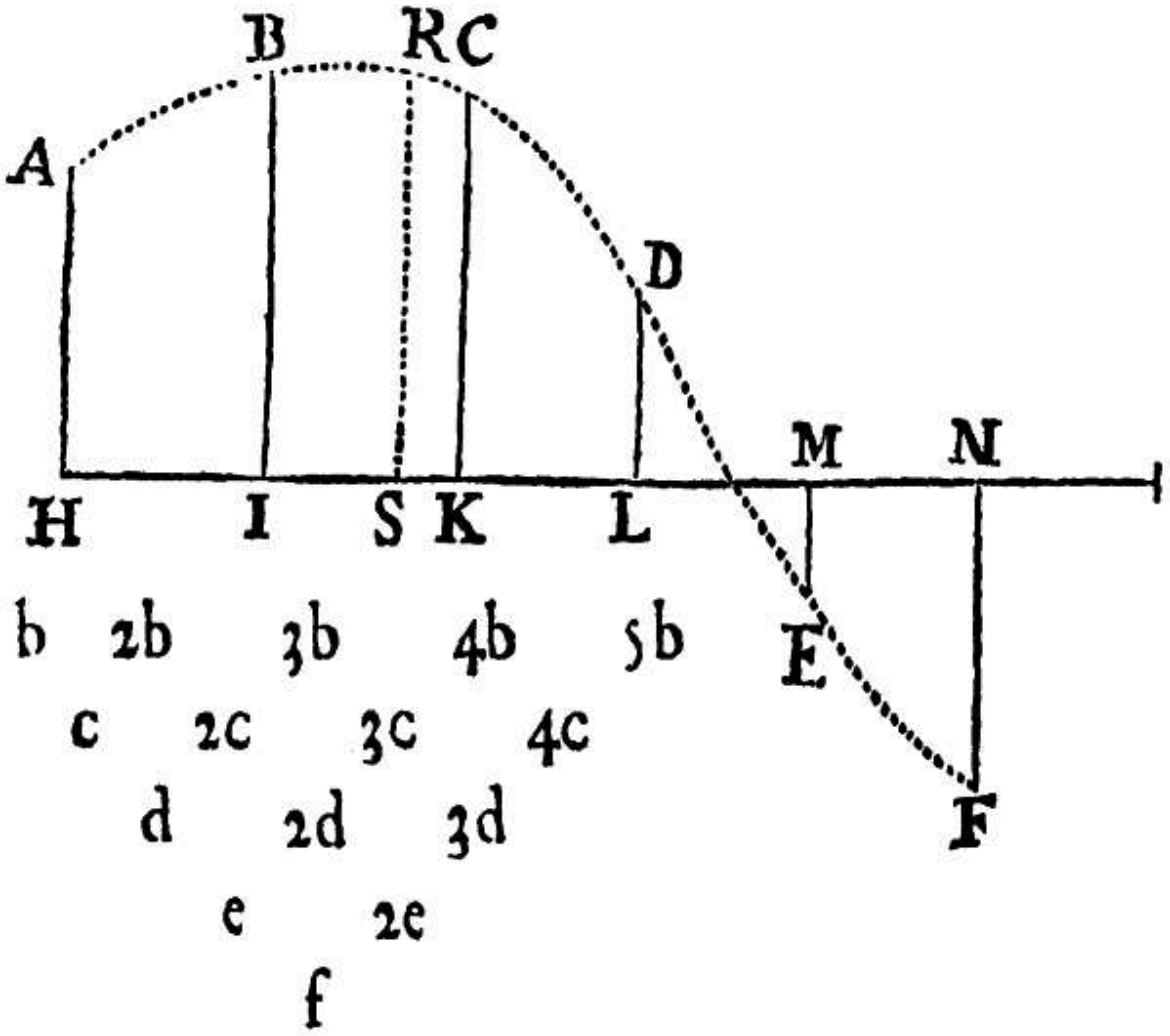
Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ absque erroribus sensibilibus adhiberi possunt.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis erit semper ad velocitatem Planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolventis, in dimidiata ratione duplicatæ distantiæ Cometæ à centro Solis ad distantiam Planetæ à centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum transversam, esse partium 100000000, & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes 71675½. Ideoque Cometa in eadem Telluris à Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut √2 ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes 101364½. In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in dimidiata ratione distantiarum respectivè, ideoque datur.

Lemma V.

Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.



Cas. 1. Si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* æqualia sunt intervalla *HI*, *IK*, *KL*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK* &c. differentias primas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, &c. secundas *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias *d*, 2*d*, 3*d*, &c. id est, ita ut sit *HA* - *BI* = *b*, *BI*- *CK* = 2*b*, *CK* - *DL* = 3*b*, *DL* + *EM* = 4*b*, - *EM* + *FN* = 5*b*, &c. dein *b* - 2*b* = *c* &c. & sic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic est *f*. Deinde erecta quacunque perpendiculari *RS*, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæsitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla *HI*, *IK*, *KL*, *LM*, &c. unitates esse, & dic *AH* = *a*, - *HS* = *p*, ½*p* in - *IS* = *q*, ⅓*q* in + *SK* = *r*, ¼*r* in + *SL* = *s*, $/_5 s$ in + *SM* = *t*; pergendo videlicet ad usque penultimum perpendiculum *ME*, & præponendo signa negativa terminis *HS*, *IS*, &c. qui jacent ad partes puncti *S* versus *A*, & signa affirmativa terminis *SK*, *SL*, &c. qui jacent ad alteras partes puncti *S*. Et signis probe observatis erit *RS* = *a* + *bp* + *cq* + *dr* + *es* + *ft* &c.

Cas. 2. Quod si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, &c. inæqualia sint intervalla *HI*, *IK*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*; secundas per intervalla bina divisas *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias per intervalla terna divisas *d*, 2*d*, 3*d*, &c. quartas per intervalla quaterna divisas *e*, 2*e*, &c. & sic deinceps; id est ita ut sit $b = \{AH - BI\} \div HI$, $2b = \{BI - CK\} \div IK$, $3b = \{CK - DL\} \div KL$ &c. dein $c = \{b - 2b\} \div HK$, $2c = \{2b - 3b\} \div IL$, $3c = \{3b - 4b\} \div KM$ &c. Postea $d = \{c - 2c\} \div HL$, $2d = \{2c - 3c\} \div IM$ &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $- HS = p$, p in $- IS = q$, q in $+ SK = r$, r in $+ SL = s$, s in $+ SM = t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum *ME*, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproximè. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quam proximè cum area curvæ illius quadrandæ. Potest autem Parabola per Methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

Lemma VI.

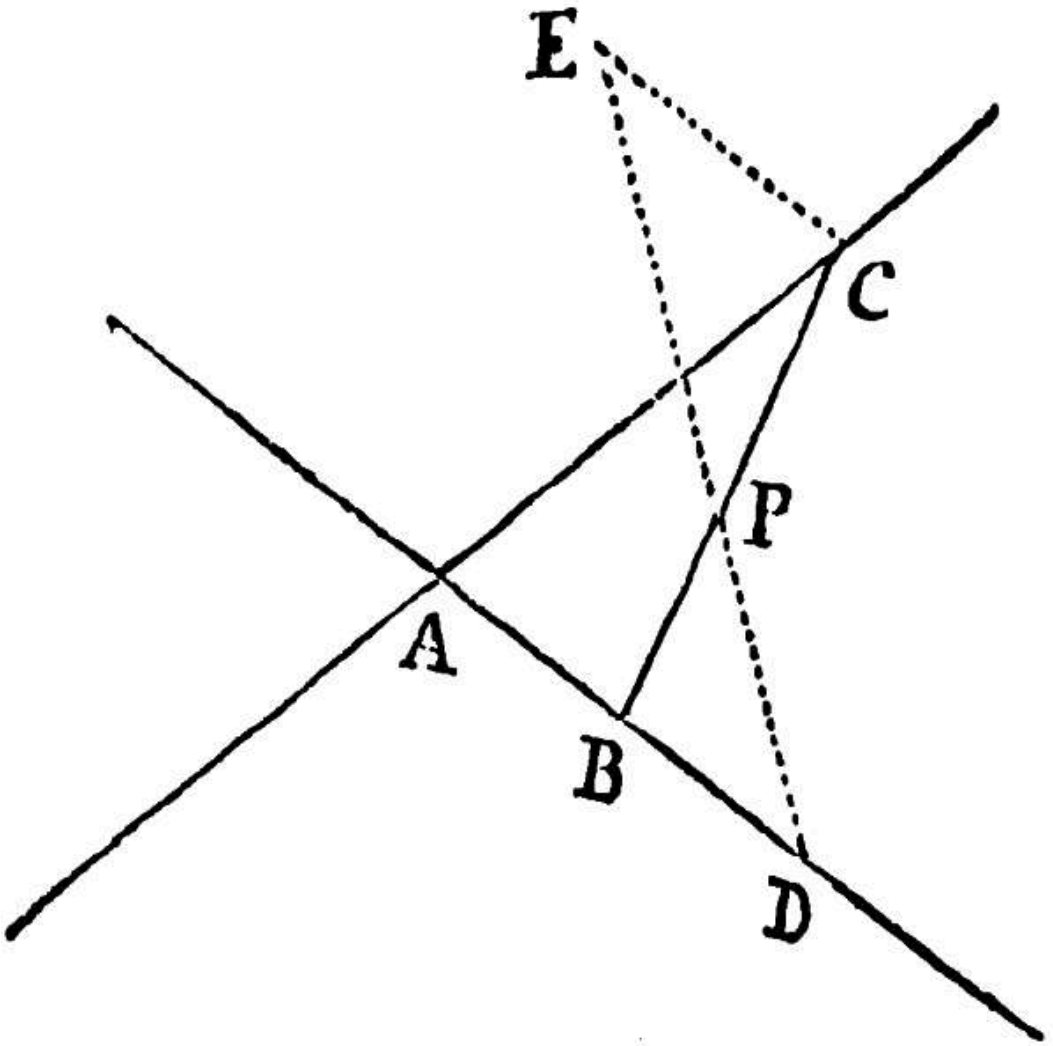
Ex observatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent *HI*, *IK*, *KL*, *LM* tempora inter observationes, (*in Fig. præced.*) *HA*, *IB*, *KC*, *LD*, *ME*, observatas quinque longitudines Cometæ, *HS* tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E* duci intelligatur curva regularis *ABCDE*; & per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata *RS*, erit *RS* longitudo quæsita.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

Lemma VII.



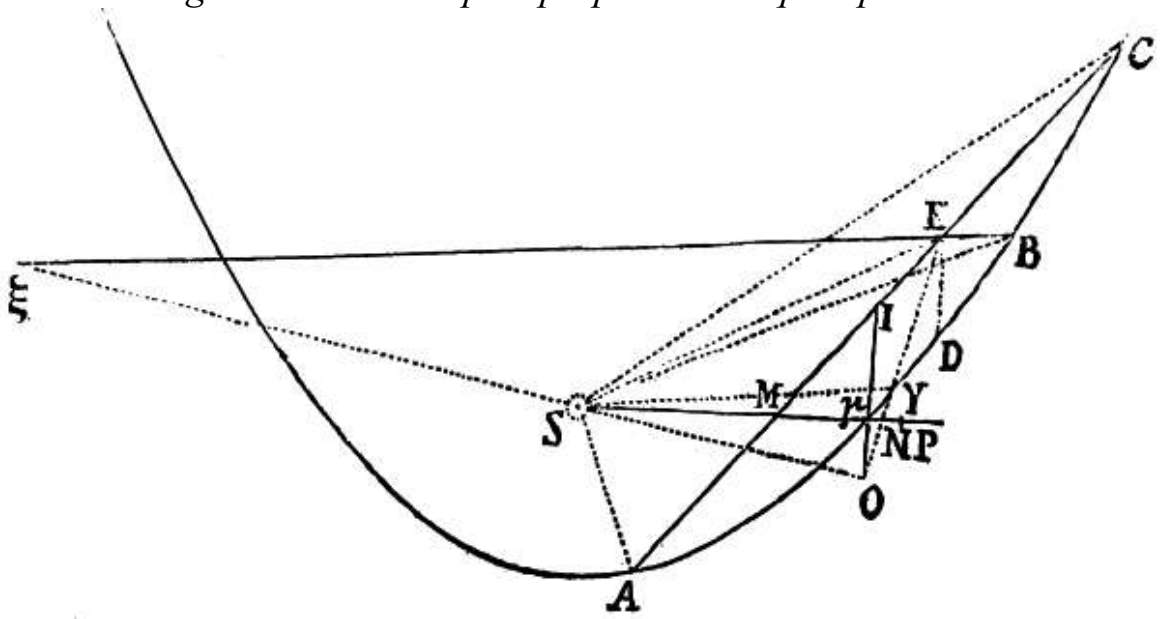
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC*, cujus partes* PB*,* PC*, rectis duabus positione datis* AB*,* AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q. E. F.*

Lemma VIII.

Sit ABC *Parabola umbilicum habens* S. *Chordâ* AC *bisectâ in* I *abscindatur segmentum* ABCI*, cujus diameter sit* Iμ *& vertex* μ. *In* Iμ *productâ capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius* Iμ. *Jungatur* OS*, & producatur ea ad* ξ*, ut sit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et si Cometa* B *moveatur in arcu*

CBA, *& agatur* ξB *secans* AC *in* E*: dico quod punctum* E *abscindet de chorda* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*



Jungatur enim *EO* secans arcum Parabolicum *ABC* in *Y*, & erit area curvilinea *AEY* ad aream curvilineam *ACY* ut *AE* ad *AC* quamproximè. Ideoque cum triangulum *ASE* sit ad triangulum *ASC* in eadem ratione, erit area tota *ASEY* ad aream totam *ASCY* ut *AE* ad *AC* quamproximè. Cum autem *ξO* sit ad *SO* ut 3 ad 1 & *EO* ad *YO* prope in eadem ratione, erit *SY* ipsi *EB* parallela quamproximè, & propterea triangulum *SEB*, triangulo *YEB* quamproximè æquale. Unde si ad aream *ASEY* addatur triangulum *EYB*, & de summa auferatur triangulum *SEB*, manebit area *ASBY* areæ *ASEY* æqualis quamproximè, atque adeo ad aream *ASCY* ut *AE* ad *AC*. Sed area *ASBY* est ad aream *ASCY* ut tempus descripti arcus *AB* ad tempus descripti arcus totius. Ideoque *AE* est ad *AC* in ratione temporum quamproximè. *Q. E. D.*

Lemma IX.

Rectæ Iμ *&* μM *& longitudo* AIC ÷ 4Sμ *æquantur inter se. Nam* 4Sμ *est latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem* B.

Lemma X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P*, ut* μN *sit pars tertia ipsius* μI*, &* SP *sit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ*. Cometa quo tempore describit arcum* AμC*, si progrederetur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si velocitate quam habet in μ, eodem tempore progrediatur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ; area quam Radio ad punctum *S* ducto describeret, æqualis esset areæ Parabolicæ *ASC*μ. Ideoque contentum sub longitudine in Tangente descripta & longitudine *S*μ, esset ad contentum sub longitudinibus *AC* & *SM*, ut area *ASC*μ ad triangulum *ASCM*, id est ut *SN* ad *SM*. Quare *AC* est ad longitudinem in tangente descriptam ut *S*μ ad *SN*. Cum autem velocitas Cometæ in altitudine *SP* sit ad velocitatem in altitudine *S*μ in dimidiata ratione *SP* ad *S*μ inversè, id est in ratione *S*μ ad *SN*, longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in Tangente descriptam ut *S*μ ad *SN*. Igitur *AC* & longitudo hac nova velocitate descripta, cum sint ad longitudinem in Tangente descriptam in eadem ratione, æquantur inter se. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine *S*μ + ⅔*I*μ, eodem tempore describeret chordam *AC* quamproximè.

Lemma XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine SN *seu* Sμ + ⅓Iμ *demitteretur, ut caderet in Solem, & ea semper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem qua urgetur sub initio; idem tempore in orbe suo describat arcum* AC*, descensu suo describeret spatium longitudini* Iμ *æquale.*

Nam Cometa quo tempore describat arcum Parabolicum *AC*, eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine *SP* (per Lemma novissimum) describet chordam *AC*, adeoque eodem tempore in circulo cujus semidiameter esset *SP* revolvendo, describeret arcum cujus longitudo esset ad arcus Parabolici chordam *AC* in dimidiata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine *SP*, cadendo de altitudine illa in Solem, describeret eodem tempore (per Scholium Prop. IV. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis *SP*, id est spatium *AIq.* ÷ 4*SP*. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine *SN* sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine *SP*, ut *SP* ad *Sμ*: Cometa pondere quod habet in altitudine *SN*

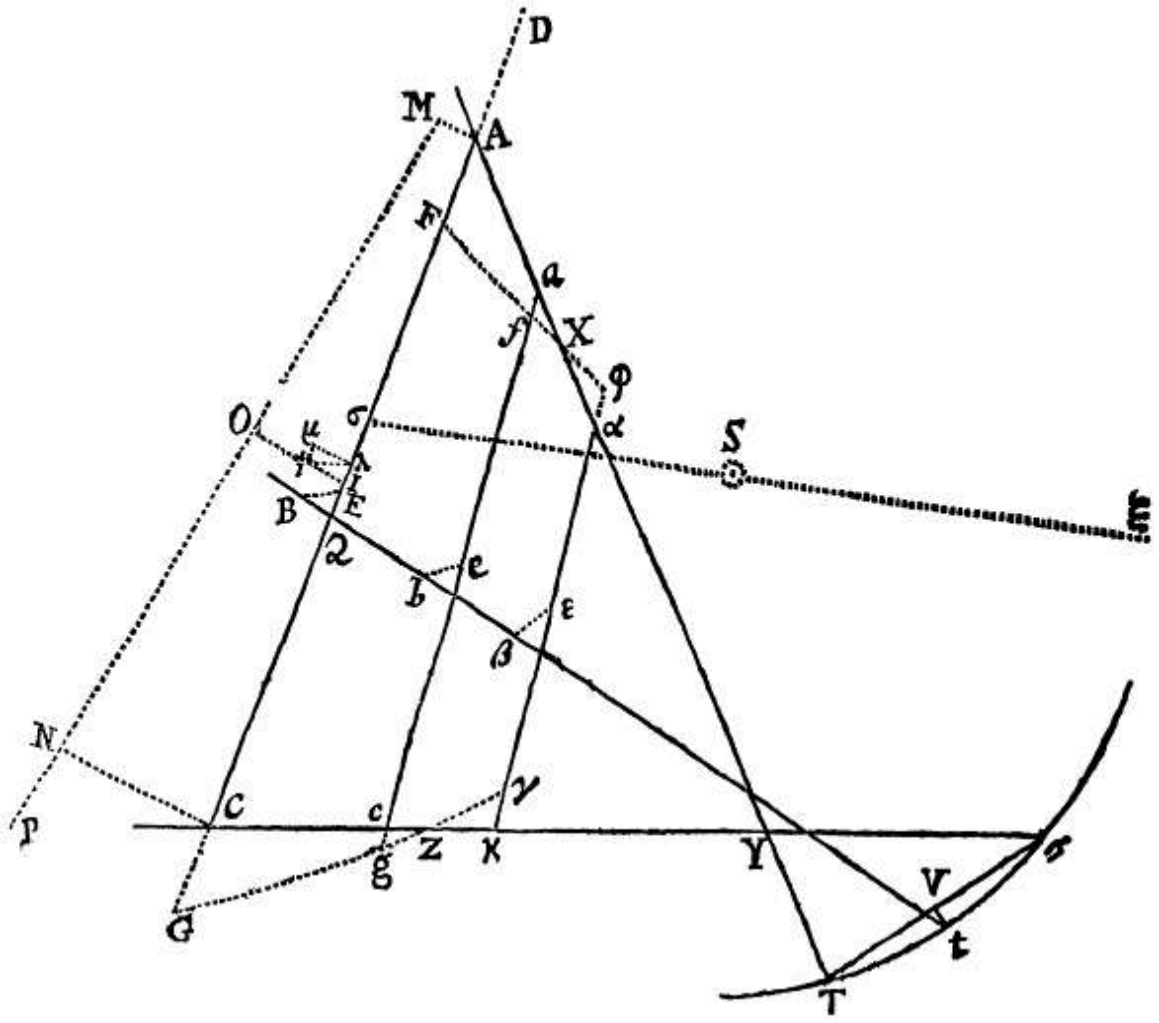
eodem tempore, in Solem cadendo, describet spatium *AIq*. ÷ 4*S*μ, id est spatium longitudini *I*μ vel *M*μ æquale. *Q. E. D.*

Prop. XLI. Prob. XX.

Cometæ in Parabola moventis Trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimodè aggressus, composui Problemata quædam in Libro primo quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulò simpliciorem excogitavi.

Seligantur tres observationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos. Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus Cometæ locus per Lemma sextum.



Designent *S* Solem, *T*, *t*, τ tria loca Terræ in orbe magno, *TA*, *tB*, τ*C* observatas tres longitudines Cometæ, *V* tempus inter observationem primam & secundam, *W* tempus inter secundam ac tertiam, *X* longitudinem quam Cometa toto illo tempore ea cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole distantia, describere posset, & *tV* perpendiculum in chordam *T*τ. In longitudine media *tB* sumatur utcunque punctum *B*, & inde versus Solem *S* ducatur linea *BE*, quæ sit ad Sagittam *tV*, ut contentum sub *SB* & *St* quadrato ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt *SB* & tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium *tB*. Et per punctum *E* agatur recta *AEC*, cujus partes *AE*, *EC* ad rectas *TA* & τ*C* terminatæ, sint ad invicem ut tempora *V* & *W*: Tum per puncta *A*, *B*, *C*, duc circumferentiam circuli, eamque biseca in *i*, ut & chordam *AC* in *I*. Age occultam *Si* secantem *AC* in λ, & comple parallelogrammum *iI*λμ. Cape *I*σ æqualem 3*I*λ, & per Solem *S* age occultam σξ æqualem 3*S*σ + 3*i*λ. Et deletis

jam literis *A*, *E*, *C*, *I*, à puncto *B* versus punctum ξ duc occultam novam *BE*, quæ sit ad priorem *BE* in duplicata ratione distantiæ *BS* ad quantitatem *S*μ + ⅓*i*λ. Et per punctum *E* iterum duc rectam *AEC* eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes *AE* & *EC* sint ad invicem ut tempora inter observationes, *V* & *W*.

Ad *AC* bisectam in *I* erigantur perpendicula *AM*, *CN*, *IO*, quarum *AM* & *CN* sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios *TA* & τα. Jungatur *MN* secans *IO* in *O*. Constituatur rectangulum *iI*λμ ut prius. In *IA* producta capiatur *ID* æqualis *S*μ + ⅔*i*λ, & agatur occulta *OD*. Deinde in *MN* versus *N* capiatur *MP*, quæ sit ad longitudinem supra inventam *X* in dimidiata ratione mediocris distantiæ Telluris à Sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam *OD*. Et in *AC* capiatur *CG* ipsi *NP* æqualis, ita ut puncta *G* & *P* ad easdem partes rectæ *NC* jaceant.

Eadem methodo qua puncta *E*, *A*, *C*, *G*, ex assumpto puncto *B* inventa sunt, inveniantur ex assumptis utcunque punctis aliis *b* & β puncta nova *e*, *a*, *c*, *g*, & ε, α, κ, γ. Deinde si per *G*, *g*, γ ducatur circumferentia circuli *Ggγ* secans rectam *τC* in *Z*: erit *Z* locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et si in *AC*, *ac*, ακ capiantur *AF*, *af*, αφ ipsis *CG*, *cg*, κγ respectivè æquales, & per puncta *F*, *f*, φ ducatur circumferentia circuli *Ffφ* secans rectam *AT* in *X*; erit punctum *X* alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta *X* & *Z* erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios *TX* & *τZ*; & habebuntur loca duo Cometæ in orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico *S*, per loca illa duo describatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. I.*

Constructionis hujus demonstratio ex Lemmatibus consequitur: quippe cum recta *AC* secetur in *E* in ratione temporum, per Lemma VIII: & *BE* per Lem. XI. sit pars rectæ *BS* in plano Eclipticæ arcui *ABC* & chordæ *AEG* interjecta; & *MP* (per Lem. VIII.) longitudo sit chordæ arcus, quem Cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi *MN* æqualis fuerit, si modò *B* sit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.

Cæterum puncta *B*, *b*, β non quælibet, sed vero proxima eligere convenit. Si angulus *AQt* in quo vestigium orbis in plano Eclipticæ descriptum secabit rectam *tB* præterpropter innotescat, in angulo illo ducenda erit recta occulta *AC*, quæ sit ad $/_3 Tt$ in dimidiata ratione *St* ad *SQ*. Et agendo rectam *SEB*

cujus pars *EB* æquetur longitudini *Vt*, determinabitur punctum *B* quod prima vice usurpare licet. Tum rectâ *AC* deletâ & secundum præcedentem constructionem iterum ductâ, & inventâ insuper longitudine *MP*; in *tB* capiatur punctum *b*, ea lege, ut si *TA*, *TC* se mutuò secuerint in *Y*, sit distantia *Yb* ad distantiam *YB* in ratione composita ex ratione *MN* ad *MP* & ratione dimidiata *SB* ad *Sb*. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β; si modò operationem tertiò repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia *Bb* perexigua obvenerit, postquam inventa sunt puncta *F*, *f* & *G*, *g*, actæ rectæ *Ff* & *Gg*, secabunt *TA* & τ*C* in punctis quæsitis *X* & *Z*.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamstedio* observatum Tabula sequens exhibet.

Tem. appar
Temp. verū
Long. Solis
Long. Cometæ
Lat. Cometæ

1680 *December* 12

4. 46

4. 46. 00
1. 53. 2
6. 33. 0
8. 26. 0

21

6. 32½

6. 36. 59
11. 8. 10
5. 7. 38
21. 45. 30

24

6. 12

6. 17. 52
14. 10. 49
18. 49. 10
25. 23. 24

26

5. 14

5. 20. 44
16. 10. 38
28. 24. 6
27. 00. 57

29

7. 55

8. 03. 2
19. 20. 56
13. 11. 45
28. 10. 05

30

8. 2

8. 10. 26
20. 22. 20
17. 37. 5
28. 11. 12

1681 *January* 5

5. 51

6. 1. 38
26. 23. 19
8. 49. 10
26. 15. 26

9

6. 49

7. 0. 53
0. 29. 54
18. 43. 18
24. 12. 42

10

5. 54

6. 6. 10
1. 28. 34
20. 40. 57
23. 44. 00

13

6. 56

7. 8. 55
4. 34. 6
25. 59. 34
22. 17. 36

25

7. 44

7. 58. 42
16. 45. 58
9. 55. 48
17. 56. 54

30

8. 07

8. 21. 53
21. 50. 9
13. 19. 36
16. 40. 57

February 2

6. 20

6. 34. 51
24. 47. 4
15. 13. 48
16. 02. 02

5

6. 50

7. 4. 41
27. 49. 51
16. 59. 52
15. 27. 23

In his observationibus *Flamstedius* eâ usus est diligentiâ, ut postquam bis observasset distantiam Cometæ à Stella aliqua fixa, deinde etiam distantiam bis ab alia stella fixa, rediret ad stellam priorem & distantiam Cometæ ab eadem iterum observaret, idque bis, ac deinde ex distantiæ illius incremento vel decremento tempori proportionali colligeret distantiam tempore intermedio, quando distantia à stella altera observabatur. Ex hujusmodi observationibus loca Cometæ festinanter computata *Flamstedius* primò cum amicis communicavit, & postea easdem ad examen revocatas calculo diligentiore correxit. Nos loca correcta hic descripsimus.

His adde observationes quasdam è nostris.

Temp. appar.
Cometæ Longit.
Com. Lat.

Febru. 25
8^{h}. 30′
26. 19′. 22″

12. $46\frac{7}{8}$

27
8 . 15
27. 4 . 28

12. 36

Mart. 1
11 . 0
27. 53 . 8

12. 24¾

2
8 . 0
28. 12 . 29

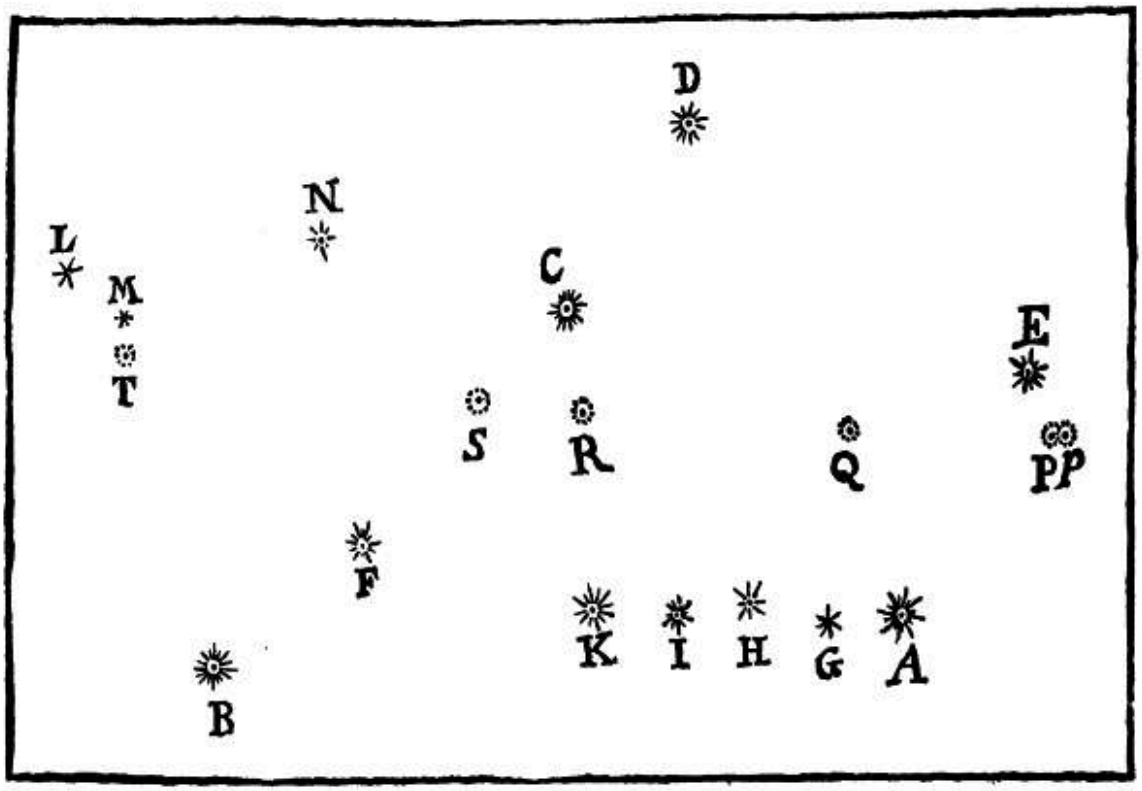
12. 19½

5
11 . 30
29. 20 . 51

12. 2⅔

9
8 . 30
0. 43 . 2
11.44/$_{5}$

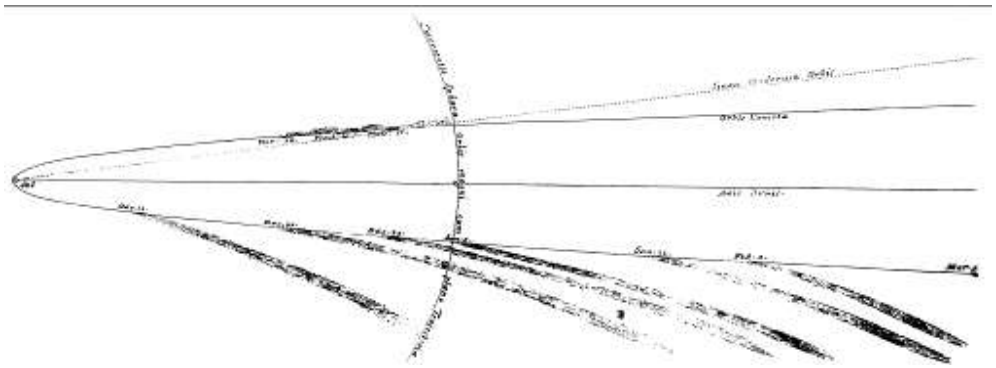
Hæ observationes Telescopio septupedali, & Micrometro filisque in foco Telescopii locatis paractæ sunt: quibus instrumentis & positiones fixarum inter se & positiones Cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam in sinistro calcaneo Persei (*Bayero* o) *B* stellam sequentem in sinistro pede (*Bayero* ζ) & *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* stellas alias minores in eodem pede. Sintque *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* loca Cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantiâ *AB* partium 80/$_{12}$, erat *AC* partium 52¼, *BC* 58/$_{6}$, *AD* 57/$_{12}$, *BD* 82/$_{11}$, *CD* 23⅔, *AE* 29/$_{7}$, *CE* 57½, *DE* 49/$_{12}$, *AK* 38⅔, *BK* 43, *CK* 31/$_{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* 36¼, *AH* 18/$_{7}$, *DH* 53/$_{11}$, *BN* 46/$_{12}$, *CN* 31⅓, *BL* 45/$_{12}$, *NL* 31/$_{7}$. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.



Die Veneris *Feb. 25.* St. vet. Hor. 8½ P.M. Cometæ in *p* existentis distantia à stella *E* erat major quàm $/_{13}$ *AE*, minor quàm $/_{5}$ *AE*, adeoque æqualis $/_{14}$ *AE* proximè; & angulus *ApE* nonnihil obtusus erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, distantia Cometæ à perpendiculo illo erat $/_{5}$ *pE*.

Eadem nocte, horâ 9½, Cometæ in *P* existentis distantia à stella *E* erat major quàm {1 ÷ 4½} *AE*, minor quàm {1 ÷ 5¼} *AE*, adeoque æqualis {1 ÷ 4⅞} *AE*, seu $/_{39}$ *AE* quamproximè. A perpendiculo autem à Stella *A* ad rectam *PE* demisso distantia Cometæ erat $/_{5}$ *PE*.

Die ^{tis}, *Mart. 1*, hor. 11. P.M. Cometa in *R* existens, stellis *K* & *C* accuratè interjacebat, & rectæ *CRK* pars *CR* paulo major erat quàm ⅓ *CK*, & paulo minor quam ⅓ *CK* + ⅛ *CR*, adeoque æqualis ⅓ *CK* + $/_{16}$ *CR* seu $/_{45}$ *CK*.



Die ^{ii}, *Mart. 2.* hor. 8. P.M. Cometæ existentis in *S*, distantia à stella *C* erat $/_9$ *FC* quamproximè. Distantia stellæ *F* à recta *CS* producta erat $/_{24}$ *FC*; & distantia stellæ *B* ab eadem recta erat quintuplo major quàm distantia stellæ *F*. Item recta *NS* producta transibat inter stellas *H* & *I*, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ *H* quàm stellæ *I*.

Die ^{ni}, *Mart. 5.* hor. 11½. P.M. Cometa existente in *T*, recta *MT* æqualis erat ½*ML*, & recta *LT* producta transibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quàm *B*, auferens à *BF* quintam vel sextam ejus partem versus *F*. Et *MT* producta transibat extra spatium *BF* ad partes stellæ *B*, quadruplo propior existens stellæ *B* quam stellæ *F*. Erat *M* stella perexigua quæ per Telescopium videri vix potuit, & *L* stella major quasi magnitudinis octavæ.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes (posito quod stellarum *A* & *B* distantia esset 2 *gr.* $6/_5$, & stellæ *A* longitudo 26 *gr.* 41′. 48″ & latitudo borealis 12 *gr.* 8′½, stellæque *B* longitudo 28 *gr.* 40′. 16″. & latitudo borealis 11 *gr.* $17/_5$; quemadmodum à *Flamstedio* observatas accepi) derivabam longitudines & latitudines Cometæ. Micrometro parum affabre constructâ usus sum, sed Longitudinum tamen & Latitudinum errores (quatenus ab observationibus nostris oriantur) dimidium minuti unius primi vix superant, præterquam in observatione ultimâ *Mart. 9.* ubi positiones fixarum ad stellas *A* & *B* minus accuratè determinare potui. *Cassinus* qui Cometam eodem tempore observavit, se declinationem ejus tanquam invariatam manentem parum diligenter definivisse fassus est. Nam Cometa (juxta observationes nostras) in fine motus sui notabiliter deflectere cæpit boream versus, à parallelo quem in fine Mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad Orbem Cometæ determinandum; selegi ex observationibus hactenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec. 21*, *Jan. 5*, & *Jan. 25*. Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 sunt semidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* prima vice 412, *S*μ 9503, *i*λ = 413: *BE* secunda vice 421, *OD* 10186, *X* 8528,4, *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* - 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias *TX* 4775 & τ*Z* 11322. Ex quibus orbem definiendo inveni Nodos ejus in & 1 *gr.* 53′; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61 *gr.* 20⅓; verticem ejus (seu perihelium Cometæ) in 27 *gr.* 43′ cum latitudine australi 7 *gr.* 34′; & ejus latus rectum 236,8, areamq; radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585; Cometam verò *Decemb.* 8 *d.* 0 *h.* 4′. P.M. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula Sinuum naturalium collectas determinavi graphicè; construendo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16⅓ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabula sequente videre licet.

COMETÆ

Distant.
Cometæ
à Sole

Lon.
Collect.

Lat.
Collect.

Long. Obs.
Lat. Obs.

Differ.
Long.

Differ.
Lat.

Decemb. 12
2792
6. 32
8. 18½
6. 33

8. 26

- 2

- 7½

29
8403
13. 13⅔
28. 0

13. 11¾

28. $10/_{12}$
+2
-10½

Febr. 5
16669
17. 0
15. 29⅔

16. 59⅞

15. 27/5
0
+ 2/5

Mar. 5
21737
29. 19¾

12. 4

29. $20/_{7}$

12. 2⅔

- 1

+ 1⅓

Præterea cum *Cl. Flamstedius* Cometam, qui Mense *Novembri* apparuerat, eundem esse cum Cometa mensium subsequentium, literis ad me datis aliquando disputaret, & Trajectoriam quamdam ab orbe hocce Parabolico non longe aberrantem delinearet, visum est loca Cometæ in hoc orbe Mense *Novembri* computare, & cum Observationis conferre. Observationes ita se habent.

Nov. 17. St. Vet. *Ponthæus* & alii hora sexta matutina *Romæ*, (id est hora 5. 10′ *Londini*) Cometam observarunt in 8 *gr.* 30′ cum latitudine Australi 0 *gr.* 40′. Extant autem eorum observationes in tractatu quem *Ponthæus* de hoc Cometa in lucem edidit. Eadem horâ *Galletius* etiam *Romæ*, Cometam vidit in 8 *gr.* sine Latitudine.

Nov. 18. Ponthæus & Socii horâ matutinâ 6, 30′ *Romæ* (*i. e.* hor. 5. 40′ *Londini*) Cometam viderunt in 13½ cum Lat. Austr. 1 *gr.* 20′. Eodem die *R. P. Ango* in Academia *Flechensi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ, Cometam vidit in medio Stellarum duarum parvarum, quarum una media est trium in recta linea in Virginis Australi manu, & altera est extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in 12 *gr.* 46′ cum Lat. Austr. 50′. Eodem die *Bostoniæ* in *Nova Anglia* in Lat. 42⅓, horâ quintâ matutinâ (id est *Londini* hora Mat. 9⅔) Cometa visus est in 14 circiter, cum Lat. Austr. 1 *gr.* 30′; uti à *Cl. Halleio* accepi.

Nov. 19. hora Mat. 4½ *Cantabrigiæ*, Cometa (observante juvene quodam) distabat à Spica quasi 2 *gr.* Boreazephyrum versus. Eodem die hor. 5. Mat. *Bostoniæ* in *Nova-Anglia* Cometa distabat à Spica gradu uno, differentiâ latitudinum existente 40′, atque adeo differentia Long. 44′ circiter. Unde Cometa erat in 18 *gr.* 40′ cum Lat. Austr. 1 *gr.* 19′. Eodem die

D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent* prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in Confinio *Virginiæ* in Lat. 38½ *gr.* horâ quintâ matutinâ (id est horâ 10ª *Londini*) Cometam vidit supra Spicam, & cum Spica propemodum conjunctum, existente distantia inter eosdem quasi ¾ *gr.* Observator idem, eadem horà diei sequentis, Cometam vidit quasi 2 *gr.* inferiorem Spicâ. Congruent hæ observationes cum observationibus in *Nova Anglia* factis, si modò distantiæ (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore superior esset Spica altitudine 52′ circiter, ac die posteriore inferior eadem stellâ altitudine perpendiculari 2 *gr.* 40′.

Nov. 20. D. *Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, hora sexta Matutina, *Venetiis* (id est hora 5. 10′ *Londini*) Cometam vidit in 23 *gr.* cum Lat. Austr. 1 *gr.* 30′. Eodem die *Bostoniæ* distabat Cometa à Spica, 4 *gr.* longitudinis in orientem, adeoque erat in 23 *gr.* 24 circiter.

Nov. 21. Ponthæus & Socii hor. mat. 7¼ Cometam observarunt in 27 *gr.* 50′ cum Latitudine Australi 1 *gr.* 16′. *Ango* horâ quintâ mat. in 27 *gr.* 45′. *Montenarus* in 27 *gr.* 51′. Eodem die in Insulâ *Jamaicâ* visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis, id est 1 *gr.* 59′.

Novem. 22. Visus est à *Montenaro* in 2°. 33′. *Bostoniæ* autem in *Novâ Angliâ* apparuit in 3 *gr.* circiter, eadem fere cum latitudine ac prius.

Deinde visus est à *Montenaro Novem. 24.* in 12 *gr.* 52′. & *Nov. 25.* in 17 *gr.* 45′. Latitudinem *Galletius* jam ponit 2 *gr.* Eandem *Ponthæus* & *Galletius* decrevisse, *Montenarus* & *Ango* semper crevisse testantur. Crassæ sunt horum omnium observationes, sed eæ *Montenari*, *Angonis* & observatoris in *Nova-Anglia* præferendæ videntur. Ex omnibus autem inter se collatis, & ad meridianum *Londini*, hora mat. 5. 10′ reductis, colligo Cometam hujusmodi cursum quamproximè descripsisse.

Long. Com.
Latit. Com.

Nov. 17

8. 0

0. 45 Austr.

18
12. 52

1. 2

19
17. 48

1. 18

20
22. 45

1. 32

21
27. 46

1. 44

22
2. 48

1. 55

23
7. 50

2. 4

24
12. 52

2. 12

25
17. 45

2. 18

Loca autem Cometæ iisdem horis in orbe Parabolico inventa ita se habent.

Comet. Lon.
Com. Lat.

Nov. 17

8. 3

0. 23 *A*

21

28. 0

1. 22 *A*

25

18. 17

2. 6 *A*

Congruunt igitur observationes tam mense *Novembri*, quam mensibus tribus subsequentibus cum motu Cometæ circa Solem in Trajectoriâ hacce Parabolicâ, atque adeo hanc esse veram hujus Cometæ Trajectoriam confirmant. Nam differentia inter loca observata & loca computata tam ex erroribus observationum quam ex erroribus operationum Graphicarum in Orbe definiendo admissis, facilè oriri potuere.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa descripsit, & caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano Trajectoriæ opticè delineatas exhibere: observationibus sequentibus in cauda definienda adhibitis.

Nov. 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov. 18.* cauda 30 *gr.* longa, Solique directe opposita in *Nova Anglia* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam, qui tunc erat in 9 *gr.* 54′. *Nov. 19* in *Mary-Land* cauda visa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec. 10.* cauda (observante *Flamstedio*) transibat per medium distantiæ inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam δ in Aquilæ australi ala, & desinebat prope stellas *A*, ω, *b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in 19½ cum lat. bor. 34¼ *gr.* circiter. *Dec. 11.* surgebat ad usque caput sagittæ (*Bayero*, α, β,) desinens in 26 *gr.* 43′ cum lat. bor. 38 *gr.* 34′. *Dec. 12.* transibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, desinens in 4°, cum lat. bor. 42½ circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda *Dec. 12.* hora 5, 40′ *Romæ* (observante *Ponthæo*) supra cygni Uropygium ad *gr.* 10. sese extulit; atque ab hac stella ejus latus ad occasum & boream min. 45. destitit. Lata autem erat cauda his diebus *gr.* 3. juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat à Stella illa 2 *gr.* 15′ austrum versus, & terminus superior erat in 22 *gr.* cum lat. bor. 61 *gr.* *Dec. 21.* surgebat fere ad cathedram *Cassiopeiæ*, æqualiter distans à β & *Schedir*, & distantiam ab utraque distantiæ earum ab invicem æqualem habens, adeoque desinens in 24 *gr.* cum lat. 47½ *gr.* *Dec. 29.* tangebat *Scheat* sitam ad sinistram, & intervallum

stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54 *gr.* adeoque desinebat in 19 *gr.* cum lat. 35. *gr. Jan. 5.* tetigit stellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus suum dextrum & stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistrum; & (juxta observationes nostras) longa erat 40 *gr.*; curva autem erat & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 grad. & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan. 13.* Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuissima desinebat è regione stellæ κ in latere *Persei*. Distantia termini caudæ à circulo Solem & Cometam jungente erat 3 *gr.* 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum 8½ *gr. Jan. 25 & 26* luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accuratè, adeoque declinabat ab oppositione Solis Boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb. 10.* caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb. 7.* se caudam ad longitudinem *gr.* 12. vidisse scribit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à Sole. Ideoque cum distantia Cometæ à Sole *Dec. 8.* ubi in Perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ à Sole ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quàm calor quem terra arida concipit ad æstivum Solem; ut expertus sum: & calor ferri candentis (si rectè conjector) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in perihelio versantem ex radiis Solaribus concipere posset; quasi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem

calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aeris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id est pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio Caloris ob causas latentes augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porrò notandum est quod Cometa Mense *Decembri*, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & splendidiorem quàm antea Mense *Novembri*; ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ è Cometis oriuntur, statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu Nucleus Cometæ per calorem suum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex est opinio, eas vel jubar esse Solis per translucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius à capite Cometæ in Terram: vel denique nubem esse seu vaporem à capite Cometæ jugiter surgentem & abeuntem in partes à Sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientia rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur nisi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aerem semper volitantibus: adeoque in aere fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortius ferit; in aere clariore tenuius est & ægrius sentitur: in cœlis autem absque materia reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione Caudæ, ne cœlum totum luce Solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen

refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux Fixarum & Planetarum distinctè ad nos transmissa demonstrat medium cœleste nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse, id quoniam rarissimè contingit, ascribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones tum Oculorum tum aeris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo Telescopiis evanescunt. Aeris & ascendentium vaporum tremore fit ut radii facile de angusto pupilli spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde est quod scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: & cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos absque omni refractione sensibili. Nequis contendat quod caudæ non soleant videri in Cometis cum eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus Telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: Cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est & valde obtusa: sic enim Cometa Anni 1680, Mense *Decembri*, quo tempore caput luce sua vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: postea *Jan. 27 & 28* caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscurissima, quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulo ultra: ut supra dictum est. Sed & *Feb. 9. & 10* ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per Telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb. 28* hora 8½ P.M. *Londini*, versabatur in 8 *gr.* 41 cum latitudine boreali 28 *gr.* 6′, Sole existente in 18 *gr.* 26′. Et Cometa Anni 1577 *Dec. 29.* versabatur in 8 *gr.* 41′ cum latitudine boreali 28 *gr.* 40′. Sole etiam existente in 18 *gr.* 26′ circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen casu cauda Cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum 4½ ab oppositione Solis Aquilonem versus; in posteriore verò (ex Observationibus

Tychonis) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, superest ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium Cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod spectatori in his planis constituto apparent in partibus à Sole directè aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeò quod cauda convexo sui latere partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulò splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aere nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel obliquè si corpus moveatur in latus; ita in cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (uti jam dictum est) & superiora vel rectâ petere, si corpus fumans quiescit; vel obliquè, si corpus progrediendo loca semper deserit à quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque

describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aeris nostri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obscurantium oriantur; vel forte à partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aeris nostri. Nam aer juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 vicibus majus quam aqua ejusdem ponderis, ideoque aeris columna Cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aeris ad summitatem Atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea si columnæ totius aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Inde verò (ex Hypothesi multis experimentis confirmata, quod compresso aeris sit ut pondus Atmosphæræ incumbentis, quodque gravitas sit reciproce ut quadratum distantiæ locorum à centro Terræ) computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aer, si ascendatur à superficie Terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quàm apud nos in ratione longe majori, quàm spatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus aeris nostri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes Planetarum regiones ad usque sphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum aer adhuc altior in immensum rarescat; & coma seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quàm superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quàm rarissima. Et quamvis, ob longe crassiorem Cometarum Atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut aer in spatiis cœlestibus inque Cometarum caudis non adeo rarescat; perexiguam tamen quantitatem aeris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde sufficere ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine sua paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima absque claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque

major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aeris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo tempore vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci fere potest ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si rectà ascendat à Sole, ascendere cæpit à capite quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non rectà ascendit à Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan. 25.* ascendere cæperat à capite ante *Decemb. 11.* adeoque ascensu suo toto dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ *Dec. 10.* apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicinia Solis celerrimè ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni constabat qui à tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quàm ob nimiam suam tam à Sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cælestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt ac diutissimè conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum & progressum in partes à Sole aversas *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est à ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ, impeditissimis in regionibus nostris, à radiis Solis

sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à Sole ascendere. Cùm autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideoque servata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum ascenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem suam specificam qua prius tendebat in Solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur à Sole recedere, at Solis Atmosphæra & materia cœlorum vel plane quiescit, vel motu solo quem à Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in vicinia Solis, ubi orbes curviores sunt, & Cometæ intra densiorem & ea ratione graviorem Solis Atmosphæram consistunt, & caudas quàm longissimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipsibus pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant à capitibus Solem versus, quam gravitas capitum efficere possit ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadunt, vel simul in ascensu suo retardabuntur, adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem à causis jam descriptis aut aliis quibuscunque facillimè accipiant & postea liberrime servent.

Caudæ igitur quæ Cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefacti paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & subinde, in Periheliis Cometarum illorum qui adusq; Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarescit

ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi & cum eorum Atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis Cometæ requiri videntur; ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuò suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porrò suspicor spiritum illum, qui aeris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmosphæræ Cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; si modò Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terrâ distantiis, obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decem.* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at Mense *Novem.* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumq; viderant, majorem describunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigiensi Novem. 19.* Cometa hicce luce sua quantumvis plumbea & obtusa æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quàm postea. Et *D. Storer* literis quæ in manus nostras incidêre, scripsit caput ejus Mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam

emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ qui Mense *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur quod materia capitis sub initio copiosior esset & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, describantur subobscura & exigua. Nam Anno 1668 Mart. 5. St. nov. hora septima Vesp. *R. P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda verò supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus è mati reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id est gradus 45) occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra Horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est quod caput à Sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et similis legitur Cometa anni 1101 vel 1106, *cujus Stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio Mensis *Feb.* circa vesperam ad occasum Solis brumalem. Inde verò & ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Parisiensis, *distabat quasi cubito uno, ab hora tertia* [rectius sexta] *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens*. Talis etiam erat ardentissimus ille Cometa ab *Aristotele* descriptus Lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente verò die quantum potuit visum est. Nam quam minimâ fieri potest distantiâ Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ scilicet] *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita est* [capiti] *Cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* [id est ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis Solaribus

caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquasse traduntur.

Diximus Cometas esse genus Planetarum in Orbibus valde excentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis, minores esse solent qui in orbibus minoribus & Soli proprioribus gyrantur, sie etiam Cometas, qui in Periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores esse & in orbibus minoribus revolvi rationi consentaneum videtur. Orbium verò transversas diametros & revolutionum tempora periodica ex collatione Cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens Lumen accendere potest.

Prop. XLII. Prob. XXI.

Trajectoriam Cometæ graphicè inventam corrigere.

Oper. 1. Assumatur positio plani Trajectoriæ, per Propositionem superiorem graphicè inventa; & seligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quam maximè distantia; sitque *A* tempus inter primam & secundam, ac *B* tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longe à Perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur per operationes Trigonometricas loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis à Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto *D* & *E*; nempe *D* area inter observationem primam & secundam, & *E* area inter secundam ac tertiam. Sitque *T* tempus totum quo area tota $D + E$, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur *P*; & servetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis observatis inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut supra): deinde etiam orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes

descriptæ, quæ sint d & e, nec non tempus totum t quo area tota $d + e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ε, & tempus totum τ quo area tota δ + ε describi debeat.

Jam sit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis + & - probe observatis quærantur numeri m & n, ea lege ut sit $G - C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $T - S$ æquale $mT - mt + nT - n\tau$. Et si, in operatione prima, I designet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius: erit $I + nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K + mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique si in operatione prima, secunda ac tertia, quantitates R, r & ρ designent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $1 \div L$, $1 \div l$, $1 \div \lambda$ ejusdem Latera transversa respectivè: erit $R + mr - mR + n\rho - nR$ verum Latus rectum, & $1 \div \{L + ml - mL + n\lambda - nL\}$ verum Latus transversum Trajectoriæ quàm Cometa describit. Dato autem Latere transverso datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q. E. I.*

FINIS.

THE MATHEMATICAL PRINCIPLES OF NATURAL PHILOSOPHY (MOTTE TRANSLATION)

Translated by Andrew Motte

CONTENTS

Dedication
Introduction to the American Edition
Life of Sir Isaac Newton
The Principia.
The Author's Preface

Book I. Definitions

Axioms, or Laws of Motion
Of the Motion of Bodies
Section I: Of the method of first and last ratios of quantities, by the help whereof we demonstrate the propositions that follow
Section II: Of the Invention of Centripetal Forces
Section III: Of the motion of bodies in eccentric conic sections
Section IV: Of the finding of elliptic, parabolic, and hyperbolic orbits, from the focus given
Section V: How the orbits are to be found when neither focus is given
Section VI: How the motions are to be found in given orbits
Section VII: Concerning the rectilinear ascent and descent of bodies
Section VIII: Of the invention of orbits wherein bodies will revolve, being acted upon by any sort of centripetal force
Section IX: Of the motion of bodies in movable orbits; and of the motion of the apsides
Section X: Of the motion of bodies in given superficies; and of the reciprocal motion of funependulous bodies
Section XI: Of the motions of bodies tending to each other with centripetal forces
Section XII: Of the attractive forces of sphaerical bodies
Section XIII: Of the attractive forces of bodies which are not of a sphaerical figure
Section XIV: Of the motion of very small bodies when agitated by centripetal forces tending to the several parts of any very great body

Book II. Of the Motion of Bodies

Section I: Of the motion of bodies that are resisted in the ratio of the velocity
Section II: Of the motion of bodies that are resisted in the duplicate ratio of their velocities
Section III: Of the motions of bodies which are resisted partly in the ratio of the velocities, and partly in the duplicate of the same ratio
Section IV: Of the circular motion of bodies in resisting mediums
Section V: Of the density and compression of fluids; and of hydrostatics
Section VI: Of the motion and resistance of funependulous bodies
Section VII: Of the motion of fluids and the resistance made to projected bodies
Section VIII: Of motion propagated through fluids
Section IX: Of the circular motion of fluids

Book III. Rules of Reasoning in Philosophy

Phaenomena, or Appearances
Propositions I-IX (Force of gravity)
Propositions X-XXIV (Motions of celestial bodies and the sea)
Propositions XXV-XXXIII (Quantity of lunar motions)
Propositions XXXVI-XXXVIII (Forces to move the sea)
Lemmas I-III, Proposition XXXIX (Precession of equinoxes)
Lemmas IV-XI, Propositions XL-XLII (Comets)
General Scholium

The System of the World.

In June 1661, Newton was admitted to Trinity College, Cambridge, on the recommendation of his uncle Rev William Ayscough. He was awarded a scholarship in 1664, which guaranteed him four more years until he would get his M.A. In 1665, he discovered the generalised binomial theorem and began to develop a mathematical theory that later became calculus. Soon after Newton had obtained his B.A. degree in August 1665,

Dedication

TO THE

TEACHERS OF THE NORMAL SCHOOL

OF THE STATE OF NEW-YORK.

Gentlemen: — A stirring freshness in the air, and ruddy streaks upon the horizon of the moral world betoken the grateful dawning of a new era. The days of a drivelling instruction are departing. With us is the opening promise of a better time, wherein genuine manhood doing its noblest work shall have adequate reward. Teacher is the highest and most responsible office man can fill. Its dignity is, and will yet be held commensurate with its duty — a duty boundless as man's intellectual capacity, and great as his moral need — a duty from the performance of which shall emanate an influence not limited to the *now* and the *here*, but which surely will, as time flows into eternity and space into infinity, roll up, a measureless curse or a measureless blessing, in inconceivable swellings along the infinite curve. It is an office that should be esteemed of even sacred import in this country. Ere long a hundred millions, extending from the Atlantic to the Pacific, from Baffin's Bay to that of Panama, shall call themselves American citizens. What a field for those two master-passions of the human soul — the love of Rule, and the love of Gain! How shall our liberties continue to be preserved from the graspings of Ambition and the corruptions of Gold? Not by Bills of Rights Constitutions, and Statute Books; but alone by the rightly cultivated hearts and heads of the People. They must themselves guard the Ark. It is yours to fit them for the consecrated charge. Look well to it: for you appear clothed in the majesty of great power! It is yours to fashion, and to inform, to save, and to perpetuate. You are the Educators of the People: you are the prime Conservators of the public weal. Betray your trust, and the sacred fires would go out, and the altars crumble into dust: knowledge become lost in tradition, and Christian nobleness a fable! As you, therefore, are multiplied in number, elevated in consideration, increased in means, and fulfill, well and faithfully, all the requirements of

true Teachers, so shall our favoured land lift up her head among the nations of the earth, and call herself blessed.

In conclusion, Gentlemen, to you, as the conspicuous leaders in the vast and honourable labour of Educational Reform, and Popular Teaching, the First American Edition of the Principia of Newton — the greatest work of the greatest Teacher — is most respectfully dedicated.

N. W. CHITTENDEN.

Introduction to the American Edition

That the Principia of Newton should have remained so generally unknown in this country to the present day is a somewhat remarkable fact; because the name of the author, learned with the very elements of science, is revered at every hearth-stone where knowledge and virtue are of chief esteem, while, abroad, in all the high places of the land, the character which that name recalls is held up as the noblest illustration of what Man may be, and may do, in the possession and manifestation of pre-eminent intellectual and moral worth; because the work is celebrated, not only in the history of one career and one mind, but in the history of all achievement and human reason itself; because of the spirit of inquiry, which has been aroused, and which, in pursuing its searchings, is not always satisfied with stopping short of the fountain-head of any given truth; and, finally, because of the earnest endeavour that has been and is constantly going on, in many sections of the Republic, to elevate the popular standard of education and give to scientific and other efforts a higher and a better aim.

True, the Principia has been hitherto inaccessible to popular use. A few copies in Latin, and occasionally one in English may be found in some of our larger libraries, or in the possession of some ardent disciple of the great Master. But a dead language in the one case, and an enormous price in both, particularly in that of the English edition, have thus far opposed very sufficient obstacles to the wide circulation of the work. It is now, however, placed within the reach of all. And in performing this labour, the utmost care has been taken, by collation, revision, and otherwise, to render the First American Edition the most accurate and beautiful in our language. “Le plus beau monument que l’on puisse élever à la gloire de Newton, c’est une bonne édition de ses ouvrages:” and a monument like unto that we would here set up. The Principia, above all, glows with the immortality of a transcendant mind. Marble and brass dissolve and pass away; but the true creations of genius endure, in time and beyond time, forever: high upon the adamant of the indestructible, they send forth afar and near, over the troublous waters of life, a pure, unwavering, quenchless light whereby the myriad myriads of barques, richly laden with reason, intelligence and

various faculty, are guided through the night and the storm, by the beetling shore and the hidden rock, the breaker and the shoal, safely into havens calm and secure.

To the teacher and the taught, the scholar and the student, the devotee of Science and the worshipper of Truth, the Principia must ever continue to be of inestimable value. If to educate means, not so much to store the memory with symbols and facts, as to bring forth the faculties of the soul and develope them to the full by healthy nurture and a hardy discipline, then, what so effective to the accomplishment of that end as the study of Geometrical Synthesis? The Calculus, in some shape or other, is, indeed, necessary to the successful prosecution of researches in the higher branches of philosophy. But has not the Analytical encroached upon the Synthetical, and Algorithmic Formulae been employed when not requisite, either for the evolution of truth, or even its apter illustration? To each method belongs, undoubtedly, an appropriate use. Newton, himself the inventor of Fluxions, censured the handling of Geometrical subjects by Algebraical calculations; and the maturest opinions which he expressed were additionally in favour of the Geometrical Method. His preference, so strongly marked, is not to be reckoned a mere matter of taste; and his authority should bear with preponderating weight upon the decision of every instructor in adopting what may be deemed the best plan to insure the completest mental development. Geometry, the vigorous product of remote time; blended with the earliest aspirations of Science and the earliest applications of Art; as well in the measures of music as in the movement of spheres; as wholly in the structure of the atom as in that of the world; directing Motion and shaping Appearance; in a word, at the moulding of the created all, is, in comprehensive view, the outward form of that Inner Harmony of which and in which all things are. Plainly, therefore, this noble study has other and infinitely higher uses than to increase the power of abstraction. A more general and thorough cultivation of it should be strenuously insisted on. Passing from the pages of Euclid or Legendre, might not the student be led, at the suitable time, to those of the Principia wherein Geometry may be found in varied use from the familiar to the sublime? The profoundest and the happiest results, it is believed, would attend upon this enlargement of our Educational System.

Let the Principia, then, be gladly welcomed into every Hall where a true teacher presides. And they who are guided to the diligent study of this incomparable work, who become strengthened by its reason, assured by its evidence, and enlightened by its truths, and who rise into loving communion with the great and pure spirit of its author, will go forth from the scenes of their pupilage, and take their places in the world as strong-minded, right-hearted men — such men as the Theory of our Government contemplates and its practical operation absolutely demands.

Life of Sir Isaac Newton

Nec fas est proprius mortali attingere Divos. — Halley.

From the thick darkness of the middle ages man's struggling spirit emerged as in new birth; breaking out of the iron control of that period; growing strong and confident in the tug and din of succeeding conflict and revolution, it bounded forwards and upwards with resistless vigour to the investigation of physical and moral truth; ascending height after height; sweeping afar over the earth, penetrating afar up into the heavens; increasing in endeavour, enlarging in endowment; every where boldly, earnestly out-stretching, till, in the Author of the Principia, one arose, who, grasping the master-key of the universe and treading its celestial paths, opened up to the human intellect the stupendous realities of the material world, and, in the unrolling of its harmonies, gave to the human heart a new song to the goodness, wisdom, and majesty of the all-creating, all-sustaining, all-perfect God.

Sir Isaac Newton, in whom the rising intellect seemed to attain, as it were, to its culminating point, was born on the 25th of December, O. S. 1642 — Christmas day — at Woolsthorpe, in the parish of Colsterworth, in Lincolnshire. His father, John Newton, died at the age of thirty-six, and only a few months after his marriage to Harriet Ayscough, daughter of James Ayscough, of Rutlandshire. Mrs. Newton, probably wrought upon by the early loss of her husband, gave premature birth to her only and posthumous child, of which, too, from its extreme diminutiveness, she appeared likely to be soon bereft. Happily, it was otherwise decreed! The tiny infant, on whose little lips the breath of life so doubtingly hovered, lived; — lived to a vigorous maturity, to a hale old age; — lived to become the boast of his country, the wonder of his time, and the "ornament of his species."

Beyond the grandfather, Robert Newton, the descent of Sir Isaac cannot with certainty be traced. Two traditions were held in the family: one, that

they were of Scotch extraction; the other, that they came originally from Newton, in Lancashire, dwelling, for a time, however, at Westby, county of Lincoln, before the removal to and purchase of Woolsthorpe — about a hundred years before this memorable birth.

The widow Newton was left with the simple means of a comfortable subsistence. The Woolsthorpe estate together with small one which she possessed at Sewstern, in Leicestershire, yielded her an income of some eighty pounds; and upon this limited sum, she had to rely chiefly for the support of herself, and the education of her child. She continued his nurture for three years, when, marrying again, she confided the tender charge to the care of her own mother.

Great genius is seldom marked by precocious development; and young Isaac, sent, at the usual age, to two day schools at Skillington and Stoke, exhibited no unusual traits of character. In his twelfth year, he was placed at the public school at Grantham, and boarded at the house of Mr. Clark, an apothecary. But even in this excellent seminary, his mental acquisitions continued for a while unpromising enough: study apparently had no charms for him; he was very inattentive, and ranked low in the school. One day, however, the boy immediately above our seemingly dull student gave him a severe kick in the stomach; Isaac, deeply affected, but with no outburst of passion, betook himself, with quiet, incessant toil, to his books; he quickly passed above the offending classmate; yet there he stopped not; the strong spirit was, for once and forever, awakened, and, yielding to its noble impulse, he speedily took up his position at the head of all.

His peculiar character began now rapidly to unfold itself. Close application grew to be habitual. Observation alternated with reflection. “A sober, silent, thinking lad,” yet, the wisest and the kindliest, the indisputable leader of his fellows. Generosity, modesty, and a love of truth distinguished him then as ever afterwards. He did not often join his classmates in play; but he would contrive for them various amusements of a scientific kind. Paper kites he introduced; carefully determining their best form and proportions, and the position and number of points whereby to attach the string. He also invented paper lanterns; these served ordinarily to guide the way to school in winter mornings, but occasionally for quite another purpose; they were attached to the tails of kites in a dark night, to the dismay of the country people dreading portentous comets, and to the

immeasureable delight of his companions. To him, however, young as he was, life seemed to have become an earnest thing. When not occupied with his studies, his mind would be engrossed with mechanical contrivances; now imitating, now inventing. He became singularly skilful in the use of his little saws, hatchets, hammers, and other tools. A windmill was erected near Grantham; during the operations of the workmen, he was frequently present; in a short time, he had completed a perfect working model of it, which elicited general admiration. Not content, however, with this exact imitation, he conceived the idea of employing, in the place of sails, animal power, and, adapting the construction of his mill accordingly, he enclosed in it a mouse, called the miller, and which by acting on a sort of treadwheel, gave motion to the machine. He invented, too, a mechanical carriage — having four wheels, and put in motion with a handle worked by the person sitting inside. The measurement of time early drew his attention. He first constructed a water clock, in proportions somewhat like an old-fashioned house clock. The index of the dial plate was turned by a piece of wood acted upon by dropping water. This instrument, though long used by himself, and by Mr. Clark's family, did not satisfy his inquiring mind. His thoughts rose to the sun; and, by careful and oft-repeated observations of the solar movements, he subsequently formed many dials. One of these, named *Isaac's dial*, was the accurate result of years' labour, and was frequently referred to for the hour of the day by the country people.

May we not discern in these continual efforts — the diligent research, the patient meditation, the aspiring glance, and the energy of discovery — the stirring elements of that wondrous spirit, which, clear, calm, and great, moved, in after years, through deep onward through deep of Nature's mysteries, unlocking her strongholds, dispelling darkness, educing order — everywhere silently conquering.

Newton had an early and decided taste for drawing. Pictures, taken sometimes from copies, but often from life, and drawn, coloured and framed by himself, ornamented his apartment. He was skilled also, in poetical composition, "excelled in making verses;" some of these were borne in remembrance and repeated, seventy years afterward, by Mrs. Vincent, for whom, in early youth, as Miss Storey, he formed an ardent attachment. She was the sister of a physician resident near Woolsthorpe; but Newton's intimate acquaintance with her began at Grantham, where they

were both numbered among the inmates of the same house. Two or three years younger than himself, of great personal beauty, and unusual talent, her society afforded him the greatest pleasure; and their youthful friendship, it is believed, gradually rose to a higher passion; but inadequacy of fortune prevented their union. Miss Storey was afterwards twice married; Newton, never; his esteem for her continued unabated during life, accompanied by numerous acts of attention and kindness.

In 1656, Newton's mother was again left a widow, and took up her abode once more at Woolsthorpe. He was now fifteen years of age, and had made great progress in his studies; but she, desirous of his help, and from motives of economy, recalled him from school. Business occupations, however, and the management of the farm, proved utterly distasteful to him. When sent to Grantham Market on Saturdays, he would betake himself to his former lodgings in the apothecary's garret, where some of Mr. Clark's old books employed his thoughts till the aged and trustworthy servant had executed the family commissions and announced the necessity of return: or, at other times, our young philosopher would seat himself under a hedge, by the wayside, and continue his studies till the same faithful personage — proceeding alone to the town and completing the day's business — stopped as he returned. The more immediate affairs of the farm received no better attention. In fact, his passion for study grew daily more absorbing, and his dislike for every other occupation more intense. His mother, therefore, wisely resolved to give him all the advantages which an education could confer. He was sent back to Grantham school, where he remained for some months in busy preparation for his academical studies. At the recommendation of one of his uncles, who had himself studied at Trinity College, Cambridge, Newton proceeded thither, and was duly admitted, on the 5th day of June 1660, in the eighteenth year of his age.

The eager student had now entered upon a new and wider field; and we find him devoting himself to the pursuit of knowledge with amazing ardour and perseverance. Among other subjects, his attention was soon drawn to that of Judicial Astrology. He exposed the folly of this pseudo-science by erecting a figure with the aid of one or two of the problems of Euclid; — and thus began his study of the Mathematics. His researches into this science were prosecuted with unparallelled vigour and success. Regarding the propositions contained in Euclid as self-evident truths, he passed rapidly

over this ancient system — a step which he afterward much regretted — and mastered, without further preparatory study, the Analytical Geometry of Descartes. Wallis's Arithmetic of Infinites, Saunderson's Logic, and the Optics of Kepler, he also studied with great care; writing upon them many comments; and, in these notes on Wallis's work was undoubtedly the germ of his fluxionary calculus. His progress was so great that he found himself more profoundly versed than his tutor in many branches of learning. Yet his acquisitions were not gotten with the rapidity of intuition; but they were thoroughly made and firmly secured. Quickness of apprehension, or intellectual nimbleness did not belong to him. He saw too far: his insight was too deep. He dwelt fully, cautiously upon the least subject; while to the consideration of the greatest, he brought a massive strength joined with a matchless clearness, that, regardless of the merely trivial or unimportant, bore with unerring sagacity upon the prominences of the subject, and, grappling with its difficulties, rarely failed to surmount them.

His early and last friend, Dr. Barrow — in compass of invention only inferior to Newton — who had been elected Professor of Greek in the University, in 1660, was made Lucasian Professor of Mathematics in 1663, and soon afterward delivered his Optical Lectures: the manuscripts of these were revised by Newton, and several oversights corrected, and many important suggestions made by him; but they were not published till 1669.

In the year 1665, he received the degree of Bachelor of Arts; and, in 1666, he entered upon those brilliant and imposing discoveries which have conferred inappreciable benefits upon science, and immortality upon his own name.

Newton, himself, states that he was in possession of his Method of Fluxions, "in the year 1666, or before." Infinite quantities had long been a subject of profound investigation; among the ancients by Archimedes, and Pappus of Alexandria; among the moderns by Kepler, Cavaleri, Roberval, Fermat and Wallis. With consummate ability Dr. Wallis had improved upon the labours of his predecessors: with a higher power, Newton moved forwards from where Wallis stopped. Our author first invented his celebrated Binomial Theorem. And then, applying this Theorem to the rectification of curves, and to the determination of the surfaces and contents of solids, and the position of their centres of gravity, he discovered the general principle of deducing the areas of curves from the ordinate, by

considering the area as a nascent quantity, increasing by continual fluxion in the proportion of the length of the ordinate, and supposing the abscissa to increase uniformly in proportion to the time. Regarding lines as generated by the motion of points, surfaces by the motion of lines, and solids by the motion of surfaces, and considering that the ordinates, abscissae, &c., of curves thus formed, vary according to a regular law depending on the equation of the curve, he deduced from this equation the velocities with which these quantities are generated, and obtained by the rules of infinite series, the ultimate value required. To the velocities with which every line or quantity is generated, he gave the name of Fluxions, and to the lines or quantities themselves, that of Fluents. A discovery that successively baffled the acutest and strongest intellects: — that, variously modified, has proved of incalculable service in aiding to develope the most abstruse and the highest truths in Mathematics and Astronomy: and that was of itself enough to render any name illustrious in the crowded Annals of Science.

At this period, the most distinguished philosophers were directing all their energies to the subject of light and the improvement of the refracting telescope. Newton, having applied himself to the grinding of "optic glasses of other figures than spherical," experienced the impracticability of executing such lenses; and conjectured that their defects, and consequently those of refracting telescopes, might arise from some other cause than the imperfect convergency of rays to a single point. He accordingly "procured a triangular glass prism to try therewith the celebrated phenomena of colours." His experiments, entered upon with zeal, and conducted with that industry, accuracy, and patient thought, for which he was so remarkable, resulted in the grand conclusion, that Light was not homogeneous, but consisted of rays, some of which were more refrangible than others. This profound and beautiful discovery opened up a new era in the History of Optics. As bearing, however, directly upon the construction of telescopes, he saw that a lens refracting exactly like a prism would necessarily bring the different rays to different foci, at different distances from the glass, confusing and rendering the vision indistinct. Taking for granted that all bodies produced spectra of equal length, he dismissed all further consideration of the refracting instrument, and took up the principle of reflection. Rays of all colours, he found, were reflected regularly, so that the angle of reflection was equal to the angle of incidence, and hence he

concluded that *optical instruments might be brought to any degree of perfection imaginable*, provided reflecting specula of the requisite figure and finish could be obtained. At this stage of his optical researches, he was forced to leave Cambridge on account of the plague which was then desolating England.

He retired to Woolsthorpe. The old manor-house, in which he was born, was situated in a beautiful little valley, on the west side of the river Witham; and here in the quiet home of his boyhood, he passed his days in serene contemplation, while the stalking pestilence was hurrying its tens of thousands into undistinguishable graves.

Towards the close of a pleasant day in the early autumn of 1666, he was seated alone beneath a tree, in his garden, absorbed in meditation. He was a slight young man; in the twenty-fourth year of his age; his countenance mild and full of thought. For a century previous, the science of Astronomy had advanced with rapid strides. The human mind had risen from the gloom and bondage of the middle ages, in unparalleled vigour, to unfold the system, to investigate the phenomena, and to establish the laws of the heavenly bodies. Copernicus, Tycho Brahe, Kepler, Galileo, and others had prepared and lighted the way for him who was to give to their labour its just value, and to their genius its true lustre. At his bidding isolated facts were to take order as parts of one harmonious whole, and sagacious conjectures grow luminous in the certain splendour of demonstrated truth. And this ablest man had come — was here. His mind, familiar with the knowledge of past effort, and its unequalled faculties developed in transcendant strength, was now moving on to the very threshold of its grandest achievement. Step by step the untrodden path was measured, till, at length, the entrance seemed disclosed, and the tireless explorer to stand amid the first opening wonders of the universe.

The nature of gravity — that mysterious power which causes all bodies to descend towards the centre of the earth — had, indeed, dawned upon him. And reason busily united link to link of that chain which was yet to be traced joining the least to the vastest, the most remote to the nearest, in one harmonious bond. From the bottoms of the deepest caverns to the summits of the highest mountains, this power suffers no sensible change: may not its action, then, extend to the moon? Undoubtedly: and further reflection convinced him that such a power might be sufficient for retaining that

luminary in her orbit round the earth. But, though this power suffers no sensible variation, in the little change of distance from the earth's centre, at which we may place ourselves, yet, at the distance of the moon, may not its force undergo more or less diminution? The conjecture appeared most probable: and, in order to estimate what the degree of diminution might be, he considered that if the moon be retained in her orbit by the force of gravity, the primary planets must also be carried round the sun by the like power; and, by comparing the periods of the several planets with their distances from the sun, he found that, if they were held in their courses by any power like gravity, its strength must decrease in the duplicate proportion of the in crease of distance. In forming this conclusion, he supposed the planets to move in perfect circles, concentric to the sun. Now was this the law of the moon's motion? Was such a force, emanating from the earth and directed to the moon, sufficient, when diminished as the square of the distance, to retain her in her orbit? To ascertain this master-fact, he compared the space through which heavy bodies fall, in a second of time, at a given distance from the centre of the earth, namely, at its surface, with the space through which the moon falls, as it were, to the earth, in the same time, while revolving in a circular orbit. He was absent from books; and, therefore, adopted, in computing the earth's diameter, the common estimate of sixty miles to a degree of latitude as then in use among geographers and navigators. The result of his calculations did not, of course, answer his expectations; hence, he concluded that some other cause, beyond the reach of observation — analogous, perhaps, to the vortices of Descartes — joined its action to that of the power of gravity upon the moon. Though by no means satisfied, he yet abandoned awhile further inquiry, and remained totally silent upon the subject.

These rapid marches in the career of discovery, combined with the youth of Newton, seem to evince a penetration the most lively, and an invention the most exuberant. But in him there was a conjunction of influences as extraordinary as fortunate. Study, unbroken, persevering and profound carried on its informing and disciplining work upon a genius, natively the greatest, and rendered freest in its movements, and clearest in its vision, through the untrammelling and enlightening power of religion. And, in this happy concurrence, are to be sought the elements of those amazing abilities,

which, grasping, with equal facility, the minute and the stupendous, brought these successively to light, and caused science to make them her own.

In 1667, Newton was made a Junior Fellow; and, in the year following, he took his degree of Master of Arts, and was appointed to a Senior Fellowship.

On his return to Cambridge, in 1668, he resumed his optical labours. Having thought of a delicate method of polishing metal, he proceeded to the construction of his newly projected reflecting telescope; a small specimen of which he actually made with his own hands. It was six inches long; and magnified about forty times; — a power greater than a refracting instrument of six feet tube could exert with distinctness. Jupiter, with his four satellites, and the horns, or moon-like phases of Venus were plainly visible through it. This was the first reflecting telescope ever executed and directed to the heavens. He gave an account of it, in a letter to a friend, dated February 23d, 1668-9 — a letter which is also remarkable for containing the first allusion to his discoveries "concerning the nature of light." Encouraged by the success of his first experiment, he again executed with his own hands, not long afterward, a second and superior instrument of the same kind. The existence of this having come to the knowledge of the Royal Society of London, in 1671, they requested it of Newton for examination. He accordingly sent it to them. It excited great admiration; it was shown to the king; a drawing and description of it was sent to Paris; and the telescope itself was carefully preserved in the Library of the Society. Newton lived to see his invention in public use, and of eminent service in the cause of science.

In the spring of 1669, he wrote to his friend Francis Aston, Esq., then about setting out on his travels, a letter of advice and directions, it was dated May 18th, and is interesting as exhibiting some of the prominent features in Newton's character. Thus: —

"Since in your letter you give me so much liberty of spending my judgment about what may be to your advantage in travelling, I shall do it more freely than perhaps otherwise would have been decent. First, then, I will lay down some general rules, most of which, I believe, you have considered already; but if any of them be new to you, they may excuse the rest; if none at all, yet is my punishment more in writing than yours in reading.

“When you come into any fresh company. 1. Observe their humours. 2. Suit your own carriage thereto, by which insinuation you will make their converse more free and open. 3. Let your discourse be more in queries and doubtings than peremptory assertions or disputings, it being the design of travellers to learn, not to teach. Besides, it will persuade your acquaintance that you have the greater esteem of them, and so make them more ready to communicate what they know to you; whereas nothing sooner occasions disrespect and quarrels than peremptoriness. You will find little or no advantage in seeming wiser or much more ignorant than your company. 4. Seldom discommend any thing though never so bad, or do it but moderately, lest you be unexpectedly forced to an unhandsome retraction. It is safer to commend any thing more than it deserves, than to discommend a thing so much as it deserves; for commendations meet not so often with oppositions, or, at least, are not usually so ill resented by men that think otherwise, as discommendations; and you will insinuate into men’s favour by nothing sooner than seeming to approve and commend what they like; but beware of doing it by comparison. 5. If you be affronted, it is better, in a foreign country, to pass it by in silence, and with a jest, though with some dishonour, than to endeavour revenge; for, in the first case, your credit’s ne’er the worse when you return into England, or come into other company that have not heard of the quarrel. But, in the second case, you may bear the marks of the quarrel while you live, if you outlive it at all. But, if you find yourself unavoidably engaged, ’tis best, I think, if you can command your passion and language, to keep them pretty evenly at some certain moderate pitch, not much heightening them to exasperate your adversary, or provoke his friends, nor letting them grow overmuch dejected to make him insult. In a word, if you can keep reason above passion, that and watchfulness will be your best defendants. To which purpose you may consider, that, though such excuses as this — He provok’t me so much I could not forbear — may pass among friends, yet amongst strangers they are insignificant, and only argue a traveller’s weakness.

“To these I may add some general heads for inquiries or observations, such as at present I can think on. As, 1. To observe the policies, wealth, and state affairs of nations, so far as a solitary traveller may conveniently do. 2. Their impositions upon all sorts of people, trades, or commodities, that are remarkable. 3. Their laws and customs, how far they differ from ours. 4.

Their trades and arts wherein they excel or come short of us in England. 5. Such fortifications as you shall meet with, their fashion, strength, and advantages for defence, and other such military affairs as are considerable, 6. The power and respect be longing to their degrees of nobility or magistracy. 7. It will not be time misspent to make a catalogue of the names and excellencies of those men that are most wise, learned, or esteemed in any nation. 8. Observe the mechanism and manner of guiding ships. 9. Observe the products of Nature in several places, especially in mines, with the circumstances of mining and of extracting metals or minerals out of their ore, and of refining them; and if you meet with any transmutations out of their own species into another (as out of iron into copper, out of any metal into quick silver, out of one salt into another, or into an insipid body, &c.), those, above all, will be worth your noting, being the most luciferous, and many times lucriferous experiments, too, in philosophy. 10. The prices of diet and other things. 11. And the staple commodities of places.

"These generals (such as at present I could think of), if they will serve for nothing else, yet they may assist you in drawing up a model to regulate your travels by. As for particulars, these that follow are all that I can now think of, viz.; whether at Schemnitium, in Hungary (where there are mines of gold, copper, iron, vitriol, antimony, &c.). they change iron into copper by dissolving it in a vitriolate water, which they find in cavities of rocks in the mines, and then melting the slimy solution in a strong fire, which in the cooling proves copper. The like is said to be done in other places, which I cannot now remember; perhaps, too, it may be done in Italy. For about twenty or thirty years agone there was a certain vitriol came from thence (called Roman vitriol), but of a nobler virtue than that which is now called by that name; which vitriol is not now to be gotten, because, perhaps, they make a greater gain by some such trick as turning iron into copper with it than by selling it. 2. Whether, in Hungary, Sclavonia, Bohemia, near the town Eila, or at the mountains of Bohemia near Silesia, there be rivers whose waters are impregnated with gold; perhaps, the gold being dissolved by some corrosive water like *aqua regis*, and the solution carried along with the stream, that runs through the mines. And whether the practice of laying mercury in the rivers, till it be tinged with gold, and then straining the mercury through leather, that the gold may stay behind, be a secret yet, or openly practised. 3. There is newly contrived, in Holland, a mill to grind

glasses plane withal, and I think polishing them too; perhaps it will be worth the while to see it. 4. There is in Holland one — Borry, who some years since was imprisoned by the Pope, to have extorted from him secrets (as I am told) of great worth, both as to medicine and profit, but he escaped into Holland, where they have granted him a guard. I think he usually goes clothed in green. Pray inquire what you can of him, and whether his ingenuity be any profit to the Dutch. You may inform yourself whether the Dutch have any tricks to keep their ships from being all worm-eaten in their voyages to the Indies. Whether pendulum clocks do any service in finding out the longitude, &c.

"I am very weary, and shall not stay to part with a long compliment, only I wish you a good journey, and God be with you."

It was not till the month of June, 1669, that our author made known his Method of Fluxions. He then communicated the work which he had composed upon the subject, and entitled, Analysis per Equationes numero terminorum Infinitas, to his friend Dr. Barrow. The latter, in a letter dated 20th of the same month, mentioned it to Mr. Collins, and transmitted it to him, on the 31st of July thereafter. Mr. Collins greatly approved of the work; took a copy of it; and sent the original back to Dr. Barrow. During the same and the two following years, Mr. Collins, by his extensive correspondence, spread the knowledge of this discovery among the mathematicians in England, Scotland, France, Holland and Italy.

Dr. Barrow, having resolved to devote himself to Theology, resigned the Lucasian Professorship of Mathematics, in 1669, in favour of Newton, who accordingly received the appointment to the vacant chair.

During the years 1669, 1670, and 1671, our author, as such Professor, delivered a course of Optical Lectures. Though these contained his principal discoveries relative to the different refrangibility of light, yet the discoveries themselves did not be come publicly known, it seems, till he communicated them to the Royal Society, a few weeks after being elected a member thereof, in the spring of 1671-2. He now rose rapidly in reputation, and was soon regarded as foremost among the philosophers of the age. His paper on light excited the deepest interest in the Royal Society, who manifested an anxious solicitude to secure the author from the "arrogations of others," and proposed to publish his discourse in the monthly numbers in which the Transactions were given to the world. Newton, gratefully sensible of these

expressions of esteem, willingly accepted of the proposal for publication. He gave them also, at this time, the results of some further experiments in the decomposition and re-composition of light: — that the same degree of refrangibility always belonged to the same colour, and the same colour to the same degree of refrangibility: that the seven different colours of the spectrum were original, or simple, and that *whiteness*, or white light was a compound of all these seven colours.

The publication of his new doctrines on light soon called forth violent opposition as to their soundness. Hooke and Huygens — men eminent for ability arid learning — were the most conspicuous of the assailants. And though Newton effectually silenced all his adversaries, yet he felt the triumph of little gain in comparison with the loss his tranquillity had sustained. He subsequently remarked in allusion to this controversy — and to one with whom he was destined to have a longer and a bitterer conflict— "I was so persecuted with discussions arising from the publication of my theory of light, that I blamed my own imprudence for parting with so substantial a blessing as my quiet to run after a shadow.

In a communication to Mr. Oldenburg, Secretary of the Royal Society, in 1672, our author stated many valuable suggestions relative to the construction of Reflecting Microscopes which he considered even more capable of improvement than telescopes. He also contemplated, about the same time, an edition of Kinckhuysen's Algebra, with notes and additions; partially arranging, as an introduction to the work, a treatise, entitled, A Method of Fluxions; but he finally abandoned the design. This treatise, however, he resolved, or rather consented, at a late period of his life, to put forth separately; and the plan would probably have been carried into execution had not his death intervened. It was translated into English, and published in 1736 by John Colson, Professor of Mathematics in Cambridge.

Newton, it is thought, made his discoveries concerning the Inflection and Diffraction of light before 1674. The phenomena of the inflection of light had been first discovered more than ten years before by Grimaldi. And Newton began by repeating one of the experiments of the learned Jesuit — admitting a beam of the sun's light through a small pin hole into a dark chamber: the light diverged from the aperture in the form of cone, and the shadows of all bodies placed in this light were larger than might have been expected, and surrounded with three coloured fringes, the nearest being

widest, and the most remote the narrowest. Newton, advancing upon this experiment, took exact measures of the diameter of the shadow of a human hair, and of the breadth of the fringes, at different distances behind it, and discovered that these diameters and breadths were not proportional to the distances at which they were measured. He hence supposed that the rays which passed by the edge of the hair were deflected or turned aside from it, as if by a repulsive force, the nearest rays suffering the greatest, the more remote a less degree of deflection. In explanation of the coloured fringes, he queried: whether the rays which differ in refrangibility do not differ also in flexibility, and whether they are not, by these different inflections, separated from one another, so as after separation to make the colours in the three fringes above described? Also, whether the rays, in passing by the edges and sides of bodies, are not bent several times backwards and forwards with an eel-like motion — the three fringes arising from three such bendings? His inquiries on this subject were here interrupted and never renewed.

His Theory of the Colours of Natural Bodies was communicated to the Royal Society, in February, 1675. This is justly regarded as one of the profoundest of his speculations. The fundamental principles of the Theory in brief, are: — That bodies possessing the greatest refractive powers reflect the greatest quantity of light; and that, at the confines of equally refracting media, there is no reflection. That the minutest particles of almost all natural bodies are in some degree transparent. That between the particles of bodies there are pores, or spaces, either empty or filled with media of a less density than the particles themselves. That these particles, and pores or spaces, have some definite size. Hence he deduced the Transparency, Opacity, and colours of natural bodies. Transparency arises from the particles and their pores being too small to cause reflection at their common surfaces — the light all passing through; Opacity from the opposite cause of the particles and their pores being sufficiently large to reflect the light which is “stopped or stifled” by the multitude of reflections; and colours from the particles, according to their several sizes, reflecting rays of one colour and transmitting those of another — or in other words, the colour that meets the eye is the colour reflected, while all the other rays are transmitted or absorbed.

Analogous in origin to the colours of natural bodies, he considered the colours of thin plates. This subject was interesting and important, and had

attracted considerable investigation. He, however, was the first to determine the law of the production of these colours, and, during the same year made known the results of his researches herein to the Royal Society. His mode of procedure in these experiments was simple and curious. He placed a double convex lens of a large known radius of curvature, upon the flat surface of a plano-convex object glass. Thus, from their point of contact at the centre, to the circumference of the lens, he obtained plates of air, or spaces varying from the extremest possible thinness, by slow degrees, to a considerable thickness. Letting the light fall, every different thickness of this plate of air gave different colours — the point of contact of the lens and glass forming the centre of numerous concentric colored rings. Now the radius of curvature of the lens being known, the thickness of the plate of air, at any given point, or where any particular colour appeared, could be exactly determined. Carefully noting, therefore, the order in which the different colours appeared, he measured, with the nicest accuracy, the different thicknesses at which the most luminous parts of the rings were produced, whether the medium were air, water, or mica — all these substances giving the same colours at different thicknesses; — the ratio of which he also ascertained. From the phenomena observed in these experiments, Newton deduced his Theory of Fits of Easy Reflection and Transmission of light. It consists in supposing that every particle of light, from its first discharge from a luminous body, possesses, at equally distant intervals, dispositions to be reflected from, or transmitted through the surfaces of bodies upon which it may fall. For instance, if the rays are in a Fit of Easy Reflection, they are on reaching the surface, repelled, thrown off, or reflected from it; if, in a Fit of Easy Transmission, they are attracted, drawn in, or transmitted through it. By this Theory of Fits, our author likewise explained the colours of thick plates.

He regarded light as consisting of small material particles emitted from shining substances. He thought that these particles could be re-combined into solid matter, so that “gross bodies and light were convertible into one another;” that the particles of light and the particles of solid bodies acted mutually upon each other; those of light agitating and heating those of solid bodies, and the latter attracting and repelling the former. Newton was the first to suggest the idea of the Polarization of light.

In the paper entitled *An Hypothesis Explaining Properties of Light*, December, 1675, our author first introduced his opinions respecting Ether — opinions which he afterward abandoned and again permanently resumed — "A most subtle spirit which pervades" all bodies, and is expanded through all the heavens. It is electric, and almost, if not quite immeasurably elastic and rare. "By the force and action of which spirit the particles of bodies mutually attract one another, at near distances, and cohere, if contiguous; and electric bodies operate at greater distances, as well repelling as attracting the neighbouring corpuscles; and light is emitted, reflected, refracted, inflected and heats bodies; and all sensation is excited, and the members of animal bodies move at the command of the will, namely, by the vibrations of this spirit, mutually propagated along the solid filaments of the nerves, from the outward organs of sense to the brain, and from the brain into the muscles." This "spirit" was no *anima mundi*; nothing further from the thought of Newton; but was it not, on his part, a partial recognition of, or attempt to reach an ultimate material force, or primary element, by means of which, "in the roaring loom of time," this material universe, God's visible garment, may be woven for us?

The Royal Society were greatly interested in the results of some experiments, which our author had, at the same time, communicated to them relative to the excitation of electricity in glass; and they, after several attempts and further direction from him, succeeded in re-producing the same phenomena.

One of the most curious of Newton's minor inquiries related to the connexion between the refractive powers and chemical composition of bodies. He found on comparing the refractive powers and the densities of many different substances, that the former were very nearly proportional to the latter, in the same bodies. Unctuous and sulphureous bodies were noticed as remarkable exceptions — as well as the *diamond* — their refractive powers being two or three times greater in respect of their densities than in the case of other substances, while, as among themselves, the one was generally proportional to the other. He hence inferred as to the diamond a great degree of combustibility; — a conjecture which the experiments of modern chemistry have shown to be true.

The chemical researches of our author were probably pursued with more or less diligence from the time of his witnessing some of the practical

operations in that science at the Apothecary's at Grantham. De Natura Acidorum is a short chemical paper, on various topics, and published in Dr. Horsley's Edition of his works. Tabula Quantitatum et Graduum Coloris was inserted in the Philosophical Transactions; it contains a comparative scale of temperature from that of melting ice to that of a small kitchen coal-fire. He regarded fire as a body heated so hot as to emit light copiously; and flame as a vapour, fume, or exhalation heated so hot as to shine. To elective attraction, by the operation of which the small particles of bodies, as he conceived, act upon one another, at distances so minute as to escape observation, he ascribed all the various chemical phenomena of precipitation, combination, solution, and crystallization, and the mechanical phenomena of cohesion and capillary attraction. Newton's chemical views were illustrated and confirmed, in part, at least, in his own life-time. As to the structure of bodies, he was of opinion "that the smallest particles of matter may cohere by the strongest attractions, and compose bigger particles of weaker virtue; and many of these may cohere and compose bigger particles whose virtue is still weaker; and so on for divers successions, until the progression end in the biggest particles, on which the operations in chemistry and the colours of natural bodies depend, and which by adhering, compose bodies of sensible magnitude."

There is good reason to suppose that our author was a diligent student of the writings of Jacob Behmen; and that in conjunction with a relative, Dr. Newton, he was busily engaged, for several months in the earlier part of life, in quest of the philosopher's tincture. "Great Alchymist," however, very imperfectly describes the character of Behmen, whose researches into things material and things spiritual, things human and things divine, afford the strongest evidence of a great and original mind.

More appropriately here, perhaps, than elsewhere, may be given Newton's account of some curious experiments, made in his own person, on the action of light upon the retina. Locke, who was an intimate friend of our author, wrote to him for his opinion on a certain fact stated in Boyle's Book of Colours. Newton, in his reply, dated June 30th, 1691, narrates the following circumstances, which probably took place in the course of his optical researches. Thus: —

"The observation you mention in Mr. Boyle's Book of Colours I once tried upon myself with the hazard of my eyes. The manner was this; I

looked a very little while upon the sun in the looking-glass with my right eye, and then turned my eyes into a dark corner of my chamber, and winked, to observe the impression made, and the circles of colours which encompassed it, and how they decayed by degrees, and at last vanished. This I repeated a second and a third time. At the third time, when the phantasm of light and colours about it were almost vanished, intending my fancy upon them to see their last appearance, I found, to my amazement, that they began to return, and by little and little to become as lively and vivid as when I had newly looked upon the sun. But when I ceased to intend my fancy upon them, they vanished again. After this, I found, that as often as I went into the dark, and intended my mind upon them, as when a man looks earnestly to see anything which is difficult to be seen; I could make the phantasm return without looking any more upon the sun; and the oftener I made it return, the more easily I could make it return again. And, at length, by repeating this, without looking any more upon the sun, I made such an impression on my eye, that, if I looked upon the clouds, or a book, or any bright object, I saw upon it a round bright spot of light like the sun, and, which is still stranger, though I looked upon the sun with my right eye only, and not with my left, yet my fancy began to make an impression upon my left eye, as well us upon my right. For if I shut my right eye, or looked upon a book, or the clouds, with my left eye, I could see the spectrum of the sun almost as plain as with my right eye, if I did but intend my fancy a little while upon it; for at first, if I shut my right eye, and looked with my left, the spectrum of the sun did not appear till I intended my fancy upon it; but by repeating, this appeared every time more easily. And now, in a few hours time, I had brought my eyes to such a pass, that I could look upon no blight object with either eye, but I saw the sun before me, so that I durst neither write nor read; but to recover the use of my eyes, shut myself up in my chamber made dark, for three days together, and used all means to divert my imagination from the sun. For if I thought upon him, I presently saw his picture, though I was in the dark. But by keeping in the dark, and employing my mind about other things, I began in three or four days to have some use of my eyes again; and by forbearing to look upon bright objects, recovered them pretty well, though not so well but that, for some months after, the spectrum of the sun began to return as often as I began to meditate upon the phenomena, even though I lay in bed at midnight with

my curtains drawn. But now I have been very well for many years, though I am apt to think, if I durst venture my eyes, I could still make the phantasm return by the power of my fancy. This story I tell you, to let you understand, that in the observation related by Mr. Boyle, the man's fancy probably concurred with the impression made by the sun's light to produce that phantasm of the sun which he constantly saw in bright objects. And so your question about the cause of phantasm involves another about the power of fancy, which I must confess is too hard a knot for me to untie. To place this effect in a constant motion is hard, because the sun ought then to appear perpetually. It seems rather to consist in a disposition of the sensorium to move the imagination strongly, and to be easily moved, both by the imagination and by the light, as often as bright objects are looked upon."

Though Newton had continued silent, yet his thoughts were by no means inactive upon the vast subject of the planetary motions. The idea of Universal Gravitation, first caught sight of, so to speak, in the garden at Woolsthorpe, years ago, had gradually expanded upon him. We find him, in a letter to Dr. Hooke, Secretary of the Royal Society, dated in November, 1679, proposing to verify the motion of the earth by direct experiment, namely, by the observation of the path pursued by a body falling from a considerable height. He had concluded that the path would be spiral; but Dr. Hooke maintained that it would be an eccentric ellipse in vacuo, and an ellipti-spiral in a resisting medium. Our author, aided by this correction of his error, and by the discovery that a projectile would move in an elliptical orbit when under the influence of a force varying inversely as the square of the distance, was led to discover "the theorem by which he afterwards examined the ellipsis;" and to demonstrate the celebrated proposition that a planet acted upon by an attractive force varying inversely as the squares of the distances will describe an elliptical orbit, in one of whose foci the attractive force resides.

When he was attending a meeting of the Royal Society, in June 1682, the conversation fell upon the subject of the measurement of a degree of the meridian, executed by M. Picard, a French Astronomer, in 1679. Newton took a memorandum of the result; and afterward, at the earliest opportunity, computed from it the diameter of the earth: furnished with these new data, he resumed his calculation of 1666. As he proceeded therein, he saw that his early expectations were now likely to be realized: the thick rushing,

stupendous results overpowered him; he became unable to carry on the process of calculation, and intrusted its completion to one of his friends. The discoverer had, indeed, grasped the master-fact, The law of falling bodies at the earth's surface was at length identified with that which guided the moon in her orbit. And so his Great Thought, that had for sixteen years loomed up in dim, gigantic outline, amid the first dawn of a plausible hypothesis, now stood forth, radiant and not less grand, in the mid-day light of demonstrated truth.

It were difficult, nay impossible to imagine, even, the influence of a result like this upon a mind like Newton's. It was as if the keystone had been fitted to the glorious arch by which his spirit should ascend to the outskirts of infinite space — spanning the immeasurable — weighing the imponderable — computing the incalculable — mapping out the marchings of the planets, and the far-wanderings of the corners, and catching, bring back to earth some clearer notes of that higher melody which, as a sounding voice, bears perpetual witness to the design and omnipotence of a creating Deity.

Newton, extending the law thus obtained, composed a series of about twelve propositions on the motion of the primary planets about the sun. These were sent to London, and communicated to the Royal Society about the end of 1683. At or near this period, other philosophers, as Sir Christopher Wren, Dr. Halley, and Dr. Hooke, were engaged in investigating the same subject; but with no definite or satisfactory results. Dr. Halley, having seen, it is presumed, our author's propositions, went in August, 1684, to Cambridge to consult with him upon the subject. Newton assured him that he had brought the demonstration to perfection. In November, Dr. Halley received a copy of the work; and, in the following month, announced it to the Royal Society, with the author's promise to have it entered upon their Register. Newton, subsequently reminded by the Society of his promise, proceeded in the diligent preparation of the work, and, though suffering an interruption of six weeks, transmitted the manuscript of the first book to London before the end of April. The work was entitled Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, dedicated to the Royal Society, and presented thereto on the 28th of April, 1685-6. The highest encomiums were passed upon it; and the council resolved, on the 19th of May, to print it at the expense of the Society, and under the direction

of Dr. Halley. The latter, a few days afterward, communicated these steps to Newton, who, in a reply, dated the 20th of June, holds the following language:— "The proof you sent me I like very well. I designed the whole to consist of three books; the second was finished last summer, being short, and only wants transcribing, and drawing the cuts fairly. Some new propositions I have since thought on, which I can as well let alone. The third wants the theory of comets. In autumn last, I spent two months in calculation to no purpose for want of a good method, which made me afterward return to the first book, and enlarge it with diverse propositions, some relating to comets, others to other things found out last winter. The third I now design to suppress. Philosophy is such an impertinently litigious lady, that a man had as good be engaged in law-suits as have to do with her, I found it so formerly, and now I can no sooner come near her again, but she gives me warning. The first two books without the third will not so well bear the title of *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematicia*; and thereupon I had altered it to this, *De Motu Corporum Libri duo*. But after second thought I retain the former title. It will help the sale of the book, which I ought not to diminish now 'tis yours."

This "warning" arose from some pretensions put forth by Dr. Hooke. And though Newton gave a minute and positive refutations of such claims, yet, to reconcile all differences, he generously added to Prop. IV. Cor. 6, Book I., a Scholium, in which Wren, Hooke and Halley are acknowledged to have independently deduced the law of gravity from the second law of Kepler.

The suppression of the third book Dr. Halley could not endure to see. "I must again beg you" says he, "not to let your resentments run so high as to deprive us of your third book, where in your applications of your mathematical doctrine to the theory of comets, and several curious experiments, which, as I guess by what you write ought to compose it, will undoubtedly render it acceptable to those who will call themselves philosophers without mathematics, which are much the greater number," To these solicitations Newton yielded. There were no "resentments," however, as we conceive, in his "design to suppress." He sought peace; for he loved and valued it above all applause. But, in spite of his efforts for tranquillity's sake, his course of discovery was all along molested by ignorance or presumptuous rivalry.

The publication of the great work now went rapidly forwards, The second book was sent to the Society, and presented on the 2d March; the third, on the 6th April; and the whole was completed and published in the month of May, 1686-7. In the second Lemma of the second book, the fundamental principle of his fluxionary calculus was, for the first time, given to the world; but its algorithm or notation did not appear till published in the second volume of Dr. Wallis's works, in 1693.

And thus was ushered into existence The Principia — a work to which pre-eminence above all the productions of the human intellect has been awarded — a work that must be esteemed of priceless worth so long as Science has a votary, or a single worshipper be left to kneel at the altar of Truth.

The entire work bears the general title of The Mathematical Principles Of Natural Philosophy. It consists of three books: the first two, entitled, Of The Motion Of Bodies, are occupied with the laws and conditions of motions and forces, and are illustrated with many scholia treating of some of the most general and best established points in philosophy, such as the density and resistance of bodies, spaces void of matter, and the motion of sound and light. From these principles, there is deduced, in the third book, drawn up in as popular a style as possible and entitled, Of the System of the World, the constitution of the system of the world. In regard to this book, the author says— "I had, indeed, composed the third Book in a popular method, that it might be read by many; but afterwards, considering that such as had not sufficently entered into the principles could not easily discover the strength of the consequences, nor lay aside the prejudices to which they had been many years accustomed, therefore, to prevent disputes which might be raised upon such accounts, I chose to reduce the substance of this Book into the form of Propositions (in the mathematical way), which should be read by those only who had first made themselves masters of the principles established in the preceding Books: not that I would advise any one to the previous study of every Proposition of those Books."— "It is enough it one carefully reads the Definitions, the Laws of Motion, and the three first Sections of the first Book. He may then pass on to this Book, and consult such of the remaining Propositions of the first two Books, as the references in this, and his occasions shall require." So that "The System of

the World" is composed both "in a popular method," and in the form of mathematical Propositions.

The principle of Universal Gravitation, namely, *that every particle of matter is attracted by, or gravitates to, every other particle of matter, with a force inversely proportional to the squares of their distances* — is the discovery which characterizes The Principia. This principle the author deduced from the motion of the moon, and the three laws of Kepler — laws, which Newton, in turn, by his greater law, demonstrated to be true.

From the first law of Kepler, namely, the proportionality of the areas to the times of their description, our author inferred that the force which retained the planet in its orbit was always directed to the sun; and from the second, namely, that every planet moves in an ellipse with the sun in one of its foci, he drew the more general inference that the force by which the planet moves round that focus varies inversely as the square of its distance therefrom: and he demonstrated that a planet acted upon by such a force could not move in any other curve than a conic section; showing when the moving body would describe a circular, an elliptical, a parabolic, or hyperbolic orbit. He demonstrated, too, that this force, or attracting, gravitating power resided in every, the least particle; but that, in spherical masses, it operated as if confined to their centres; so that, one sphere or body will act upon another sphere or body, with a force directly proportional to the quantity of matter, and inversely as the square of the distance between their centres; and that their velocities of mutual approach will be in the inverse ratio of their quantities of matter. Thus he grandly outlined the Universal Law. Verifying its truth by the motions of terrestrial bodies, then by those of the moon and other secondary orbs, he finally embraced, in one mighty generalization, the entire Solar System — all the movements of all its bodies — planets, satellites and comets — explaining and harmonizing the many diverse and theretofore inexplicable phenomena.

Guided by the genius of Newton, we see sphere bound to sphere, body to body, particle to particle, atom to mass, the minutest part to the stupendous whole — each to each, each to all, and all to each — in the mysterious bonds of a ceaseless, reciprocal influence. An influence whose workings are shown to be alike present in the globular dew-drop, or oblate-spheroidal earth; in the falling shower, or vast heaving ocean tides; in the flying thistle-down, or fixed, ponderous rock; in the swinging pendulum, or time-

measuring sun; in the varying and unequal moon, or earth's slowly retrograding poles; in the uncertain meteor, or blazing comet wheeling swiftly away on its remote, yet determined round. An influence, in fine, that may link system to system through all the star-glowing firmament; then firmament to firmament aye, firmament to firmament, again and again, till, converging home, it may be, to some ineffable centre, where more presently dwells He who inhabiteth immensity, and where infinitudes meet and eternities have their conflux, and where around move, in softest, swiftest measure, all the countless hosts that crowd heaven's fathomless deeps.

And yet Newton, amid the loveliness and magnitude of Omnipotence, lost not sight of the Almighty One. A secondary, however universal, was not taken for the First Cause. An impressed force, however diffused and powerful, assumed not the functions of the creating, giving Energy. Material beauties, splendours, and sublimities, however rich in glory, and endless in extent, concealed not the attributes of an intelligent Supreme. From the depths of his own soul, through reason and the Word, he had risen, *à priori*, to God: from the heights of Omnipotence, through the design and law of the builded universe, he proved *à posteriori*, a Deity. "I had," says he, "an eye upon such principles as might work, with considering men, for the belief of a Deity," in writing the Principia; at the conclusion whereof, he teaches that — "this most beautiful system of the sun, planets and comets, could only proceed from the counsel and dominion of an intelligent and powerful Being. And if the fixed stars are the centres of other like systems, these, being formed by the like wise counsels, must be all subject to the dominion of One; especially since the light of the fixed stars is of the same nature with the light of the sun, and from every system light passes into all other systems: and lest the systems of the fixed stars should, by their gravity, fall on each other mutually, he hath placed those systems at immense distances one from another.

"This Being governs all things, not as the soul of the world, but as Lord over all; and on account of his dominion he is wont, to be called Lord God *παντοκρατωρ* or Universal Ruler; for God is a relative word, and has a respect to servants; and Deity is the dominion of God, not over his own body, as those imagine who fancy God to be the soul of the world, but over servants. The Supreme God is a Being eternal, infinite, absolutely perfect; but a being, however perfect, without dominion, cannot be said to be Lord

God; for we say, my God, your God, the God of Israel, the God of Gods, and Lord of Lords; but we do not say, my Eternal, your Eternal, the Eternal of Israel, the Eternal of Gods; we do not say my Infinite, or my Perfect: these are titles which have no respect to servants. The word God usually signifies Lord; but every Lord is not God. It is the dominion of a spiritual Being which constitutes a God; a true, supreme, or imaginary dominion makes a true, supreme, or imaginary God. And from his true dominion it follows that the true God is a living, intelligent and powerful Being; and from his other perfections, that he is supreme or most perfect. He is eternal and infinite, omnipotent and omniscient; that is, his duration reaches from eternity to eternity; his presence from infinity to infinity; he governs all things and knows all things, that are or can be done. He is not eternity or infinity, but eternal and infinite; he is not duration and space, but he endures and is present. He endures forever and is everywhere present; and by existing always and everywhere, he constitutes duration and space. Since every particle of space is *always*, and every indivisible moment of duration is *everywhere*, certainly the Maker and Lord of things cannot be *never* and *nowhere*. Every soul that has perception is, though in different times and different organs of sense and motion, still the same indivisible person. There are given successive parts in duration, co-existent parts in space, but neither the one nor the other in the person of a man, or his thinking principle; and much less can they be found in the thinking substance of God. Every man, so far as he is a thing that has perception, is one and the same man during his whole life, in all and each of his organs of sense. God is one and the same God, always and everywhere. He is omnipresent, not *virtually* only, but also *substantially*; for virtue cannot subsist without substance. In him are all things contained and moved; yet neither affects the other; God suffers nothing from the motion of bodies; bodies find no resistance from the omnipresence of God. It is allowed by all that the Supreme God exists necessarily; and by the same necessity he exists *always* and *everywhere*. Whence also he is all similar, all eye, all ear, all brain, all arm, all power to perceive, to understand, and to act; but in a manner not at all human, in a manner not at all corporeal, in a manner utterly unknown to us. As a blind man has no idea of colours, so have we no idea of the manner by which the all-wise God perceives and understands all things. He is utterly void of all body, and bodily figure, and can therefore neither be seen,

nor heard, nor touched; nor ought he to be worshipped under the representation of any corporeal thing. We have ideas of his attributes, but what the real substance of anything is we know not. In bodies we see only their figures and colours, we hear only the sounds, we touch only their outward surfaces, we smell only the smells, and taste only the savours; but their inward substances are not to be known, either by our senses, or by any reflex act of our minds: much less, then, have we any idea of the substance of God. We know him only by his most wise and excellent contrivances of things, and final causes; we admire him for his perfections; but we reverence and adore him on account of his dominion; for we adore him as his servants; and a god without dominion, providence, and final causes, is nothing else but Fate and Nature. Blind metaphysical necessity, which is certainly the same always and everywhere, could produce no variety of things. All that diversity of natural things which we find suited to different times and places could arise from nothing but the ideas and will of a Being necessarily existing."

Thus, the diligent student of science, the earnest seeker of truth, led, as through the courts of a sacred Temple, wherein, at each step, new wonders meet the eye, till, as a crowning grace, they stand before a Holy of Holies, and learn that all science and all truth are one which hath its beginning and its end in the knowledge of Him whose glory the heavens declare, and whose handiwork the firmament showeth forth.

The introduction of the pure and lofty doctrines of the Principia was perseveringly resisted. Descartes, with his system of vortices, had sown plausibly to the imagination, and error had struck down deeply, and shot up luxuriantly, not only in the popular, but in the scientific mind. Besides the idea — in itself so simple and so grand — that the great masses of the planets were suspended in empty space, and retained in their orbits by an invisible influence residing in the sun — was to the ignorant a thing inconceivable, and to the learned a revival of the occult qualities of the ancient physics. This remark applies particularly to the continent. Leibnitz misapprehended; Huygens in part rejected; John Bernouilli opposed; and Fontenelle never received the doctrines of the Principia. So that, the saying of Voltaire is probably true, that though Newton survived the publication of his great work more than forty years, yet, at the time of his death, he had not above twenty followers out of England,

But in England, the reception of our author's philosophy was rapid and triumphant. His own labours, while Lucasian Professor; those of his successors in that Chair — Whiston and Saunderson; those of Dr. Samuel Clarke, Dr. Laughton, Roger Cotes, and Dr. Bentley; the experimental lectures of Dr. Keill and Desaguliers; the early and powerful exertions of David Gregory at Edinburgh, and of his brother James Gregory at St. Andrew's, tended to diffuse widely in England and Scotland a knowledge of, and taste for the truths of the Principia. Indeed, its mathematical doctrines constituted, from the first, a regular part of academical instruction; while its physical truths, given to the public in popular lectures, illustrated by experiments, had, before the lapse of twenty years, become familiar to, and adopted by the general mind. Pemberton's popular "View of Sir Isaac Newton's Philosophy" was published, in 1728; and the year afterward, an English translation of the Principia, and System of the World, by Andrew Motte. And since that period, the labours of Le Seur and Jacquier, of Thorpe, of Jebb, of Wright and others have greatly contributed to display the most hidden treasures of the Principia.

About the time of the publication of the Principia, James II., bent on re-establishing the Romish Faith, had, among other illegal acts, ordered by mandamus, the University of Cambridge to confer the degree of Master of Arts upon an ignorant monk. Obedience to this mandate was resolutely refused. Newton was one of the nine delegates chosen to defend the independence of the University. They appeared before the High Court; — and successfully: the king abandoned his design. The prominent part which our author took in these proceedings, and his eminence in the scientific world, induced his proposal as one of the parliamentary representatives of the University. He was elected, in 1688, and sat in the Convention Parliament till its dissolution. After the first year, however, he seems to have given little or no attention to his parliamentary duties, being seldom absent from the University till his appointment in the Mint, in 1695.

Newton began his theological researches sometime previous to 1691; in the prime of his years, and in the matured vigour of his intellectual powers. From his youth, as we have seen, he had devoted himself with an activity the most unceasing, and an energy almost superhuman to the discovery of physical truth; — giving to Philosophy a new foundation, and to Science a new temple. To pass on, then, from the consideration of the material, more

directly to that of the spiritual, was a natural, nay, with so large and devout a soul, a necessary advance. The Bible was to him of inestimable worth. In the elastic freedom, which a pure and unswerving faith in Him of Nazareth gives, his mighty faculties enjoyed the only completest scope for development. His original endowment, however great, combined with a studious application, however profound, would never, without this liberation from the dominion of passion and sense, have enabled him to attain to that wondrous concentration and grasp of intellect, for which Fame has as yet assigned him no equal. Gratefully he owned, therefore, the same Author in the Book of Nature and the Book of Revelation. These were to him as drops of the same unfathomable ocean; — as outrayings of the same inner splendour; — as tones of the same ineffable voice; — as segments of the same infinite curve. With great joy he had found himself enabled to proclaim, as an interpreter, from the hieroglyphs of Creation, the existence of a God: and now, with greater joy, and in the fulness of his knowledge, and in the fulness of his strength, he laboured to make clear, from the utterances of the inspired Word, the far mightier confirmations of a Supreme Good, in all its glorious amplitude of Being and of Attribute; and to bring the infallible workings thereof plainly home to the understandings and the affections of his fellow-men; and finally to add the weight of his own testimony in favour of that Religion, whose truth is now, indeed, "girded with the iron and the rock of a ponderous and colossal demonstration."

His work, entitled, Observations upon the Prophecies of Holy Writ, particularly the Prophecies of Daniel and the Apocalypse of St. John, first published in London, in 1733 4to. consists of two parts: the one devoted to the Prophecies of Daniel, and the other to the Apocalypse of St. John, In the first part, he treats concerning the compilers of the books of the Old Testament; — of the prophetic language; — of the vision of the four beasts; — of the kingdoms represented by the feet of the image composed of iron and clay; — of the ten kingdoms represented by the ten horns of the beast; — of the eleventh horn of Daniel's fourth beast; — of the power which should change times and laws; — of the kingdoms represented in Daniel by the ram and he-goat; — of the prophecy of the seventy weeks; — of the times of the birth and passion of Christ; — of the prophecy of the Scripture of Truth; — of the king who doeth according to his will, and magnified

himself above every god, and honoured Mahuzzims, and regarded not the desire of women; — of the Mahuzzim, honoured by the king who doeth according to his will. In the second part, he treats of the time when the Apocalypse was written, of the scene of the vision, and the relation which the Apocalypse has to the book of the law of Moses, and to the worship of God in the temple; — of the relation which the Apocalypse has to the prophecies of Daniel, and of the subject of the prophecy itself. Newton regards the prophecies as given, not for the gratification of man's curiosity, by enabling him to foreknow; but tor his conviction that the world is governed by Providence, by witnessing their fulfilment. Enough of prophecy, he thinks, has already been fulfilled to afford the diligent seeker abundant evidence of God's providence. The whole work is marked by profound erudition, sagacity and argument.

And not less learning, penetration and masterly reasoning are conspicuous in his Historical Account of Two Notable Corruptions of Scriptures in a Letter to a Friend. This Treatise, first accurately published in Dr. Horsley's edition of his works, relates to two texts: the one, 1 Epistle of St. John v. 7; the other, 1 Epistle of St. Paul to Timothy iii. 16. As this work had the effect to deprive the advocates of the doctrine of the Trinity of two leading texts, Newton has been looked upon as an Arian; but there is absolutely nothing in his writings to warrant such a conclusion.

His remaining theological works consist of the Lexicon Propheticum, which was left incomplete; a Latin Dissertation on the sacred cubit of the Jews, which was translated into English, and published, in 1737, among the Miscellaneous Works of John Greaves; and Four Letters *addressed to Dr. Bentley, containing some arguments in proof of a Deity*. These Letters were dated respectively: 10th December, 1692; 17th January, 1693; 25th February, 1693; and 11th February, 1693 — the fourth bearing an earlier date than the third. The best faculties and the profoundest acquirements of our author are convincingly manifest in these lucid and powerful compositions. They were published in 1756, and reviewed by Dr. Samuel Johnson.

Newton's religious writings are distinguished by their absolute freedom from prejudice. Everywhere, throughout them, there glows the genuine nobleness of soul. To his whole life, indeed, we may here fitly extend the same observation. He was most richly imbued with the very spirit of the

Scriptures which he so delighted to study and to meditate upon. His was a piety, so fervent, so sincere and practical, that it rose up like a holy incense from every thought and act. His a benevolence that not only willed, but endeavoured the best for all. His a philanthropy that held in the embracings of its love every brother-man. His a toleration of the largest and the truest; condemning persecution in every, even its mildest form; and kindly encouraging each striving after excellence: — a toleration that came not of indifference for the immoral and the impious met with their quick rebuke — but a toleration that came of the wise humbleness and the Christian charity, which see, in the nothingness of self and the almightiness of Truth, no praise for the ablest, and no blame for the feeblest in their strugglings upward to light and life.

In the winter of 1691-2, on returning from chapel, one morning, Newton found that a favourite little dog, called Diamond, had overturned a lighted taper on his desk, and that several papers containing the results of certain optical experiments, were nearly consumed. His only exclamation, on perceiving his loss, was, "Oh Diamond, Diamond, little knowest thou the mischief thou hast done" Dr. Brewster, in his life of our author, gives the following extract from the manuscript Diary of Mr. Abraham De La Pryme, a student in the University at the time of this occurrence.

"1692. February, 3. — What I heard to-day I must relate. There is one Mr. Newton (whom I have very oft seen), Fellow of Trinity College, that is mighty famous for his learning, being a most excellent mathematician, philosopher, divine, &c. He has been Fellow of the Royal Society these many years; and among other very learned books and tracts, he's written one upon the mathematical principles of philosophy, which has given him a mighty name, he having received, especially from Scotland, abundance of congratulatory letters for the same; but of all the books he ever wrote, there was one of colours and light, established upon thousands of experiments which he had been twenty years of making, and which had cost him many hundreds of pounds. This book which he valued so much, and which was so much talked of, had the ill luck to perish, and be utterly lost just when the learned author was almost at putting a conclusion at the same, after this manner: In a winter's morning, leaving it among his other papers on his study table while he went to chapel, the candle, which he had unfortunately left burning there, too, catched hold by some means of other papers, and

they fired the aforesaid book, and utterly consumed it and several other valuable writings; and which is most wonderful did no further mischief. But when Mr. Newton came from chapel, and had seen what was done, every one thought he would have run mad, he was so troubled thereat that he was not himself for a month after. A long account of this his system of colours you may find in the Transactions of the Royal Society, which he had sent up to them long before this sad mischance happened unto him."

It will be borne in mind that all of Newton's theological writings, with the exception of the Letters to Dr. Bentley, were composed before this event which, we must conclude, from Pryme's words, produced a serious impression upon our author for about a month. But M. Biot, in his Life of Newton, relying on a memorandum contained in a small manuscript Journal of Huygens, declares this occurrence to have caused a derangement of Newton's intellect. M. Biot's opinions and deductions, however, as well as those of La Place, upon this subject, were based upon erroneous data, and have been overthrown by the clearest proof. There is not, in fact, the least evidence that Newton's reason was, for a single moment, dethroned; on the contrary, the testimony is conclusive that he was, at all times, perfectly capable of carrying on his mathematical, metaphysical and astronomical inquiries. Loss of sleep, loss of appetite, and irritated nerves will disturb somewhat the equanimity of the most serene; and an act done, or language employed, under such temporary discomposure, is not a just criterion of the general tone and strength of a man's mind. As to the accident itself, we may suppose, whatever might have been its precise nature, that it greatly distressed him, and, still further, that its shock may have originated the train of nervous derangements, which afflicted him, more or less, for two years afterward. Yet, during this very period of ill health, we find him putting forth his highest powers. In 1692, he prepared for, and transmitted to Dr. Wallis the first proposition of the Treatise on Quadratures, with examples of it in first, second and third fluxions. He investigated, in the same year, the subject of haloes; making and recording numerous and important observations relative thereto. Those profound and beautiful Letters to Dr. Bentley were written at the close of this and the beginning of the next year. In October, 1693, Locke, who was then about publishing a second edition of his work on the Human Understanding, requested Newton to reconsider his opinions on innate ideas. And in 1694, he was zealously occupied in

perfecting his lunar theory: visiting Flamstead, at the Royal Observatory of Greenwich, in September, and obtaining a series of lunar observations; and commencing, in October, a correspondence with that distinguished practical Astronomer, which continued till 1698.

We now arrive at the period when Newton permanently withdrew from the seclusion of a collegiate, and entered upon a more active and public life. He was appointed Warden of the Mint, in 1695, through the influence of Charles Montague, Chancellor of the Exchequer, and afterward Earl of Halifax. The current coin of the nation had been adulterated and debased, and Montague undertook a re-coinage. Our author's mathematical and chemical knowledge proved eminently useful in accomplishing this difficult and most salutary reform. In 1699, he was promoted to the Mastership of the Mint — an office worth twelve or fifteen hundred pounds per annum, and which he held during the remainder of his life. He wrote, in this capacity, an official Report on the Coinage, which has been published; he also prepared a Table of Assays of Foreign Coins, which was printed at the end of Dr. Arbuthnot's Tables of Ancient Coins, Weights, and Measures, in 1727.

Newton retained his Professorship at Cambridge till 1703. But he had, on receiving the appointment of Master of the Mint, in 1699, made Mr. Whiston his deputy, with all the emoluments of the office; and, on finally resigning, procured his nomination to the vacant Chair.

In January 1697, John Bernouilli proposed to the most distinguished mathematicians of Europe two problems for solution. Leibnitz, admiring the beauty of one of them, requested the time for solving it to be extended to twelve months — twice the period originally named. The delay was readily granted. Newton, however, sent in, the day after he received the problems, a solution of them to the President of the Royal Society. Bernouilli obtained solutions from Newton, Leibinitz and the Marquis De L'Hopital; but Newton's though anonymous, he immediately recognised "*tanquam ungue leonem*" as the lion is known by his claw. We may mention here the famous problem of the trajectories proposed by Leibnitz, in 1716, for the purpose of "feeling the pulse of the English Analysts." Newton received the problem about five o'clock in the afternoon, as he was returning from the Mint; and though it was extremely difficult and he himself much fatigued, yet he completed its solution, the same evening before he went to bed.

The history of these problems affords, by direct comparison, a striking illustration of Newton's vast superiority of mind. That amazing concentration and grasp of intellect, of which we have spoken, enabled him to master speedily, and, as it were, by a single effort, those things, for the achievement of which, the many would essay utterly in vain, and the very, very few attain only after long and renewed striving. And yet, with a modesty as unparalleled as his power, he attributed his successes, not to any extraordinary sagacity, but solely to industry and patient thought. He kept the subject of consideration constantly before him, and waited till the first dawning opened gradually into a full and clear light; never quitting, if possible, the mental process till the object of it were wholly gained. He never allowed this habit of meditation to appear in his intercourse with society; but in the privacy of his own chamber, or in the midst of his own family, he gave himself up to the deepest abstraction. Occupied with some interesting investigation, he would often sit down on his bedside, after he rose, and remain there, for hours, partially dressed. Meal-time would frequently come and pass unheeded; so that, unless urgently reminded, he would neglect to take the requisite quantity of nourishment. But notwithstanding his anxiety to be left undisturbed, he would, when occasion required, turn aside his thoughts, though bent upon the most intricate research, and then, when leisure served, again direct them to the very point where they ceased to act: and this he seemed to accomplish not so much by the force of his memory, as by the force of his inventive faculty, before the vigorous intensity of which, no subject, however abstruse, remained long unexplored.

He was elected a member of the Royal Academy of Sciences at Paris, in 1699, when that distinguished Body were empowered, by a new charter, to admit a small number of foreign associates. In 1700, he communicated to Dr. Halley a description of his reflecting instrument for observing the moon's distance from the fixed stars. This description was published in the Philosophical Transactions, in 1742. The instrument was the same as that produced by Mr. Hadley, in 1731, and which, under the name of Hadley's Quadrant, has been of so great use in navigation. On the assembling of the new Parliament, in 1701, Newton was reelected one of the members for the University of Cambridge. In 1703, he was chosen President of the Royal

Society of London, to which office he was annually reelected till the period of his decease — about twenty-five years afterward.

Our author unquestionably devoted more labour to, and, in many respects, took a greater pride in his Optical, than his other discoveries. This science he had placed on a new and indestructible basis; and he wished not only to build, but to perfect the costly and glowing structure. He had communicated, before the publication of the Principia, his most important researches on light to the Royal Society, in detached papers which were inserted in successive numbers of the Transactions; but he did not publish a connected view of these labours till 1704, when they appeared under the title of Optics: or, a Treatise on the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light. To this, but to no subsequent edition, were added two Mathematical Treatises, entitled, Tractatus duo de speciebus et magnitudine figurarum curvilinearum; the one bearing the title Tractatus de quadratura curvarum; and the other, that of Enumeratio linearum tertii ordinis. The publication of these Mathematical Treatises was made necessary in consequence of plagiarisms from the manuscripts of them loaned by the author to his friends. Dr. Samuel Clarke published a Latin translation of the Optics, in in 1706; whereupon he was presented by Newton, as a mark of his grateful approbation, with five hundred pounds, or one hundred pounds for each of his children. The work was afterward translated into French. It had a remarkably wide circulation, and appeared, in several successive editions, both in England and on the Continent. There is displayed, particularly on this Optical Treatise, the author's talent for simplifying and communicating the profoundest speculations. It is a faculty rarely united to that of the highest invention. Newton possessed both; and thus that mental perfectness which enabled him to create, to combine, and to teach, and so render himself, not the "ornament" only, but inconceivably more, the pre-eminent benefactor of his species.

The honour of knighthood was conferred on our author in 1705. Soon afterward, he was a candidate again for the Representation of the University, but was defeated by a large majority. It is thought that a more pliant man was preferred by both ministers and electors. Newton was always remarkable for simplicity of dress, and his only known departure from it was on this occasion, when he is said to have appeared in a suit of laced clothes.

The Algebraical Lectures which he had, during nine years, delivered at Cambridge, were published by Whiston, in 1707, under the title of Arithmetica Universalis, sine de Compositione et Resolutions Arithmetica Liber. This publication is said to have been a breach of confidence on Whiston's part. Mr. Ralphson, not long afterward, translated the work into English; and a second edition of it, with improvements by the author, was issued at London, 1712, by Dr. Machin. Subsequent editions, both in English and Latin, with commentaries, have been published.

In June, 1709, Newton intrusted the superintendence of a second edition of the Principia to Roger Cotes, Plumian Professor of Astronomy at Cambridge. The first edition had been sold off for some time. Copies of the work had become very rare, and could only be obtained at several times their original cost. A great number of letters passed between the author and Mr. Cotes during the preparation of the edition, which finally appeared in May, 1713. It had many alterations and improvements, and was accompanied by an admirable Preface from the pen of Cotes.

Our author's early Treatise, entitled, Analysis per Equationes Numero Terminorum Infinitas, as well as a small Tract, bearing the title of Methodus Differentialis, was published, with his consent, in 1711. The former of these, and the Treatise De Quadratura Curvarum, translated into English, with a large commentary, appeared in 1745. His work, entitled, Artis Analyticæ Specimina, vel Geometria Analytica, was first given to the world in the edition of Dr. Horsley, 1779.

It is a notable fact, in Newton's history, that he never voluntarily published any one of his purely mathematical writings. The cause of this unwillingness in some, and, in other instances, of his indifference, or, at least, want of solicitude to put forth his works may be confidently sought for in his repugnance to every thing like contest or dispute. But, going deeper than this aversion, we find, underlying his whole character and running parallel with all his discoveries, that extraordinary humility which always preserved him in a position so relatively just to the behests of time and eternity, that the infinite value of truth, and the utter worthlessness of fame, were alike constantly present to him. Judging of his course, however, in its more temporary aspect, as bearing upon his immediate quiet, it seemed the most unfortunate. For an early publication, especially in the case of his Method of Fluxions, would have anticipated all rivalry, and

secured him from the contentious claims of Leibnitz. Still each one will solve the problem of his existence in his own way, and, with a man like Newton, his own, as we conceive, could be no other than the best way. The conduct of Leibnitz in this affair is quite irreconcilable with the stature and strength of the man; giant-like, and doing nobly, in many ways, a giant's work, yet cringing himself into the dimensions and performances of a common calumniator. Opening in 1699, the discussion in question continued till the close of Leibnitz's life, in 1716. We give the summary of the case as contained in the Report of the Committee of the Royal Society, the deliberately weighed opinion of which has been adopted as an authoritative decision in all countries.

"We have consulted the letters and letter books in the custody of the Royal Society, and those found among the papers of Mr. John Collins, dated between the years 1669 and 1677, inclusive: and showed them to such as knew and avouched the hands of Mr. Barrow, Mr. Collins, Mr. Oldenburg, and Mr. Leibnitz; and compared those of Mr. Gregory with one another, and with copies of some of them taken in the hand of Mr. Collins; and have extracted from them what relates to the matter referred to us: all which extracts, herewith delivered to you, we believe to be genuine and authentic. And by these letters and papers we find: —

"I. Mr. Leibnitz was in London in the beginning of the year 1673; and went thence in or about March, to Paris, where he kept a correspondence with Mr. Collins, by means of Mr. Oldenburg, till about September, 1676, and then returned, by London and Amsterdam, to Hanover: and that Mr. Collins was very free in communicating to able mathematicians what he had received from Mr. Newton and Mr. Gregory.

"II. That when Mr. Leibnitz was the first time in London, he contended for the invention of another differential method, properly so called; and, notwithstanding he was shown by Dr. Pell that it was Newton's method, persisted in maintaining it to be his own invention, by reason that he had found it by himself without knowing what Newton had done before, and had much improved it. And we find no mention of his having any other differential method than Newton's before his letter of the 21st of June, 1677, which was a year after a copy of Mr. Newton's letter of the 10th of December, 1672, had been sent to Paris to be communicated to him; and above four years after Mr. Collins began to communicate that letter to his

correspondents; in which letter the method of fluxions was sufficiently described to any intelligent person.

"III. That by Mr. Newton's letter, of the 13th of June, 1676 it appears that he had the method of fluxions above five years before the writing of that letter. And by his Analysis per Æquationes numero Terminorum Infinitas, communicated by Dr. Barrow to Mr. Collins, in July, 1669, we find that he had invented the method before that time.

"IV. That the differential method is one and the same with the method of fluxions, excepting the name and mode of notation; Mr. Leibnitz calling those quantities differences which Mr. Newton calls moments, or fluxions; and marking them with a letter *d* — a mark not used by Mr. Newton.

"And, therefore, we take the proper question to be, not who invented this or that method, but, who was the first inventor of the method? And we believe that those who have reputed Mr. Leibnitz the first inventor knew little or nothing of his correspondence with Mr. Collins and Mr. Oldenburg long before, nor of Mr. Newton's having that method above fifteen years before Mr Leibnitz began to publish it in the Acta Eruditorum of Leipsic.

"For which reason we reckon Mr. Newton the first inventor; and are of opinion that Mr. Keill, in asserting the same, has been no ways injurious to Mr. Leibnitz. And we submit to the judgment of the Society, whether the extract and papers, now presented to you, together with what is extant, to the same purpose, in Dr. Wallis's third volume, may not deserve to be made public."

This Report, with the collection of letters and manuscripts, under the title of Commercium Epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota Jussu Societatis Regiæ Editum, appeared accordingly in the early part of 1713. Its publication seemed to infuse additional bitterness into the feelings of Leibnitz, who descended to unfounded charges and empty threats. He had been privy counsellor to the Elector of Hanover, before that prince was elevated to the British throne; and in his correspondence, in 1715 and 1716, with the Abbé Conti, then at the court of George I., and with Caroline, Princess of Wales, he attacked the doctrines of the Principia, and indirectly its author, in a manner very discreditable to himself, both as a learned and as an honourable man. His assaults, however, were triumphantly met; and, to the complete overthrow of his rival pretensions, Newton was induced to give the finishing blow. The verdict is universal and

irreversible that the English preceded the German philosopher, by at least ten years, in the invention of fluxions. Newton could not have borrowed from Leibnitz; but Leibnitz might have borrowed from Newton. A new edition of the Commercium Epistolicum was published in 1722-5 (?); but neither in this, nor in the former edition, did our author take any part. The disciples, enthusiastic, capable and ready, effectually shielded, with the buckler of Truth, the character of the Master, whose own conduct throughout was replete with delicacy, dignity and justice. He kept aloof from the controversy — in which Dr. Keill stood forth as the chief representative of the Newtonian side — till the very last, when, for the satisfaction of the King, George I., rather than for his own, he consented to put forth his hand and firmly secure his rights upon a certain and impregnable basis.

A petition to have inventions for promoting the discovery of the longitude at sea, suitably rewarded, was presented to the House of Commons, in 1714. A committee, having been appointed to investigate the subject, called upon Newton and others for their opinions. That of our author was given in writing. A report, favourable to the desired measure, was then taken up, and a bill for its adoption subsequently passed.

On the ascension of George I., in 1714, Newton became an object of profound interest at court. His position under government, his surpassing fame, his spotless character, and, above all, his deep and consistent piety, attracted the reverent regard of the Princess of Wales, afterward queen-consort to George II. She was a woman of a highly cultivated mind, and derived the greatest pleasure from conversing with Newton and corresponding with Leibnitz. One day, in conversation with her, our author mentioned and explained a new system of chronology, which he had composed at Cambridge, where he had been in the habit “of refreshing himself with history and chronology, when he was weary with other studies.” Subsequently, in the year 1718, she requested a copy of this interesting and ingenious work. Newton, accordingly, drew up an abstract of the system from the separate papers in which it existed, and gave it to her on condition that it should not be communicated to any other person. Sometime afterward she requested that the Abbé Conti might be allowed to have a copy of it. The author consented: and the abbé received a copy of the manuscript, under the like injunction and promise of secrecy. This

manuscript bore the title of “A short Chronicle, from the First Memory of Things in Europe, to the Conquest of Persia, by Alexander the Great.”

After Newton took up his residence in London, he lived in a style suited to his elevated position and rank. He kept his carriage, with an establishment of three male and three female servants. But to everything like vain show and luxury he was utterly averse. His household affairs, for the last twenty years of his life, were under the charge of his niece, Mrs. Catherine Barton, wife and widow of Colonel Barton — a woman of great beauty and accomplishment — and subsequently married to John Conduit, Esq. At home Newton was distinguished by that dignified and gentle hospitality which springs alone from true nobleness. On all proper occasions, he gave splendid entertainments, though without ostentation. In society, whether of the palace or the cottage, his manner was self-possessed and urbane; his look benign and affable; his speech candid and modest; his whole air undisturbedly serene. He had none of what are usually called the singularities of genius; suiting himself easily to every company — except that of the vicious and wicked; and speaking of himself and others, naturally, so as never even to be suspected of vanity. There was in him, if we may be allowed the expression, a wholeness of nature, which did not admit of such imperfections and weakness — the circle was too perfect, the law too constant, and the disturbing forces too slight to suffer scarcely any of those eccentricities which so interrupt and mar the movements of many bright spirits, rendering their course through the world more like that of the blazing meteor than that of the light and life-imparting sun. In brief, the words greatness and goodness could not, humanly speaking, be more fitly employed than when applied as the pre-eminent characteristics of this pure, meek and venerable sage.

In the eightieth year of his age, Newton was seized with symptoms of stone in the bladder. His disease was pronounced incurable. He succeeded, however, by means of a strict regimen, and other precautions, in alleviating his complaint, and procuring long intervals of ease. His diet, always frugal, was now extremely temperate, consisting chiefly of broth, vegetables, and fruit, with, now and then, a little butcher meat. He gave up the use of his carriage, and employed, in its stead, when he went out, a chair. All invitations to dinner were declined; and only small parties were received, occasionally, at his own house.

In 1724 he wrote to the Lord Provost of Edinburgh, offering to contribute twenty pounds yearly toward the salary of Mr. Maclaurin, provided he accepted the assistant Professorship of Mathematics in the University of that place. Not only in the cause of ingenuity and learning, but in that of religion — in relieving the poor and assisting his relations, Newton annually expended large sums. He was generous and charitable almost to a fault. Those, he would often remark, who gave away nothing till they died, never gave at all. His wealth had become considerable by a prudent economy; but he regarded money in no other light than as one of the means wherewith he had been intrusted to do good, and he faithfully employed it accordingly.

He experienced, in spite of all his precautionary measures, a return of his complaint in the month of August, of the same year, 1724, when he passed a stone the size of pea; it came from him in two pieces, the one at the distance of two days from the other. Tolerable good health then followed for some months. In January, 1725, however, he was taken with a violent cough and inflammation of the lungs. In consequence of this attack, he was prevailed upon to remove to Kensington, where his health greatly improved. In February following, he was attacked in both feet with the gout, of the approach of which he had received, a few years before, a slight warning, and the presence of which now produced a very beneficial change in his general health. Mr. Conduit, his nephew, has recorded a curious conversation which took place, at or near this time, between himself and Sir Isaac.

“I was, on Sunday night, the 7th March, 1724-5, at Kensington, with Sir Isaac Newton, in his lodgings, just after he was out of a fit of the gout, which he had had in both of his feet, for the first time, in the eighty-third year of his age. He was better after it, and his head clearer and memory stronger than I had known them for some time. He then repeated to me, by way of discourse, very distinctly, though rather in answer to my queries, than in one continued narration, what he had often hinted to me before, viz.: that it was his conjecture (he would affirm nothing) that there was a sort of revolution in the heavenly bodies; that the vapours and light, emitted by the sun, which had their sediment, as water and other matter, had gathered themselves, by degrees, into a body, and attracted more matter from the planets, and at last made a secondary planet (viz.: one of those that go round

another planet), and then, by gathering to them, and attracting more matter, became a primary planet; and then, by increasing still, became a comet, which, after certain revolutions, by coming nearer and nearer to the sun, had all its volatile parts condensed, and became a matter fit to recruit and replenish the sun (which must waste by the constant heat and light it emitted), as a faggot would this fire if put into it (we were sitting by a wood fire), and that that would probably be the effect of the comet of 1680, sooner or later; for, by the observations made upon it, it appeared, before it came near the sun, with a tail only two or three degrees long; but, by the heat it contracted, in going so near the sun, it seemed to have a tail of thirty or forty degrees when it went from it; that he could not say when this comet would drop into the sun; it might perhaps have five or six revolutions more first, but whenever it did it would so much increase the heat of the sun that this earth would be burned, and no animals in it could live. That he took the three phenomena, seen by Hipparchus, Tycho Brahe, and Kepler's disciples, to have been of this kind, for he could not otherwise account for an extraordinary light, as those were, appearing, all at once, among the the fixed stars (all which he took to be suns, enlightening other planets, as our sun does ours), as big as Mercury or Venus seems to us, and gradually diminishing, for sixteen months, and then sinking into nothing. He seemed to doubt whether there were not intelligent beings, superior to us, who superintended these revolutions of the heavenly bodies, by the direction of the Supreme Being. He appeared also to be very clearly of opinion that the inhabitants of this world were of short date, and alledged, as one reason for that opinion, that all arts, as letters, ships, printing, needle, &c., were discovered within the memory of history, which could not have happened if the world had been eternal; and that there were visible marks of ruin upon it which could not be effected by flood only. When I asked him how this earth could have been repeopled if ever it had undergone the same fate it was threatened with hereafter, by the comet of 1680, he answered, that required the power of a Creator. He said he took all the planets to be composed of the same matter with this earth, viz.: earth, water, stones, &c., but variously concocted. I asked him why he would not publish his conjectures, as conjectures, and instanced that Kepler had communicated his; and though he had not gone near so far as Kepler, yet Kepler's guesses were so just and happy that they had been proved and demonstrated by him. His answer was,

"I do not deal in conjectures." But, on my talking to him about the four observations that had been made of the comet of 1680, at 574 years distance, and asking him the particular times, he opened his *Principia*, which laid on the table, and showed me the particular periods, viz,: 1st. The Julium Sidus, in the time of Justinian, in 1106, in 1680.

"And I, observing that he said there of that comet, 'incidet in corpus solis,' and in the next paragraph adds, 'stellæ fixæ refici possunt,' told him I thought he owned there what we had been talking about, viz.: that the comet would drop into the sun, and that fixed stars were recruited and replenished by comets when they dropped into them; and, consequently, that the sun would be recruited too; and asked him why he would not own as fully what he thought of the sun as well as what he thought of the fixed stars. He said, that concerned us more; and, laughing, added, that he had said enough for people to know his meaning."

In the summer of 1725, a French translation of the chronological MS., of which the Abbé Conti had been permitted, some time previous, to have a copy, was published at Paris, in violation of all good faith. The *Punic* Abbé had continued true to his promise of secrecy while he remained in England; but no sooner did he reach Paris than he placed the manuscript into the hands of M. Freret, a learned antiquarian, who translated the work, and accompanied it with an attempted refutation of the leading points of the system. In November, of the same year, Newton received a presentation copy of this publication, which bore the title of Abrege de Chronologie de M. le Chevalier Newton, fait par lui-meme, et traduit sur le manuscript Anglais. Soon afterward a paper entitled, Remarks on the Obervations made on a Chronological Index of Sir Isaac Newton, translated into French by the Observator, and published at Paris, was drawn up by our author, and printed in the Philosophical Transactions for 1725. It contained a history of the whole matter, and a triumphant reply to the objections of M. Freret. This answer called into the field a fresh antagonist, Father Soueiet, whose five dissertations on this subject were chiefly remarkable for the want of knowledge and want of decorum, which they displayed. In consequence of these discussions, Newton was induced to prepare his larger work for the press, and had nearly completed it at the time of his death. It was published in 1728, under the title of The Chronology of the Ancient Kingdoms Amended, to which is prefixed a short Chronicle from the first memory of

things in Europe to the Conquest of Persia by Alexander the Great. It consists of six chapters: 1. On the Chronology of the Greeks; according to Whiston, our author wrote out eighteen copies of this chapter with his own hand, differing little from one another. 2. Of the Empire of Egypt; 3. Of the Assyrian Empire; 4. Of the two contemporary Empires of the Babylonians and Medes; 5. A Description of the Temple of Solomon; 6. Of the Empire of the Persians; this chapter was not found copied with the other five, but as it was discovered among his papers, and appeared to be a continuation of the same work, the Editor thought proper to add it thereto. Newton's Letter to a person of distinction who had desired his opinion of the learned Bishop Lloyd's Hypothesis concerning the form of the most ancient year, closes this enumeration of his Chronological Writings.

A third edition of the Principia appeared in 1726, with many changes and additions. About four years were consumed in its preparation and publication, which were under the superintendance of Dr. Henry Pemberton, an accomplished mathematician, and the author of "A view of Sir Isaac Newton's Philosophy." 1728. This gentleman enjoyed numerous opportunities of conversing with the aged and illustrious author. "I found," says Pemberton, "he had read fewer of the modern mathematicians than one could have expected; but his own prodigious invention readily supplied him with what he might have an occasion for in the pursuit of any subject he undertook. I have often heard him censure the handling geometrical subjects by algebraic calculations; and his book of Algebra he called by the name of Universal Arithmetic, in opposition to the injudicious title of Geometry, which Descartes had given to the treatise, wherein he shows how the geometer may assist his invention by such kind of computations. He thought Huygens the most elegant of any mathematical writer of modern times, and the most just imitator of the ancients. Of their taste and form of demonstration, Sir Isaac always professed himself a great admirer. I have heard him even censure himself for not following them yet more closely than he did; and speak with regret of his mistake at the beginning of his mathematical studies, in applying himself to the works of Descartes and other algebraic writers, before he had considered the elements of Euclid with that attention which so excellent a writer deserves."

"Though his memory was much decayed," continues Dr. Pemberton, "he perfectly understood his own writings." And even this failure of memory,

we would suggest, might have been more apparent than real, or, in medical terms, more the result of functional weakness than organic decay. Newton seems never to have confided largely to his memory: and as this faculty manifests the most susceptibility to cultivation; so, in the neglect of due exercise, it more readily and plainly shows a diminution of its powers.

Equanimity and temperance had, indeed, preserved Newton singularly free from all mental and bodily ailment. His hair was, to the last, quite thick, though as white as silver. He never made use of spectacles, and lost but one tooth to the day of his death. He was of middle stature, well-knit, and, in the latter part of his life, somewhat inclined to be corpulent. Mr. Conduit says, "he had a very lively and piercing eye, a comely and gracious aspect, with a fine head of hair, white as silver, without any baldness, and when his peruke was off was a venerable sight." According to Bishop Atterbury, "in the whole air of his face and make there was nothing of that penetrating sagacity which appears in his compositions. He had something rather languid in his look and manner which did not raise any great expectation in those who did not know him." Hearne remarks, "Sir Isaac was a man of no very promising aspect. He was a short, well-set man. He was full of thought, and spoke very little in company, so that his conversation was not agreeable. When he rode in his coach, one arm would be out of his coach on one side and the other on the other." These different accounts we deem easily reconcilable. In the rooms of the Royal Society, in the street, or in mixed assemblages, Newton's demeanour — always courteous, unassuming and kindly — still had in it the overawings of a profound repose and reticency, out of which the communicative spirit, and the "lively and piercing eye" would only gleam in the quiet and unrestrained freedom of his own fire-side.

"But this I immediately discovered in him," adds Pemberton, still further, "which at once both surprised and charmed me. Neither his extreme great age, nor his universal reputation had rendered him stiff in opinion, or in any degree elated. Of this I had occasion to have almost daily experience. The remarks I continually sent him by letters on his Principia, were received with the utmost goodness. These were so far from being any ways displeasing to him, that, on the contrary, it occasioned him to speak many kind things of me to my friends, and to honour me with a public testimony of his good opinion." A modesty, openness, and generosity, peculiar to the

noble and comprehensive spirit of Newton. “Full of wisdom and perfect in beauty,” yet not lifted up by pride nor corrupted by ambition. None, how ever, knew so well as himself the stupendousness of his discoveries in comparison with all that had been previously achieved; and none realized so thoroughly as himself the littleness thereof in comparison with the vast region still unexplored. A short time before his death he uttered this memorable sentiment:— “I do not know what I may appear to the world; but to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, while the great ocean of truth lay all undiscovered before me.” How few ever reach the shore even, much less find “a smoother pebble or a prettier shell!”

Newton had now resided about two years at Kensington; and the air which he enjoyed there, and the state of absolute rest, proved of great benefit to him. Nevertheless he would occasionally go to town. And on Tuesday, the 28th of February, 1727, he proceeded to London, for the purpose of presiding at a meeting of the Royal Society. At this time his health was considered, by Mr. Conduit, better than it had been for many years. But the unusual fatigue he was obliged to suffer, in attending the meeting, and in paying and receiving visits, speedily produced a violent return of the affection in the bladder. He returned to Kensington on Saturday, the 4th of March, Dr. Mead and Dr. Cheselden attended him; they pronounced his disease to be the stone, and held out no hopes of recovery. On Wednesday, the 15th of March, he seemed a little better; and slight, though groundless, encouragement was felt that he might survive the attack. From the very first of it, his sufferings had been intense. Paroxysm followed paroxysm, in quick succession: large drops of sweat rolled down his face; but not a groan, not a complaint, not the least mark of peevishness or impatience escaped him: and during the short intervals of relief, he even smiled and conversed with his usual composure and cheerfulness. The flesh quivered, but the heart quaked not; the impenetrable gloom was settling down: the Destroyer near; the portals of the tomb opening, still, amid this utter wreck and dissolution of the mortal, the immortal remained serene, unconquerable: the radiant light broke through the gathering darkness; and Death yielded up its sting, and the grave its victory. On Saturday morning, 18th, he read the newspapers, and carried on a pretty long conversation with

Dr. Mead. His senses and faculties were then strong and vigorous; but at six o clock, the same evening, he became insensible; and in this state he continued during the whole of Sunday, and till Monday, the 20th, when he expired, between one and two o'clock in the morning, in the eighty-fifth year of his age.

And these were the last days of Isaac Newton. Thus closed the career of one of earth's greatest and best men. His mission was fulfilled. Unto the Giver, in many-fold addition, the talents were returned. While it was yet day he had worked; and for the night that quickly cometh he was not unprepared. Full of years, and full of honours, the heavensent was recalled; and, in the confidence of a "certain hope," peacefully he passed away into the silent depths of Eternity.

His body was placed in Westminster Abbey, with the state and ceremonial that usually attended the interment of the most distinguished. In 1731, his relatives, the inheritors of his personal estate, erected a monument to his memory in the most conspicuous part of the Abbey, which had often been refused by the dean and chapter to the greatest of England's nobility. During the same year a medal was struck at the Tower in his honour; and, in 1755, a full-length statue of him, in white marble, admirably executed, by Roubiliac, at the expense of Dr. Robert Smith, was erected in the ante-chamber of Trinity College, Cambridge. There is a painting executed in the glass of one of the windows of the same college, made pursuant to the will of Dr. Smith, who left five hundred pounds for that purpose,

Newton left a personal estate of about thirty-two thousand pounds. It was divided among his four nephews and four nieces of the half blood, the grand-children of his mother, by the Reverend Mr. Smith. The family estates of Woolsthorpe and Sustern fell to John Newton, the heir-at-law, whose great grandfather was Sir Isaac's uncle. Before his death he made an equitable distribution of his two other estates: the one in Berkshire to the sons and daughter of a brother of Mrs. Conduit; and the other, at Kensington, to Catharine, the only daughter of Mr. Conduit, and who afterward became Viscountess Lymington. Mr. Conduit succeeded to the offices of the Mint, the duties of which he had discharged during the last two years of Sir Isaac's life.

Our author's works are found in the collection of Castilion, Berlin, 1744, 4to. 8 tom.; in Bishop Horsley's Edition, London, 1779, 4to. 5 vol.; in the

Biographia Brittannica, &c. Newton also published *Bern. Varenii* Geographia, &c., 1681, 8vo. There are, however, numerous manuscripts, letters, and other papers, which have never been given to the world: these are preserved, in various collections, namely, in the library of Trinity College, Cambridge; in the library of Corpus Christi College, Oxford; in the library of Lord Macclesfield: and, lastly and chiefly, in the possession of the family of the Earl of Portsmouth, through the Viscountess Lymington.

Everything appertaining to Newton has been kept and cherished with peculiar veneration. Different memorials of him are preserved in Trinity College, Cambridge; in the rooms of the Royal Society, of London: and in the Museum of the Royal Society of Edinburgh.

The manor-house, at Woolsthorpe, was visited by Dr. Stukeley, in October, 1721, who, in a letter to Dr. Mead, written in 1727, gave the following description of it:—"'Tis built of stone, as is the way of the country hereabouts, and a reasonably good one. They led me up stairs and showed me Sir Isaac's study, where I supposed he studied, when in the country, in his younger days, or perhaps when he visited his mother from the University. I observed the shelves were of his own making, being pieces of deal boxes, which probably he sent his books and clothes down in on those occasions. There were, some years ago, two or three hundred books in it of his father-in-law, Mr. Smith, which Sir Isaac gave to Dr. Newton, of our town." The celebrated appletree, the fall of one of the apples of which is said to have turned the attention of Newton to the subject of gravity, was destroyed by the wind about twenty years ago; but it has been preserved in the form of a chair. The house itself has been protected with religious care. It was repaired in 1798, and a tablet of white marble put up in the room where our author was born, with the following inscription: —

"Sir Isaac Newton, son of John Newton, Lord of the Manor of Woolsthorpe, was born in this room, on the 25th of December, 1642."

Nature and Nature's Laws were hid in night,
God said, "Let Newton be," and all was light.

The Principia.

The Author's Preface

Since the ancients (as we are told by *Pappus*), made great account of the science of mechanics in the investigation of natural things; and the moderns, laying aside substantial forms and occult qualities, have endeavoured to subject the phænomena of nature to the laws of mathematics, I have in this treatise cultivated mathematics so far as it regards philosophy. The ancients considered mechanics in a twofold respect; as rational, which proceeds accurately by demonstration: and practical. To practical mechanics all the manual arts belong, from which mechanics took its name. But as artificers do not work with perfect accuracy, it comes to pass that mechanics is so distinguished from geometry, that what is perfectly accurate is called geometrical, what is less so, is called mechanical. But the errors are not in the art, but in the artificers. He that works with less accuracy is an imperfect mechanic; and if any could work with perfect accuracy, he would be the most perfect mechanic of all; for the description if right lines and circles, upon which geometry is founded, belongs to mechanics. Geometry does not teach us to draw these lines, but requires them to be drawn; for it requires that the learner should first be taught to describe these accurately, before he enters upon geometry; then it shows how by these operations problems may be solved. To describe right lines and circles are problems, but not geometrical problems. The solution of these problems is required from mechanics; and by geometry the use of them, when so solved, is shown; and it is the glory of geometry that from those few principles, brought from without, it is able to produce so many things. Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but that part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring. But since the manual arts are chiefly conversant in the moving of bodies, it comes to pass that geometry is commonly referred to their magnitudes, and mechanics to their motion. In this sense rational mechanics will be the science of motions resulting from any forces whatsoever, and of the forces required to produce any motions, accurately proposed and demonstrated. This part of mechanics was cultivated by the ancients in the five powers which relate to manual

arts, who considered gravity (it not being a manual power), no otherwise than as it moved weights by those powers. Our design not respecting arts, but philosophy, and our subject not manual but natural powers, we consider chiefly those things which relate to gravity, levity, elastic force, the resistance of fluids, and the like forces, whether attractive or impulsive; and therefore we offer this work as the mathematical principles if philosophy; for all the difficulty of philosophy seems to consist in this — from the phænomena of motions to investigate the forces of nature, and then from these forces to demonstrate the other phænomena; and to this end the general propositions in the first and second book are directed. In the third book we give an example of this in the explication of the System of the World; for by the propositions mathematically demonstrated in the former books, we in the third derive from the celestial phenomena the forces of gravity with which bodies tend to the sun and the several planets. Then from these forces, by other propositions which are also mathematical, we deduce the motions of the planets, the comets, the moon, and the sea. I wish we could derive the rest of the phænomena of nature by the same kind of reasoning from mechanical principles; for I am induced by many reasons to suspect that they may all depend upon certain forces by which the particles of bodies, by some causes hitherto unknown, are either mutually impelled towards each other, and cohere in regular figures, or are repelled and recede from each other; which forces being unknown, philosophers have hitherto attempted the search of nature in vain; but I hope the principles here laid down will afford some light either to this or some truer method of philosophy.

In the publication of this work the most acute and universally learned Mr. Edmund Halley not only assisted me with his pains in correcting the press and taking care of the schemes, but it was to his solicitations that its becoming public is owing; for when he had obtained of me my demonstrations of the figure of the celestial orbits, he continually pressed me to communicate the same to the *Royal Society*, who afterwards, by their kind encouragement and entreaties, engaged me to think of publishing them. But after I had begun to consider the inequalities of the lunar motions, and had entered upon some other things relating to the laws and measures of gravity, and other forces: and the figures that would be described by bodies attracted according to given laws; and the motion of

several bodies moving among themselves; the motion of bodies in resisting mediums; the forces, densities, and motions, of mediums; the orbits of the comets, and such like; deferred that publication till I had made a search into those matters, and could put forth the whole together. What relates to the lunar motions (being imperfect), I have put all together in the corollaries of Pro, to avoid being obliged to propose and distinctly demonstrate the several things there contained in a method more prolix than the subject deserved, and interrupt the series of the several propositions. Some things, found out after the rest, I chose to insert in places less suitable, rather than change the number of the propositions and the citations. I heartily beg that what I have here done may be read with candour; and that the defects in a subject so difficult be not so much reprehended as kindly supplied, and investigated by new endeavours of my readers.

ISAAC NEWTON.

Cambridge. Trinity College May 8, 1686

In the second edition the second section of the first book was enlarged. In the seventh section of the second book the theory of the resistances of fluids was more accurately investigated, and confirmed by new experiments. In the third book the moon's theory and the praecession of the equinoxes were more fully deduced from their principles; and the theory of the comets was confirmed by more examples of the calculation of their orbits, done also with greater accuracy.

In this third edition the resistance of mediums is somewhat more largely handled than before; and new experiments of the resistance of heavy bodies falling in air are added. In the third book, the argument to prove that the moon is retained in its orbit by the force of gravity is enlarged on; and there are added new observations of Mr. Pound's of the proportion of the diameters of *Jupiter* to each other: there are, besides, added Mr. Kirk's observations of the comet in 1680; the orbit of that comet computed in an ellipsis by Dr. Halley; and the orbit of the comet in 1723, computed by Mr. Bradley.

Book I. Definitions

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

The quantity of matter is the measure of the same, arising from its density and bulk conjunctly.

Thus air of a double density, in a double space, is quadruple in quantity; in a triple space, sextuple in quantity. The same thing is to be understood of snow, and fine dust or powders, that are condensed by compression or liquefaction; and of all bodies that are by any causes whatever differently condensed. I have no regard in this place to a medium, if any such there is, that freely pervades the interstices between the parts of bodies. It is this quantity that I mean hereafter everywhere under the name of body or mass. And the same is known by the weight of each body; for it is proportional to the weight, as I have found by experiments on pendulums, very accurately made, which shall be shewn hereafter.

DEFINITION II.

The quantity of motion is the measure of the same, arising from the velocity and quantity of matter conjunctly.

The motion of the whole is the sum of the motions of all the parts; and therefore in a body double in quantity, with equal velocity, the motion is double; with twice the velocity, it is quadruple.

DEFINITION III.

The vis insita, *or innate force of matter, is a power of resisting, by which every body, as much as in it lies, endeavours to persevere in its present state, whether it be of rest, or of moving uniformly forward in a right line.*

This force is ever proportional to the body whose force it is; and differs nothing from the inactivity of the mass, but in our manner of conceiving it. A body, from the inactivity of matter, is not without difficulty put out of its state of rest or motion. Upon which account, this *vis insita*, may, by a most significant name, be called *vis inertiæ*, or force of inactivity. But a body exerts this force only, when another force, impressed upon it, endeavours to change its condition; and the exercise of this force may be considered both as resistance and impulse; it is resistance, in so far as the body, for maintaining its present state, withstands the force impressed; it is impulse, in so far as the body, by not easily giving way to the impressed force of another, endeavours to change the state of that other. Resistance is usually ascribed to bodies at rest, and impulse to those in motion; but motion and rest, as commonly conceived, are only relatively distinguished; nor are those bodies always truly at rest, which commonly are taken to be so.

DEFINITION IV.

An impressed force is an action exerted upon a body, in order to change its state, either of rest, or of moving uniformly forward in a right line.

This force consists in the action only; and remains no longer in the body, when the action is over. For a body maintains every new state it acquires, by its *vis inertiæ* only. Impressed forces are of different origins as from percussion, from pressure, from centripetal force.

DEFINITION V.

A centripetal force is that by which bodies are drawn or impelled, or any way tend, towards a point as to a centre.

Of this sort is gravity, by which bodies tend to the centre of the earth magnetism, by which iron tends to the loadstone; and that force, what ever it is, by which the planets are perpetually drawn aside from the rectilinear

motions, which otherwise they would pursue, and made to revolve in curvilinear orbits. A stone, whirled about in a sling, endeavours to recede from the hand that turns it; and by that endeavour, distends the sling, and that with so much the greater force, as it is revolved with the greater velocity, and as soon as ever it is let go, flies away. That force which opposes itself to this endeavour, and by which the sling perpetually draws back the stone towards the hand, and retains it in its orbit, because it is directed to the hand as the centre of the orbit, I call the centripetal force. And the same thing is to be understood of all bodies, revolved in any orbits. They all endeavour to recede from the centres of their orbits; and were it not for the opposition of a contrary force which restrains them to, and detains them in their orbits, which I therefore call centripetal, would fly off in right lines, with an uniform motion. A projectile, if it was not for the force of gravity, would not deviate towards the earth, but would go off from it in a right line, and that with an uniform motion, if the resistance of the air was taken away. It is by its gravity that it is drawn aside perpetually from its rectilinear course, and made to deviate towards the earth, more or less, according to the force of its gravity, and the velocity of its motion. The less its gravity is, for the quantity of its matter, or the greater the velocity with which it is projected, the less will it deviate from a rectilinear course, and the farther it will go. If a leaden ball, projected from the top of a mountain by the force of gunpowder with a given velocity, and in a direction parallel to the horizon, is carried in a curve line to the distance of two miles before it falls to the ground; the same, if the resistance of the air were taken away, with a double or decuple velocity, would fly twice or ten times as far. And by increasing the velocity, we may at pleasure increase the distance to which it might be projected, and diminish the curvature of the line, which it might describe, till at last it should fall at the distance of 10, 30, or 90 degrees, or even might go quite round the whole earth before it falls; or lastly, so that it might never fall to the earth, but go forward into the celestial spaces, and proceed in its motion *in infinitum*. And after the same manner that a projectile, by the force of gravity, may be made to revolve in an orbit, and go round the whole earth, the moon also, either by the force of gravity, if it is endued with gravity, or by any other force, that impels it towards the earth, may be perpetually drawn aside towards the earth, out of the rectilinear way, which by its innate force it would pursue; and would be

made to revolve in the orbit which it now describes; nor could the moon with out some such force, be retained in its orbit. If this force was too small, it would not sufficiently turn the moon out of a rectilinear course: if it was too great, it would turn it too much, and draw down the moon from its orbit towards the earth. It is necessary, that the force be of a just quantity, and it belongs to the mathematicians to find the force, that may serve exactly to retain a body in a given orbit, with a given velocity; and *vice versa*, to determine the curvilinear way, into which a body projected from a given place, with a given velocity, may be made to deviate from its natural rectilinear way, by means of a given force.

The quantity of any centripetal force may be considered as of three kinds; absolute, accelerative, and motive.

DEFINITION VI.

The absolute quantity of a centripetal force is the measure of the same proportional to the efficacy of the cause that propagates it from the centre, through the spaces round about.

Thus the magnetic force is greater in one loadstone and less in another according to their sizes and strength of intensity.

DEFINITION VII.

The accelerative quantity of a centripetal force is the measure of the same, proportional to the velocity which it generates in a given time.

Thus the force of the same loadstone is greater at a less distance, and less at a greater: also the force of gravity is greater in valleys, less on tops of exceeding high mountains; and yet less (as shall hereafter be shown), at greater distances from the body of the earth; but at equal distances, it is the same everywhere; because (taking away, or allowing for, the resistance of

the air), it equally accelerates all falling bodies, whether heavy or light, great or small.

DEFINITION VIII.

The motive quantity of a centripetal force, is the measure of the same, proportional to the motion which it generates in a given time.

Thus the weight is greater in a greater body, less in a less body; and, in the same body, it is greater near to the earth, and less at remoter distances. This sort of quantity is the centripetency, or propension of the whole body towards the centre, or, as I may say, its weight; and it is always known by the quantity of an equal and contrary force just sufficient to hinder the descent of the body.

These quantities of forces, we may, for brevity's sake, call by the names of motive, accelerative, and absolute forces; and, for distinction's sake, consider them, with respect to the bodies that tend to the centre; to the places of those bodies; and to the centre of force towards which they tend; that is to say, I refer the motive force to the body as an endeavour and propensity of the whole towards a centre, arising from the propensities of the several parts taken together; the accelerative force to the place of the body, as a certain power or energy diffused from the centre to all places around to move the bodies that are in them; and the absolute force to the centre, as endued with some cause, without which those motive forces would not be propagated through the spaces round about; whether that cause be some central body (such as is the loadstone, in the centre of the magnetic force, or the earth in the centre of the gravitating force), or anything else that does not yet appear. For I here design only to give a mathematical notion of those forces, without considering their physical causes and seats.

Wherefore the accelerative force will stand in the same relation to the motive, as celerity does to motion. For the quantity of motion arises from the celerity drawn into the quantity of matter; and the motive force arises

from the accelerative force drawn into the same quantity of matter. For the sum of the actions of the accelerative force, upon the several articles of the body, is the motive force of the whole. Hence it is, that near the surface of the earth, where the accelerative gravity, or force productive of gravity, in all bodies is the same, the motive gravity or the weight is as the body: but if we should ascend to higher regions, where the accelerative gravity is less, the weight would be equally diminished, and would always be as the product of the body, by the accelerative gravity. So in those regions, where the accelerative gravity is diminished into one half, the weight of a body two or three times less, will be four or six times less.

I likewise call attractions and impulses, in the same sense, accelerative, and motive; and use the words attraction, impulse or propensity of any sort towards a centre, promiscuously, and indifferently, one for another; considering those forces not physically, but mathematically: wherefore, the reader is not to imagine, that by those words, I anywhere take upon me to define the kind, or the manner of any action, the causes or the physical reason thereof, or that I attribute forces, in a true and physical sense, to certain centres (which are only mathematical points); when at any time I happen to speak of centres as attracting, or as endued with attractive powers.

SCHOLIUM.

Hitherto I have laid down the definitions of such words as are less known, and explained the sense in which I would have them to be understood in the following discourse. I do not define time, space, place and motion, as being well known to all. Only I must observe, that the vulgar conceive those quantities under no other notions but from the relation they bear to sensible objects. And thence arise certain prejudices, for the removing of which, it will be convenient to distinguish them into absolute and relative, true and apparent, mathematical and common.

I. Absolute, true, and mathematical time, of itself, and from its own nature flows equably without regard to anything external, and by another name is called duration: relative, apparent, and common time, is some

sensible and external (whether accurate or unequable) measure of duration by the means of motion, which is commonly used instead of true time; such as an hour, a day, a month, a year.

II. Absolute space, in its own nature, without regard to anything external, remains always similar and immovable. Relative space is some movable dimension or measure of the absolute spaces; which our senses determine by its position to bodies; and which is vulgarly taken for immovable space; such is the dimension of a subterraneous, an æreal, or celestial space, determined by its position in respect of the earth. Absolute and relative space, are the same in figure and magnitude; but they do not remain always numerically the same. For if the earth, for instance, moves, a space of our air, which relatively and in respect of the earth remains always the same, will at one time be one part of the absolute space into which the air passes; at another time it will be another part of the same, and so, absolutely understood, it will be perpetually mutable.

III. Place is a part of space which a body takes up, and is according to the space, either absolute or relative. I say, a part of space; not the situation, nor the external surface of the body. For the places of equal solids are always equal; but their superfices, by reason of their dissimilar figures, are often unequal. Positions properly have no quantity, nor are they so much the places themselves, as the properties of places. The motion of the whole is the same thing with the sum of the motions of the parts; that is, the translation of the whole, out of its place, is the same thing with the sum of the translations of the parts out of their places; and therefore the place of the whole is the same thing with the sum of the places of the parts, and for that reason, it is internal, and in the whole body.

IV. Absolute motion is the translation of a body from one absolute place into another; and relative motion, the translation from one relative place into another. Thus in a ship under sail, the relative place of a body is that part of the ship which the body possesses; or that part of its cavity which the body fills, and which therefore moves together with the ship: and relative rest is the continuance of the body in the same part of the ship, or of its cavity. But real, absolute rest, is the continuance of the body in the same part of that immovable space, in which the ship itself, its cavity, and all that it contains, is moved. Wherefore, if the earth is really at rest, the body, which relatively rests in the ship, will really and absolutely move with the

same velocity which the ship has on the earth. But if the earth also moves, the true and absolute motion of the body will arise, partly from the true motion of the earth, in immovable space; partly from the relative motion of the ship on the earth; and if the body moves also relatively in the ship; its true motion will arise, partly from the true motion of the earth, in immovable space, and partly from the relative motions as well of the ship on the earth, as of the body in the ship; and from these relative motions will arise the relative motion of the body on the earth. As if that part of the earth, where the ship is, was truly moved toward the east, with a velocity of 10010 parts; while the ship itself, with a fresh gale, and full sails, is carried towards the west, with a velocity expressed by 10 of those parts; but a sailor walks in the ship towards the east, with 1 part of the said velocity; then the sailor will be moved truly in immovable space towards the east, with a velocity of 10001 parts, and relatively on the earth towards the west, with a velocity of 9 of those parts.

Absolute time, in astronomy, is distinguished from relative, by the equation or correction of the vulgar time. For the natural days are truly unequal, though they are commonly considered as equal, and used for a measure of time; astronomers correct this inequality for their more accurate deducing of the celestial motions. It may be, that there is no such thing as an equable motion, whereby time may be accurately measured. All motions may be accelerated and retarded, but the true, or equable, progress of absolute time is liable to no change. The duration or perseverance of the existence of things remains the same, whether the motions are swift or slow, or none at all: and therefore it ought to be distinguished from what are only sensible measures thereof; and out of which we collect it, by means of the astronomical equation. The necessity of which equation, for determining the times of a phenomenon, is evinced as well from the experiments of the pendulum clock, as by eclipses of the satellites of *Jupiter*.

As the order of the parts of time is immutable, so also is the order of the parts of space. Suppose those parts to be moved out of their places, and they will be moved (if the expression may be allowed) out of themselves. For times and spaces are, as it were, the places as well of themselves as of all other things. All things are placed in time as to order of succession; and in space as to order of situation. It is from their essence or nature that they are places; and that the primary places of things should be moveable, is absurd.

These are therefore the absolute places; and translations out of those places, are the only absolute motions.

But because the parts of space cannot be seen, or distinguished from one another by our senses, therefore in their stead we use sensible measures of them. For from the positions and distances of things from any body considered as immovable, we define all places; and then with respect to such places, we estimate all motions, considering bodies as transferred from some of those places into others. And so, instead of absolute places and motions, we use relative ones; and that without any inconvenience in common affairs; but in philosophical disquisitions, we ought to abstract from our senses, and consider things themselves, distinct from what are only sensible measures of them. For it may be that there is no body really at rest, to which the places and motions of others may be referred.

But we may distinguish rest and motion, absolute and relative, one from the other by their properties, causes and effects. It is a property of rest, that bodies really at rest do rest in respect to one another. And therefore as it is possible, that in the remote regions of the fixed stars, or perhaps far beyond them, there may be some body absolutely at rest; but impossible to know, from the position of bodies to one another in our regions whether any of these do keep the same position to that remote body; it follows that absolute rest cannot be determined from the position of bodies in our regions.

It is a property of motion, that the parts, which retain given positions to their wholes, do partake of the motions of those wholes. For all the parts of revolving bodies endeavour to recede from the axis of motion; and the impetus of bodies moving forward, arises from the joint impetus of all the parts. Therefore, if surrounding bodies are moved, those that are relatively at rest within them, will partake of their motion. Upon which account, the true and absolute motion of a body cannot be determined by the translation of it from those which only seem to rest; for the external bodies ought not only to appear at rest, but to be really at rest. For otherwise, all included bodies, beside their translation from near the surrounding ones, partake likewise of their true motions; and though that translation were not made they would not be really at rest, but only seem to be so. For the surrounding bodies stand in the like relation to the surrounded as the exterior part of a whole does to the interior, or as the shell does to the kernel; but, if the shell

moves, the kernel will also move, as being part of the whole, without any removal from near the shell.

A property, near akin to the preceding, is this, that if a place is moved, whatever is placed therein moves along with it; and therefore a body, which is moved from a place in motion, partakes also of the motion of its place. Upon which account, all motions, from places in motion, are no other than parts of entire and absolute motions; and every entire motion is composed of the motion of the body out of its first place, and the motion of this place out of its place; and so on, until we come to some immovable place, as in the before-mentioned example of the sailor. Wherefore, entire and absolute motions can be no otherwise determined than by immovable places; and for that reason I did before refer those absolute motions to immovable places, but relative ones to movable places. Now no other places are immovable but those that, from infinity to infinity, do all retain the same given position one to another; and upon this account must ever remain unmoved; and do thereby constitute immovable space.

The causes by which true and relative motions are distinguished, one from the other, are the forces impressed upon bodies to generate motion. True motion is neither generated nor altered, but by some force impressed upon the body moved; but relative motion may be generated or altered without any force impressed upon the body. For it is sufficient only to impress some force on other bodies with which the former is compared, that by their giving way, that relation may be changed, in which the relative rest or motion of this other body did consist. Again, true motion suffers always some change from any force impressed upon the moving body; but relative motion does not necessarily undergo any change by such forces. For if the same forces are likewise impressed on those other bodies, with which the comparison is made, that the relative position may be preserved, then that condition will be preserved in which the relative motion consists. And therefore any relative motion may be changed when the true motion remains unaltered, and the relative may be preserved when the true suffers some change. Upon which accounts, true motion does by no means consist in such relations.

The effects which distinguish absolute from relative motion are, the forces of receding from the axis of circular motion. For there are no such forces in a circular motion purely relative, but in a true and absolute circular

motion, they are greater or less, according to the quantity of the motion. If a vessel, hung by a long cord, is so often turned about that the cord is strongly twisted, then filled with water, and held at rest together with the water; after, by the sudden action of another force, it is whirled about the contrary way, and while the cord is untwisting itself, the vessel continues for some time in this motion; the surface of the water will at first be plain, as before the vessel began to move: but the vessel, by gradually communicating its motion to the water, will make it begin sensibly to revolve, and recede by little and little from the middle, and ascend to the sides of the vessel, forming itself into a concave figure (as I have experienced), and the swifter the motion becomes, the higher will the water rise, till at last, performing its revolutions in the same times with the vessel, it becomes relatively at rest in it. This ascent of the water shows its endeavour to recede from the axis of its motion; and the true and absolute circular motion of the water, which is here directly contrary to the relative, discovers itself, and may be measured by this endeavour. At first, when the relative motion of the water in the vessel was greatest, it produced no endeavour to recede from the axis; the water showed no tendency to the circumference, nor any ascent towards the sides of the vessel, but remained of a plain surface, and therefore its true circular motion had not yet begun. But afterwards, when the relative motion of the water had decreased, the ascent thereof towards the sides of the vessel proved its endeavour to recede from the axis; and this endeavour showed the real circular motion of the water perpetually increasing, till it had acquired its greatest quantity, when the water rested relatively in the vessel. And therefore this endeavour does not depend upon any translation of the water in respect of the ambient bodies, nor can true circular motion be defined by such translation. There is only one real circular motion of any one revolving body, corresponding to only one power of endeavouring to recede from its axis of motion, as its proper and adequate effect; but relative motions, in one and the same body, are innumerable, according to the various relations it bears to external bodies, and like other relations, are altogether destitute of any real effect, any otherwise than they may perhaps partake of that one only true motion. And therefore in their system who suppose that our heavens, revolving below the sphere of the fixed stars, carry the planets along with them; the several parts of those heavens, and the planets, which are indeed relatively at rest in their heavens, do yet really

move. For they change their position one to another (which never happens to bodies truly at rest), and being carried together with their heavens, partake of their motions, and as parts of revolving wholes, endeavour to recede from the axis of their motions.

Wherefore relative quantities are not the quantities themselves, whose names they bear, but those sensible measures of them (either accurate or inaccurate), which are commonly used instead of the measured quantities themselves. And if the meaning of words is to be determined by their use, then by the names time, space, place and motion, their measures are properly to be understood; and the expression will be unusual, and purely mathematical, if the measured quantities themselves are meant. Upon which account, they do strain the sacred writings, who there interpret those words for the measured quantities. Nor do those less defile the purity of mathematical and philosophical truths, who confound real quantities themselves with their relations and vulgar measures.

It is indeed a matter of great difficulty to discover, and effectually to distinguish, the true motions of particular bodies from the apparent; because the parts of that immovable space, in which those motions are performed, do by no means come under the observation of our senses. Yet the thing is not altogether desperate: for we have some arguments to guide us, partly from the apparent motions, which are the differences of the true motions; partly from the forces, which are the causes and effects of the true motions. For instance, if two globes, kept at a given distance one from the other by means of a cord that connects them, were revolved about their common centre of gravity, we might, from the tension of the cord, discover the endeavour of the globes to recede from the axis of their motion, and from thence we might compute the quantity of their circular motions. And then if any equal forces should be impressed at once on the alternate faces of the globes to augment or diminish their circular motions, from the increase or decrease of the tension of the cord, we might infer the increment or decrement of their motions; and thence would be found on what faces those forces ought to be impressed, that the motions of the globes might be most augmented; that is, we might discover their hindermost faces, or those which, in the circular motion, do follow. But the faces which follow being known, and consequently the opposite ones that precede, we should likewise know the determination of their motions. And thus we might find

both the quantity and the determination of this circular motion, even in an immense vacuum, where there was nothing external or sensible with which the globes could be compared. But now, if in that space some remote bodies were placed that kept always a given position one to another, as the fixed stars do in our regions, we could not indeed determine from the relative translation of the globes among those bodies, whether the motion did belong to the globes or to the bodies. But if we observed the cord, and found that its tension was that very tension which the motions of the globes required, we might conclude the motion to be in the globes, and the bodies to be at rest; and then, lastly, from the translation of the globes among the bodies, we should find the determination of their motions. But how we are to collect the true motions from their causes, effects, and apparent differences; and, *vice versa*, how from the motions, either true or apparent, we may come to the knowledge of their causes and effects, shall be explained more at large in the following tract. For to this end it was that I composed it.

Axioms, or Laws of Motion

LAW I.

Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon.

Projectiles persevere in their motions, so far as they are not retarded by the resistance of the air, or impelled downwards by the force of gravity. A top, whose parts by their cohesion are perpetually drawn aside from rectilinear motions, does not cease its rotation, otherwise than as it is retarded by the air. The greater bodies of the planets and comets, meeting with less resistance in more free spaces, preserve their motions both progressive and circular for a much longer time.

LAW II.

The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.

If any force generates a motion, a double force will generate double the motion, a triple force triple the motion, whether that force be impressed altogether and at once, or gradually and successively. And this motion (being always directed the same way with the generating force), if the body moved before, is added to or subducted from the former motion, according as they directly conspire with or are directly contrary to each other; or obliquely joined, when they are oblique, so as to produce a new motion compounded from the determination of both.

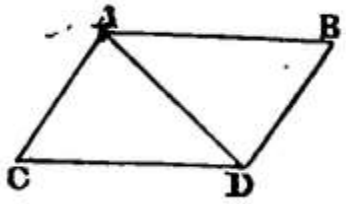
LAW III.

To every action there is always opposed an equal reaction: or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

Whatever draws or presses another is as much drawn or pressed by that other. If you press a stone with your finger, the finger is also pressed by the stone. If a horse draws a stone tied to a rope, the horse (if I may so say) will be equally drawn back towards the stone: for the distended rope, by the same endeavour to relax or unbend itself, will draw the horse as much towards the stone, as it does the stone towards the horse, and will obstruct the progress of the one as much as it advances that of the other. If a body impinge upon another, and by its force change the motion of the other, that body also (because of the equality of the mutual pressure) will undergo an equal change, in its own motion, towards the contrary part. The changes made by these actions are equal, not in the velocities but in the motions of bodies; that is to say, if the bodies are not hindered by any other impediments. For, because the motions are equally changed, the changes of the velocities made towards contrary parts are reciprocally proportional to the bodies. This law takes place also in attractions, as will be proved in the next scholium.

COROLLARY I.

A body by two forces conjoined will describe the diagonal of a parallelogram, in the same time that it would describe the sides, by those forces apart.



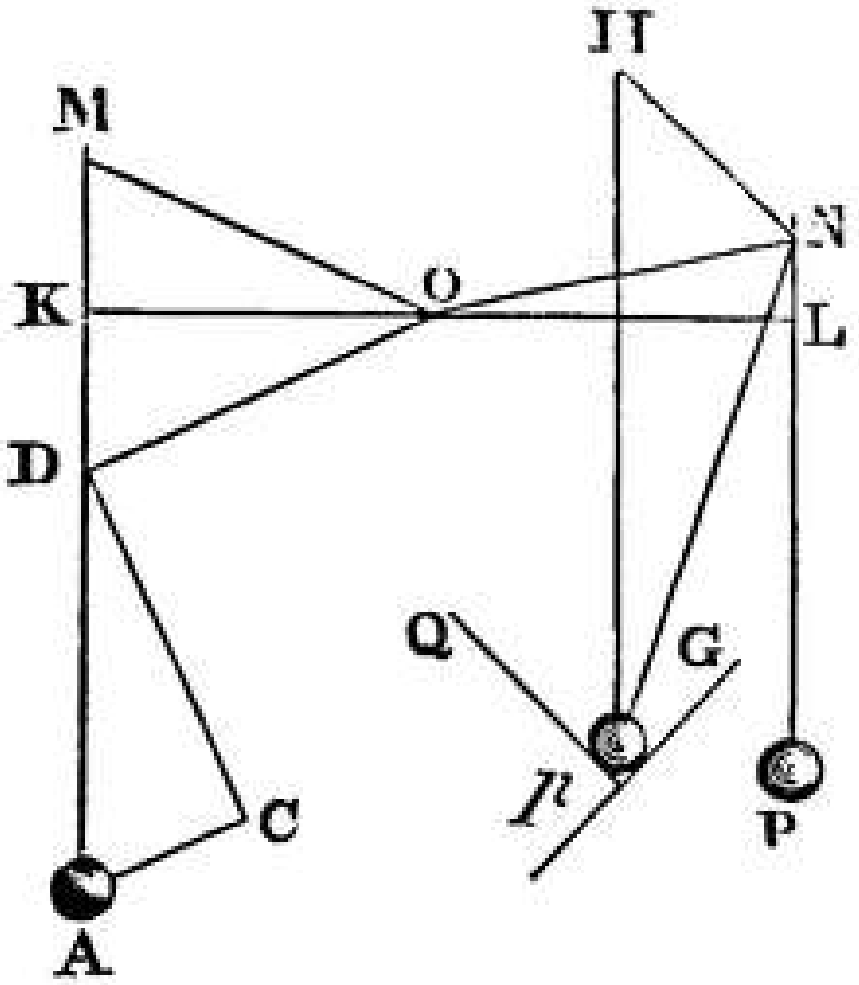
If a body in a given time, by the force M impressed apart in the place A, should with an uniform motion be carried from A to B; and by the force N impressed apart in the same place, should be carried from A to C; complete

the parallelogram ABCD, and, by both forces acting together, it will in the same time be carried in the diagonal from A to D. For since the force N acts in the direction of the line AC, parallel to BD, this force (by the second law) will not at all alter the velocity generated by the other force M, by which the body is carried towards the line BD. The body therefore will arrive at the line BD in the same time, whether the force N be impressed or not; and therefore at the end of that time it will be found somewhere in the line BD. By the same argument, at the end of the same time it will be found somewhere in the line CD. Therefore it will be found in the point D, where both lines meet. But it will move in a right line from A to D, by Law I.

COROLLARY II.

And hence is explained the composition of any one direct force AD, out of any two oblique forces AC and CD; and, on the contrary, the resolution of any one direct force AD into two oblique forces AC and CD: which composition and resolution are abundantly confirmed from mechanics.

As if the unequal radii OM and ON drawn from the centre O of any wheel, should sustain the weights A and P by the cords MA and NP; and the forces of those weights to move the wheel were required. Through the centre O draw the right line KOL, meeting the cords perpendicularly in K and L; and from the centre O, with OL the greater of the distances



OK and OL, describe a circle, meeting the cord MA in D: and drawing OD, make AC parallel and DC perpendicular thereto. Now, it being indifferent whether the points K, L, D, of the cords be fixed to the plane of the wheel or not, the weights will have the same effect whether they are suspended from the points K and L, or from D and L. Let the whole force of the weight A be represented by the line AD, and let it be resolved into the forces AC and CD; of which the force AC, drawing the radius OD directly from the centre, will have no effect to move the wheel: but the other force DC, drawing the

radius DO perpendicularly, will have the same effect as if it drew perpendicularly the radius OL equal to OD; that is, it will have the same effect as the weight P, if that weight is to the weight A as the force DC is to the force DA; that is (because of the similar triangles ADC, DOK), as OK to OD or OL. Therefore the weights A and P, which are reciprocally as the radii OK and OL that lie in the same right line, will be equipollent, and so remain in equilibrio; which is the well known property of the balance, the lever, and the wheel. If either weight is greater than in this ratio, its force to move the wheel will be so much greater.

If the weight *p*, equal to the weight P, is partly suspended by the cord N*p*, partly sustained by the oblique plane *p*G; draw *p*H, NH, the former perpendicular to the horizon, the latter to the plane *p*G; and if the force of the weight *p* tending downwards is represented by the line *p*H, it may be resolved into the forces *p*N, HN. If there was any plane *p*Q, perpendicular to the cord *p*N, cutting the other plane *p*G in a line parallel to the horizon, and the weight *p* was supported only by those planes *p*Q, *p*G, it would press those planes perpendicularly with the forces *p*N; HN; to wit, the plane *p*Q with the force *p*N, and the plane *p*G with the force HN. And therefore if the plane *p*Q was taken away, so that the weight might stretch the cord, because the cord, now sustaining the weight, supplies the place of the plane that was removed, it will be strained by the same force *p*N which pressed upon the plane before. Therefore, the tension of this oblique cord *p*N will be to that of the other perpendicular cord PN as *p*N to *p*H. And therefore if the weight *p* is to the weight A in a ratio compounded of the reciprocal ratio of the least distances of the cords PN, AM, from the centre of the wheel, and of the direct ratio of *p*H to *p*N, the weights will have the same effect towards moving the wheel, and will therefore sustain each other; as any one may find by experiment.

But the weight *p* pressing upon those two oblique planes, may be considered as a wedge between the two internal surfaces of a body split by it; and hence the forces of the wedge and the mallet may be determined; for because the force with which the weight *p* presses the plane *p*Q is to the force with which the same, whether by its own gravity, or by the blow of a mallet, is impelled in the direction of the line *p*H towards both the planes, as *p*N to *p*H; and to the force with which it presses the other plane *p*G, as *p*N to NH. And thus the force of the screw may be deduced from a like

resolution of forces; it being no other than a wedge impelled with the force of a lever. Therefore the use of this Corollary spreads far and wide, and by that diffusive extent the truth thereof is farther confirmed. For on what has been said depends the whole doctrine of mechanics variously demonstrated by different authors. For from hence are easily deduced the forces of machines, which are compounded of wheels, pullies, levers, cords, and weights, ascending directly or obliquely, and other mechanical powers; as also the force of the tendons to move the bones of animals.

COROLLARY III.

The quantity of motion, which is collected by taking the sum of the motions directed towards the same parts, and the difference of those that are directed to contrary parts, suffers no change from the action of bodies among themselves.

For action and its opposite reaction are equal, by Law III, and therefore, by Law II, they produce in the motions equal changes towards opposite parts. Therefore if the motions are directed towards the same parts, whatever is added to the motion of the preceding body will be subducted from the motion of that which follows; so that the sum will be the same as before. If the bodies meet, with contrary motions, there will be an equal deduction from the motions of both; and therefore the difference of the motions directed towards opposite parts will remain the same.

Thus if a spherical body A with two parts of velocity is triple of a spherical body B which follows in the same right line with ten parts of velocity, the motion of A will be to that of B as 6 to 10. Suppose, then, their motions to be of 6 parts and of 10 parts, and the sum will be 16 parts. Therefore, upon the meeting of the bodies, if A acquire 3, 4, or 5 parts of motion, B will lose as many; and therefore after reflexion A will proceed with 9, 10, or 11 parts, and B with 7, 6, or 5 parts; the sum remaining always of 16 parts as before. If the body A acquire 9, 10, 11, or 12 parts of motion, and therefore after meeting proceed with 15, 16, 17, or 18 parts, the body B, losing so many parts as A has got, will either proceed with 1 part, having lost 9, or stop and remain at rest, as having lost its whole progressive

motion of 10 parts; or it will go back with 1 part, having not only lost its whole motion, but (if I may so say) one part more; or it will go back with 2 parts, because a progressive motion of 12 parts is taken off. And so the sums of the conspiring motions 15+1, or 16+0, and the differences of the contrary motions 17-1 and 18-2, will always be equal to 16 parts, as they were before the meeting and reflexion of the bodies. But, the motions being known with which the bodies proceed after reflexion, the velocity of either will be also known, by taking the velocity after to the velocity before reflexion, as the motion after is to the motion before. As in the last case, where the motion of the body A was of 6 parts before reflexion and of 18 parts after, and the velocity was of 2 parts before reflexion, the velocity thereof after reflexion will be found to be of 6 parts; by saying, as the 6 parts of motion before to 18 parts after, so are 2 parts of velocity before reflexion to 6 parts after.

But if the bodies are either not spherical, or, moving in different right lines, impinge obliquely one upon the other, and their motions after reflexion are required, in those cases we are first to determine the position of the plane that touches the concurring bodies in the point of concourse, then the motion of each body (by Corol. II) is to be resolved into two, one perpendicular to that plane, and the other parallel to it. This done, because the bodies act upon each other in the direction of a line perpendicular to this plane, the parallel motions are to be retained the same after reflexion as before; and to the perpendicular motions we are to assign equal changes towards the contrary parts; in such manner that the sum of the conspiring and the difference of the contrary motions may remain the same as before. From such kind of reflexions also sometimes arise the circular motions of bodies about their own centres. But these are cases which I do not consider in what follows; and it would be too tedious to demonstrate every particular that relates to this subject.

COROLLARY IV.

The common centre of gravity of two or more bodies does not alter its state of motion or rest by the actions of the bodies among themselves; and

therefore the common centre of gravity of all bodies acting upon each other (excluding outward actions and impediments) is either at rest, or moves uniformly in a right line.

For if two points proceed with an uniform motion in right lines, and their distance be divided in a given ratio, the dividing point will be either at rest, or proceed uniformly in a right line. This is demonstrated hereafter in Lem. XXIII and its Corol., when the points are moved in the same plane; and by a like way of arguing, it may be demonstrated when the points are not moved in the same plane. Therefore if any number of bodies move uniformly in right lines, the common centre of gravity of any two of them is either at rest, or proceeds uniformly in a right line; because the line which connects the centres of those two bodies so moving is divided at that common centre in a given ratio. In like manner the common centre of those two and that of a third body will be either at rest or moving uniformly in a right line because at that centre the distance between the common centre of the two bodies, and the centre of this last, is divided in a given ratio. In like manner the common centre of these three, and of a fourth body, is either at rest, or moves uniformly in a right line; because the distance between the common centre of the three bodies, and the centre of the fourth is there also divided in a given ratio, and so on *in infinitum*. Therefore, in a system of bodies where there is neither any mutual action among themselves, nor any foreign force impressed upon them from without, and which consequently move uniformly in right lines, the common centre of gravity of them all is either at rest or moves uniformly forward in a right line.

Moreover, in a system of two bodies mutually acting upon each other, since the distances between their centres and the common centre of gravity of both arc reciprocally as the bodies, the relative motions of those bodies, whether of approaching to or of receding from that centre, will be equal among themselves. Therefore since the changes which happen to motions are equal and directed to contrary parts, the common centre of those bodies, by their mutual action between themselves, is neither promoted nor retarded, nor suffers any change as to its state of motion or rest. But in a system of several bodies, because the common centre of gravity of any two acting mutually upon each other suffers no change in its state by that action: and much less the common centre of gravity of the others with which that

action does not intervene; but the distance between those two centres is divided by the common centre of gravity of all the bodies into parts reciprocally proportional to the total sums of those bodies whose centres they are: and therefore while those two centres retain their state of motion or rest, the common centre of all does also retain its state: it is manifest that the common centre of all never suffers any change in the state of its motion or rest from the actions of any two bodies between themselves. But in such a system all the actions of the bodies among themselves either happen between two bodies, or are composed of actions interchanged between some two bodies; and therefore they do never produce any alteration in the common centre of all as to its state of motion or rest. Wherefore since that centre, when the bodies do not act mutually one upon another, either is at rest or moves uniformly forward in some right line, it will, notwithstanding the mutual actions of the bodies among themselves, always persevere in its state, either of rest, or of proceeding uniformly in a right line, unless it is forced out of this state by the action of some power impressed from without upon the whole system. And therefore the same law takes place in a system consisting of many bodies as in one single body, with regard to their persevering in their state of motion or of rest. For the progressive motion, whether of one single body, or of a whole system of bodies, is always to be estimated from the motion of the centre of gravity.

COROLLARY V.

The motions of bodies included in a given space are the same among themselves, whether that space is at rest, or moves uniformly forwards in a right line without any circular motion.

For the differences of the motions tending towards the same parts, and the sums of those that tend towards contrary parts, are, at first (by supposition), in both cases the same; and it is from those sums and differences that the collisions and impulses do arise with which the bodies mutually impinge one upon another. Wherefore (by Law II), the effects of those collisions will be equal in both cases; and therefore the mutual motions of the bodies among themselves in the one case will remain equal to the mutual motions

of the bodies among themselves in the other. A clear proof of which we have from the experiment of a ship; where all motions happen after the same manner, whether the ship is at rest, or is carried uniformly forwards in a right line.

COROLLARY VI.

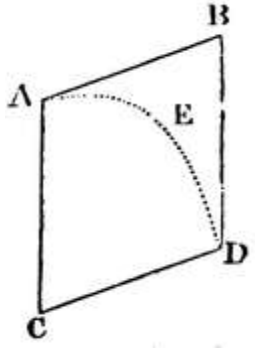
If bodies, any how moved among themselves, are urged in the direction of parallel lines by equal accelerative forces, they will all continue to move among themselves, after the same, manner as if they had been urged by no such forces.

For these forces acting equally (with respect to the quantities of the bodies to be moved), and in the direction of parallel lines, will (by Law II) move all the bodies equally (as to velocity), and therefore will never produce any change in the positions or motions of the bodies among themselves.

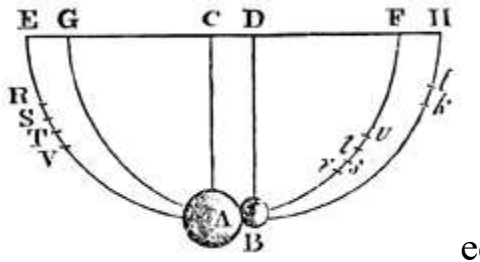
SCHOLIUM.

Hitherto I have laid down such principles as have been received by mathematicians, and are confirmed by abundance of experiments. By the first two Laws and the first two Corollaries, Galileo discovered that the descent of bodies observed the duplicate ratio of the time, and that the motion of projectiles was in the curve of a parabola; experience agreeing with both, unless so far as these motions are a little retarded by the resistance of the air. When a body is falling, the uniform force of its gravity acting equally, impresses, in equal particles of time, equal forces upon that body, and therefore generates equal velocities; and in the whole time impresses a whole force, and generates a whole velocity proportional to the time. And the spaces described in proportional times are as the velocities and the times conjunctly; that is, in a duplicate ratio of the times. And when a body is thrown upwards, its uniform gravity impresses forces and takes off velocities proportional to the times; and the times of ascending to the greatest heights are as the velocities to be taken off, and those heights are as

the velocities and the times conjunctly, or in the duplicate ratio of the velocities. And if a body be projected in any direction, the motion arising from its projection is compounded with the motion arising from its gravity. As if the body A by its motion of projection alone could describe in a given



time the right line AB, and with its motion of falling alone could describe in the same time the altitude AC; complete the paralellogram ABDC, and the body by that compounded motion will at the end of the time be found in the place D; and the curve line AED, which that body describes, will be a parabola, to which the right line AB will be a tangent in A; and whose ordinate BD will be as the square of the line AB. On the same Laws and Corollaries depend those things which have been demonstrated concerning the times of the vibration of pendulums, and are confirmed by the daily experiments of pendulum clocks. By the same, together with the third Law, Sir Christ. Wren, Dr. Wallis, and Mr. Huygens, the greatest geometers of our times, did severally determine the rules of the congress and reflexion of hard bodies, and much about the same time communicated their discoveries to the Royal Society, exactly agreeing among themselves as to those rules. Dr. Wallis, indeed, was something more early in the publication; then followed Sir Christopher Wren, and, lastly, Mr. Huygens. But Sir Christopher Wren confirmed the truth of the thing before the Royal Society by the experiment of pendulums, which Mr. Mariotte soon after thought fit to explain in a treatise entirely upon that subject. But to bring this experiment to an accurate agreement with the theory, we are to have a due regard as well to the resistance of the air as to the elastic force of the concurring bodies. Let the spherical bodies A, B be suspended by the



parallel and equal strings AC, BD, from the centres C, D. About these centres, with those intervals, describe the semicircles EAF, GBH, bisected by the radii CA, DB. Bring the body A to any point R of the arc EAF, and (withdrawing the body B) let it go from thence, and after one oscillation suppose it to return to the point V: then RV will be the retardation arising from the resistance of the air. Of this RV let ST be a fourth part, situated in the middle, to wit, so as RS and TV may be equal, and RS may be to ST as 3 to 2, then will ST represent very nearly the retardation during the descent from S to A. Restore the body B to its place: and, supposing the body A to be let fall from the point S, the velocity thereof in the place of reflexion A, without sensible error, will be the same as if it had descended *in vacuo* from the point T. Upon which account this velocity may be represented by the chord of the arc TA. For it is a proposition well known to geometers, that the velocity of a pendulous body in the lowest point is as the chord of the arc which it has described in its descent. After reflexion, suppose the body A comes to the place *s*, and the body B to the place *k*. Withdraw the body B, and find the place *v*, from which if the body A, being let go, should after one oscillation return to the place *r*, *st* may be a fourth part of *rv*, so placed in the middle thereof as to leave *rs* equal to *tv*, and let the chord of the arc *t*A. represent the velocity which the body A had in the place A immediately after reflexion. For *t* will be the true and correct place to which the body A should have ascended, if the resistance of the air had been taken off. In the same way we are to correct the place *k* to which the body B ascends, by finding the place *l* to which it should have ascended *in vacuo*. And thus everything may be subjected to experiment, in the same manner as if we were really placed *in vacuo*. These things being done, we are to take the product (if I may so say) of the body A, by the chord of the arc TA (which represents its velocity), that we may have its motion in the place A immediately before reflexion; and then by the chord of the arc *t*A, that we may have its motion in the place A immediately after reflexion. And so we are to take the product of

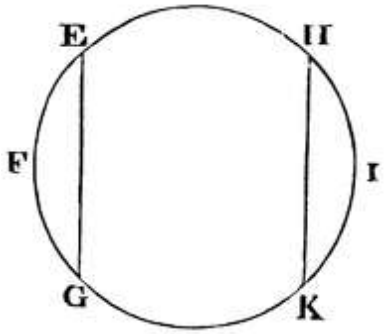
the body B by the chord of the arc B*l*, that we may have the motion of the same immediately after reflexion. And in like manner, when two bodies are let go together from different places, we are to find the motion of each, as well before as after reflexion; and then we may compare the motions between themselves, and collect the effects of the reflexion. Thus trying the thing with pendulums of ten feet, in unequal as well as equal bodies, and making the bodies to concur after a descent through large spaces, as of 8, 12, or 16 feet, I found always, without an error of 3 inches, that when the bodies concurred together directly, equal changes towards the contrary parts were produced in their motions, and, of consequence, that the action and reaction were always equal. As if the body A impinged upon the body B at rest with 9 parts of motion, and losing 7, proceeded after reflexion with 2, the body B was carried backwards with those 7 parts. If the bodies concurred with contrary motions, A with twelve parts of motion, and B with six, then if A receded with 2, B receded with 8; to wit, with a deduction of 14 parts of motion on each side. For from the motion of A subducting twelve parts, nothing will remain; but subducting 2 parts more, a motion will be generated of 2 parts towards the contrary way; and so, from the motion of the body B of 6 parts, subducting 14 parts, a motion is generated of 8 parts towards the contrary way. But if the bodies were made both to move towards the same way, A, the swifter, with 14 parts of motion, B, the slower, with 5, and after reflexion A went on with 5, B likewise went on with 14 parts; 9 parts being transferred from A to B. And so in other cases. By the congress and collision of bodies, the quantity of motion, collected from the sum of the motions directed towards the same way, or from the difference of those that were directed towards contrary ways, was never changed. For the error of an inch or two in measures may be easily ascribed to the difficulty of executing everything with accuracy. It was not easy to let go the two pendulums so exactly together that the bodies should impinge one upon the other in the lowermost place AB; nor to mark the places *s*, and *k*, to which the bodies ascended after congress. Nay, and some errors, too, might have happened from the unequal density of the parts of the pendulous bodies themselves, and from the irregularity of the texture proceeding from other causes.

But to prevent an objection that may perhaps be alledged against the rule, for the proof of which this experiment was made, as if this rule did suppose that the bodies were either absolutely hard, or at least perfectly elastic (whereas no such bodies are to be found in nature), I must add, that the experiments we have been describing, by no means depending upon that quality of hardness, do succeed as well in soft as in hard bodies. For if the rule is to be tried in bodies not perfectly hard, we are only to diminish the reflexion in such a certain proportion as the quantity of the elastic force requires. By the theory of Wren and Huygens, bodies absolutely hard return one from another with the same velocity with which they meet. But this may be affirmed with more certainty of bodies perfectly elastic. In bodies imperfectly elastic the velocity of the return is to be diminished together with the elastic force; because that force (except when the parts of bodies are bruised by their congress, or suffer some such extension as happens under the strokes of a hammer) is (as far as I can perceive) certain and determined, and makes the bodies to return one from the other with a relative velocity, which is in a given ratio to that relative velocity with which they met. This I tried in balls of wool, made up tightly, and strongly compressed. For, first, by letting go the pendulous bodies, and measuring their reflexion, I determined the quantity of their elastic force; and then, according to this force, estimated the reflexions that ought to happen in other cases of congress. And with this computation other experiments made afterwards did accordingly agree; the balls always receding one from the other with a relative velocity, which was to the relative velocity with which they met as about 5 to 9. Balls of steel returned with almost the same velocity: those of cork with a velocity something less; but in balls of glass the proportion was as about 15 to 16. And thus the third Law, so far as it regards percussions and reflexions, is proved by a theory exactly agreeing with experience.

In attractions, I briefly demonstrate the thing after this manner. Suppose an obstacle is interposed to hinder the congress of any two bodies A, B, mutually attracting one the other: then if either body, as A, is more attracted towards the other body B, than that other body B is towards the first body A, the obstacle will be more strongly urged by the pressure of the body A than by the pressure of the body B, and therefore will not remain in equilibrio: but the stronger pressure will prevail, and will make the system

of the two bodies, together with the obstacle, to move directly towards the parts on which B lies; and in free spaces, to go forward *in infinitum* with a motion perpetually accelerated; which is absurd and contrary to the first Law. For, by the first Law, the system ought to persevere in its state of rest, or of moving uniformly forward in a right line: and therefore the bodies must equally press the obstacle, and be equally attracted one by the other. I made the experiment on the loadstone and iron. If these, placed apart in proper vessels, are made to float by one another in standing water, neither of them will propel the other; but, by being equally attracted, they will sustain each other's pressure, and rest at last in an equilibrium.

So the gravitation betwixt the earth and its parts is mutual. Let the earth FI be cut by any plane EG into two parts EGF and EGI, and their



weights one towards the other will be mutually equal. For if by another plane HK, parallel to the former EG, the greater part EGI is cut into two parts EGKH and HKI, whereof HKI is equal to the part EFG, first cut off, it is evident that the middle part EGKH, will have no propension by its proper weight towards either side, but will hang as it were, and rest in an equilibrium betwixt both. But the one extreme part HKI will with its whole weight bear upon and press the middle part towards the other extreme part EGF; and therefore the force with which EGI, the sum of the parts HKI and EGKH, tends towards the third part EGF, is equal to the weight of the part HKI, that is, to the weight of the third part EGF. And therefore the weights of the two parts EGI and EGF, one towards the other, are equal, as I was to prove. And indeed if those weights were not equal, the whole earth floating in the non-resisting aether would give way to the greater weight, and, retiring from it, would be carried off *in infinitum*.

And as those bodies are equipollent in the congress and reflexion, whose velocities are reciprocally as their innate forces, so in the use of mechanic instruments those agents are equipollent, and mutually sustain each the

contrary pressure of the other, whose velocities, estimated according to the determination of the forces, are reciprocally as the forces.

So those weights are of equal force to move the arms of a balance; which during the play of the balance are reciprocally as their velocities upwards and downwards; that is, if the ascent or descent is direct, those weights are of equal force, which are reciprocally as the distances of the points at which they are suspended from the axis of the balance; but if they are turned aside by the interposition of oblique planes, or other obstacles, and made to ascend or descend obliquely, those bodies will be equipollent, which are reciprocally as the heights of their ascent and descent taken according to the perpendicular; and that on account of the determination of gravity downwards.

And in like manner in the pully, or in a combination of pullies, the force of a hand drawing the rope directly, which is to the weight, whether ascending directly or obliquely, as the velocity of the perpendicular ascent of the weight to the velocity of the hand that draws the rope, will sustain the weight.

In clocks and such like instruments, made up from a combination of wheels, the contrary forces that promote and impede the motion of the wheels, if they are reciprocally as the velocities of the parts of the wheel on which they are impressed, will mutually sustain the one the other.

The force of the screw to press a body is to the force of the hand that turns the handles by which it is moved as the circular velocity of the handle in that part where it is impelled by the hand is to the progressive velocity of the screw towards the pressed body.

The forces by which the wedge presses or drives the two parts of the wood it cleaves are to the force of the mallet upon the wedge as the progress of the wedge in the direction of the force impressed upon it by the mallet is to the velocity with which the parts of the wood yield to the wedge, in the direction of lines perpendicular to the sides of the wedge. And the like account is to be given of all machines.

The power and use of machines consist only in this, that by diminishing the velocity we may augment the force, and the contrary: from whence in all sorts of proper machines, we have the solution of this problem; *To move a given weight with a given power*, or with a given force to overcome any other given resistance. For if machines are so contrived that the velocities of

the agent and resistant are reciprocally as their forces, the agent will just sustain the resistant, but with a greater disparity of velocity will overcome it. So that if the disparity of velocities is so great as to overcome all that resistance which commonly arises either from the attrition of contiguous bodies as they slide by one another, or from the cohesion of continuous bodies that are to be separated, or from the weights of bodies to be raised, the excess of the force remaining, after all those resistances are overcome, will produce an acceleration of motion proportional thereto, as well in the parts of the machine as in the resisting body. But to treat of mechanics is not my present business. I was only willing to show by those examples the great extent and certainty of the third Law of motion. For if we estimate the action of the agent from its force and velocity conjunctly, and likewise the reaction of the impediment conjunctly from the velocities of its several parts, and from the forces of resistance arising from the attrition, cohesion, weight, and acceleration of those parts, the action and reaction in the use of all sorts of machines will be found always equal to one another. And so far as the action is propagated by the intervening instruments, and at last impressed upon the resisting body, the ultimate determination of the action will be always contrary to the determination of the reaction.

Of the Motion of Bodies

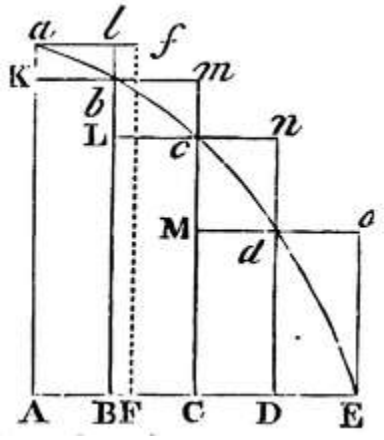
Section I: Of the method of first and last ratios of quantities, by the help whereof we demonstrate the propositions that follow

LEMMA I.

Quantities, and the ratios of quantities, which in any finite time converge continually to equality, and before the end of that time approach nearer the one to the other than by any given difference, become ultimately equal.

If you deny it, suppose them to be ultimately unequal, and let D be their ultimate difference. Therefore they cannot approach nearer to equality than by that given difference D; which is against the supposition.

LEMMA II.



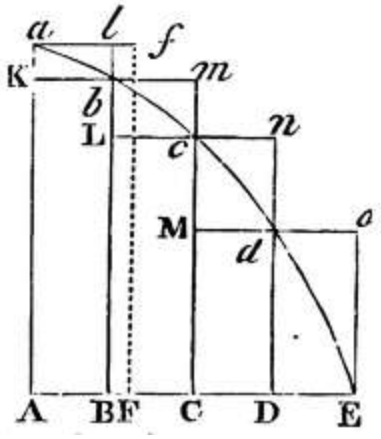
If in any figure AacE*, terminated by the right lines* Aa, AE, *and the curve* acE*, there be inscribed any number of parallelograms* Ab, Bc, Cd, *&c., comprehended under equal bases* AB, BC, CD, *&c., and the sides,* Bb, Cc, Dd, *&c., parallel to one side* Aa *of the figure; and the parallelograms* aKbl, bLcm, cMdn, *&c., are completed. Then if the breadth of those parallelograms be supposed to be diminished, and their number to be*

augmented in infinitum*; I say, that the ultimate ratios which the inscribed figure* AKbLcMdD*, the circumscribed figure* AalbmcndoE*, and curvilinear figure* AabcdE*, will have to one another, are ratios of equality.*

For the difference of the inscribed and circumscribed figures is the sum of the parallelograms K*l*, L*m*, M*u*, D*o*, that is (from the equality of all their bases), the rectangle under one of their bases K*b* and the sum of their altitudes A*a*, that is, the rectangle AB*la*. But this rectangle, because its breadth AB is supposed diminished *in infinitum*, becomes less than any given space. And therefore (by Lem. I) the figures inscribed and circumscribed become ultimately equal one to the other; and much more will the intermediate curvilinear figure be ultimately equal to either. Q.E.D.

LEMMA III.

The same ultimate ratios are also ratios of equality, when the, breadths, AB, BC, DC, *&c., of the parallelograms are unequal, and are all diminished* in infinitum.



For suppose AF equal to the greatest breadth, and complete the parallelogram FA*af*. This parallelogram will be greater than the difference of the inscribed and circumscribed figures; but, because its breadth AF is diminished *in infinitum*, it will be come less than any given rectangle. Q.E.D.

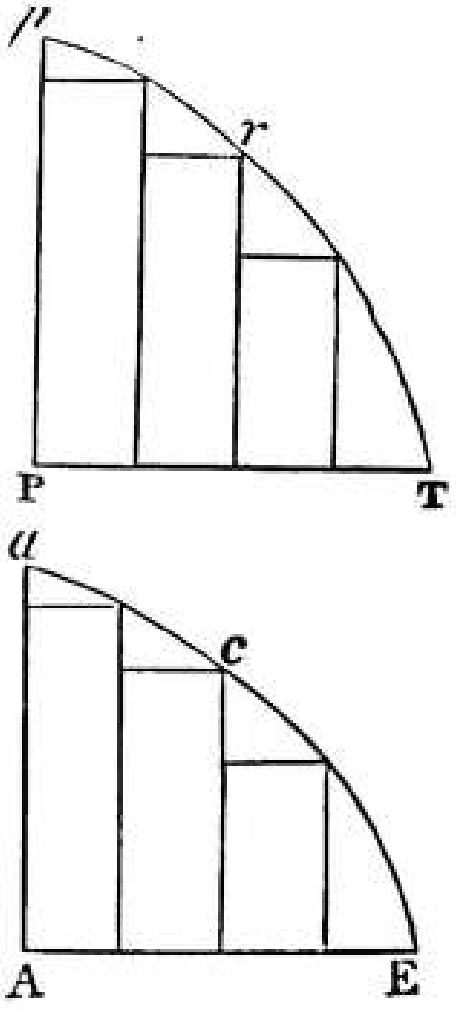
Cor. 1. Hence the ultimate sum of those evanescent parallelograms will in all parts coincide with the curvilinear figure.

Cor. 2. Much more will the rectilinear figure comprehended under the chords of the evanescent arcs *ab, bc, cd,* &c., ultimately coincide with the curvilinear figure.

Cor. 3. And also the circumscribed rectilinear figure comprehended under the tangents of the same arcs.

Cor. 4 And therefore these ultimate figures (as to their perimeters *ac*E) are not rectilinear, but curvilinear limits of rectilinear figures.

LEMMA IV.



If in two figures AacE, PprT*, you inscribe (as before) two ranks of parallelograms, an equal number in each rank, and, when their breadths*

are diminished in infinitum*, the ultimate ratios of the parallelograms in one figure to those in the other, each to each respectively, are the same; I say, that those two figures* AacE, PprT*, are to one another in that same ratio.*

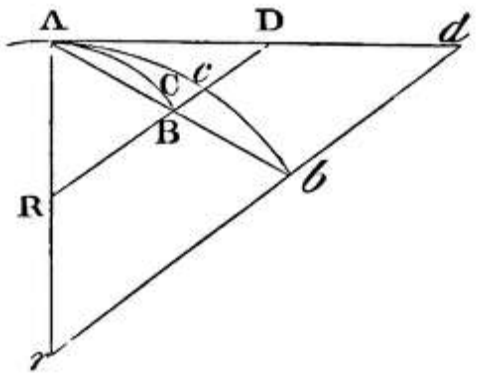
For as the parallelograms in the one are severally to the parallelograms in the other, so (by composition) is the sum of all in the one to the sum of all in the other; and so is the one figure to the other; because (by Lem. III) the former figure to the former sum, and the latter figure to the latter sum, are both in the ratio of equality. Q.E.D.

Cor. Hence if two quantities of any kind are any how divided into an equal number of parts, and those parts, when their number is augmented, and their magnitude diminished *in infinitum*, have a given ratio one to the other, the first to the first, the second to the second, and so on in order, the whole quantities will be one to the other in that same given ratio. For if, in the figures of this Lemma, the parallelograms are taken one to the other in the ratio of the parts, the sum of the parts will always be as the sum of the parallelograms; and therefore supposing the number of the parallelograms and parts to be augmented, and their magnitudes diminished *in infinitum*, those sums will be in the ultimate ratio of the parallelogram in the one figure to the correspondent parallelogram in the other; that is (by the supposition), in the ultimate ratio of any part of the one quantity to the correspondent part of the other.

LEMMA V.

In similar figures, all sorts of homologous sides, whether curvilinear or rectilinear, are proportional; and the areas are in the duplicate ratio of the homologous sides.

LEMMA VI.



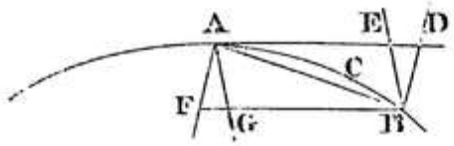
If any arc ACB*, given in position is subtended by its chord* AB*, and in any point* A*, in the middle of the continued curvature, is touched by a right line* AD*, produced both ways; then if the points A and B approach one another and meet, I say, the angle* BAD*, contained between, the chord and the tangent, will be diminished* in infinitum*, and ultimately will vanish.*

For if that angle does not vanish, the arc ACB will contain with the tangent AD an angle equal to a rectilinear angle; and therefore the curvature at the point A will not be continued, which is against the supposition.

LEMMA VII.

The same things being supposed, I say that the ultimate ratio of the arc, chord, and tangent, any one to any other, is the ratio of equality.

For while the point B approaches towards the point A, consider always AB and AD as produced to the remote points *b* and *d*, and parallel to the secant BD draw *bd*: and let the arc A*cb* be always similar to the arc ACB. Then, supposing the points A and B to coincide, the angle *d*A*b* will vanish, by the preceding Lemma; and therefore the right lines A*b*, A*d* (which are always finite), and the intermediate arc A*cb*, will coincide, and become equal among themselves. Wherefore, the right lines AB, AD, and the intermediate arc ACB (which are always proportional to the former), will vanish, and ultimately acquire the ratio of equality. Q.E.D.



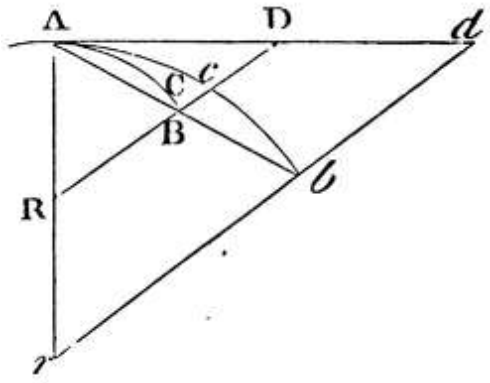
Cor. 1. Whence if through B we draw BF parallel to the tangent, always cutting any right line AF passing through A in F, this line BF will be ultimately in the ratio of equality with the evanescent arc ACB; because, completing the parallelogram AFBD, it is always in a ratio of equality with AD.

Cor. 2. And if through B and A more right lines are drawn, as BE, BD, AF, AG, cutting the tangent AD and its parallel BF; the ultimate ratio of all the abscissas AD, AE, BF, BG, and of the chord and arc AB, any one to any other, will be the ratio of equality.

Cor. 3. And therefore in all our reasoning about ultimate ratios, we may freely use any one of those lines for any other.

LEMMA VIII.

If the right lines AR, BR*, with the arc* ACB*, the chord* AB*, and the tangent* AD*, constitute three triangles* RAB, RACB, RAD*, and the points* A *and* B *approach and meet: I say, that the ultimate form of these evanescent triangles is that of similitude, and their ultimate ratio that of equality.*



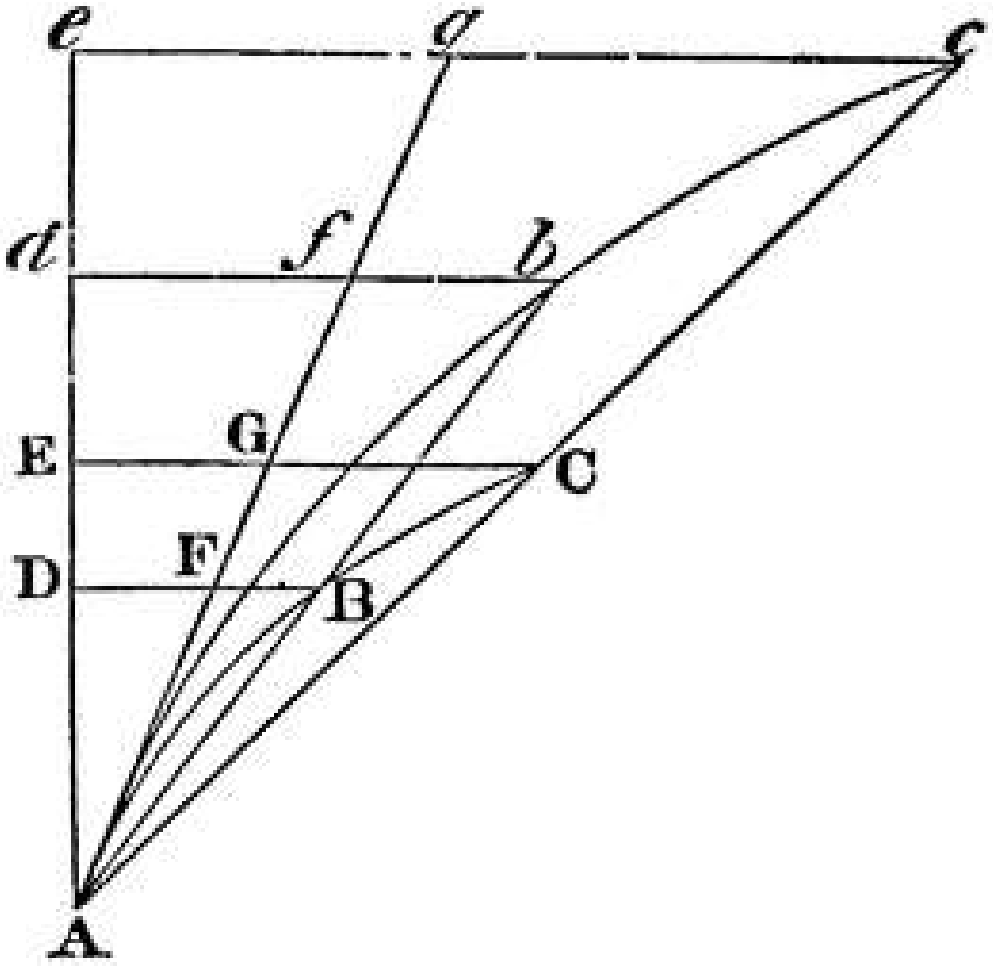
For while the point B approaches towards the point A, consider always AB, AD, AR, as produced to the remote points *b, d,* and *r*, and *rbd* as drawn parallel to RD, and let the arc A*cb* be always similar to the arc ACB. Then

supposing the points A and B to coincide, the angle *b*A*d* will vanish; and therefore the three triangles *r*A*b*, *r*A*cb*, *r*A*d* (which are always finite), will coincide, and on that account become both similar and equal. And therefore the triangles RAB, RACB, RAD, which are always similar and proportional to these, will ultimately be come both similar and equal among themselves. Q.E.D.

Cor. And hence in all reasonings about ultimate ratios, we may indifferently use any one of those triangles for any other.

LEMMA IX.

If a right line AE*, and a curve Line* ABC*, both given by position, cut each other in a given angle,* A*; and to that right line, in another given angle,* BD, CE *are ordinately applied, meeting the curve in* B, C*; and the points* B *and* C *together approach towards and meet in the point* A*: I say, that the areas of the triangles* ABD, ACE*, will ultimately be one to the other in the duplicate ratio of the sides.*



For while the points B, C, approach towards the point A, suppose always AD to be produced to the remote points *d* and *e*, so as A*d*, A*e* may be proportional to AD, AE; and the ordinates *db*, *ec*, to be drawn parallel to the ordinates DB and EC, and meeting AB and AC produced in *b* and *c*. Let the curve A*bc* be similar to the curve ABC, and draw the right line A*g* so as to touch both curves in A, and cut the ordinates DB, EC, *db, ec*, in F, G, *f, g*. Then, supposing the length A*e* to remain the same, let the points B and C meet in the point A; and the angle *c*A*g* vanishing, the curvilinear areas A*bd*, A*ce* will coincide with the rectilinear areas A*fd*, A*ge*; and therefore (by Lem. V) will be one to the other in the duplicate ratio of the sides A*d*, A*e*. But the areas ABD, ACE are always proportional to these areas; and so the sides AD, AE are to these sides. And therefore the areas ABD, ACE are

ultimately one to the other in the duplicate ratio of the sides AD, AE. Q.E.D.

LEMMA X.

The spaces which a body describes by any finite force urging it, whether that force is determined and immutable, or is continually augmented or continually diminished, are in the very beginning of the motion one to the other in the duplicate ratio of the times.

Let the times be represented by the lines AD, AE, and the velocities generated in those times by the ordinates DB, EC. The spaces described with these velocities will be as the areas ABD, ACE, described by those ordinates, that is, at the very beginning of the motion (by Lem. IX), in the duplicate ratio of the times AD, AE. Q.E.D.

Cor. 1. And hence one may easily infer, that the errors of bodies describing similar parts of similar figures in proportional times, are nearly as the squares of the times in which they are generated; if so be these errors are generated by any equal forces similarly applied to the bodies, and measured by the distances of the bodies from those places of the similar figures, at which, without the action of those forces, the bodies would have arrived in those proportional times.

Cor. 2. But the errors that are generated by proportional forces, similarly applied to the bodies at similar parts of the similar figures, are as the forces and the squares of the times conjunctly.

Cor. 3. The same thing is to be understood of any spaces whatsoever described by bodies urged with different forces; all which, in the very beginning of the motion, are as the forces and the squares of the times conjunctly.

Cor. 4. And therefore the forces are as the spaces described in the very beginning of the motion directly, and the squares of the times inversely.

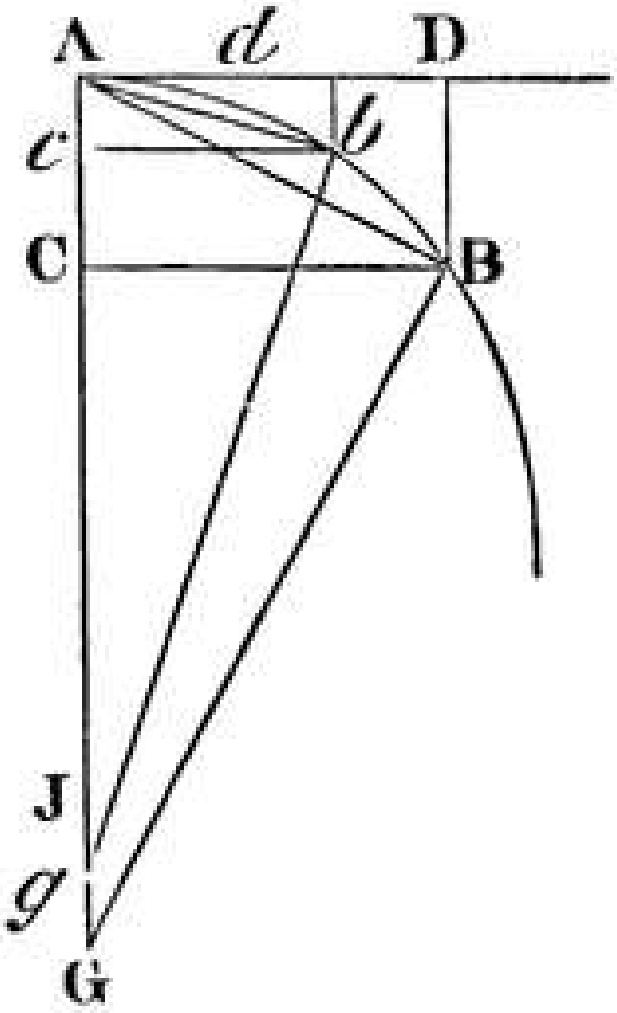
Cor. 5. And the squares of the times are as the spaces described directly, and the forces inversely.

SCHOLIUM.

If in comparing indetermined quantities of different sorts one with another, any one is said to be as any other directly or inversely, the meaning is, that the former is augmented or diminished in the same ratio with the latter, or with its reciprocal. And if any one is said to be as any other two or more directly or inversely, the meaning is, that the first is augmented or diminished in the ratio compounded of the ratios in which the others, or the reciprocals of the others, are augmented or diminished. As if A is said to be as B directly, and C directly, and D inversely, the meaning is, that A is augmented or diminished in the same ratio with, that is to say, that A and are one to the other in a given ratio.

LEMMA XI.

The evanescent subtense of the angle of contact, in all curves which at the point of contact have a finite curvature, is ultimately in the duplicate ratio of the subtense of the conterminate arc.



Case 1. Let AB be that arc, AD its tangent, BD the subtense of the angle of contact perpendicular on the tangent, AB the subtense of the arc. Draw BG perpendicular to the subtense AB, and AG to the tangent AD, meeting in G; then let the points D, B, and G, approach to the points *d, b,* and *g*, and suppose J to be the ultimate intersection of the lines BG, AG, when the points D, B, have come to A. It is evident that the distance GJ may be less than any assignable. But (from the nature of the circles passing through the points A, B, G, A, *b, g*), and; and therefore the ratio of AB^2 to Ab^2 is compounded of the ratios of AG to A*g*, and of B*d* to *bd*. But because GJ may be assumed of less length than any assignable, the ratio of AG to A*g* may be such as to differ from the ratio of equality by less than any assignable difference; and therefore the ratio of AB^2 to Ab^2 may be such as to differ from the ratio of BD to *bd* by less than any assignable difference.

There fore, by Lem. I, the ultimate ratio of AB^2 to Ab^2 is the same with the ultimate ratio of BD to *bd*. Q.E.D.

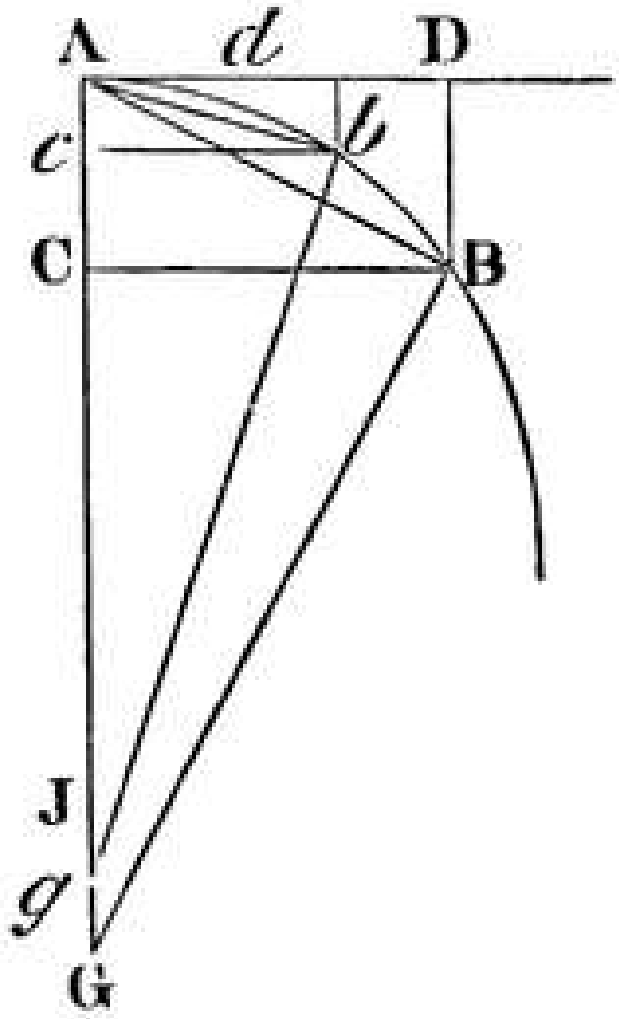
Case 2. Now let BD be inclined to AD in any given angle, and the ultimate ratio of BD to *bd* will always be the same as before, and therefore the same with the ratio of AB^2 to Ab^2. Q.E.D.

Case 3. And if we suppose the angle D not to be given, but that the right line BD converges to a given point, or is determined by any other condition whatever; nevertheless the angles D, *d*, being determined by the same law, will always draw nearer to equality, and approach nearer to each other than by any assigned difference, and therefore, by Lem. I, will at last be equal; and therefore the lines BD, *bd* are in the same ratio to each other as before. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore since the tangents AD, A*d*, the arcs AB, A*b*, and their sines, BC, *bc*, become ultimately equal to the chords AB, A*b*, their squares will ultimately become as the subtenses BD, *bd*.

Cor. 2. Their squares are also ultimately as the versed sines of the arcs, bisecting the chords, and converging to a given point. For those versed sines are as the subtenses BD, *bd*.

Cor. 3. And therefore the versed sine is in the duplicate ratio of the time in which a body will describe the arc with a given velocity.



Cor. 4. The rectilinear triangles ADB, A*db* are ultimately in the triplicate ratio of the sides AD, A*d*, and in a sesquiplicate ratio of the sides DB, *db*; as being in the ratio compounded of the sides AD to DB, and of A*d* to *db*. So also the triangles ABC, A*bc* are ultimately in the triplicate ratio of the sides BC, *bc*. What I call the sesquiplicate ratio is the subduplicate of the triplicate, as being compounded of the simple and subduplicate ratio.

Cor. 5. And because DB, *db* are ultimately parallel and in the duplicate ratio of the lines AD, A*d*, the ultimate curvilinear areas ADB, A*db* will be (by the nature of the parabola) two thirds of the rectilinear triangles ADB, A*db* and the segments AB, A*b* will be one third of the same triangles. And thence those areas and those segments will be in the triplicate ratio as well of the tangents AD, A*d*, as of the chords and arcs AB, AB.

SCHOLIUM.

But we have all along supposed the angle of contact to be neither infinitely greater nor infinitely less than the angles of contact made by circles and their tangents; that is, that the curvature at the point A is neither infinitely small nor infinitely great, or that the interval AJ is of a finite magnitude. For DB may be taken as AD^3: in which case no circle can be drawn through the point A, between the tangent AD and the curve AB, and therefore the angle of contact will be infinitely less than those of circles. And by a like reasoning, if DB be made successfully as AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c., we shall have a series of angles of contact, proceeding *in infinitum*, wherein every succeeding term is infinitely less than the preceding. And if DB be made successively as AD^2; AD32, AD43, AD54, AD65, AD76, &c., we shall have another infinite series of angles of contact, the first of which is of the same sort with those of circles, the second infinitely greater, and every succeeding one infinitely greater than the preceding. But between any two of these angles another series of intermediate angles of contact may be interposed, proceeding both ways *in infinitum*, wherein every succeeding angle shall be infinitely greater or infinitely less than the preceding. As if between the terms AD^2 and AD^2 there were interposed the series AD136, AD115, AD94, AD73, AD52, AD83, AD114, AD145, AD176 &c. And again, between any two angles of this series, a new series of intermediate angles may be interposed, differing from one another by infinite intervals. Nor is nature confined to any bounds.

Those things which have been demonstrated of curve lines, and the superfices which they comprehend, may be easily applied to the curve superfices and contents of solids. These Lemmas are premised to avoid the tediousness of deducing perplexed demonstrations *ad absurdum*, according to the method of the ancient geometers. For demonstrations are more contracted by the method of indivisibles: but because the hypothesis of indivisibles seems somewhat harsh, and therefore that method is reckoned less geometrical, I chose rather to reduce the demonstrations of the following propositions to the first and last sums and ratios of nascent and evanescent quantities, that is, to the limits of those sums and ratios; and so to premise, as short as I could, the demonstrations of those limits. For

hereby the same thing is performed as by the method of indivisibles; and now those principles being demonstrated, we may use them with more safety. Therefore if hereafter I should happen to consider quantities as made up of particles, or should use little curve lines for right ones, I would not be understood to mean indivisibles, but evanescent divisible quantities: not the sums and ratios of determinate parts, but always the limits of sums and ratios; and that the force of such demonstrations always depends on the method laid down in the foregoing Lemmas.

Perhaps it may be objected, that there is no ultimate proportion, of evanescent quantities; because the proportion, before the quantities have vanished, is not the ultimate, and when they are vanished, is none. But by the same argument, it may be alledged, that a body arriving at a certain place, and there stopping, has no ultimate velocity: because the velocity, before the body comes to the place, is not its ultimate velocity; when it has arrived, is none. But the answer is easy; for by the ultimate velocity is meant that with which the body is moved, neither before it arrives at its last place and the motion ceases, nor after, but at the very instant it arrives; that is, that velocity with which the body arrives at its last place, and with which the motion ceases. And in like manner, by the ultimate ratio of evanescent quantities is to be understood the ratio of the quantities not before they vanish, nor afterwards, but with which they vanish. In like manner the first ratio of nascent quantities is that with which they begin to be. And the first or last sum is that with which they begin and cease to be (or to be augmented or diminished). There is a limit which the velocity at the end of the motion may attain, but not exceed. This is the ultimate velocity. And there is the like limit in all quantities and proportions that begin and cease to be. And since such limits are certain and definite, to determine the same is a problem strictly geometrical. But whatever is geometrical we may be allowed to use in determining and demonstrating any other thing that is likewise geometrical.

It may also be objected, that if the ultimate ratios of evanescent quantities are given, their ultimate magnitudes will be also given: and so all quantities will consist of indivisibles, which is contrary to what *Euclid* has demonstrated concerning incommensurables, in the 10th Book of his Elements. But this objection is founded on a false supposition. For those ultimate ratios with which quantities vanish are not truly the ratios of

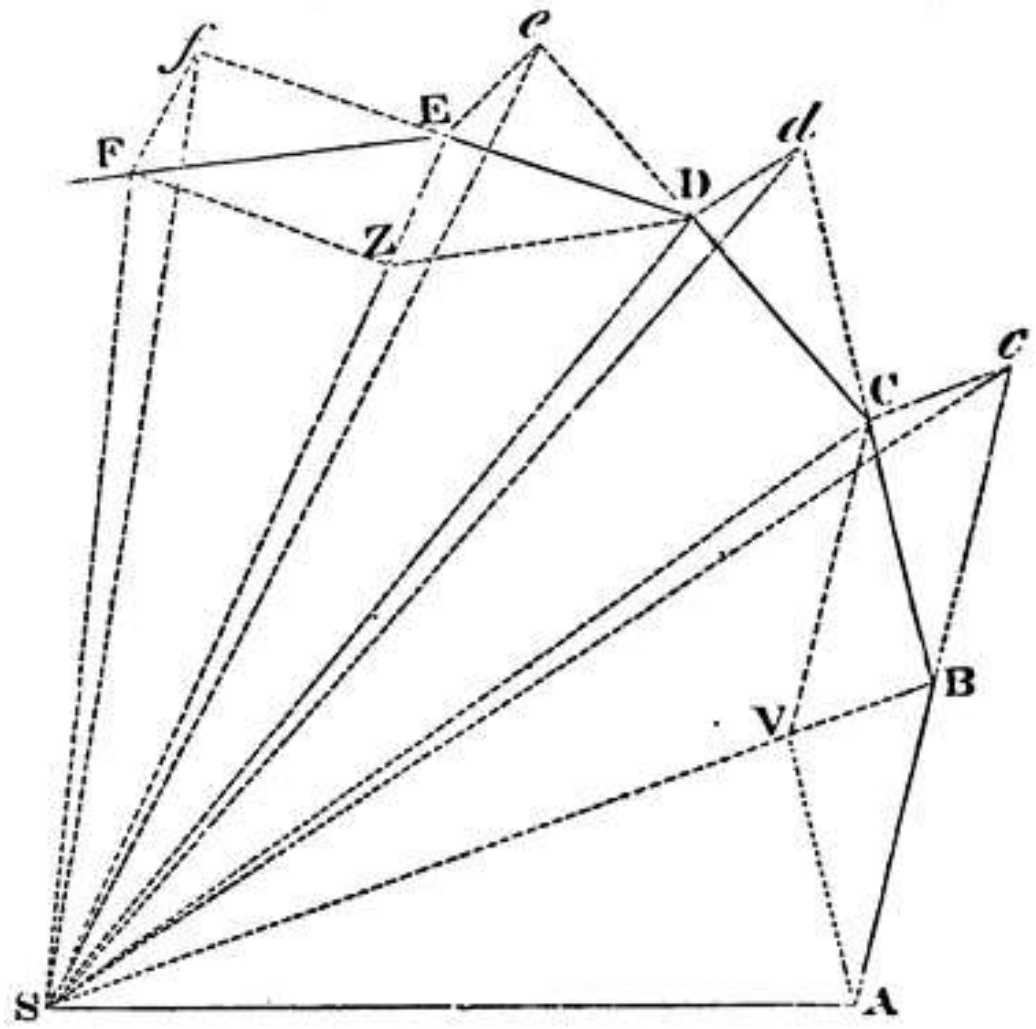
ultimate quantities, but limits towards which the ratios of quantities decreasing without limit do always converge; and to which they approach nearer than by any given difference, but never go beyond, nor in effect attain to, till the quantities are diminished *in infinitum*. This thing will appear more evident in quantities infinitely great. If two quantities, whose difference is given, be augmented *in infinitum*, the ultimate ratio of these quantities will be given, to wit, the ratio of equality; but it does not from thence follow, that the ultimate or greatest quantities themselves, whose ratio that is, will be given. Therefore if in what follows, for the sake of being more easily understood, I should happen to mention quantities as least, or evanescent, or ultimate, you are not to suppose that quantities of any determinate magnitude are meant, but such as are conceived to be always diminished without end.

Section II: Of the Invention of Centripetal Forces

PROPOSITION I. THEOREM I.

The areas, which revolving bodies describe by radii drawn to an immovable centre of force do lie in the same immovable planes, and are proportional to the times in which they are described.

For suppose the time to be divided into equal parts, and in the first part of that time let the body by its innate force describe the right line AB In the second part of that time, the same would (by Law I.), if not hindered, proceed directly to *c*, along the line B*c* equal to AB; so that by the radii AS, BS, *c*S, drawn to the centre, the equal areas ASB, BS*c*, would be



described.

But when the body is arrived at B, suppose that a centripetal force acts at once with a great impulse; and, turning aside the body from the right line B*c*, compels it afterwards to continue its motion along the right line BC. Draw *c*C parallel to BS meeting BC in C; and at the end of the second part of the time, the body (by Cor. I. of the Laws) will be found in C, in the same plane with the triangle ASB. Join SC, and, because SB and C*c* are parallel, the triangle SBC will be equal to the triangle SB*c*, and therefore also to the triangle SAB. By the like argument, if the centripetal force acts successively in C, D, E. &c.; and makes the body, in each single particle of time, to describe the right lines CD, DE, EF, &c., they will all lie in the same plane; and the triangle SCD will be equal to the triangle SBC, and SDE to SCD, and SEF to SDE. And therefore, in equal times, equal areas are described in one immovable plane: and, by composition, any sums SADS, SAFS, of

those areas, are one to the other as the times in which they are described. Now let the number of those triangles be augmented, and their breadth diminished *in infinitum*; and (by Cor. 4, Lem. III.) their ultimate perimeter ADF will be a curve line: and therefore the centripetal force, by which the body is perpetually drawn back from the tangent of this curve, will act continually; and any described areas SADS, SAFS, which are always proportional to the times of description, will, in this case also, be proportional to those times. Q.E.D.

Cor. 1. The velocity of a body attracted towards an immovable centre, in spaces void of resistance, is reciprocally as the perpendicular let fall from that centre on the right line that touches the orbit. For the velocities in those places A, B, C, D, E, are as the bases AB, BC, CD, DE, EF, of equal triangles; and these bases are reciprocally as the perpendiculars let fall upon them.

Cor. 2. If the chords AB, BC of two arcs, successively described in equal times by the same body, in spaces void of resistance, are completed into a parallelogram ABCV, and the diagonal BV of this parallelogram; in the position which it ultimately acquires when those arcs are diminished *in infinitum*, is produced both ways, it will pass through the centre of force.

Cor. 3. If the chords AB, BC, and DE, EF, of arcs described in equal times, in spaces void of resistance, are completed into the parallelograms ABCV, DEFZ; the forces in B and E are one to the other in the ultimate ratio of the diagonals BV, EZ, when those arcs are diminished *in infinitum*. For the motions BC and EF of the body (by Cor. 1 of the Laws) are compounded of the motions B*c*, BV, and E*f*, EZ: but BV and EZ, which are equal to C*c* and F*f*, in the demonstration of this Proposition, were generated by the impulses of the centripetal force in B and E, and are therefore proportional to those impulses.

Cor. 4. The forces by which bodies, in spaces void of resistance, are drawn back from rectilinear motions, and turned into curvilinear orbits, are one to another as the versed sines of arcs described in equal times; which versed sines tend to the centre of force, and bisect the chords when those arcs are diminished to infinity. For such versed sines are the halves of the diagonals mentioned in Cor. 3.

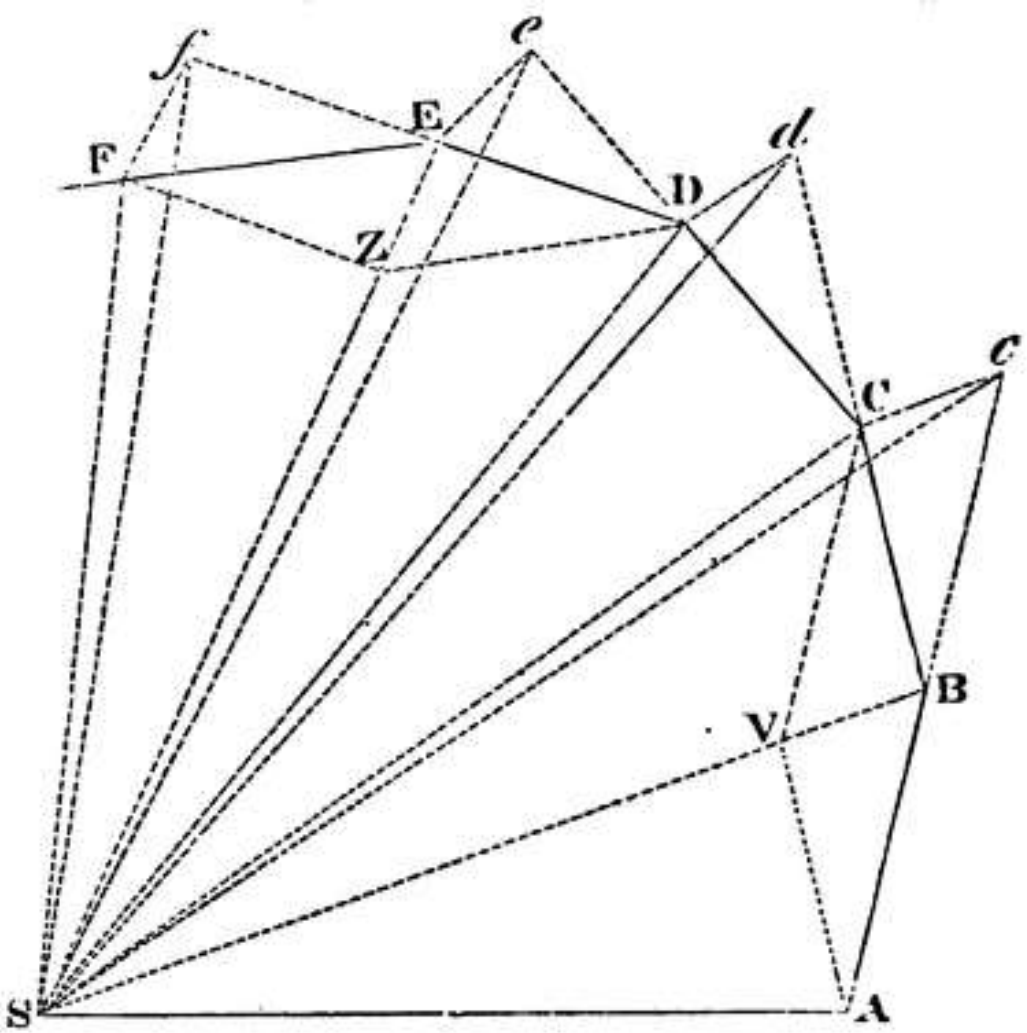
Cor. 5. And therefore those forces are to the force of gravity as the said versed sines to the versed sines perpendicular to the horizon of those

parabolic arcs which projectiles describe in the same time.

Cor. 6. And the same things do all hold good (by Cor. 5 of the Laws), when the planes in which the bodies are moved, together with the centres of force which are placed in those planes, are not at rest, but move uniformly forward in right lines.

PROPOSITION II. THEOREM II.

Every body that moves in any curve line described in a plane, and by a radius, drawn to a point either immovable, or moving forward with an uniform rectilinear motion, describes about that point areas proportional to the times, is urged by a centripetal force directed to that point.



Case. 1. For every body that moves in a curve line, is (by Law 1) turned aside from its rectilinear course by the action of some force that impels it. And that force by which the body is turned off from its rectilinear course, and is made to describe, in equal times, the equal least triangles SAB, SBC, SCD, &c., about the immovable point S (by Prop. XL. Book 1, Elem. and Law II), acts in the place B, according to the direction of a line parallelto *c*C, that is, in the direction of the line BS, and in the place C, according to the direction of a line parallel to *d*D, that is, in the direction of the line CS, &c.; and therefore acts always in the direction of lines tending to the immovable point S. Q.E.D.

Case. 2. And (by Cor. 5 of the Laws) it is indifferent whether the superfices in which a body describes a curvilinear figure be quiescent, or moves together with the body, the figure described, and its point S, uniformly forward in right lines.

Cor. 1. In non-resisting spaces or mediums, if the areas are not proportional to the times, the forces are not directed to the point in which the radii meet; but deviate therefrom *in consequentia*, or towards the parts to which the motion is directed, if the description of the areas is accelerated; but *in antecedentia*, if retarded.

Cor. 2. And even in resisting mediums, if the description of the areas is accelerated, the directions of the forces deviate from the point in which the radii meet; towards the parts to which the motion tends.

SCHOLIUM.

A body may be urged by a centripetal force compounded of several forces; in which case the meaning of the Proposition is, that the force which results out of all tends to the point S. But if any force acts perpetually in the direction of lines perpendicular to the described surface, this force will make the body to deviate from the plane of its motion: but will neither augment nor diminish the quantity of the described surface, and is therefore to be neglected in the composition of forces.

PROPOSITION III. THEOREM III.

Every body, that by a radius drawn to the centre of another body, how soever moved, describes areas about that centre proportional to the times, is urged by a force compounded out of the centripetal force tending to that other body, and of all the accelerative force by which that other body is impelled.

Let L represent the one, and T the other body; and (by Cor. 6 of the Laws) if both bodies are urged in the direction of parallel lines, by a new force equal and contrary to that by which the second body T is urged, the first body L will go on to describe about the other body T the same areas as before: but the force by which that other body T was urged will be now destroyed by an equal and contrary force; and therefore (by Law I.) that other body T, now left to itself, will either rest, or move uniformly forward in a right line: and the first body L impelled by the difference of the forces, that is, by the force remaining, will go on to describe about the other body T areas proportional to the times. And therefore (by Theor. II.) the difference of the forces is directed to the other body T as its centre. Q.E.D

Cor. 1. Hence if the one body L, by a radius drawn to the other body T, describes areas proportional to the times; and from the whole force, by which the first body L is urged (whether that force is simple, or, according to Cor. 2 of the Laws, compounded out of several forces), we subduct (by the same Cor.) that whole accelerative force by which the other body is urged; the whole remaining force by which the first body is urged will tend to the other body T, as its centre.

Cor. 2. And, if these areas are proportional to the times nearly, the remaining force will tend to the other body T nearly.

Cor. 3. And *vice versa*, if the remaining force tends nearly to the other body T, those areas will be nearly proportional to the times.

Cor. 4. If the body L, by a radius drawn to the other body T, describes areas, which, compared with the times, are very unequal; and that other body T be either at rest, or moves uniformly forward in a right line: the action of the centripetal force tending to that other body T is either none at all, or it is mixed and compounded with very powerful actions of other forces: and the whole force compounded of them all, if they are many, is directed to another (immovable or moveable) centre. The same thing obtains, when the other body is moved by any motion whatsoever; provided

that centripetal force is taken, which remains after subducting that whole force acting upon that other body T.

SCHOLIUM.

Because the equable description of areas indicates that a centre is respected by that force with which the body is most affected, and by which it is drawn back from its rectilinear motion, and retained in its orbit; why may we not be allowed, in the following discourse, to use the equable description of areas as an indication of a centre, about which all circular motion is performed in free spaces?

PROPOSITION IV. THEOREM IV.

The centripetal forces of bodies, which by equable motions describe different circles, tend to the centres of the same circles; and are one to the other as the squares of the arcs described in equal times applied to the radii of the circles.

These forces tend to the centres of the circles (by Prop. II., and Cor. 2, Prop. I.), and are one to another as the versed sines of the least arcs described in equal times (by Cor. 4, Prop. I.); that is, as the squares of the same arcs applied to the diameters of the circles (by Lem. VII.); and therefore since those arcs are as arcs described in any equal times, and the diameters are as the radii, the forces will be as the squares of any arcs described in the same time applied to the radii of the circles. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore, since those arcs are as the velocities of the bodies the centripetal forces are in a ratio compounded of the duplicate ratio of the velocities directly, and of the simple ratio of the radii inversely.

Cor. 2. And since the periodic times are in a ratio compounded of the ratio of the radii directly, and the ratio of the velocities inversely, the centripetal forces, are in a ratio compounded of the ratio of the radii directly, and the duplicate ratio of the periodic times inversely.

Cor. 3. Whence if the periodic times are equal, and the velocities therefore as the radii, the centripetal forces will be also as the radii; and the

contrary.

Cor. 4. If the periodic times and the velocities are both in the subduplicate ratio of the radii, the centripetal forces will be equal among themselves; and the contrary.

Cor. 5. If the periodic times are as the radii, and therefore the velocities equal, the centripetal forces will be reciprocally as the radii; and the contrary.

Cor. 6. If the periodic times are in the sesquiplicate ratio of the radii, and therefore the velocities reciprocally in the subduplicate ratio of the radii, the centripetal forces will be in the duplicate ratio of the radii inversely; and the contrary.

Cor. 7. And universally, if the periodic time is as any power R^n of the radius R, and therefore the velocity reciprocally as the power R^{n-1} of the radius, the centripetal force will be reciprocally as the power R^{2n-1} of the radius; and the contrary.

Cor. 8. The same things all hold concerning the times, the velocities, and forces by which bodies describe the similar parts of any similar figures that have their centres in a similar position with those figures; as appears by applying the demonstration of the preceding cases to those. And the application is easy, by only substituting the equable description of areas in the place of equable motion, and using the distances of the bodies from the centres instead of the radii.

Cor. 9. From the same demonstration it likewise follows, that the arc which a body, uniformly revolving in a circle by means of a given centripetal force, describes in any time, is a mean proportional between the diameter of the circle, and the space which the same body falling by the same given force would descend through in the same given time.

SCHOLIUM.

The case of the 6th Corollary obtains in the celestial bodies (as Sir Christopher Wren, Dr. Hooke, and Dr. Halley have severally observed); and therefore in what follows, I intend to treat more at large of those things

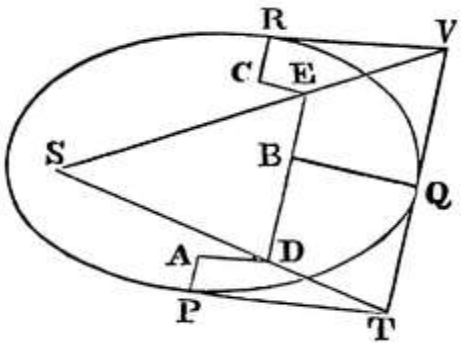
which relate to centripetal force decreasing in a duplicate ratio of the distances from the centres.

Moreover, by means of the preceding Proposition and its Corollaries, we may discover the proportion of a centripetal force to any other known force, such as that of gravity. For if a body by means of its gravity revolves in a circle concentric to the earth, this gravity is the centripetal force of that body. But from the descent of heavy bodies, the time of one entire revolution, as well as the arc described in any given time, is given (by Cor. 9 of this Prop.). And by such propositions, Mr. Huygens, in his excellent book *De Horologio Oscillatorio*, has compared the force of gravity with the centrifugal forces of revolving bodies.

The preceding Proposition may be likewise demonstrated after this manner. In any circle suppose a polygon to be inscribed of any number of sides. And if a body, moved with a given velocity along the sides of the polygon, is reflected from the circle at the several angular points, the force, with which at every reflection it strikes the circle, will be as its velocity: and therefore the sum of the forces, in a given time, will be as that velocity and the number of reflections conjunctly: that is (if the species of the polygon be given), as the length described in that given time, and increased or diminished in the ratio of the same length to the radius of the circle; that is, as the square of that length applied to the radius; and therefore the polygon, by having its sides diminished *in infinitum*, coincides with the circle, as the square of the arc described in a given time applied to the radius. This is the centrifugal force, with which the body impels the circle; and to which the contrary force, wherewith the circle continually repels the body towards the centre, is equal.

PROPOSITION V. PROBLEM I.

There being given, in any places, the velocity with which a body describes a given figure, by means of forces directed to some common centre: to find that centre.



Let the three right lines PT, TQV, VR touch the figure described in as many points, P, Q, R, and meet in T and V. On the tangents erect the perpendiculars PA, QB, RC, reciprocally proportional to the velocities of the body in the points P, Q, R, from which the perpendiculars were raised; that is, so that PA may be to QB as the velocity in Q, to the velocity in P, and QB to RC as the velocity in R to the velocity in Q. Through the ends A, B, C, of the perpendiculars draw AD, DBE, EC, at right angles, meeting in D and E: and the right lines TD, VE produced, will meet in S, the centre required.

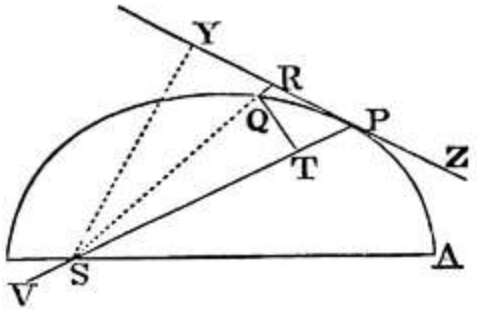
For the perpendiculars let fall from the centre S on the tangents PT, QT, are reciprocally as the velocities of the bodies in the points P and Q (by Cor. 1, Prop. I.), and therefore, by construction, as the perpendiculars AP, BQ directly; that is, as the perpendiculars let fall from the point D on the tangents. Whence it is easy to infer that the points S, D, T, are in one right line. And by the like argument the points S, E, V are also in one right line; and therefore the centre S is in the point where the right lines TD, VE meet. Q.E.D.

PROPOSITION VI. THEOREM V.

In a space void of resistance, if a body revolves in any orbit about an immovable centre, and in the least time describes any arc just then nascent; and the versed sine of that arc is supposed to be drawn bisecting the chord, and produced passing through the centre of force: the centripetal force in the middle of the arc will be as the versed sine directly and the square of the time inversely.

For the versed sine in a given time is as the force (by Cor. 4, Pro); and augmenting the time in any ratio, because the arc will be augmented in the same ratio, the versed sine will be augmented in the duplicate of that ratio (by Cor. 2 and 3, Lem. XI.), and therefore is as the force and the square of the time. Subduct on both sides the duplicate ratio of the time, and the force will be as the versed sine directly, and the square of the time inversely. Q.E.D.

And the same thing may also be easily demonstrated by Corol. 4, Lem. X.



Cor. 1. If a body P revolving about the centre S describes a curve line APQ, which a right line ZPR touches in any point P; and from any other point Q of the curve, QR is drawn parallel to the distance SP, meeting the tangent in R; and QT is drawn perpendicular to the distance SP; the centripetal force will be reciprocally as the solid, if the solid be taken of that magnitude which it ultimately acquires when the points P and Q coincide. For QR is equal to the versed sine of double the arc QP, whose middle is P: and double the triangle SQP, or is proportional to the time in which that double arc is described; and therefore may be used for the exponent of the time.

Cor. 2. By a like reasoning, the centripetal force is reciprocally as the solid; if SY is a perpendicular from the centre of force on PR the tangent of the orbit. For the rectangles and are equal.

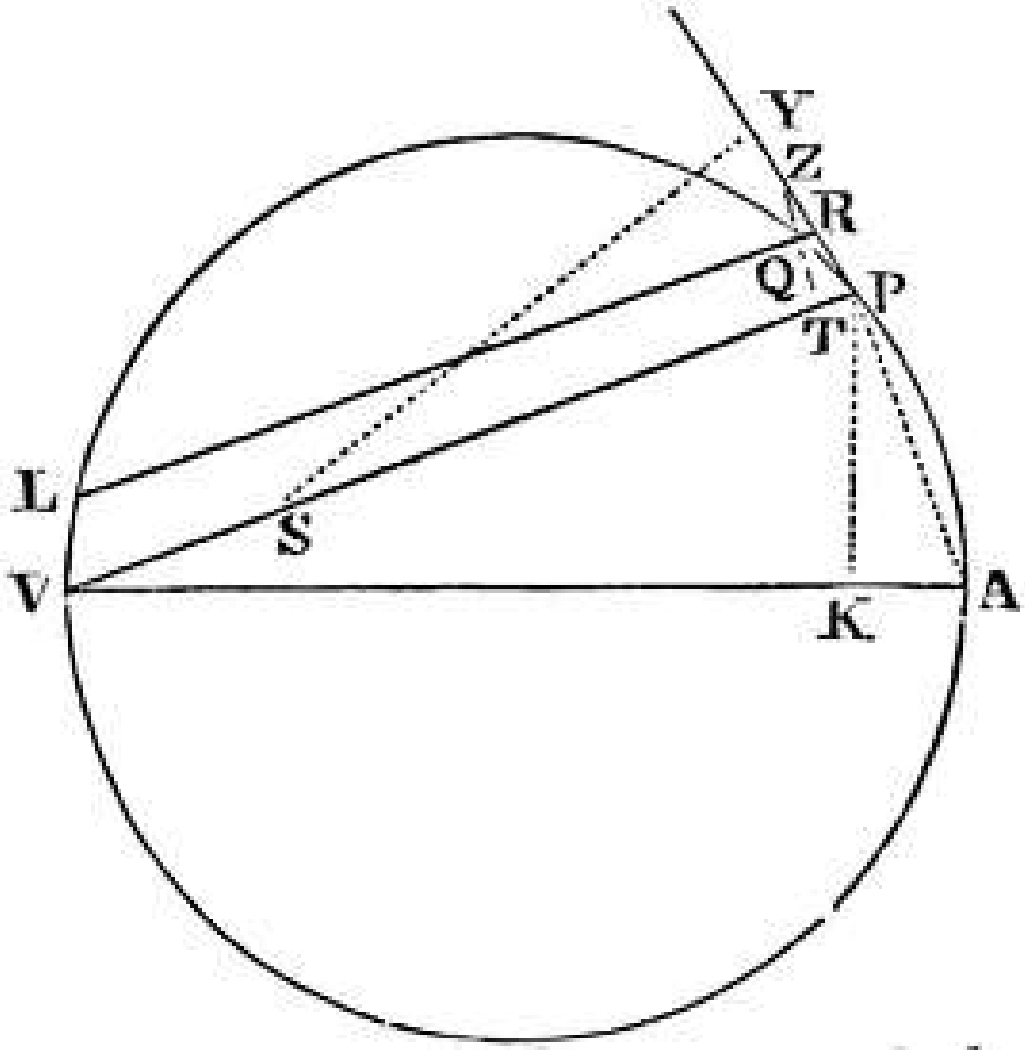
Cor. 3. If the orbit is either a circle, or touches or cuts a circle concentrically, that is, contains with a circle the least angle of contact or section, having the same curvature and the same radius of curvature at the point P; and if PV be a chord of this circle, drawn from the body through the centre of force; the centripetal force will be reciprocally as the solid. For PV is.

Cor. 4. The same things being supposed, the centripetal force is as the square of the velocity directly, and that chord inversely. For the velocity is reciprocally as the perpendicular SY, by Cor. 1. Prop. I.

Cor. 5. Hence if any curvilinear figure APQ is given, and therein a point S is also given, to which a centripetal force is perpetually directed, that law of centripetal force may be found, by which the body P will be continually drawn back from a rectilinear course, and being detained in the perimeter of that figure, will describe the same by a perpetual revolution. That is, we are to find, by computation, either the solid or the solid, reciprocally proportional to this force. Examples of this we shall give in the following Problems.

PROPOSITION VII. PROBLEM II.

If a body revolves in the circumference of a circle; it is proposed to find the law of centripetal force directed to any given point.



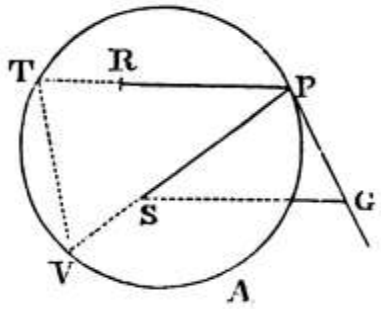
Let VQPA be the circumference of the circle; S the given point to which as to a centre the force tends; P the body moving in the circumference; Q the next place into which it is to move; and PRZ the tangent of the circle at the preceding place. Through the point S draw the chord PV, and the diameter VA of the circle: join AP, and draw QT perpendicular to SP, which produced, may meet the tangent PR in Z; and lastly, through the point Q, draw LR parallel to SP, meeting the circle in L, and the tangent PZ in R. And, because of the similar triangles ZQR, ZTP, VPA, we shall have RP^2, that is, QRL to QT^2 as AV^2 to PV^2. And therefore is equal to QT^2. Multiply those equals by, and the points P and Q coinciding, for RL write PV; then we shall have. And therefore (by Cor 1 and 5, Prop. VI.) the centripetal force is reciprocally as; that is (because AV^2 is given), reciprocally as the

square of the distance or altitude SP, and the cube of the chord PV conjunctly. Q.E.I.

The same otherwise.

On the tangent PR produced let fall the perpendicular SY; and (because of the similar triangles SYP, VPA), we shall have AV to PV as SP to SY, and therefore, and. And therefore (by Corol. 3 and 5, Prop. VI), the centripetal force is reciprocally as; that is (because AV is given), reciprocally as. Q.E.I.

Cor. 1. Hence if the given point S, to which the centripetal force always tends, is placed in the circumference of the circle, as at V, the centripetal force will be reciprocally as the quadrato-cube (or fifth power) of the altitude SP.



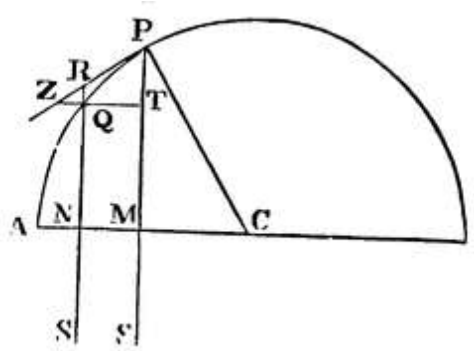
Cor. 2. The force by which the body P in the circle APTV revolves about the centre of force S is to the force by which the same body P may revolve in the same circle, and in the same periodic time, about any other centre of force R, as to the cube of the right line SG, which, from the first centre of force S is drawn parallel to the distance PR of the body from the second centre of force R, meeting the tangent PG of the orbit in G. For by the construction of this Proposition, the former force is to the latter as to; that is, as to; or (because of the similar triangles PSG, TPV) to SG^3.

Cor. 3. The force by which the body P in any orbit revolves about the centre of force S, is to the force by which the same body may revolve in the same orbit, and the same periodic time, about any other centre of force R, as the solid, contained under the distance of the body from the first centre of force S, and the square of its distance from the second centre of force R, to the cube of the right line SG, drawn from the first centre of the force S, parallel to the distance RP of the body from the second centre of force R,

meeting the tangent PG of the orbit in G. For the force in this orbit at any point P is the same as in a circle of the same curvature.

PROPOSITION VIII. PROBLEM III.

If a body moves in the semi-circumference PQA*; it is proposed to find the law of the centripetal force tending to a point* S*, so remote, that all the lines* PS, RS *drawn thereto, may be taken for parallels.*



From C, the centre of the semi-circle, let the semi-diameter CA he drawn, cutting the parallels at right angles in M and N, and join CP. Because of the similar triangles CPM, PZT, and RZQ, we shall have CP^2 to PM^2 as PR^2 to QT^2; and, from the nature of the circle, PR^2 is equal to the rectangle, or, the points P, Q, coinciding, to the rectangle. Therefore CP^2 is to PM^2 as to QT^2; and, and. And therefore (by Corol. 1 and 5; Prop. VI.), the centripetal force is reciprocally as; that is (neglecting the given ratio), reciprocally as PM^3. Q.E.I.

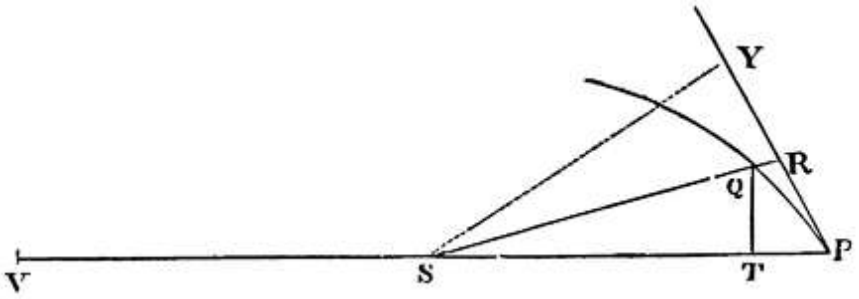
And the same thing is likewise easily inferred from the preceding Proposition.

SCHOLIUM.

And by a like reasoning, a body will be moved in an ellipsis, or even in an hyperbola, or parabola, by a centripetal force which is reciprocally ae the cube of the ordinate directed to an infinitely remote centre of force.

PROPOSITION IX. PROBLEM IV.

If a body revolves in a spiral PQS*, cutting all the radii* SP, SQ, *&c., in a given angle; it is proposed to find the law of the centripetal force tending to the centre of that spiral.*



Suppose the indefinitely small angle PSQ to be given; because, then, all the angles are given, the figure SPRQT will be given in specie. Therefore the ratio is also given, and is as QT, that is (because the figure is given in specie), as SP. But if the angle PSQ is any way changed, the right line QR, subtending the angle of contact QPR (by Lemma XI) will be changed in the duplicate ratio of PR or QT. Therefore the ratio remains the same as before, that is, as SP. And is as SP^3, and therefore (by Corol. 1 and 5, Prop. VI) the centripetal force is reciprocally as the cube of the distance SP. Q.E.I.

The same otherwise.

The perpendicular SY let fall upon the tangent, and the chord PV of the circle concentrically cutting the spiral, are in given ratios to the height SP; and therefore SP^3 is as SY^2 PV, that is (by Corol. 3 and 5, Prop. VI) reciprocally as the centripetal force.

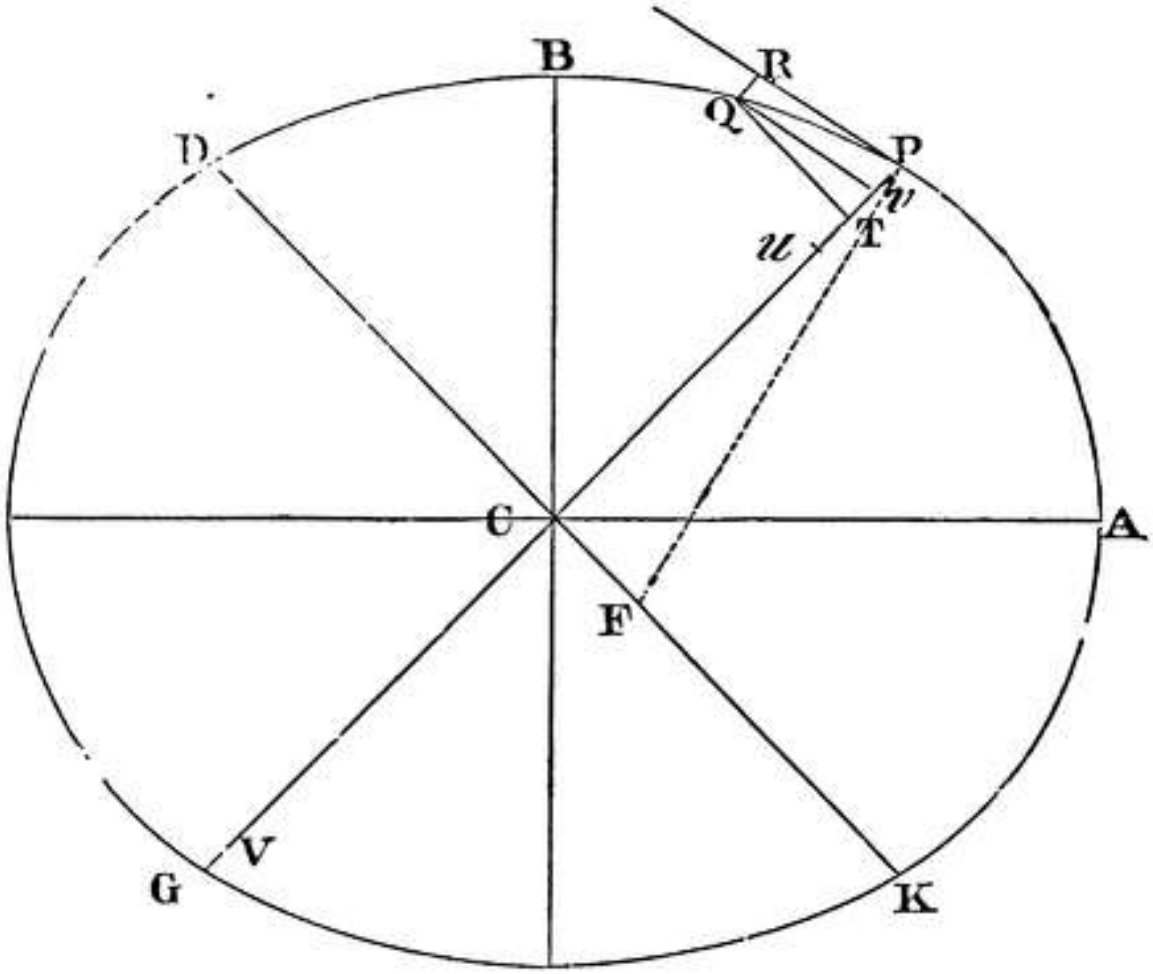
LEMMA XII.

All parallelograms circumscribed about any conjugate diameters of a given ellipsis or hyperbola are equal among themselves.

This is demonstrated by the writers on the conic sections.

PROPOSITION X. PROBLEM V.

If a body revolves in an ellipsis; it is proposed to find the law of the centripetal force tending to the centre of the ellipsis.



Suppose CA, CB to be semi-axes of the ellipsis; GP, DK, conjugate diameters; PF, QT perpendiculars to those diameters; Q*v* an ordinate to the diameter GP; and if the parallelogram Q*v*PR be completed, then (by the properties of the conic sections) the rectangle P*v*G will be to Q*v*^{2} as PC^2 to CD^2; and (because of the similar triangles Q*v*T, PCF), Q*v*^{2} to QT^2 as PC^2 to PF^2; and, by composition, the ratio of P*v*G to QT^2 is compounded of the ratio of PC^2 to CD^2, and of the ratio of PC^2 to PF^2, that is, *v*G to as PC^2 to. Put QR for P*v*, and (by Lem. XII) BC CA for CD PF; also (the points P and Q coinciding) 2PC for *v*G; and multiplying the extremes and means together, we shall have equal to. Therefore (by Cor. 5, Prop. VI), the centripetal force is reciprocally as; that is (because is given), reciprocally as; that is, directly as the distance PC. QEI.

The same otherwise.

In the right line PG on the other side of the point T, take the point *u* so that T*u* may be equal to T*v*; then take *u*V, such as shall be to *v*G as DC^2 to PC^2. And because Q*v*² is to P*v*G as DC^2 to PC^2 (by the conic sections), we shall have. Add the rectangle *u*P*v* to both sides, and the square of the chord of the arc PQ will be equal to the rectangle VP*v*; and therefore a circle which touches the conic section in P, and passes through the point Q, will pass also through the point V. Now let the points P and Q meet, and the ratio of *u*V to *v*G, which is the same with the ratio of DC^2 to PC^2, will become the ratio of PV to PG, or PV to 2PC; and therefore PV will be equal to. And therefore the force by which the body P revolves in the ellipsis will be reciprocally as (by Cor. 3, Prop VI); that is (because $2DC^2$ PF^2 is given) directly as PC. Q.E.I.

Cor. 1. And therefore the force is as the distance of the body from the centre of the ellipsis; and, *vice versa*, if the force is as the distance, the body will move in an ellipsis whose centre coincides with the centre of force, or perhaps in a circle into which the ellipsis may degenerate.

Cor. 2. And the periodic times of the revolutions made in all ellipses whatsoever about the same centre will be equal. For those times in similar ellipses will be equal (by Corol. 3 and 8, Prop. IV); but in ellipses that have their greater axis common, they are one to another as the whole areas of the ellipses directly, and the parts of the areas described in the same time inversely; that is, as the lesser axes directly, and the velocities of the bodies in their principal vertices inversely; that is, as those lesser axes directly, and the ordinates to the same point of the common axes inversely; and therefore (because of the equality of the direct and inverse ratios) in the ratio of equality.

SCHOLIUM.

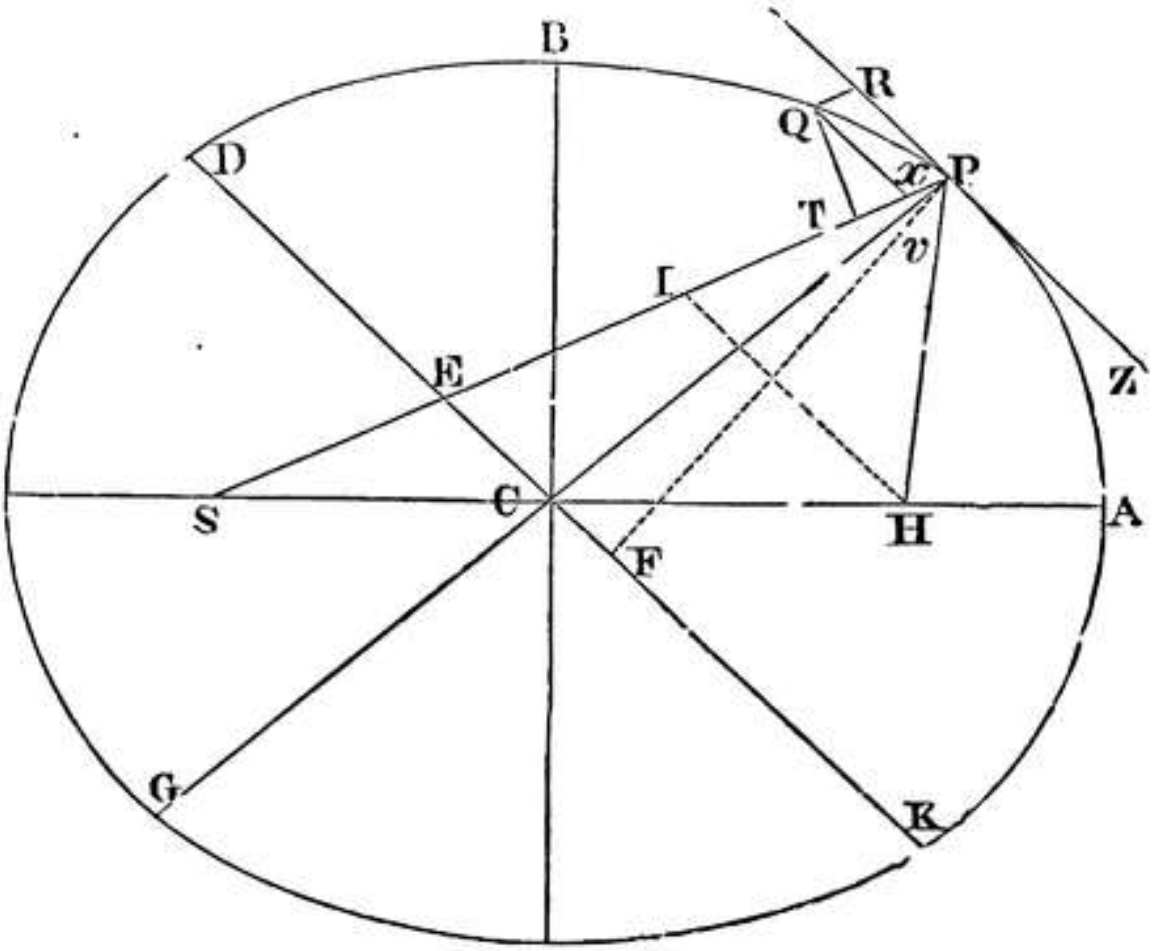
If the ellipsis, by having its centre removed to an infinite distance, de generates into a parabola, the body will move in this parabola; and the force, now tending to a centre infinitely remote, will become equable. Which is *Galileo's* theorem. And if the parabolic section of the cone (by changing the inclination of the cutting plane to the cone) degenerates into

an hyperbola, the body will move in the perimeter of this hyperbola, having its centripetal force changed into a centrifugal force. And in like manner as in the circle, or in the ellipsis, if the forces are directed to the centre of the figure placed in the abscissa, those forces by increasing or diminishing the ordinates in any given ratio; or even by changing the angle of the inclination of the ordinates to the abscissa, are always augmented or diminished in the ratio of the distances from the centre; provided the periodic times remain equal; so also in all figures whatsoever, if the ordinates are augmented or diminished in any given ratio, or their inclination is any way changed, the periodic time remaining the same, the forces directed to any centre placed in the abscissa are in the several ordinates augmented or diminished in the ratio of the distances from the centre.

Section III: Of the motion of bodies in eccentric conic sections

PROPOSITION XI. PROBLEM VI.

If a body revolves in an ellipsis; it is required to find the law of the centripetal force tending to the focus of the ellipsis.



Let S be the focus of the ellipsis. Draw SP cutting the diameter DK of the ellipsis in E, and the ordinate Q*v* in *x*; and complete the parallelogram Q*x*PR. It is evident that EP is equal to the greater semi-axis AC: for drawing HI from the other focus H of the ellipsis parallel to EC, because CS, CH are equal, ES, EI will be also equal; so that EP is the half sum of PS, PI, that is (because of the parallels HI, PR, and the equal angles IPR, HPZ), of PS,

PH, which taken together are equal to the whole axis 2AC. Draw QT perpendicular to SP, and putting L for the principal latus rectum of the ellipsis (or for), we shall have L QR to L P*v* as QR to P*v*, that is, as PE or AC to PC; and L P*v* to G*v*P as L to G*v*; and *Gv*P to Q*v*² as PC² to CD²; and by (Corol. 2, Lem. VII) the points Q and P coinciding, Q*v*² is to Q*x*² in the ratio of equality; and Q*x*² or Q*v*² is to QT² as EP² to PF², that is, as CA² to PF², or (by Lem. XII) as CD² to CB². And compounding all those ratios together, we shall have L QR to QT² as AC L PC² CD², or 2CB² PC² CD² to PC G*v* CD² CB², or as 2PC to G*v*. But the points Q and P coinciding, 2PC and G*v* are equal. And therefore the quantities L QR and QT², proportional to these, will be also equal. Let those equals be drawn into, and L SP² will become equal to. And therefore (by Corol. 1 and 5, Prop. VI) the centripetal force is reciprocally as L SP², that is, reciprocally in the duplicate ratio of the distance SP. Q.E.I.

The same otherwise.

Since the force tending to the centre of the ellipsis, by which the body P may revolve in that ellipsis, is (by Corol. 1, Prop. X.) as the distance CP of the body from the centre C of the ellipsis; let CE be drawn parallel to the tangent PR of the ellipsis; and the force by which the same body P may revolve about any other point's of the ellipsis, if CE and PS intersect in E, will be as (by Cor. 3, Prop. VII.); that is, if the point S is the focus of the ellipsis, and therefore PE be given as SP² reciprocally. Q.E.I.

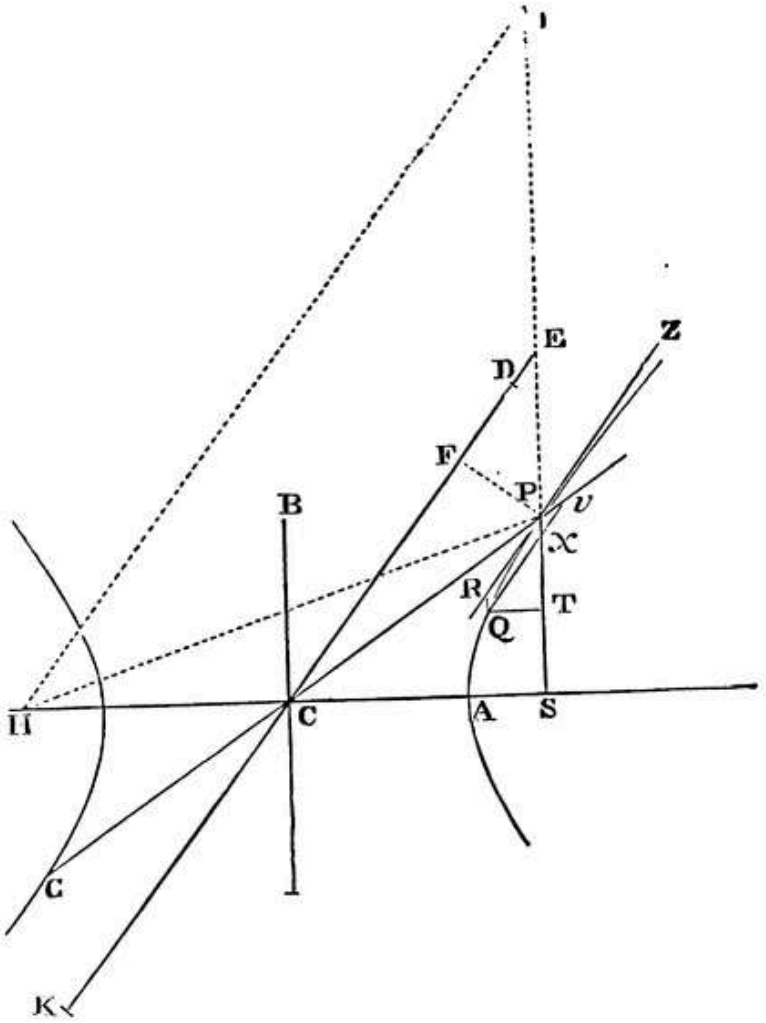
With the same brevity with which we reduced the fifth Problem to the parabola, and hyperbola, we might do the like here: but because of the dignity of the Problem and its use in what follows. I shall confirm the other cases by particular demonstrations.

PROPOSITION XII. PROBLEM VII.

Suppose a body to move in an hyperbola; it is required to find the law of the centripetal force tending to the focus of that figure.

Let CA, CB be the semi-axes of the hyperbola; PG, KD other conjugate diameters; PF a perpendicular to the diameter KD; and Q*v* an ordinate to the

diameter GP. Draw SP cutting the diameter DK in E, and the ordinate Q*v* in *x*, and complete the parallelogram QRP*x*. It is evident that EP is equal to the semi-transverse axis AC; for drawing HI, from the other focus H of the hyperbola, parallel to EC, because CS, CH are equal, ES, EI will be also equal; so that EP is the half difference



of PS, PI; that is (because of the parallels IH, PR, and the equal angles IPR, HPZ), of PS, PH, the difference of which is equal to the whole axis 2AC. Draw QT perpendicular to SP; and putting L for the principal latus rectum of the hyperbola (that is, for, we shall have L QR to L P*v* as QR to P*v*, or P*x* to P*v*, that is (because of the similar triangles P*xv*, PEC), as PE to PC, or AC to PC. And L P*v* will be to G*v* P*v* as L to G*v*; and (by the properties of the conic sections) the rectangle G*v*P is to Q*v*^{2} as PC^2 to CD^2; and by (Cor. 2, Lem. VII.), Q*v*^{2} to Q*x*^{2} the points Q and P coinciding, becomes a ratio of equality; and Q*x*^{2} or

Qv^2 is to QT^2 as EP^2 to PF^2, that is, as CA^2 to PF^2, or (by Lem. XII.) as CD^2 to CB^2: and, compounding all those ratios together, we shall have L QR to QT^2 as AC L PC^2 CD^2, or $2CB^2$ PC^2 CD^2 to PC G*v* CD^2 CB^2, or as 2PC to G*v*. But the points P and Q coinciding, 2PC and G*v* are equal. And therefore the quantities L QR and QT^2, proportional to them, will be also equal. Let those equals be drawn into, and we shall have L SP^2 equal to. And therefore (by Cor. I and 5, Prop. VI.) the centripetal force is reciprocally as L SP^2, that is, reciprocally in the duplicate ratio of the distance SP. Q.E.I.

The same otherwise.

Find out the force tending from the centre C of the hyperbola. This will be proportional to the distance CP. But from thence (by Cor. 3, Prop. VII.) the force tending to the focus S will be as, that is, because PE is given reciprocally as SP^2. Q.E.I.

And the same way may it be demonstrated, that the body having its centripetal changed into a centrifugal force, will move in the conjugate hyperbola.

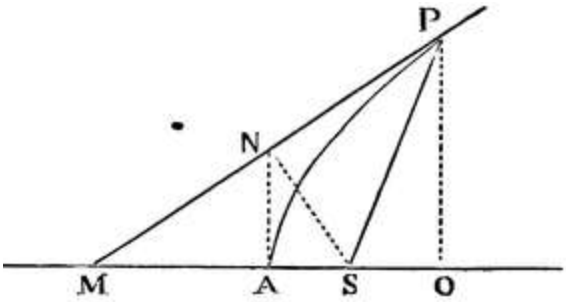
LEMMA XIII.

The latus rectum of a parabola belonging to any vertex is quadruple the distance of that vertex from the focus of the figure.

This is demonstrated by the writers on the conic sections.

LEMMA XIV.

The perpendicular, let fall from the focus of a parabola on its tangent, is a mean proportional between the distances of the focus from the point of contact, and from the principal vertex of the figure.



For, let AP be the parabola, S its focus, A its principal vertex, P the point of contact, PO an ordinate to the principal diameter, PM the tangent meeting the principal diameter in M, and SN the perpendicular from the focus on the tangent: join AN, and because of the equal lines MS and SP, MN and NP, MA and AO, the right lines AN, OP, will be parallel; and thence the triangle SAN will be right-angled at A, and similar to the equal triangles SNM, SNP; therefore PS is to SN as SN to SA. Q.E.D.

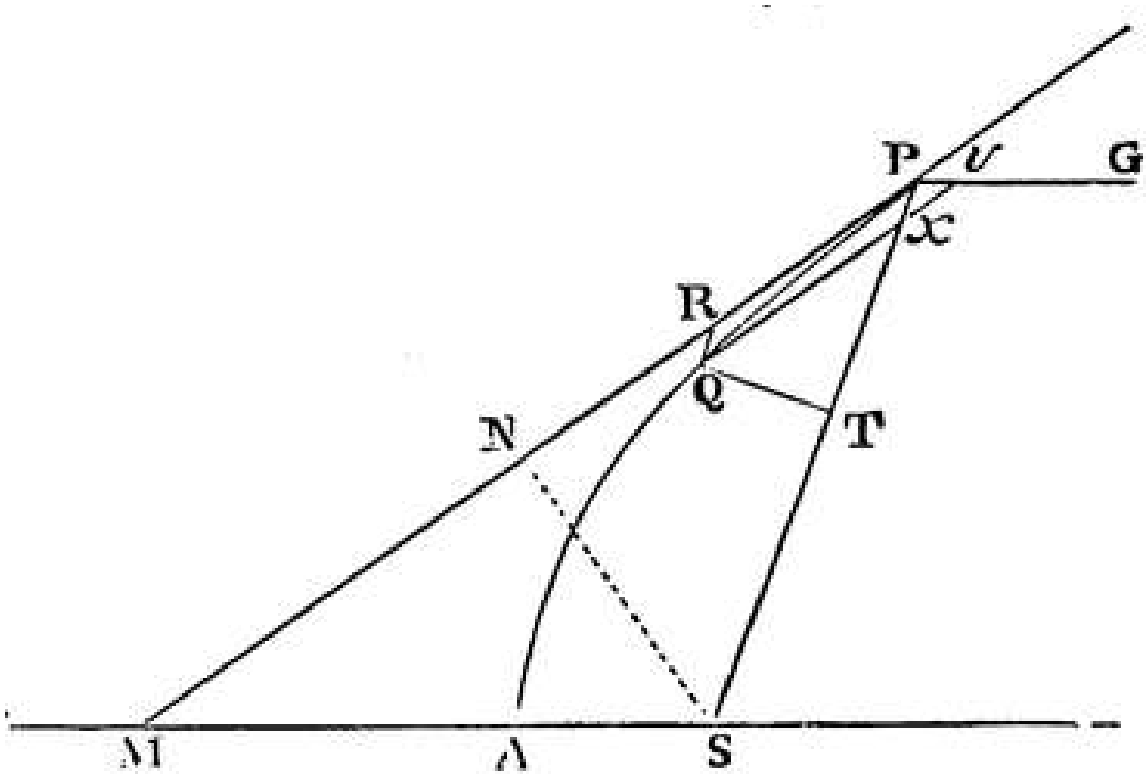
Cor. 1. PS^2 is to SN^2 as PS to SA.

Cor. 2. And because SA is given, SN^2 will be as PS.

Cor. 3. And the concourse of any tangent PM, with the right line SN. drawn from the focus perpendicular on the tangent, falls in the right line AN that touches the parabola in the principal vertex.

PROPOSITION XIII. PROBLEM VIII.

If a body moves in the perimeter of a parabola; it is required to find the law of the centripetal force tending to the focus of that figure.



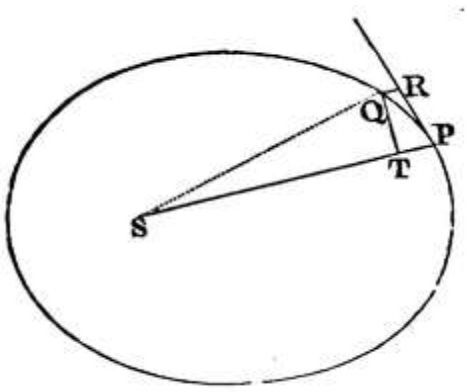
Retaining the construction of the preceding Lemma, let P be the body in the perimeter of the parabola; and from the place Q, into which it is next to succeed, draw QR parallel and QT perpendicular to SP, as also Q*v* parallel to the tangent, and meeting the diameter PG in *v*, and the distance SP in *x*. Now, because of the similar triangles P*xv*, SPM, and of the equal sides SP, SM of the one, the sides P*x* or QR and P*v* of the other will be also equal. But (by the conic sections) the square of the ordinate Q*v* is equal to the rectangle under the latus rectum and the segment P*v* of the diameter; that is (by Lem. XIII.), to the rectangle 4PS P*v*, or 4PS QR; and the points P and Q coinciding, the ratio of Q*v* to Q*x* (by Cor. 2, Lem. VII.,) becomes a ratio of equality. And therefore Qx^2, in this case, becomes equal to the rectangle 4PS QR. But (because of the similar triangles Q*x*T, SPN), Qx^2 is to QT^2 as PS^2 to SN^2, that is (by Cor. 1, Lem. XIV.), as PS to SA; that is, as 4PS QR to 4SA QR, and therefore (by Prop. IX. Lib. V., Elem.) QT^2 and 4SA QR are equal. Multiply these equals by, and will become equal to SP^2 4SA: and therefore (by Cor. 1 and 5, Prop. VI.), the centripetal force is reciprocally as SP^2 4SA; that is, because 4SA is given; reciprocally in the duplicate ratio of the distance SP. Q.E.I.

Cor. 1. From the three last Propositions it follows, that if any body P goes from the place P with any velocity in the direction of any right line PR, and at the same time is urged by the action of a centripetal force that is reciprocally proportional to the square of the distance of the places from the centre, the body will move in one of the conic sections, having its focus in the centre of force; and the contrary. For the focus, the point of contact, and the position of the tangent, being given, a conic section may be described, which at that point shall have a given curvature. But the curvature is given from the centripetal force and velocity of the body being given; and two orbits, mutually touching one the other, cannot be described by the same centripetal force and the same velocity.

Cor. 2. If the velocity with which the body goes from its place P is such, that in any infinitely small moment of time the lineola PR may be thereby described; and the centripetal force such as in the same time to move the same body through the space QR; the body will move in one of the conic sections, whose principal latus rectum is the quantity in its ultimate state, when the lineolae PR, QR are diminished *in infinitum*. In these Corollaries I consider the circle as an ellipsis; and I except the case where the body descends to the centre in a right line.

PROPOSITION XIV. THEOREM VI.

If several bodies revolve about one common centre, and the centripetal force is reciprocally in the duplicate ratio of the distance of places from the centre; I say, that the principal latera recta of their orbits are in the duplicate ratio of the areas, which the bodies by radii drawn to the centre describe in the same time.



For (by Cor. 2, Prop. XIII) the latus rectum L is equal to the quantity in its ultimate state when the points P and Q coincide. But the lineola QR in a given time is as the generating centripetal force; that is (by supposition), reciprocally as SP^2 . And therefore is as QT^2 SP^2; that is, the latus rectum L is in the duplicate ratio of the area QT SP. Q.E.D.

Cor. Hence the whole area of the ellipsis, and the rectangle under the axes, which is proportional to it, is in the ratio compounded of the subduplicate ratio of the latus rectum, and the ratio of the periodic time. For the whole area is as the area QT SP, described in a given time, multiplied by the periodic time.

PROPOSITION XV. THEOREM VII.

The same things being supposed, I say, that the periodic times in ellipses are in the sesquiplicate ratio of their greater axes.

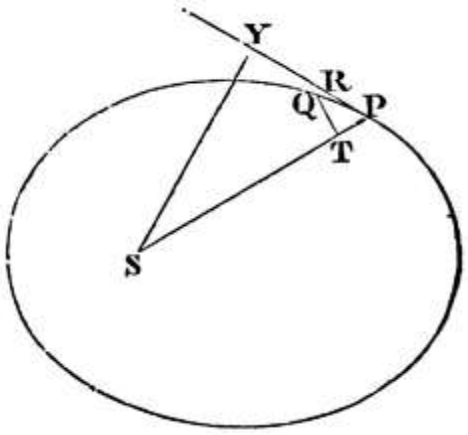
For the lesser axis is a mean proportional between the greater axis and the latus rectum; and, therefore, the rectangle under the axes is in the ratio compounded of the subduplicate ratio of the latus rectum and the sesquiplicate ratio of the greater axis. But this rectangle (by Cor. 3. Prop. XIV) is in a ratio compounded of the subduplicate ratio of the latus rectum, and the ratio of the periodic time. Subduct from both sides the subduplicate ratio of the latus rectum, and there will remain the sesquiplicate ratio of the greater axis, equal to the ratio of the periodic time. Q.E.D.

Cor. Therefore the periodic times in ellipses are the same as in circles whose diameters are equal to the greater axes of the ellipses.

PROPOSITION XVI. THEOREM VIII.

The same things being supposed, and right lines being drawn to the bodies that shall touch the orbits, and perpendiculars being let fall on those tangents from the common focus; I say, that the velocities of the bodies are in a ratio compounded of the ratio of the perpendiculars inversely, and the subduplicate ratio of the principal latera recta directly.

From the focus S draw SY perpendicular to the tangent PR, and the velocity of the body P will be reciprocally in the subduplicate ratio of the quantity. For that velocity is as the infinitely small arc PQ described



in a given moment of time, that is (by Lem. VII), as the tangent PR; that is (because of the proportionals PR to QT, and SP to SY), as; or as SY reciprocally, and SP QT directly; but SP QT is as the area described in the given time, that is (by Prop. XIV), in the subduplicate ratio of the latus rectum. Q.E.D.

Cor. 1. The principal latera recta are in a ratio compounded of the duplicate ratio of the perpendiculars and the duplicate ratio of the velocities.

Cor. 2. The velocities of bodies, in their greatest and least distances from the common focus, are in the ratio compounded of the ratio of the distances inversely, and the subduplicate ratio of the principal latera recta directly. For those perpendiculars are now the distances.

Cor. 3. And therefore the velocity in a conic section, at its greatest or least distance from the focus, is to the velocity in a circle, at the same distance from the centre, in the subduplicate ratio of the principal latus rectum to the double of that distance.

Cor. 4. The velocities of the bodies revolving in ellipses, at their mean distances from the common focus, are the same as those of bodies revolving in circles, at the same distances; that is (by Cor. 6, Prop. IV), reciprocally in the subduplicate ratio of the distances. For the perpendiculars are now the lesser semi-axes, and these are as mean proportionals between the distances and the latera recta. Let this ratio inversely be compounded with the subduplicate ratio of the latera recta directly, and we shall have the subduplicate ratio of the distance inversely.

Cor. 5. In the same figure, or even in different figures, whose principal latera recta are equal, the velocity of a body is reciprocally as the perpendicular let fall from the focus on the tangent.

Cor. 6. In a parabola, the velocity is reciprocally in the subduplicate ratio of the distance of the body from the focus of the figure; it is more variable in the ellipsis, and less in the hyperbola, than according to this ratio. For (by Cor. 2, Lem. XIV) the perpendicular let fall from the focus on the tangent of a parabola is in the subduplicate ratio of the distance. In the hyperbola the perpendicular is less variable; in the ellipsis more.

Cor. 7. In a parabola, the velocity of a body at any distance from the focus is to the velocity of a body revolving in a circle, at the same distance from the centre, in the subduplicate ratio of the number 2 to 1; in the ellipsis it is less, and in the hyperbola greater, than according to this ratio, (by Cor. 2 of this Prop.) the velocity at the vertex of a parabola is in this ratio, and (by Cor. 6 of this Prop. and Prop. IV) the same proportion holds in all distances. And hence, also, in a parabola, the velocity is everywhere equal to the velocity of a body revolving in a circle at half the distance; in the ellipsis it is less, and in the hyperbola greater.

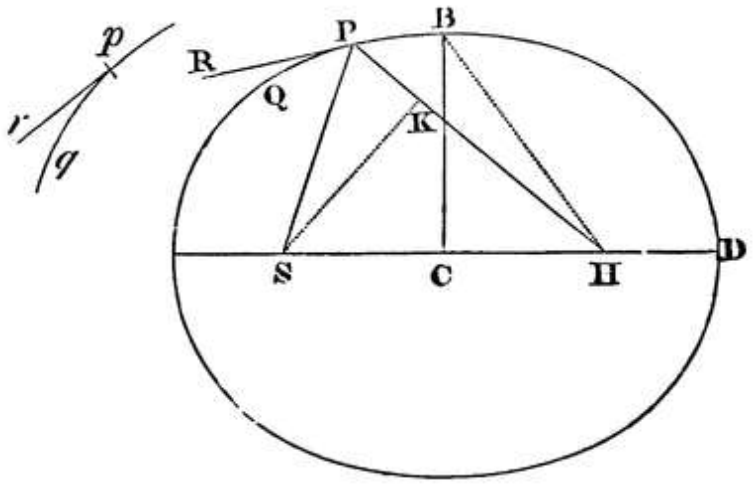
Cor. 8. The velocity of a body revolving in any conic section is to the velocity of a body revolving in a circle, at the distance of half the principal latus rectum of the section, as that distance to the perpendicular let fall from the focus on the tangent of the section. This appears from Cor. 5.

Cor. 9. Wherefore since (by Cor. 6, Prop. IV), the velocity of a body revolving in this circle is to the velocity of another body revolving in any

other circle reciprocally in the subduplicate ratio of the distances; therefore, *ex aequo*, the velocity of a body revolving in a conic section will be to the velocity of a body revolving in a circle at the same distance as a mean proportional between that common distance, and half the principal latus rectum of the section, to the perpendicular let fall from the common focus upon the tangent of the section.

PROPOSITION XVII. PROBLEM IX.

Supposing the centripetal force to be reciprocally proportional to the squares of the distances of places from the centre, and that the absolute quantity of that force is known; it is required to determine the line which a body will describe that is let go from a given place with a given velocity in, the direction of a given right line.



Let the centripetal force tending to the point S be such as will make the body *p* revolve in any given orbit *pq*; and suppose the velocity of this body in the place *p* is known. Then from the place P suppose the body P to be let with a given velocity in the direction of the line PR; but by virtue of a centripetal force to be immediately turned aside from that right line into the conic section PQ. This, the right line PR will therefore touch in P. Suppose likewise that the right line *pr* touches the orbit *pq* in *p*, and if from S you suppose perpendiculars let fall on those tangents, the principal latus rectum of the conic section (by Cor. 1, Prop. XVI) will be to the principal latus

rectum of that orbit in a ratio compounded of the duplicate ratio of the perpendiculars, and the duplicate ratio of the velocities; and is therefore given. Let this latus rectum be L; the focus S of the conic section is also given. Let the angle RPH be the complement of the angle RPS to two right; and the line PH, in which the other focus H is placed, is given by position. Let fall SK perpendicular on PH, and erect the conjugate semi-axis BC; this done, we shall have $SP^2 - 2KPH + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 = -L = SP^2 + 2SPH + PH^2 - L$. Add on both sides $2KPH - SP^2 - PH^2 + L$, and we shall have $L = 2SPH + 2KPH$, or SP + PH to PH, as 2SP + 2KP to L. Whence PH is given both in length and position. That is, if the velocity of the body in P is such that the latus rectum L is less than 2SP + 2KP, PH will lie on the same side of the tangent PR with the line SP; and therefore the figure will be an ellipsis, which from the given foci S, H, and the principal axis SP + PH, is given also. But if the velocity of the body is so great, that the latus rectum L becomes equal to 2SP + 2KP, the length PH will be infinite; and therefore, the figure will be a parabola, which has its axis SH parallel to the line PK, and is thence given. But if the body goes from its place P with a yet greater velocity, the length PH is to be taken on the other side the tangent; and so the tangent passing between the foci, the figure will be an hyperbola having its principal axis equal to the difference of the lines SP and PH, and thence is given. For if the body, in these cases, revolves in a conic section so found, it is demonstrated in Prop. XI, XII, and XIII, that the centripetal force will be reciprocally as the square of the distance of the body from the centre of force S; and therefore we have rightly determined the line PQ, which a body let go from a given place P with a given velocity, and in the direction of the right line PR given by position, would describe with such a force. Q.E.F.

Cor. 1. Hence in every conic section, from the principal vertex D, the latus rectum L, and the focus S given, the other focus H is given, by taking DH to DS as the latus rectum to the difference between the latus rectum and 4DS. For the proportion, SP + PH to PH as 2SP + 2KP to L, becomes, in the case of this Corollary, DS + DH to DH as 4DS to L, and by division DS to DH as 4DS - L to L.

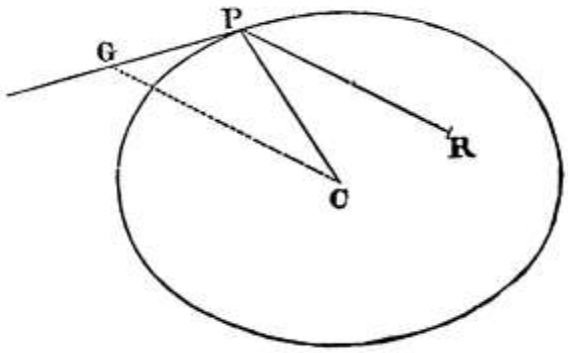
Cor. 2. Whence if the velocity of a body in the principal vertex D is given, the orbit may be readily found; to wit, by taking its latus rectum to twice the distance DS, in the duplicate ratio of this given velocity to the

velocity of a body revolving in a circle at the distance DS (by Cor. 3, Prop. XVI.), and then taking DH to DS as the latus rectum to the difference between the latus rectum and 4DS.

Cor. 3. Hence also if a body move in any conic section, and is forced out of its orbit by any impulse, you may discover the orbit in which it will afterwards pursue its course. For by compounding the proper motion of the body with that motion, which the impulse alone would generate, you will have the motion with which the body will go off from a given place of impulse in the direction of a right line given in position.

Cor. 4. And if that body is continually disturbed by the action of some foreign force, we may nearly know its course, by collecting the changes which that force introduces in some points, and estimating the continual changes it will undergo in the intermediate places, from the analogy that appears in the progress of the series.

SCHOLIUM.

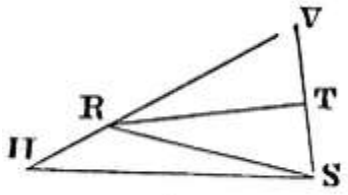


If a body P, by means of a centripetal force tending to any given point R, move in the perimeter of any given conic section whose centre is C; and the law of the centripetal force is required: draw CG parallel to the radius RP, and meeting the tangent PG of the orbit in G; and the force required (by Cor. 1, and Schol. Prop. X., and Cor. 3, Prop. VII.) will be as.

Section IV: Of the finding of elliptic, parabolic, and hyperbolic orbits, from the focus given

LEMMA XV.

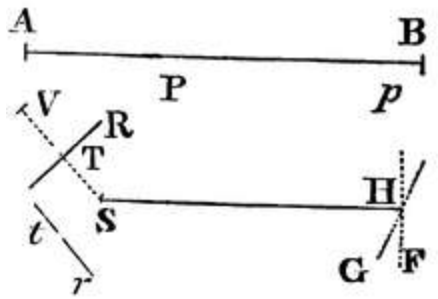
If from the two foci S, H*, of any ellipsis or hyberbola, we draw to any third point* V *the right lines* SV, HV, *whereof one* HV *is equal to the principal axis of the figure, that is, to the axis in which the foci are situated, the other,* SV*, is bisected in* T *by the perpendicular* TR *let fall upon it; that perpendicular* TR *will somewhere touch the conic section: and,* vice versa*, if it does touch it,* HV *will be equal to the principal axis of the figure.*



For, let the perpendicular TR cut the right line HV, produced, if need be, in R; and join SR. Because TS, TV are equal, therefore the right lines SR, VR, as well as the angles TRS, TRV, will be also equal. Whence the point R will be in the conic section, and the perpendicular TR, will touch the same; and the contrary. Q.E.D.

PROPOSITION XVIII. PROBLEM X.

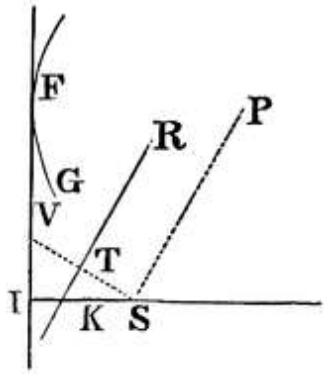
From a focus and the principal axes given, to describe elliptic and hyperbolic trajectories, which shall pass through given points, and touch right lines given by position.



Let S be the common focus of the figures; AB the length of the principal axis of any trajectory; P a point through which the trajectory should pass; and TR a right line which it should touch. About the centre P, with the interval AB - SP, if the orbit is an ellipsis, or AB + SP, if the orbit is an hyperbola, describe the circle HG. On the tangent TR let fall the perpendicular ST, and produce the same to V, so that TV may be equal to ST; and about V as a centre with the interval AB describe the circle FH. In this manner, whether two points P, *p*, are given, or two tangents TR, *tr*, or a point P and a tangent TR, we are to describe two circles. Let H be their common intersection, and from the foci S, H, with the given axis describe the trajectory: I say, the thing is done. For (be cause PH + SP in the ellipsis, and PH - SP in the hyperbola, is equal to the axis) the described trajectory will pass through the point P, and (by the preceding Lemma) will touch the right line TR. And by the same argument it will either pass through the two points P, *p*, or touch the two right lines TR, *tr*. Q.E.F.

PROPOSITION XIX. PROBLEM XI.

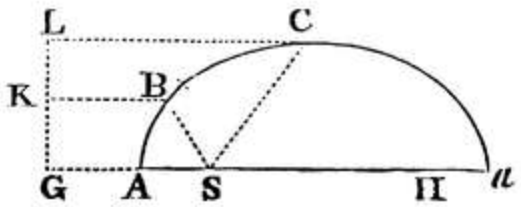
About a given focus, to describe a parabolic trajectory, which shall pass through given points, and touch right lines given by position.



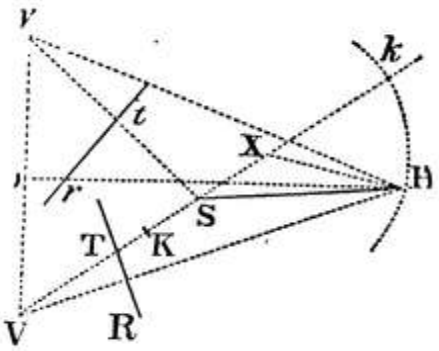
Let S be the focus, P a point, and TR a tangent of the trajectory to be described. About P as a centre, with the interval PS, describe the circle FG. From the focus let fall ST perpendicular on the tangent, and produce the same to V, so as TV may be equal to ST. After the same manner another circle *fg* is to be described, if another point *p* is given; or another point *v* is to be found, if another tangent *tr* is given; then draw the right line IF, which shall touch the two circles FG, *fg*, if two points P, *p* are given; or pass through the two points V, *v*, if two tangents TR, *tr*, are given: or touch the circle FG, and pass through the point V, if the point P and the tangent TR are given. On FI let fall the perpendicular SI, and bisect the same in K; and with the axis SK and principal vertex K describe a parabola: I say the thing is done. For this parabola (because SK is equal to IK, and SP to FP) will pass through the point P; and (by Cor. 3, Lem. XIV) because ST is equal to TV, and STR a right angle, it will touch the right line TR. Q.E.F.

PROPOSITION XX. PROBLEM XII.

About a given focus to describe any trajectory given in specie which shall pass through given points, and touch right lines given by position.

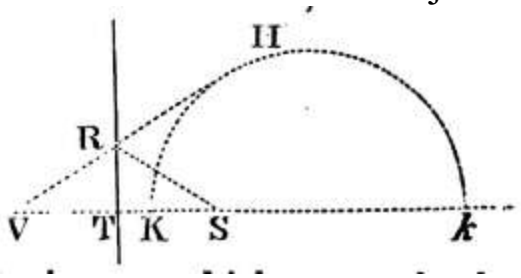


Case 1. About the focus S it is required to describe a trajectory ABC, passing through two points B, C. Because the trajectory is given in specie, the ratio of the principal axis to the distance of the foci will be given. In that ratio take KB to BS, and LC to CS. About the centres B, C, with the intervals BK, CL, describe two circles; and on the right line KL, that touches the same in K and L, let fall the perpendicular SG; which cut in A and *a*, so that GA may be to AS, and G*a* to *a*S, as KB to BS; and with the axis A*a*, and vertices A, *a*, describe a trajectory: I say the thing is done. For let H be the other focus of the described figure, and seeing GA is to AS as G*a* to *a*S, then by division we shall have G*a* - GA, or A*a* to *a*S - AS, or SH in the same ratio, and therefore in the ratio which the principal axis of the figure to be described has to the distance of its foci; and therefore the described figure is of the same species with the figure which was to be described. And since KB to BS, and LC to CS, are in the same ratio, this figure will pass through the points B, C, as is manifest from the conic sections.

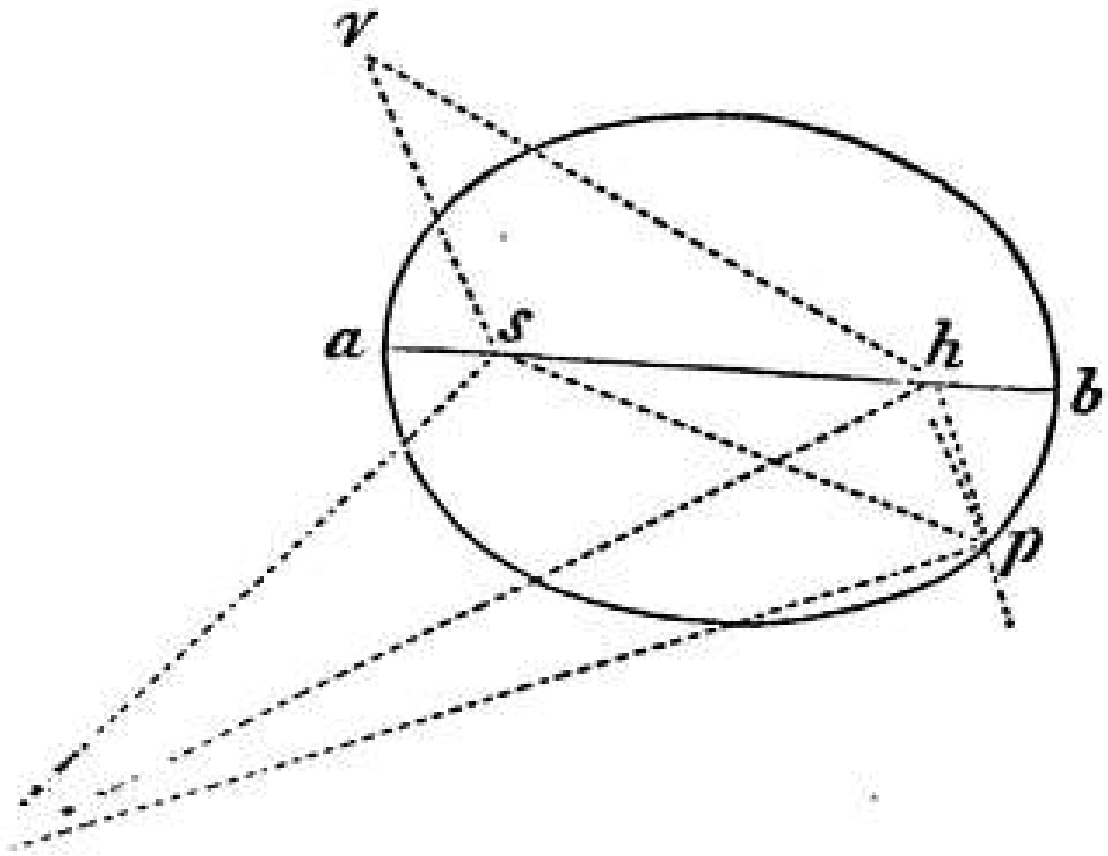


Case 2. About the focus S it is required to describe a trajectory which shall somewhere touch two right lines TR, *tr*. From the focus on those tangents let fall the perpendiculars ST, S*t*, which produce to V, *v*, so that TV, *tv* may be equal to TS, *t*S. Bisect V*v* in O, and erect the indefinite perpendicular OH, and cut the right line VS infinitely produced in K and *k*, so that VK be to KS, and V*k* to *k*S, as the principal axis of the trajectory to be described is to the distance of its foci. On the diameter K*k* describe a circle cutting OH in H; and with the foci S, H, and principal axis equal to VH, describe a trajectory: I say, the thing is done. For bisecting K*k* in X, and joining HX, HS, HV, H*v*, because VK is to KS as V*k* to *k*S; and by composition, as VK + V*k* to KS + *k*S; and by division, as V*k* - VK to *k*S - KS, that is, as 2VX to 2KX, and 2KX to 2SX, and therefore as VX to HX

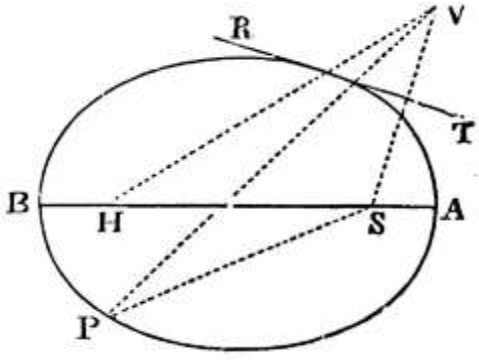
and HX to SX, the triangles VXH, HXS will be similar; therefore VH will be to SH as VX to XH; and therefore as VK to KS. Wherefore VH, the principal axis of the described trajectory, has the same ratio to SH, the distance of the foci, as the principal axis of the trajectory which was to be described has to the distance of its foci; and is therefore of the same species. And seeing VH, *v*H are equal to the principal axis, and VS, *v*S are perpendicularly bisected by the right lines TR, *tr*, it is evident (by Lem. XV) that those right lines touch the described trajectory. Q.E.F.



Case. 3. About the focus S it is required to describe a trajectory, which shall touch a right line TR in a given Point R. On the right line TR let fall the perpendicular ST, which produce to V, so that TV may be equal to ST; join VR, and cut the right line VS indefinitely produced in K and *k*, so that VK may be to SK, and V*k* to S*k*, as the principal axis of the ellipsis to be described to the distance of its foci; and on the diameter K*k* describing a circle, cut the right line VR produced in H; then with the foci S, H, and principal axis equal to VH, describe a trajectory: I say, the thing is done. For VH is to SH as VK to SK, and therefore as the principal axis of the trajectory which was to be described to the distance of its foci (as appears from what we have demonstrated in Case 2); and therefore the described trajectory is of the same species with that which was to be described; but that the right line TR, by which the angle VRS is bisected, touches the trajectory in the point R, is certain from the properties of the conic sections. Q.E.F.



Case 4. About the focus S it is required to describe a trajectory APB that shall touch a right line TR, and pass through any given point P without the tangent, and shall be similar to the figure *apb*, described with the principal axis *ab*, and foci *s, h.* On the tangent TR let fall the perpendicular ST, which produce to V, so that TV may be equal to ST; and making the angles *hsq, shq*, equal to the angles VSP, SVP, about *q* as a centre, and with an interval which shall be to *ab* as SP to VS, describe a circle cutting the figure *apb* in

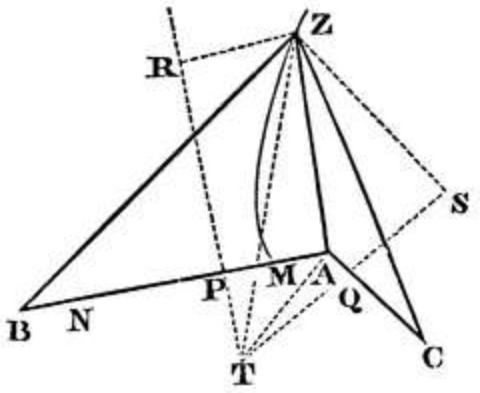


p: join *sp*, and draw SH such that it may be to *sh* as SP is to *sp*, and may make the angle PSH equal to the angle *psh*, and the angle VSH equal to the angle *psq*. Then with the foci S, H, and principal

axis AB, equal to the distance VH, describe a conic section: I say, the thing is done; for if *sv* is drawn so that it shall be to *sp* as *sh* is to *sq*, and shall make the angle *vsp* equal to the angle *hsq*, and the angle *vsh* equal to the angle *psq*, the triangles *svh, spq*, will be similar, and therefore *vh* will be to *pq* as *sh* is to *sq*; that is (because of the similar triangles VSP, *hsq*), as VS is to SP, or as *ab* to *pq*. Wherefore *vh* and *ab* are equal. But, because of the similar triangles VSH, *vsh*, VH is to SH as *vh* to *sh*; that is, the axis of the conic section now described is to the distance of its foci as the axis *ab* to the distance of the foci *sh*; and therefore the figure now described is similar to the figure *aph*. But, because the triangle PSH is similar to the triangle *psh*, this figure passes through the point P; and because VH is equal to its axis, and VS is perpendicularly bisected by the right line TR, the said figure touches the right line TR. Q.E.F

LEMMA XVI.

From three given points to draw to a fourth point that is not given three right lines whose differences shall be either given, or none at all.



Case 1. Let the given points be A, B, C, and Z the fourth point which we are to find; because of the given difference of the lines AZ, BZ, the locus of the point Z will be an hyperbola whose foci are A and B, and whose principal axis is the given difference. Let that axis be MN. Taking PM to MA as MN is to AB, erect PR perpendicular to AB, and let fall ZR perpendicular to PR; then from the nature of the hyperbola, ZR will be to AZ as MN is to AB. And by the like argument, the locus of the point Z will

be another hyperbola, whose foci are A, C, and whose principal axis is the difference between AZ and CZ; and QS a perpendicular on AC may be drawn, to which (QS) if from any point Z of this hyperbola a perpendicular ZS is let fall (this ZS), shall be to AZ as the difference between AZ and CZ is to AC. Wherefore the ratios of ZR and ZS to AZ are given, and consequently the ratio of ZR to ZS one to the other; and therefore if the right lines RP, SQ, meet in T, and TZ and TA are drawn, the figure TRZS will be given in specie, and the right line TZ, in which the point Z is somewhere placed, will be given in position. There will be given also the right line TA, and the angle ATZ; and because the ratios of AZ and TZ to ZS are given, their ratio to each other is given also; and thence will be given likewise the triangle ATZ, whose vertex is the point Z. Q.E.I.

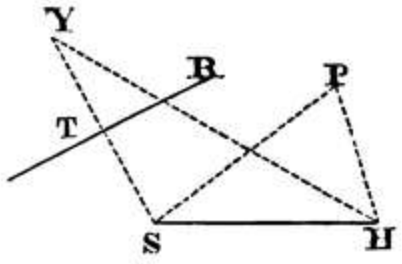
Case 2. If two of the three lines, for example AZ and BZ, are equal, draw the right line TZ so as to bisect the right line AB; then find the triangle ATZ as above. Q.E.I.

Case 3. If all the three are equal, the point Z will be placed in the centre of a circle that passes through the points A, B, C. Q.E.I.

This problematic Lemma is likewise solved in Apollonius's Book of Tactions restored by Vieta.

PROPOSITION XXI. PROBLEM XIII.

About a given focus to describe a trajectory that shall pass through given points and touch right lines given by position.

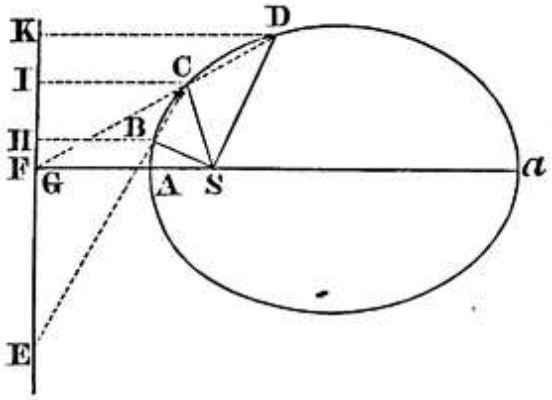


Let the focus S, the point P, and the tangent TR be given, and suppose that the other focus H is to be found. On the tangent let fall the perpendicular ST, which produce to Y, so that TY may be equal to ST, and

YH will be equal to the principal axis. Join SP, HP, and SP will be the difference between HP and the principal axis. After this manner, if more tangents TR are given, or more points P, we shall always determine as many lines YH, or PH, drawn from the said points Y or P, to the focus H, which either shall be equal to the axes, or differ from the axes by given lengths SP; and therefore which shall either be equal among themselves, or shall have given differences; from whence (by the preceding Lemma), that other focus H is given. But having the foci and the length of the axis (which is either YH, or, if the trajectory be an ellipsis, PH + SP; or PH - SP, if it be an hyperbola), the trajectory is given. Q.E.I.

SCHOLIUM.

When the trajectory is an hyperbola, I do not comprehend its conjugate hyperbola under the name of this trajectory. For a body going on with a continued motion can never pass out of one hyperbola into its conjugate hyperbola.



The case when three points are given is more readily solved thus. Let B, C, D, be the given points. Join BC, CD, and produce them to E, F, so as EB may be to EC as SB to SC; and FC to FD as SC to SD. On EF drawn and produced let fall the perpendiculars SG, BH, and in GS produced indefinitely take GA to AS, and G*a* to *a*S, as HB is to BS; then A will be the vertex, and A*a* the principal axis of the trajectory; which, according as GA is greater than, equal to, or less than AS. will be either an ellipsis, a parabola, or an hyperbola; the point *a* in the first case falling on the same

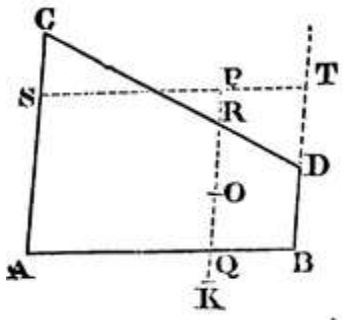
side of the line GF as the point A; in the second, going off to an infinite distance; in the third, falling on the other side of the line GF. For if on GF the perpendiculars CI, DK are let fall, IC will be to HB as EC to EB; that is, as SC to SB; and by permutation, IC to SC as HB to SB, or as GA to SA. And, by the like argument, we may prove that KD is to SD in the same ratio. Wherefore the points B, C, D lie in a conic section described about the focus S, in such manner that all the right lines drawn from the focus S to the several points of the section, and the perpendiculars let fall from the same points on the right line GF, are in that given ratio.

That excellent geometer M. De la Hire has solved this Problem much after the same way, in his Conics, Prop. XXV., Lib. VIII.

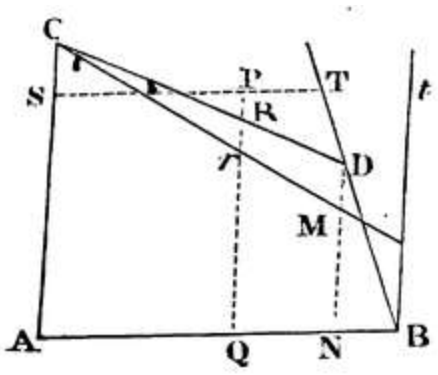
Section V: How the orbits are to be found when neither focus is given

LEMMA XVII.

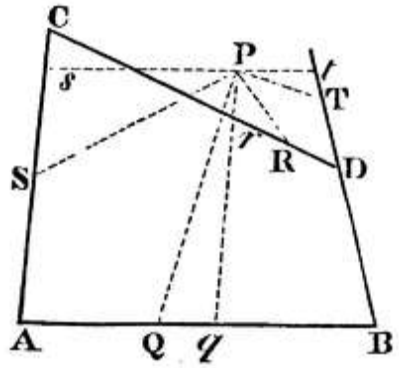
If from any point P *of a given conic section, to the four produced sides* AB, CD, AC, DB*, of any trapezium* ABDC *inscribed in that section, as many right lines* PQ, PR, PS, PT *are drawn in given angles, each line to each side; the rectangle* PQ PR *of those on the opposite sides* AB, CD*, will be to the rectangle* PS PT *of those on the other two opposite sides* AC, BD*, in a given ratio.*



Case 1. Let us suppose, first, that the lines drawn to one pair of opposite sides are parallel to either of the other sides; as PQ and PR to the side AC, and PS and PT to the side AB. And farther, that one pair of the opposite sides, as AC and BD, are parallel betwixt themselves; then the right line which bisects those parallel sides will be one of the diameters of the conic section, and will likewise bisect RQ. Let O be the point in which RQ is bisected, and PO will be an ordinate to that diameter. Produce PO to K, so that OK may be equal to PO, and OK will be an ordinate on the other side of that diameter. Since, therefore, the points A, B, P and K are placed in the conic section, and PK cuts AB in a given angle, the rectangle PQK (by Prop. XVII., XIX., XXI. and XXIII., Book III., of Apollonius's Conics) will be to the rectangle AQB in a given ratio. But QK and PR are equal, as being the differences of the equal lines OK, OP, and OQ, OR; whence the rectangles PQK and PQ PR are equal; and therefore the rectangle PQ PR is to the rectangle A B, that is, to the rectangle PS PT in a given ratio. Q.E.D



Case 2. Let us next suppose that the opposite sides AC and BD of the trapezium are not parallel. Draw B*d* parallel to AC, and meeting as well the right line ST in *t*, as the conic section in *d*. Join C*d* cutting PQ in *r*, and draw DM parallel to PQ, cutting C*d* in M, and AB in N. Then (because of the similar triangles BT*t*, DBN), B*t* or PQ is to T*t* as DN to NB. And so R*r* is to AQ or PS as DM to AN. Wherefore, by multiplying the antecedents by the antecedents, and the consequents by the consequents, as the rectangle PQ R*r* is to the rectangle PS T*t*, so will the rectangle NDM be to the rectangle ANB; and (by Case 1) so is the rectangle PQ P*r* to the rectangle PS P*t*; and by division, so is the rectangle PQ PR to the rectangle PS PT. Q.E.D.

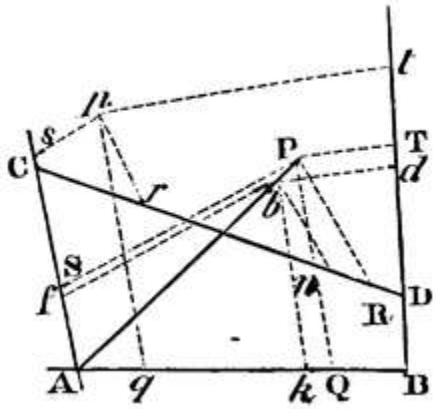


Case 3. Let us suppose, lastly, the four lines PQ, PR, PS, PT, not to be parallel to the sides AC, AB, but any way inclined to them. In their place draw P*q*, P*r*, parallel to AC; and P*s*, P*t* parallel to AB; and because the angles of the triangles PQ*q*, PR*r*, PS*s*, PT*t* are given, the ratios of PQ to P*q*, PR to P*r*, PS to P*s*, PT to P*t* will be also given; and therefore the compounded ratios PQ PR to P*q* P*r*, and PS PT to P*s* P*t* are given. But from

what we have demonstrated before, the ratio of P*q* P*r* to P*s* P*t* is given; and therefore also the ratio of PQ PR to PS PT. Q.E.D.

LEMMA XVIII.

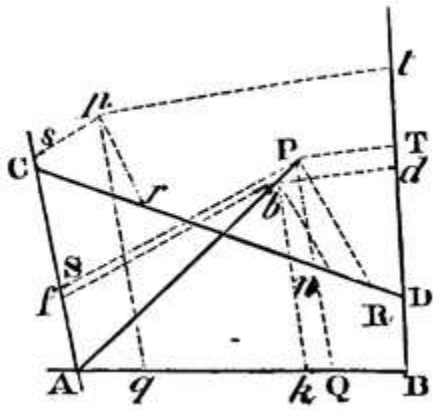
The same things supposed, if the rectangle PQ PR *of the lines drawn to the two opposite sides of the trapezium is to the rectangle* PS PT *of those drawn to the other two sides in a given ratio, the point* P*, from whence those lines are drawn, will be placed in a conic section described about the trapezium.*



Conceive a conic section to be described passing through the points *A, B, C, D*, and any one of the infinite number of points P, as for example *p*; I say, the point P will be always placed in this section. If you deny the thing, join AP cutting this conic section somewhere else, if possible, than in P, as in *b*. Therefore if from those points *p* and *b*, in the given angles to the sides of the trapezium, we draw the right lines *pq, pr, ps, pt*, and *bk, bn, bf, bd*, we shall have, as *bk bn* to *bf bd*, so (by Lem. XVII) *pq pr* to *ps pt*; and so (by supposition) PQ PR to PS PT. And because of the similar trapezia *bk*A*f*, PQAS, as *bk* to *bf*, so PQ to PS. Wherefore by dividing the terms of the preceding proportion by the correspondent terms of this, we shall have *bn* to *bd* as PR to PT. And therefore the equiangular trapezia D*nbd*, DRPT, are similar, and consequently their diagonals D*b*, DP do coincide. Wherefore *b* falls in the intersection of the right lines AP, DP, and consequently coincides with the point P. And therefore the point P, wherever it is taken, falls to be in the assigned conic section. Q.E.D.

Cor. Hence if three right lines PQ, PR, PS, are drawn from a common point P, to as many other right lines given in position, AB, CD, AC, each to each, in as many angles respectively given, and the rectangle PQ PR under any two of the lines drawn be to the square of the third PS in a given ratio; the point P, from which the right lines are drawn, will be placed in a conic section that touches the lines AB, CD in A and C; and the contrary. For the position of the three right lines AB, CD, AC remaining the same, let the line BD approach to and coincide with the line AC; then let the line PT come likewise to coincide with the line PS; and the rectangle PS PT will become PS^2, and the right lines AB, CD, which before did cut the curve in the points A and B, C and D, can no longer cut, but only touch, the curve in those coinciding points.

SCHOLIUM.

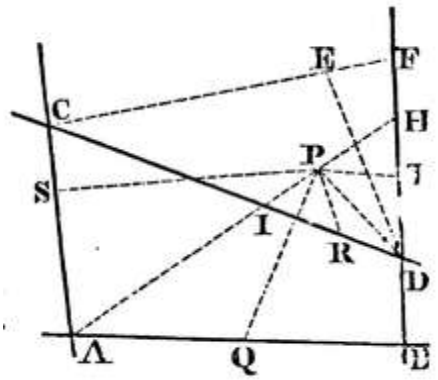


In this Lemma, the name of conic section is to be understood in a large sense, comprehending as well the rectilinear section through the vertex of the cone, as the circular one parallel to the base. For if the point *p* happens to be in a right line, by which the points A and D, or C and B are joined, the conic section will be changed into two right lines, one of which is that right line upon which the point *p* falls, and the other is a right line that joins the other two of the four points. If the two opposite angles of the trapezium taken together are equal to two right angles, and if the four lines PQ, PR, PS, PT, are drawn to the sides thereof at right angles, or any other equal angles, and the rectangle PQ PR under two of the lines drawn PQ and PR, is

equal to the rectangle PS PT under the other two PS and PT, the conic section will become a circle. And the same thing will happen if the four lines are drawn in any angles, and the rectangle PQ PR, under one pair of the lines drawn, is to the rectangle PS PT under the other pair as the rectangle under the sines of the angles S, T, in which the two last lines PS, PT are drawn to the rectangle under the sines of the angles Q, R, in which the first two PQ, PR are drawn. In all other cases the locus of the point P will be one of the three figures which pass commonly by the name of the conic sections. But in room of the trapezium ABCD, we may substitute a quadrilateral figure whose two opposite sides cross one another like diagonals. And one or two of the four points A, B, C, D may be supposed to be removed to an infinite distance, by which means the sides of the figure which converge to those points, will become parallel; and in this case the conic section will pass through the other points, and will go the same way as the parallels *in infinitum*.

LEMMA XIX.

To find a point P *from which if four right lines* PQ, PR, PS, PT *are drawn to as many other right lines* AB, CD, AC, BD, *given by position, each to each, at given angles, the rectangle* PQ PR*, under any two of the lines drawn, shall be to the rectangle* PS PT*, under the other two, in a given ratio.*

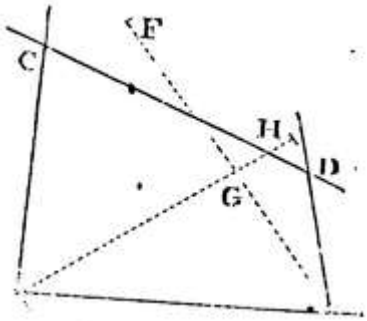


Suppose the lines AB, CD, to which the two right lines PQ, PR, containing one of the rectangles, are drawn to meet two other lines, given by position, in the points A, B, C, D. From one of those, as A, draw any

right line AH, in which you would find the point P. Let this cut the opposite lines BD, CD, in H and I; and, because all the angles of the figure are given, the ratio of PQ to PA, and PA to PS, and therefore of PQ to PS, will be also given. Subducting this ratio from the given ratio of PQ PR to PS PT, the ratio of PR to PT will be given; and adding the given ratios of PI to PR, and PT to PH, the ratio of PI to PH, and therefore the point P will be given. Q.E.I.

Cor. 1. Hence also a tangent may be drawn to any point D of the locus of all the points P. For the chord PD, where the points P and D meet, that is, where AH is drawn through the point D, becomes a tangent. In which case the ultimate ratio of the evanescent lines IP and PH will be found as above. Therefore draw CF parallel to AD, meeting BD in F, and cut it in E in the same ultimate ratio, then DE will be the tangent; because CF and the evanescent IH are parallel, and similarly cut in E and P.

Cor. 2. Hence also the locus of all the points P may be determined. Through any of the points A, B, C, D, as A, draw AE touching the locus, and through any other point B parallel to the tangent, draw BF meeting the locus in F; and find the point F by this Lemma. Bisect BF in G, and, drawing the indefinite line AG, this will be the position of the diameter to which BG and

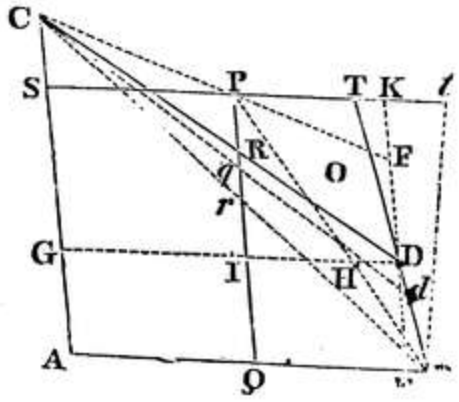


FG are ordinates. Let this AG meet the locus in H, and AH will be its diameter or latus transversum, to which the latus rectum will be as BG^2 to AG GH. If AG nowhere meets the locus, the line AH being infinite, the locus will be a parabola; and its latus rectum corresponding to the diameter AG will be. But if it does meet it anywhere, the locus will be an hyperbola, when the points A and H are placed on the same side the point G; and an ellipsis, if the point G falls between the points A and H; unless, perhaps, the angle AGB is a right angle, and at the same time BG^2 equal to the rectangle AGH, in which case the locus will be a circle.

And so we have given in this Corollary a solution of that famous Problem of the ancients concerning four lines, begun by Euclid, and carried on by Apollonius; and this not an analytical calculus, but a geometrical composition, such as the ancients required.

LEMMA XX.

If the two opposite angular points A *and* P *of any parallelogram* ASPQ *touch any conic section in the points* A *and* P*; and the sides* AQ, AS *of one of those angles, indefinitely produced, meet the same conic section in* B *and* C*; and from the points of concourse* B *and* C *to any fifth point* D *of the conic section, two right lines* BD, CD *are drawn meeting the two other sides* PS, PQ *of the parallelogram, indefinitely produced in* T *and* R*; the parts* PR *and* PT*, cut off from the sides, will always be one to the other in a given ratio. And* vice versa*, if those parts cut off are one to the other in a given ratio, the locus of the point* D *will be a conic section passing through the four points* A, B, C, P.



Case 1. Join BP, CP, and from the point D draw the two right lines DG, DE, of which the first DG shall be parallel to AB, and meet PB, PQ, CA in H, I, G; and the other DE shall be parallel to AC, and meet PC, PS, AB, in F, K, E; and (by Lem. XVII) the rectangle DE DF will be to the rectangle DG DH in a given ratio. But PQ is to DE (or IQ) as PB to HB, and consequently as PT to DH; and by permutation PQ is to PT as DE to DH. Likewise PR is to DF as RC to DC, and therefore as (IG or) PS to DG; and by permutation PR is to PS as DF to DG; and, by compounding those ratios,

the rectangle PQ PR will be to the rectangle PS PT as the rectangle DE DF is to the rectangle DG DH, and consequently in a given ratio. But PQ and PS are given, and therefore the ratio of PR to PT is given. Q.E.D.

Case 2. But if PR and PT are supposed to be in a given ratio one to the other, then by going back again, by a like reasoning, it will follow that the rectangle DE DF is to the rectangle DG DH in a given ratio; and so the point D (by Lem. XVIII) will lie in a conic section passing through the points A, B, C, P, as its locus. Q.E.D.

Cor. 1. Hence if we draw BC cutting PQ in *r* and in PT take P*t* to P*r* in the same ratio which PT has to PR; then B*t* will touch the conic section in the point B. For suppose the point D to coalesce with the point B, so that the chord BD vanishing, BT shall become a tangent, and CD and BT will coincide with CB and B*t*.

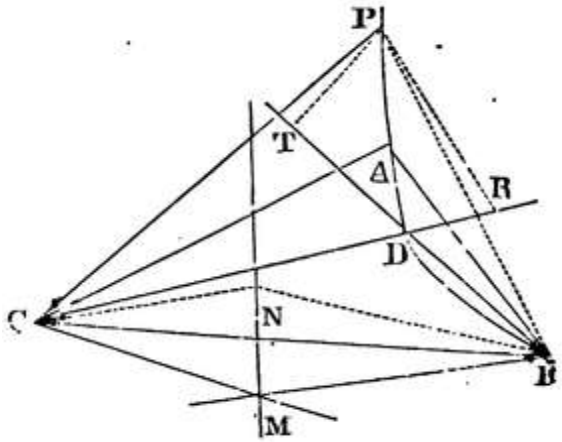
Cor. 2. And, vice versa, if B*t* is a tangent, and the lines BD, CD meet in any point D of a conic section, PR will be to PT as P*r* to P*t*. And, on the contrary, if PR is to PT as P*r* to P*t*, then BD and CD will meet in some point D of a conic section.

Cor. 3. One conic section cannot cut another conic section in more than four points. For, if it is possible, let two conic sections pass through the five points A, B, C, P, O; and let the right line BD cut them in the points D, *d*, and the right line C*d* cut the right line PQ in *q*. Therefore PR is to PT as P*q* to PT: whence PR and P*q* are equal one to the other, against the supposition.

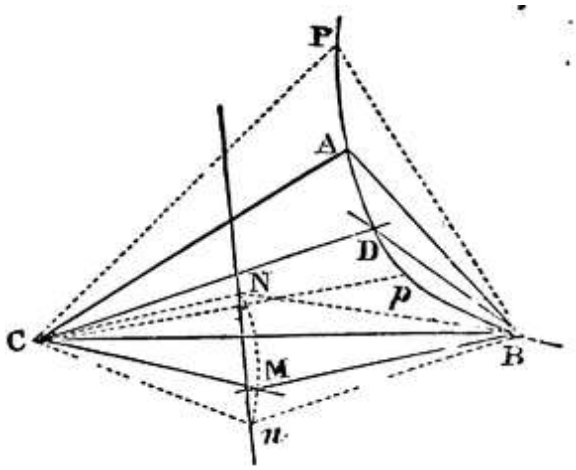
LEMMA XXI.

If two moveable and indefinite right lines BM, CM *drawn through given points* B, C*, as poles, do by their point of concourse* M *describe a third right line* MN *given by position; and other two indefinite right lines* BD, CD *are drawn, making with the former two at those given points* B, C*, given angles,* MBD, MCD*: I say, that those two right lines* BD, CD *will by their point of concourse* D *describe a conic section passing through the points* B, C*. And,* vice versa*, if the right lines* BD, CD *do by their point of concourse* D *describe a conic section passing through the given points* B, C, A*, and the angle* DBM *is always equal to the given angle* ABC*, as well as the*

angle DCM *always equal to the given angle* ACB*, the point* M *will lie in a right line given by position, as its locus.*



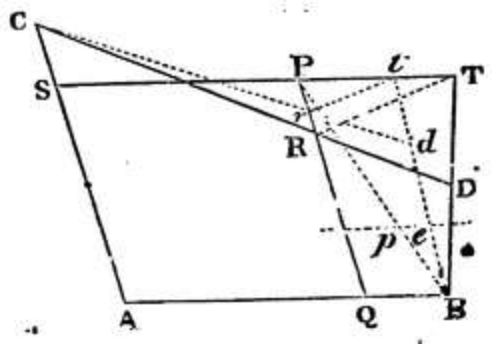
For in the right line *MN* let a point N be given, and when the moveable point M falls on the immoveable point N. let the moveable point D fall on an immovable point P. Join CN, BN, CP, BP, and from the point P draw the right lines PT, PR meeting BD, CD in T and R, and making the angle BPT equal to the given angle BNM, and the angle CPR equal to the given angle CNM. Wherefore since (by supposition) the angles MBD, NBP are equal, as also the angles MCD, NCP, take away the angles NBD and NCD that are common, and there will remain the angles NBM and PBT, NCM and PCR equal; and therefore the triangles NBM, PBT are similar, as also the triangles NCM, PCR. Wherefore PT is to NM as PB to NB; and PR to NM as PC to NC. But the points, B, C, N, P are immovable: wherefore PT and PR have a given ratio to NM, and consequently a given ratio between themselves; and therefore, (by Lemma XX) the point D wherein the moveable right lines BT and CR perpetually concur, will be placed in a conic section passing through the points B, C, P. Q.E.D.



And, *vice versa*, if the moveable point D lies in a conic section passing through the given points B, C, A; and the angle DBM is always equal to the given angle ABC, and the angle DCM always equal to the given angle ACB, and when the point D falls successively on any two immovable points *p*, P, of the conic section, the moveable point M falls successively on two immovable points *n*, N. Through these points *n*, N, draw the right line *n*N: this line *n*N will be the perpetual locus of that moveable point M. For, if possible, let the point M be placed in any curve line. Therefore the point D will be placed in a conic section passing through the five points B, C, A, *p*, P, when the point M is perpetually placed in a curve line. But from what was demonstrated before, the point D will be also placed in a conic section passing through the same five points B, C, A, *p*, when the point M is perpetually placed in a right line. Wherefore the two conic sections will both pass through the same five points, against Corol. 3, Lem. XX. It is therefore absurd to suppose that the point M is placed in a curve line. Q.E.D.

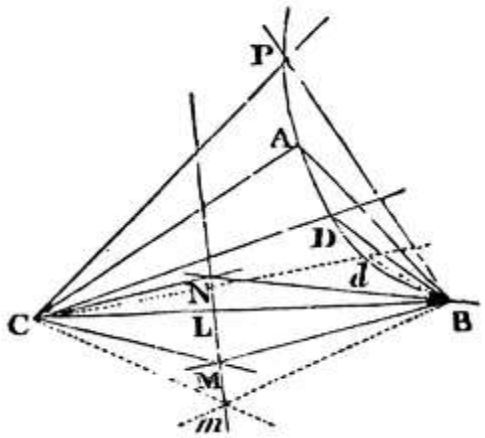
PROPOSITION XXII. PROBLEM XIV.

To describe a trajectory that shall pass through five given points.



Let the five given points be A, B, C, P, D. From any one of them, as A, to any other two as B, C, which may be called the poles, draw the right lines AB, AC, and parallel to those the lines TPS, PRQ, through the fourth point P. Then from the two poles B, C, draw through the fifth point D two indefinite lines BDT, CRD, meeting with the last drawn lines TPS, PRQ (the former with the former, and the latter with the latter) in T and R. Then drawing the right line *tr* parallel to TR, cutting off from the right lines PT, PR, any segments P*t*, P*r*, proportional to PT, PR; and if through their extremities, *t, r*, and the poles B, C, the right lines B*t*, C*r* are drawn, meeting in *d*, that point *d* will be placed in the trajectory required. For (by Lem. XX) that point *d* is placed in a conic section passing through the four points A, B, C, P; and the lines R*r*, T*t* vanishing, the point *d* comes to coincide with the point D. Wherefore the conic section passes through the five points A, B, C, P, D. Q.E.D.

The same otherwise.

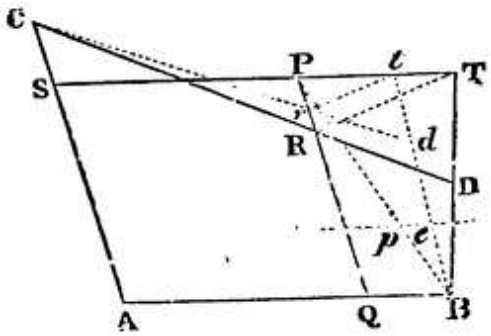


Of the given points join any three, as A, B, C; and about two of them B, C, as poles, making the angles ABC, ACB of a given magnitude to revolve, apply the legs BA, CA, first to the point D, then to the point P, and mark the points M, N, in which the other legs BL, CL intersect each other in both cases. Draw the indefinite right line MN, and let those moveable angles revolve about their poles B, C, in such manner that the intersection, which is now supposed to be *d*, of the legs BL, CL, or BM, CM, may always fall in that indefinite right line MN; and the intersection, which is now supposed to be *m*, of the legs BA, CA, or BD, CD, will describe the trajectory required, PAD*d*B. For (by Lem. XXI) the point *d* will be placed in a conic section passing through the points B, C; and when the point *m* comes to coincide with the points L, M, N, the point *d* will (by construction) come to coincide with the points A, D, P. Wherefore a conic section will be described that shall pass through the five points A, B. C, P, D. Q.E.F.

Cor. 1. Hence a right line may be readily drawn which shall be a tangent to the trajectory in any given point B. Let the point *d* come to coincide with the point B, and the right line B*d* will become the tangent required.

Cor. 2. Hence also may be found the centres, diameters, and latera recta of the trajectories, as in Cor. 2, Lem. XIX.

SCHOLIUM.

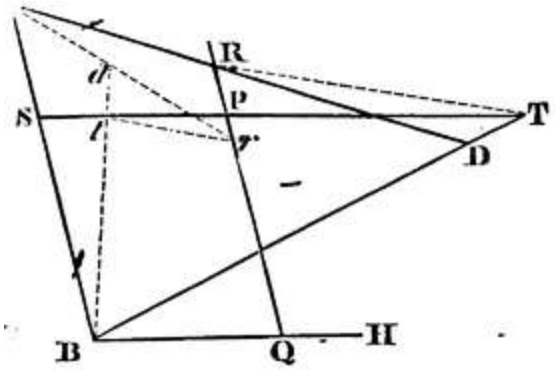


The former of these constructions will become something more simple by joining BP, and in that line, produced, if need be, taking B*p* to BP as PR is to PT; and through *p* draw the indefinite right line *pe* parallel to SPT, and in that line *pe* taking always *pe* equal to P*r*, and draw the right lines B*e*, C*r* to

meet in *d*. For since P*r* to P*t*, PR to PT, *p*B to PB, *pe* to Pt, are all in the same ratio, *pe* and P*r* will be always equal. After this manner the points of the trajectory are most readily found, unless you would rather describe the curve mechanically, as in the second construction.

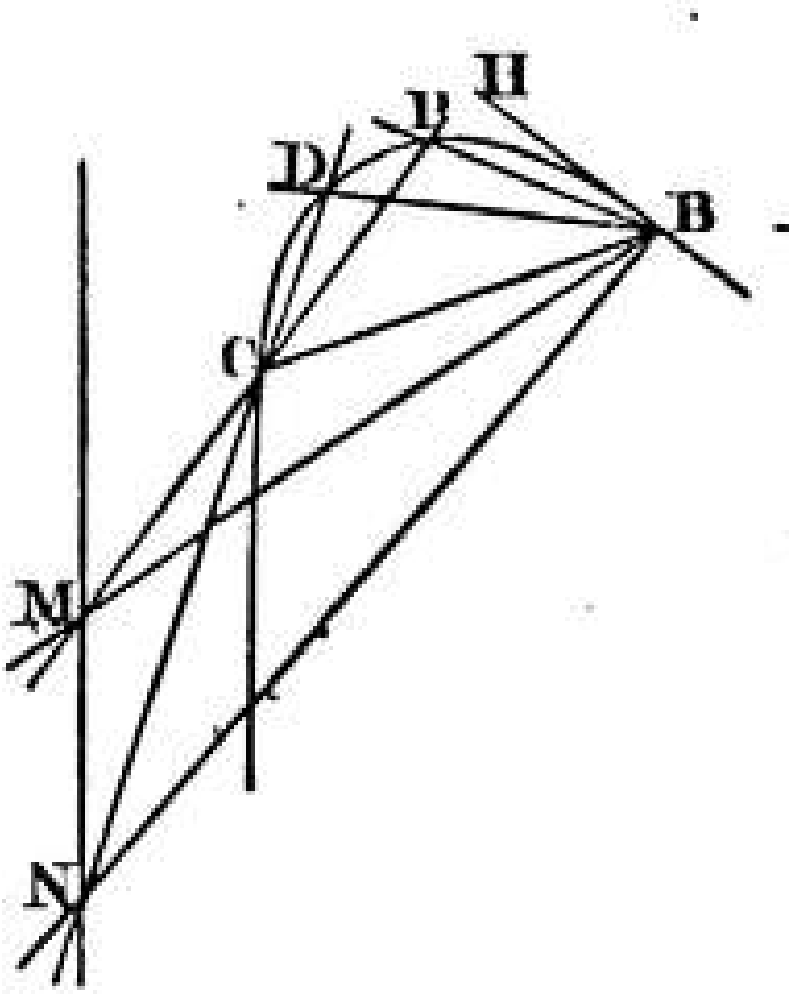
PROPOSITION XXIII. PROBLEM XV.

To describe a trajectory that shall pass through four given points, and touch a right line given by position.



Case 1. Suppose that HB is the given tangent, B the point of contact, and C, D, P, the three other given points. Join BC, and draw PS parallel to BH, and PQ parallel to BC; complete the parallelogram BSPQ. Draw BD cutting SP in T, and CD cutting PQ in R. Lastly, draw any line *tr* parallel to TR, cutting off from PQ, PS, the segments P*r*, P*t* proportional to PR, PT respectively; and draw C*r*, B*t* their point of concourse *d* will (by Lem. XX) always fall on the trajectory to be described.

The same otherwise.

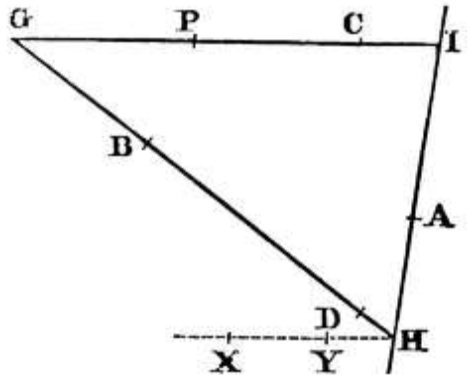


Let the angle CBH of a given magnitude revolve about the pole B; as also the rectilinear radius BC, both ways produced, about the pole C. Mark the points M, N, on which the leg BC of the angle cuts that radius when BH, the other leg thereof, meets the same radius in the points P and D. Then drawing the indefinite line MN, let that radius CP or CD and the leg BC of the angle perpetually meet in this line; and the point of concourse of the other leg BH with the radius will delineate the trajectory required.

For if in the constructions of the preceding Problem the point A comes to a coincidence with the point B, the lines CA and CB will coincide, and the line AB, in its last situation, will become the tangent BH; and therefore the constructions there set down will become the same with the constructions here described. Wherefore the concourse of the leg BH with the radius will

describe a conic section passing through the points C, D, P, and touching the line BH in the point B. Q.E.F.

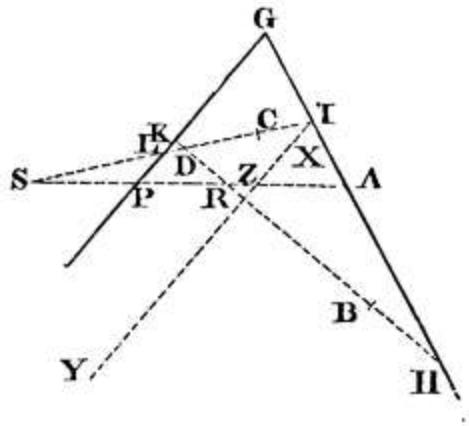
Case 2. Suppose the four points B, C, D, P, given, being situated with out the tangent HI. Join each two by the lines BD, CP meeting in G, and cutting the tangent in H and I. Cut the tangent in A in such manner



that HA may be to IA as the rectangle under a mean proportional between CG and GP, and a mean proportional between BH and HD is to a rectangle under a mean proportional between GD and GB, and a mean proportional between PI and IC, and A will be the point of contact. For if HX, a parallel to the right line PI, cuts the trajectory in any points X and Y, the point A (by the properties of the conic sections) will come to be so placed, that HA^2 will become to AI^2 in a ratio that is compounded out of the ratio of the rectangle XHY to the rectangle BHD, or of the rectangle CGP to the rectangle DGB; and the ratio of the rectangle BHD to the rectangle PIC. But after the point of contact A is found, the trajectory will be described as in the first Case. Q.E.F. But the point A may be taken either between or without the points H and I, upon which account a twofold trajectory may be described.

PROPOSITION XXIV. PROBLEM XVI.

To describe a trajectory that shall pass through three given points, and touch two right lines given by position.



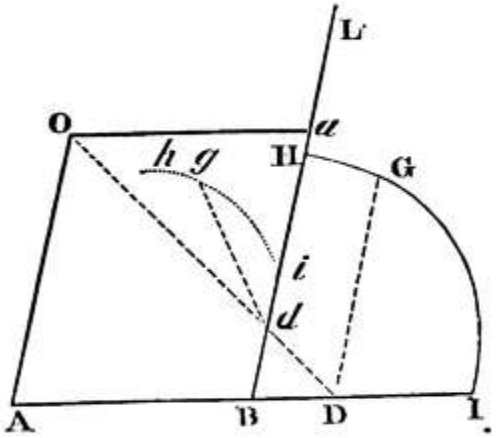
Suppose HI, KL to be the given tangents and B, C, D, the given points. Through any two of those points, as B, D, draw the indefinite right line BD meeting the tangents in the points H, K. Then likewise through any other two of these points, as C, D, draw the indefinite right line CD meeting the tangents in the points I, L. Cut the lines drawn in R and S, so that HR may be to KR as the mean proportional between BH and HD is to the mean proportional between BK and KD; and IS to LS as the mean proportional between CI and ID is to the mean proportional between CL and LD. But you may cut, at pleasure, either within or between the points K and H, I and L, or without them; then draw RS cutting the tangents in A and P, and A and P will be the points of contact. For if A and P are supposed to be the points of contact, situated anywhere else in the tangents, and through any of the points H, I, K, L, as I, situated in either tangent HI, a right line IY is drawn parallel to the other tangent KL, and meeting the curve in X and Y, and in that right line there be taken IZ equal to a mean proportional between IX and IY, the rectangle XIY or IZ^2, will (by the properties of the conic sections) be to LP^2 as the rectangle CID is to the rectangle CLD, that is (by the construction), as SI is to SL^2, and therefore IZ is to LP as SI to SL. Wherefore the points S, P, Z, are in one right line. Moreover, since the tangents meet in G, the rectangle XIY or IZ^2 will (by the properties of the conic sections) be to IA^2 as GP^2 is to GA^2, and consequently IZ will be to IA as GP to GA. Wherefore the points P, Z, A, lie in one right line, and therefore the points S, P, and A are in one right line. And the same argument will prove that the points R, P, and A are in one right line. Wherefore the points of contact A and P lie in the right line RS. But after these points are

found, the trajectory may be described, as in the first Case of the preceding Problem. Q.E.F.

In this Proposition, and Case 2 of the foregoing, the constructions are the same, whether the right line XY cut the trajectory in X and Y, or not; neither do they depend upon that section. But the constructions being demonstrated where that right line does cut the trajectory, the constructions where it does not are also known; and therefore, for brevity's sake, I omit any farther demonstration of them.

LEMMA XXII.

To transform figures into other figures of the same kind.



Suppose that any figure HGI is to be transformed. Draw, at pleasure, two parallel lines AO, BL, cutting any third line AB, given by position, in A and B, and from any point G of the figure, draw out any right line GD, parallel to OA, till it meet the right line AB. Then from any given point O in the line OA, draw to the point D the right line OD, meeting BL in *d*; and from the point of concourse raise the right line *dg* containing any given angle with the right line BL, and having such ratio to O*d* as DG has to OD; and *g* will be the point in the new figure *hgi*, corresponding to the point G. And in like manner the several points of the first figure will give as many correspondent points of the new figure. If we therefore conceive the point G to be carried along by a continual motion through all the points of the first figure, the point *g* will be likewise carried along by a continual motion through all the

points of the new figure, and describe the same. For distraction's sake, let us call DG the first ordinate, *dg* the new ordinate, AD the first abscissa, *ad* the new abscissa; O the pole, OD the abscinding radius, OA the first ordinate radius, and O*a* (by which the parallelogram OAB*a* is completed) the new ordinate radius.

I say, then, that if the point G is placed in a right line given by position, the point *g* will be also placed in a right line given by position. If the point G is placed in a conic section, the point *g* will be likewise placed in a conic section. And here I understand the circle as one of the conic sections. But farther, if the point G is placed in a line of the third analytical order, the point *g* will also be placed in a line of the third order, and so on in curve lines of higher orders. The two lines in which the points G, *g*, are placed, will be always of the same analytical order. For as *ad* is to OA, so are O*d* to OD, *dg* to DG, and AB to AD; and therefore AD is equal to, and DG equal to. Now if the point G is placed in a right line, and therefore, in any equation by which the relation between the abscissa AD and the ordinate GD is expressed, those indetermined lines AD and DG rise no higher than to one dimension, by writing this equation in place of AD, and in place of DG, a new equation will be produced, in which the new abscissa *ad* and new ordinate *dg* rise only to one dimension; and which therefore must denote a right line. But if AD and DG (or either of them) had risen to two dimensions in the first equation, *ad* and *dg* would likewise have risen to two dimensions in the second equation. And so on in three or more dimensions. The indetermined lines, *ad, dg* in the second equation, and AD, DG, in the first, will always rise to the same number of dimensions; and therefore the lines in which the points G, *g*, are placed are of the same analytical order.

I say farther, that if any right line touches the curve line in the first figure, the same right line transferred the same way with the curve into the new figure will touch that curve line in the new figure, and *vice versa*. For if any two points of the curve in the first figure are supposed to approach one the other till they come to coincide, the same points transferred will approach one the other till they come to coincide in the new figure; and therefore the right lines with which those points are joined will be come together tangents of the curves in both figures. I might have given demonstrations of these assertions in a more geometrical form; but I study to be brief.

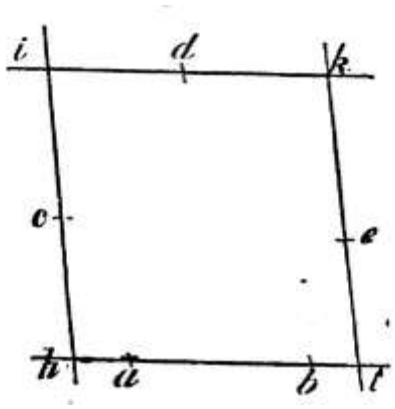
Wherefore if one rectilinear figure is to be transformed into another, we need only transfer the intersections of the right lines of which the first figure consists, and through the transferred intersections to draw right lines in the new figure. But if a curvilinear figure is to be transformed, we must transfer the points, the tangents, and other right lines, by means of which the curve line is defined. This Lemma is of use in the solution of the more difficult Problems; for thereby we may transform the proposed figures, if they are intricate, into others that are more simple. Thus any right lines converging to a point are transformed into parallels, by taking for the first ordinate radius any right line that passes through the point of concourse of the converging lines, and that because their point of concourse is by this means made to go off *in infinitum*; and parallel lines are such as tend to a point infinitely remote. And after the problem is solved in the new figure, if by the inverse operations we transform the new into the first figure, we shall have the solution required.

This Lemma is also of use in the solution of solid problems. For as often as two conic sections occur, by the intersection of which a problem may be solved, any one of them may be transformed, if it is an hyperbola or a parabola, into an ellipsis, and then this ellipsis may be easily changed into a circle. So also a right line and a conic section, in the construction of plane problems, may be transformed into a right line and a circle

PROPOSITION XXV. PROBLEM XVII.

To describe a trajectory that shall pass through two given points, and touch three right lines given by position.

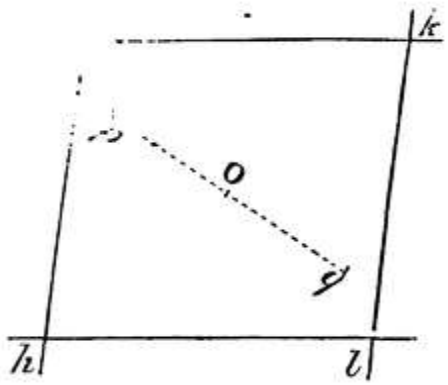
Through the concourse of any two of the tangents one with the other, and the concourse of the third tangent with the right line which passes through the two given points, draw an indefinite right line; and, taking this line for the first ordinate radius, transform the figure by the preceding Lemma into a new figure. In this figure those two tangents will become parallel to each other, and the third tangent will be parallel to the right line that passes



through the two given points. Suppose *hi, kl* to be those two parallel tangents, *ik* the third tangent, and *hl* a right line parallel thereto, passing through those points *a, b*, through which the conic section ought to pass in this new figure; and completing the parallelogram *hikl*, let the right lines *hi, ik, kl* be so cut in *c, d, e*, that *hc* may be to the square root of the rectangle *ahb, ic,* to *id,* and *ke* to *kd*, as the sum of the right lines *hi* and *kl* is to the sum of the three lines, the first whereof is the right line *ik*, and the other two are the square roots of the rectangles *ahb* and *alb*; and *c, d, e*, will be the points of contact. For by the properties of the conic sections, hc^2 to the rectangle *ahb*, and ic^2 to id^2, and ke^2 to kd^2, and el^2 to the rectangle *alb*, are all in the same ratio; and therefore *hc* to the square root of *ahb, ic* to *id, ke* to *kd*, and *el* to the square root of *alb*, are in the subduplicate of that ratio; and by composition, in the given ratio of the sum of all the antecedents *hi* + *kl*, to the sum of all the consequents. Wherefore from that given ratio we have the points of contact *c, d, e*, in the new figure. By the inverted operations of the last Lemma, let those points be transferred into the first figure, and the trajectory will be there described by Prob. XIV. Q.E.F. But according as the points *a, b*, fall between the points *h, l,* or without them, the points *c, d, e,* must be taken either between the points, *h, i, k, l,* or without them. If one of the points *a, b*, falls between the points *h, i*, and the other without the points *h, l*, the Problem is impossible.

PROPOSITION XXVI. PROBLEM XVIII.

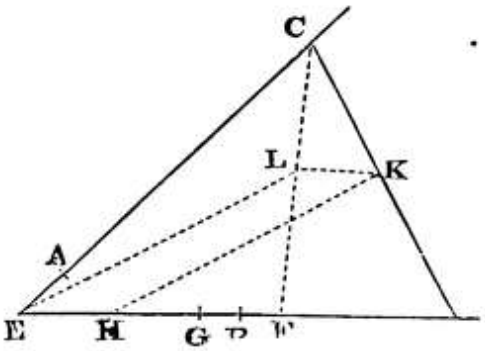
To describe a trajectory that shall pass through a given point, and touch four right lines given by position.



From the common intersections, of any two of the tangents to the common intersection of the other two, draw an indefinite right line; and taking this line for the first ordinate radius; transform the figure (by Lem. XXII) into a new figure, and the two pairs of tangents, each of which before concurred in the first ordinate radius, will now become parallel. Let *hi* and *kl*, *ik* and *hl*, be those pairs of parallels completing the parallelogram *hikl*. And let *p* be the point in this new figure corresponding to the given point in the first figure. Through O the centre of the figure draw *pq*: and O*q* being equal to O*p*, *q* will be the other point through which the conic section must pass in this new figure. Let this point be transferred, by the inverse operation of Lem. XXII into the first figure, and there we shall have the two points through which the trajectory is to be described. But through those points that trajectory may be described by Prop. XVII.

LEMMA XXIII.

If two right lines, as AC, BD *given by position, and terminating in given points* A, B*, are in a given ratio one to the other, and the right line* CD*, by which the indetermined points* C, D *are joined is cut in* K *in a given ratio; I say, that the point* K *will be placed in a right line given by position.*

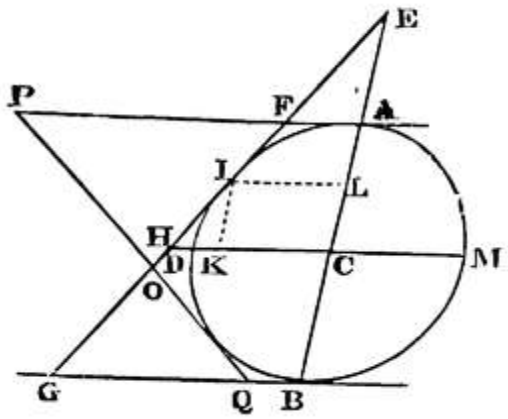


For let the right lines AC, BD meet in E, and in BE take BG to AE as BD is to AC, and let FD be always equal to the given line EG; and, by construction, EC will be to GD, that is, to EF, as AC to BD, and therefore in a given ratio; and therefore the triangle EFC will be given in kind. Let CF be cut in L so as CL may be to CF in the ratio of CK to CD; and because that is a given ratio, the triangle EFL will be given in kind, and therefore the point L will be placed in the right line EL given by position. Join LK, and the triangles CLK, CFD will be similar; and because FD is a given line, and LK is to FD in a given ratio, LK will be also given. To this let EH be taken equal, and ELKH will be always a parallelogram. And therefore the point K is always placed in the side HK (given by position) of that parallelogram. Q.E.D.

Cor. Because the figure EFLC is given in kind, the three right lines EF, EL, and EC, that is, GD, HK, and EC, will have given ratios to each other.

LEMMA XXIV.

If three right lines, two whereof are parallel, and given by position, touch any conic section; I say, that the semi-diameter of the section which is parallel to those two is a mean proportional between the segments of those two that are intercepted between the points of contact and the third tangent.



Let AF, GB be the two parallels touching the conic section ADB in A and B; EF the third right line touching the conic section in I, and meeting the two former tangents in F and G, and let CD be the semi-diameter of the figure parallel to those tangents; I say, that AF, CD, BG are continually proportional.

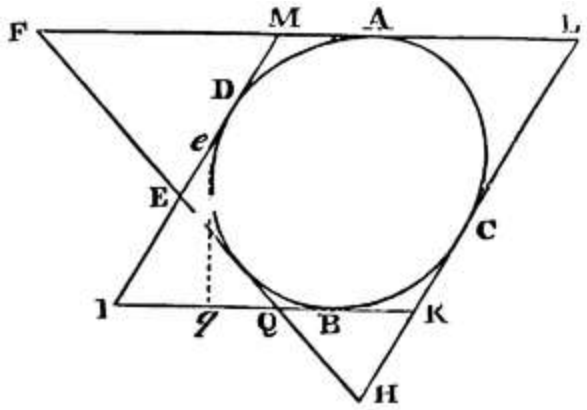
For if the conjugate diameters AB, DM meet the tangent FG in E and H, and cut one the other in C, and the parallelogram IKCL be completed; from the nature of the conic sections, EC will be to CA as CA to CL; and so by division, EC - CA to CA - CL, or EA to AL; and by composition, EA to EA + AL or EL, as EC to EC + CA or EB; and therefore (because of the similitude of the triangles EAF, ELI, ECH, EBG) AF is to LI as CH to BG. Likewise, from the nature of the conic sections, LI (or CK) is to CD as CD to CH; and therefore (*ex aequo perturbatè*) AF is to CD as CD to BG. Q.E.D.

Cor. 1. Hence if two tangents FG, PQ, meet two parallel tangents AF, BG in F and G, P and Q, and cut one the other in O; AF (*ex aequo perturbatè*) will be to BQ as AP to BG, and by division, as FP to GQ, and therefore as FO to OG.

Cor. 2. Whence also the two right lines PG, FQ drawn through the points P and G, F and Q, will meet in the right line ACB passing through the centre of the figure and the points of contact A, B.

LEMMA XXV.

If four sides of a parallelogram indefinitely produced touch any conic section, and are cut by a fifth tangent; I say, that, taking those segments of any two conterminous sides that terminate in opposite angles of the parallelogram, either segment is to the side from which it is cut off as that part of the other conterminous side which is intercepted between the point of contact and the third side is to the other segment.



Let the four sides ML, IK, KL, MI, of the parallelogram MLIK touch the F conic section in A, B, C, D; and let the fifth tangent FQ cut those sides in F, Q, H, and E; and taking the segments ME, KQ of the sides MI, KI, or the segments KH, MF of the sides KL, ML; I say, that ME is to MI as BK to KQ; and KH to KL as AM to MF. For, by Cor. 1 of the preceding Lemma, ME is to EI as (AM or) BK to BQ; and, by composition, ME is to MI as BK to KQ. Q.E.D. Also KH is to HL as (BK or) AM to AF; and by division, KH to KL as AM to MF. Q.E.D.

Cor. 1. Hence if a parallelogram IKLM described about a given conic section is given, the rectangle KQ ME, as also the rectangle KH MF equal thereto, will be given. For, by reason of the similar triangles KQH, MFE, those rectangles are equal.

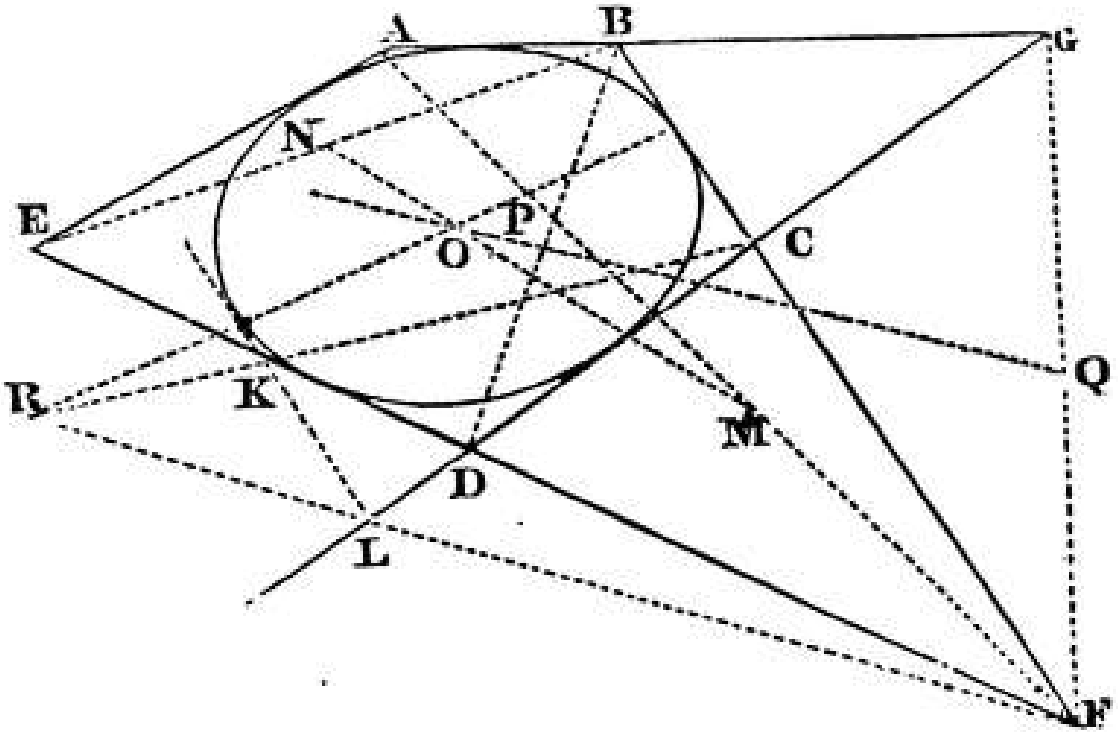
Cor. 2. And if a sixth tangent *eq* is drawn meeting the tangents KI, MI in *q* and *e*, the rectangle KQ ME will be equal to the rectangle K*q* M*e*, and KQ will be to M*e* as K*q* to ME, and by division as Q*q* to E*e*.

Cor. 3. Hence, also, if E*q*, *e*Q, are joined and bisected, and a right line is drawn through the points of bisection, this right line will pass through the centre of the conic section. For since Q*q* is to E*e* as KQ to M*e*, the same right line will pass through the middle of all the lines E*q*, *e*Q, MK (by Lem.

XXIII), and the middle point of the right line MK is the centre of the section.

PROPOSITION XXVII. PROBLEM XIX.

To describe a trajectory that may touch five right lines given by position.

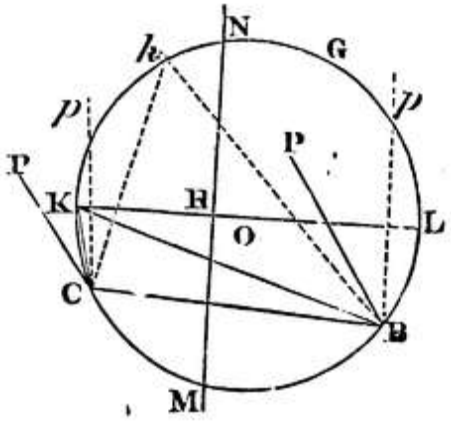


Supposing ABG, BCF, GCD, FDE, EA to be the tangents given by position. Bisect in M and N, AF, BE, the diagonals of the quadrilateral figure ABFE contained under any four of them; and (by Cor. 3, Lem. XXV) the right line MN drawn through the points of bisection will pass through the centre of the trajectory. Again, bisect in P and Q, the diagonals (if I may so call them) BD, GF of the quadrilateral figure BGDF contained under any other four tangents, and the right line PQ, drawn through the points of bisection will pass through the centre of the trajectory; and therefore the centre will be given in the con course of the bisecting lines. Suppose it to be O. Parallel to any tangent BC draw KL at such distance that the centre O may be placed in the middle between the parallels; this KL will touch the

trajectory to be described. Let this cut any other two tangents GCD, FDE, in L and K. Through the points C and K, F and L, where the tangents not parallel, GL, FK meet the parallel tangents OF, KL, draw OK, FL meeting in R; and the right line OR drawn and produced, will cut the parallel tangents CF, KL, in the points of contact. This appears from Cor. 2, Lem. XXIV. And by the same method the other points of contact may be found, and then the trajectory may be described by Prob. XIV. Q.E.F.

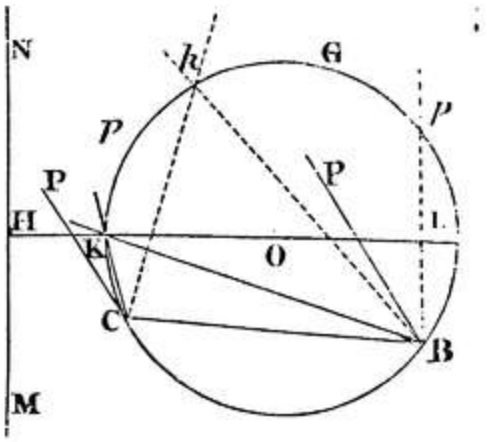
SCHOLIUM.

Under the preceding Propositions are comprehended those Problems wherein either the centres or asymptotes of the trajectories are given. For when points and tangents and the centre are given, as many other points and as many other tangents are given at an equal distance on the other side of the centre. And an asymptote is to be considered as a tangent, and its infinitely remote extremity (if we may say so) is a point of contact. Conceive the point of contact of any tangent removed *in infinitum*, and the tangent will degenerate into an asymptote, and the constructions of the preceding Problems will be changed into the constructions of those Problems wherein the asymptote is given.



After the trajectory is described, we may find its axes and foci in this manner. In the construction and figure of Lem. XXI, let those legs BP, CP, of the moveable angles PBN, PCN, by the concourse of which the trajectory was described, be made parallel one to the other; and retaining that position, let them revolve about their poles B, C, in that figure. In the mean while let

the other legs CN, BN, of those angles, by their concourse K or *k*, describe the circle BKGC. Let O be the centre of this circle; and from this centre upon the ruler MN, wherein those legs CN, BN did concur while the trajectory was described, let fall the perpendicular OH meeting the circle in K and L. And when those other legs CK, BK meet in the point K that is nearest to the ruler, the first legs CP, BP will be parallel to the greater axis, and perpendicular on the lesser; and the contrary will happen if those legs meet in the remotest point L. Whence if the centre of the trajectory is given; the axes will be given; and those being given, the foci will be readily found.



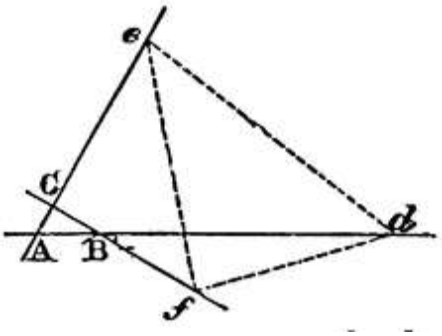
But the squares of the axes are one to the other as KH to LH, and thence it is easy to describe a trajectory given in kind through four given points. For if two of the given points are made the poles C, B, the third will give the moveable angles PCK, PBK; but those being given, the circle BGKC may be described. Then, because the trajectory is given in kind, the ratio of OH to OK, and therefore OH itself, will be given. About the centre O, with the interval OH, describe another circle, and the right line that touches this circle, and passes through the concourse of the legs CK, BK, when the first legs CK, BP meet in the fourth given point, will be the ruler MN, by means of which the trajectory may be described. Whence also on the other hand a trapezium given in kind (excepting a few cases that are impossible) may be inscribed in a given conic section.

There are also other Lemmas, by the help of which trajectories given in kind may be described through given points, and touching given lines. Of such a sort is this, that if a right line is drawn through any point given by position, that may cut a given conic section in two points, and the distance

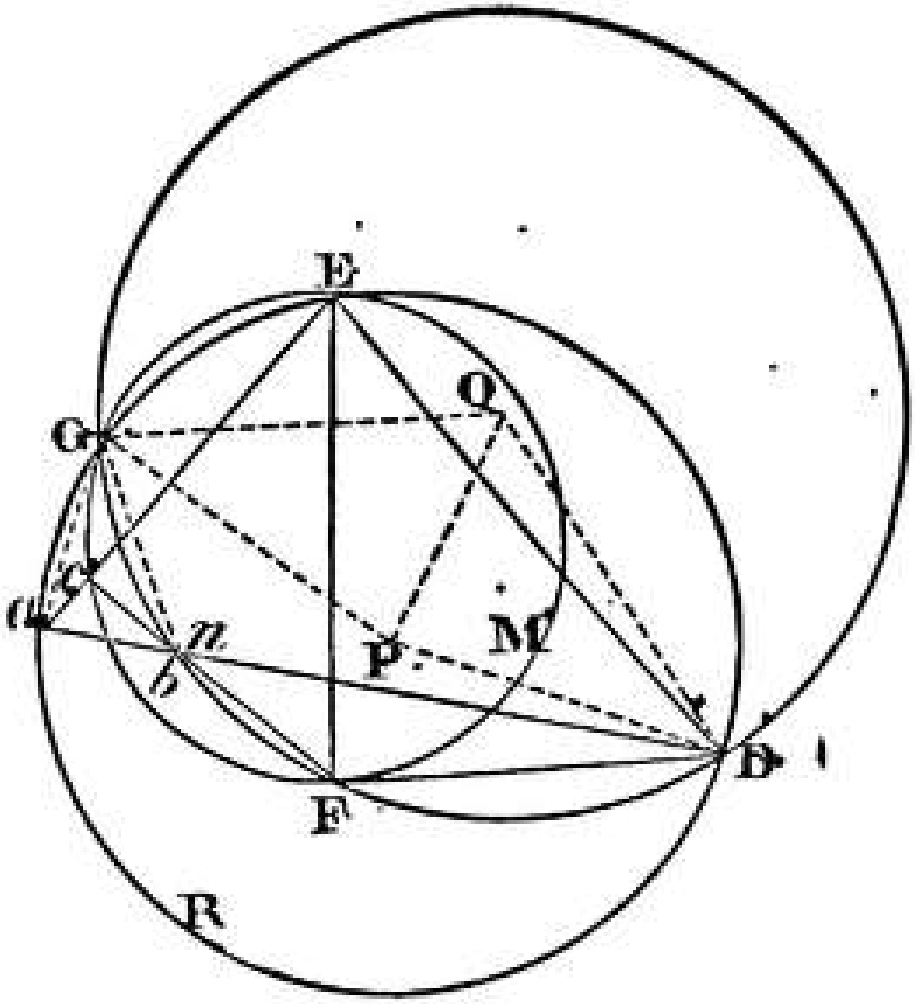
of the intersections is bisected, the point of bisection will touch another conic section of the same kind with the former, and having its axes parallel to the axes of the former. But I hasten to things of greater use.

LEMMA XXVI.

To place the three angles of a triangle, given both in kind and magnitude, in respect of as many rigid lines given by position, provided they are not all parallel among themselves, in such manner that the several angles may touch the several lines.



Three indefinite right lines AB, AC, BC, are given by position, and it is required so to place the triangle DEF that its angle D may touch the line AB, its angle E the line AC, and its angle F the line BC. Upon DE, DF, and EF, describe three segments of circles DRE, DGF, EMF, capable of angles equal to the angles BAC, ABC, ACB respectively. But those segments are to be described towards such sides of the lines DE, DF, EF, that the letters DRED may turn round about in the same order with the letters BACB; the letters DGFD in the same order with the letters ABCA; and the letters EMFE in the same order with the letters ACBA; then; completing those segments into entire circles let the two former circles cut one the other in G, and suppose P and Q, to be their centres. Then joining GP, PQ, take G*a* to AB as GP is to PQ; and about the centre G, with the interval G*a*, describe a circle that may cut the first circle DGE in *a*. Join *a*D cutting the second circle DFG in *b*, as well as *a*E cutting the third circle EMF in *c*. Complete the figure ABC*def* similar and equal to the figure *abc*DEF: I say, the thing is done.



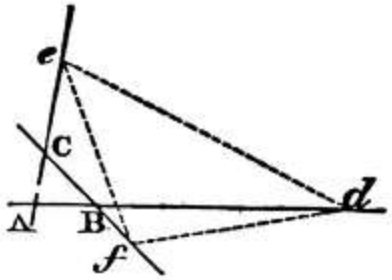
For drawing F*c* meeting *a*D in *n*, and joining *a*G, *b*G, QG, QD, PD, by construction the angle E*a*D is equal to the angle CAB, and the angle *ac*F equal to the angle ACB; and therefore the triangle *anc* equiangular to the triangle ABC. Wherefore the angle *anc* or F*n*D is equal to the angle ABC, and consequently to the angle F*b*D; and therefore the point *n* falls on the point *b*. Moreover the angle GPQ, which is half the angle GPD at the centre, is equal to the angle G*a*D at the circumference; and the angle GQP, which is half the angle GQD at the centre, is equal to the complement to two right angles of the angle G*b*D at the circumference, and therefore equal to the angle G*ba*. Upon which account the triangles GPQ, G*ab*, are similar, and G*a* is to *ab* as GP to PQ; that is (by construction), as G*a* to AB. Wherefore *ab* and AB are equal; and consequently the triangles *abc*, ABC, which we have now proved to be similar, are also equal. And therefore since

the angles D, E, F, of the triangle DEF do respectively touch the sides *ab, ac, bc* of the triangle *abc*, the figure ABC*def* may be completed similar and equal to the figure *abc*DEF, and by completing it the Problem will be solved. Q.E.F.

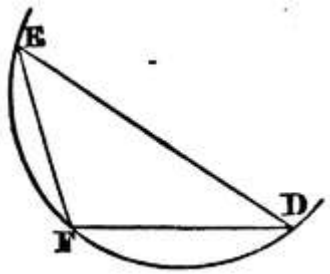
Cor. Hence a right line may be drawn whose parts given in length may be intercepted between three right lines given by position. Suppose the triangle DEF, by the access of its point D to the side EF, and by having the sides DE, DF placed *in directum* to be changed into a right line whose given part DE is to be interposed between the right lines AB, AC given by position; and its given part DF is to be interposed between the right lines AB, BC, given by position; then, by applying the preceding construction to this case; the Problem will be solved.

PROPOSITION XXVIII. PROBLEM XX.

To describe a trajectory given both in kind and magnitude, given parts of which shall be interposed between three right lines given by position.



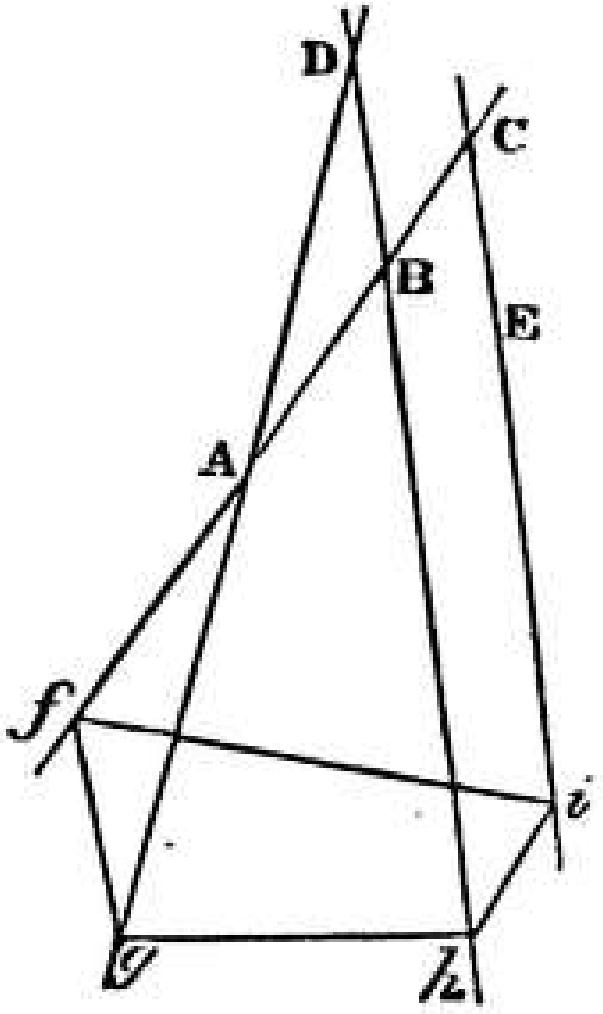
Suppose a trajectory is to be described that may be similar and equal to the curve line DEF, and may be cut by three right lines AB, AC, BC, given by position, into parts DE and EF, similar and equal to the given parts of this curve line.



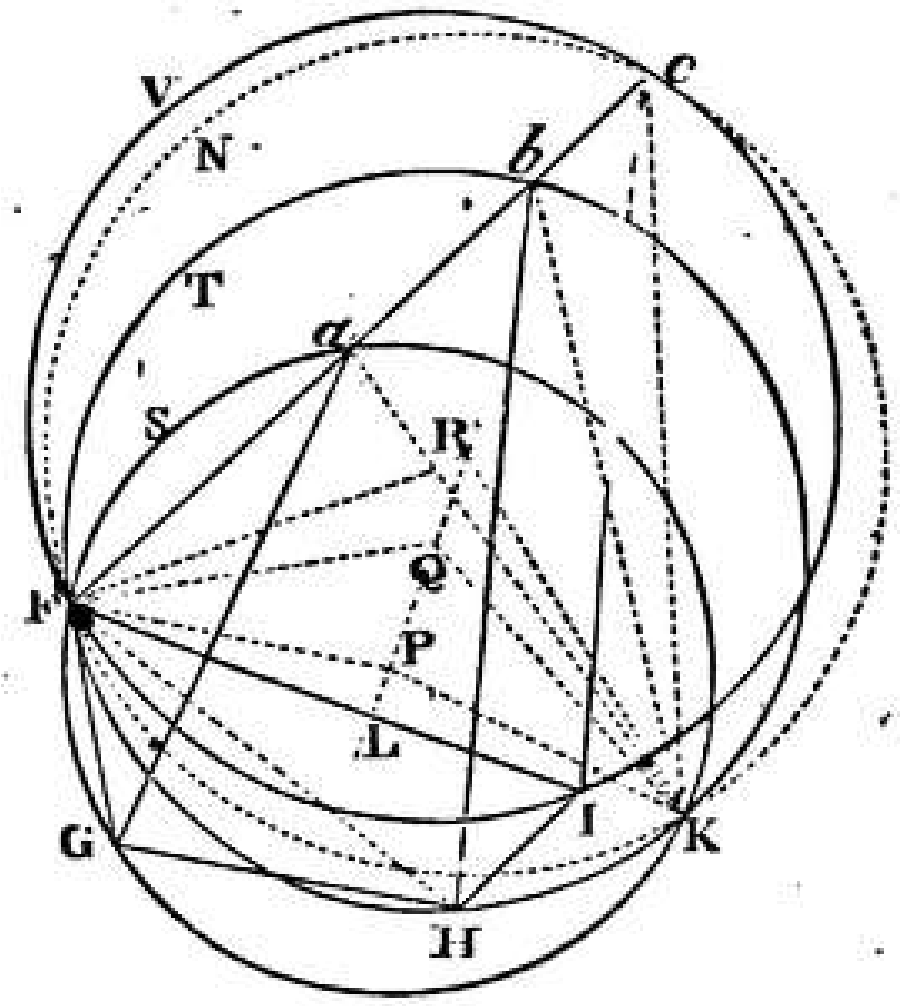
Draw the right lines DE, EP, DF: and place the angles D, E, F, of this triangle DEF, so as to touch those right lines given by position (by Lem. XXVI). Then about the triangle describe the trajectory, similar and equal to the curve DEF. Q.E.F.

LEMMA XXVII.

To describe a trapezium given in kind, the angles whereof may be so placed, in respect of four right lines given by position, that are neither all parallel among themselves, nor converge to one common point, that the several angles may touch the several lines.



Let the four right lines ABC, AD, BD, CE, be given by position; the first cutting the second in A, the third in B, and the fourth in C; and suppose a trapezium *fghi* is to be described that may be similar to the trapezium FGHI, and whose angle *f*, equal to the given angle F, may touch the right line ABC; and the other angles *g, h, i,* equal to the other given angles, G, H, I, may touch the other lines AD, BD, CE, respectively. Join FH, and upon FG, FH, FI describe as many segments of circles FSG, FTH, FVI, the first of which FSG may be capable of an angle equal to the angle BAD; the second FTH capable of an angle equal to the angle CBD; and the third FVI of an angle equal to the angle ACE. But the segments are to be described towards those sides of the lines FG, FH, FI, that the circular order of the letters FSGF may be the same as of the letters BADB, and that the letters FTHF may turn about in the same order as the letters CBDC and the letters FVIF in the game order as the letters ACEA. Complete the segments into entire circles, and let P be the centre of the first circle FSG, Q the centre of the second FTH. Join and produce both ways the line PQ, and in it take QR in the same ratio to PQ as BC has to AB. But QR is to be taken towards that side of the point Q, that the order of the letters P, Q, R

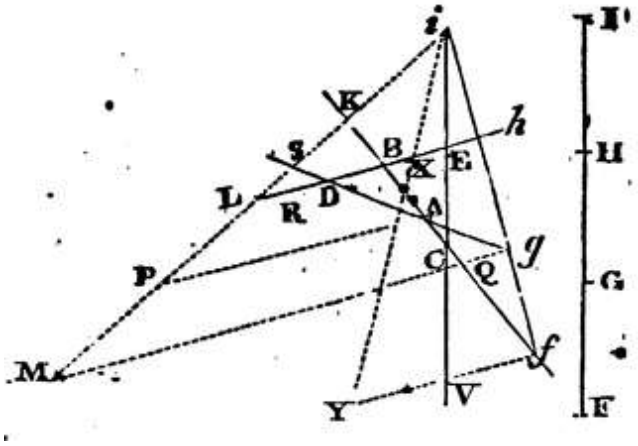


may be the same as of the letters A, B, C; and about the centre R with the interval RF describe a fourth circle FN*c* cutting the third circle FVI in *c*. Join F*c* cutting the first circle in *a*, and the second in *b*. Draw *a*G, *b*H, *c*I, and let the figure ABC*fghi* be made similar to the figure *abc*FGHI; and the trapezium *fghi* will be that which was required to be described.

For let the two first circles FSG, FTH cut one the other in K; join PK, QK, RK, *a*K, *b*K, *c*K, and produce QP to L. The angles F*a*K, F*b*K, F*c*K at the circumferences are the halves of the angles FPK, FQK, FRK, at the centres, and therefore equal to LPK, LQK, LRK, the halves of those angles. Wherefore the figure PQRK is equiangular and similar to the figure *abc*K, and consequently *ab* is to *bc* as PQ to QR, that is, as AB to BC. But by construction, the angles *f*A*g*, *f*B*h*, *f*C*i*, are equal to the angles F*a*G, F*b*H, F*c*I. And therefore the figure ABC*fghi* may be completed similar to the

figure *abc*FGHI. Which done a trapezium *fghi* will be constructed similar to the trapezium FGHI, and which by its angles *f, g, h, i* will touch the right lines ABC, AD, BD, CE. Q.E.F.

Cor. Hence a right line may be drawn whose parts intercepted in a given order, between four right lines given by position, shall have a given proportion among themselves. Let the angles FGH, GHI, be so far increased that the right lines FG, GH, HI, may lie *in directum*; and by constructing the Problem in this case, a right line *fghi* will be drawn, whose parts *fg, gh, hi*, intercepted between the four right lines given by position, AB and AD, AD and BD, BD and CE, will be one to another as the lines FG, GH, HI, and will observe the same order among them selves. But the same thing may be more readily done in this manner.



Produce AB to K and BD to L, so as BK may be to AB as HI to GH; and DL to BD as GI to FG; and join KL meeting the right line CE in *i*. Produce *i*L to M, so as LM may be to *i*L as GH to HI; then draw MQ parallel to LB, and meeting the right line AD in *g*, and join *gi* cutting AB, BD in *f, h*; I say, the thing is done.

For let M*g* cut the right line AB in Q, and AD the right line KL in S, and draw AP parallel to BD, and meeting *i*L in P, and *g*M to L*h* (*gi* to *hi*, M*i* to L*i*, GI to HI, AK to BK) and AP to BL, will be in the same ratio. Cut DL in R, so as DL to RL may be in that same ratio; and because *g*S to *g*M, AS to AP, and DS to DL are proportional; therefore (*ex aequo*) as *g*S to L*h*, so will AS be to BL, and DS to RL; and mixtly, BL - RL to L*h* - BL, as AS - DS to *g*S - AS. That is, BR is to B*h* as AD is to A*g*, and therefore as BD to *g*Q. And alternately BR is to BD as B*h* to *g*Q, or as *fh* to *fg*. But by construction the line BL was cut in D and R in the same ratio as the line FI in G and H;

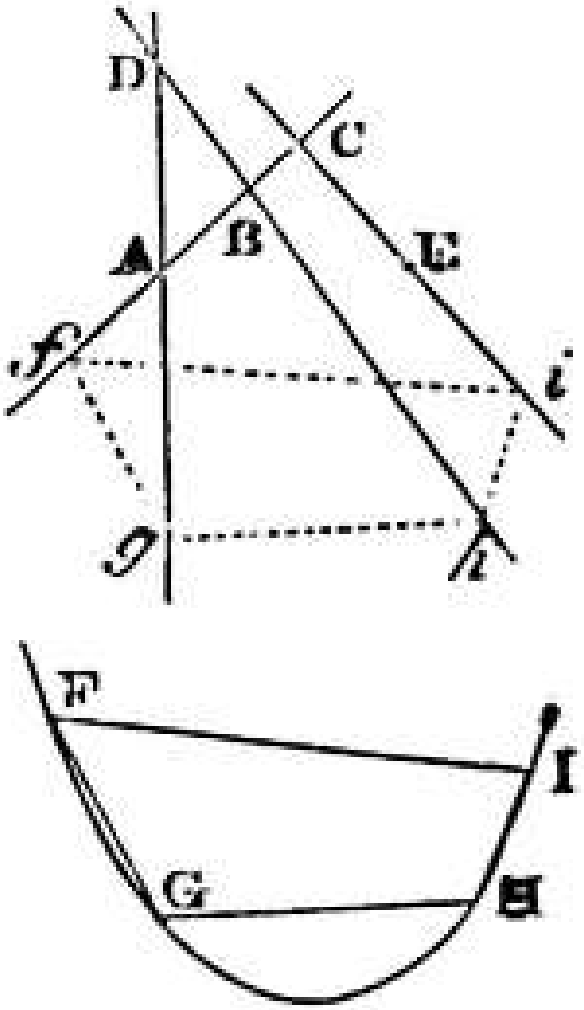
and therefore BR is to BD as FH to FG. Wherefore *fh* is to *fg* as FH to FG. Since, therefore, *gi* to *hi* likewise is as M*i* to L*i*, that is, as GI to HI, it is manifest that the lines FI, *fi*, are similarly cut in G and H, *g* and *h*. Q.E.F.

In the construction of this Corollary, after the line LK is drawn cutting CE in *i*, we may produce *i*E to V, so as EV may be to E*i* as FH to HI, and then draw V*f* parallel to BD. It will come to the same, if about the centre *i* with an interval IH, we describe a circle cutting BD in X, and produce *i*X to Y so as *i*Y may be equal to IF, and then draw Y*f* parallel to BD.

Sir Christopher Wren and Dr. Wallis have long ago given other solutions of this Problem.

PROPOSITION XXIX. PROBLEM XXI.

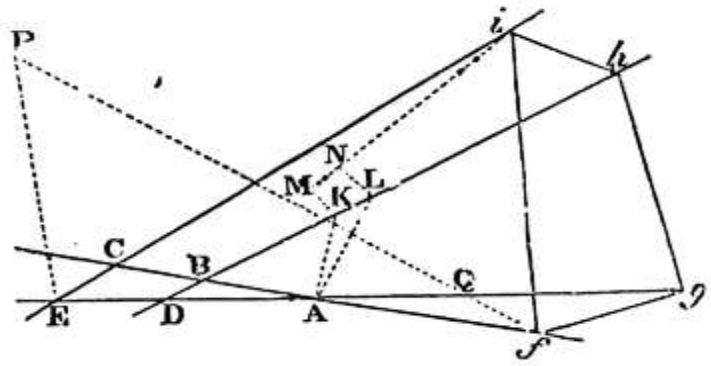
To describe a trajectory given in kind, that may be cut by four right lines given by position, into parts given in order, kind, and proportion.



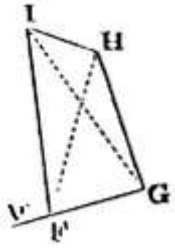
Suppose a trajectory is to be described that may be similar to the curve line FGHI, and whose parts, similar and proportional to the parts FG, GH, HI of the other, may be intercepted between the right lines AB and AD, AD, and BD, BD and CE given by position, viz., the first between the first pair of those lines, the second between the second, and the third between the third. Draw the right lines FG, GH, HI, FI; and (by Lem. XXVII) describe a trapezium *fghi* that may be similar to the trapezium FGHI, and whose angles *f, g, h, i*, may touch the right lines given by position AB, AD, BD, CE, severally according to their order. And then about this trapezium describe a trajectory, that trajectory will be similar to the curve line FGHI.

SCHOLIUM.

This problem may be likewise constructed in the following manner. Joining FG, GH, HI, FI, produce GF to V, and join FH, IG, and make



the angles CAK, DAL equal to the angles FGH, VFH. Let AK, AL meet the right line BD in K and L, and thence draw KM, LN, of which let KM make the angle AKM equal to the angle GHI, and be itself to AK as HI is to GH; and let LN make the angle



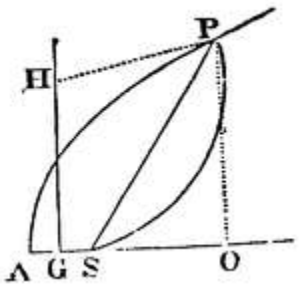
ALN equal to the angle FHI, and be itself to AL as HI to FH. But AK, KM. AL, LN are to be drawn towards those sides of the lines AD, AK, AL, that the letters CAKMC, ALKA, DALND may be carried round in the same order as the letters FGHIF; and draw MN meeting the right line CE in *i*. Make the angle *i*EP equal to the angle IGF, and let PE be to E*i* as FG to GI; and through P draw PQ*f* that may with the right line ADE contain an angle PQE equal to the angle FIG, and may meet the right line AB in *f*, and join *fi*. But PE and PQ are to be drawn towards those sides of the lines CE, PE, that the circular order of the letters PE*i*P and PEQP may be the same as of the letters FGHIF; and if upon the line *fi*, in the same order of letters, and similar to the trapezium FGHI, a trapezium *fghi* is constructed, and a trajectory given in kind is circumscribed about it, the Problem will be solved.

So far concerning the finding of the orbits. It remains that we determine the motions of bodies in the orbits so found.

Section VI: How the motions are to be found in given orbits

PROPOSITION XXX. PROBLEM XXII.

To find at any assigned time the place of a body moving in, a given parabolic trajectory.



Let S be the focus, and A the principal vertex of the parabola; and suppose 4AS M equal to the parabolic area to be cut off APS, which either was described by the radius SP, since the body's departure from the vertex, or is to be described thereby before its arrival there. Now the quantity of that area to be cut off is known from the time which is proportional to it. Bisect AS in G, and erect the perpendicular GH equal to BM, and a circle described about the centre H, with the interval HS, will cut the parabola in the place P required. For letting fall PO perpendicular on the axis, and drawing PH, there will be $AG^2 + GH^2$ (= HP^2 = +) = $AO^2 + PO^2$ - 2GAO + 2 GH + PO + $AG^2 + GH^2$. Whence 2GH PO (=$AO^2 + PO^2$ - 2GAO) = AO^2 + ¾PO^2. For AO^2 write; then dividing all the terms by 2PO, and multiplying them by 2AS, we shall have $^4/_3$GH AS (= $^1/_6$AO PO + ½AS PO = PO = PO = to the area = to the area APS. But GH was 3M, and therefore $^4/_3$GH AS is 4AS M. Wherefore the area cut off APS is equal to the area that was to be cut off 4AS M. Q.E.D.

Cor. 1. Hence GH is to AS as the time in which the body described the arc AP to the time in which the body described the arc between the vertex A and the perpendicular erected from the focus S upon the axis.

Cor. 2. And supposing a circle ASP perpetually to pass through the moving body P, the velocity of the point H is to the velocity which the body had in the vertex A as 3 to 8; and therefore in the same ratio is the line GH to the right line which the body, in the time of its moving from A to P, would describe with that velocity which it had in the vertex A.

Cor. 3. Hence, also, on the other hand, the time may be found in which the body has described any assigned arc AP. Join AP, and on its middle point erect a perpendicular meeting the right line GH in H.

LEMMA XXVIII.

There is no oval figure whose area, cut off by right lines at pleasure, can be universally found by means of equations of any number of finite terms and dimensions.

Suppose that within the oval any point is given; about which as a pole a right line is perpetually revolving with an uniform motion, while in that right line a moveable point going out from the pole moves always forward with a velocity proportional to the square of that right line with in the oval. By this motion that point will describe a spiral with infinite circumgyrations. Now if a portion of the area of the oval cut off by that right line could be found by a finite equation, the distance of the point from the pole, which is proportional to this area, might be found by the same equation, and therefore all the points of the spiral might be found by a finite equation also; and therefore the intersection of a right line given in position with the spiral might also be found by a finite equation. But every right line infinitely produced cuts a spiral in an infinite number of points; and the equation by which any one intersection of two lines is found at the same time exhibits all their intersections by as many roots, and therefore rises to as many dimensions as there are intersections. Be cause two circles mutually cut one another in two points, one of those intersections is not to be found but by an equation of two dimensions, by which the other intersection may be also found. Because there may be four intersections of two conic sections, any one of them is not to be found universally, but by an equation of four dimensions, by which they may be all found together. For

if those intersections are severally sought, be cause the law and condition of all is the same, the calculus will be the same in every case, and therefore the conclusion always the same; which must therefore comprehend all those intersections at once within itself, and exhibit them all indifferently. Hence it is that the intersections of the conic scions with the curves of the third order, because they may amount to six, come out together by equations of six dimensions; and the intersections of two curves of the third order, because they may amount to nine, come out together by equations of nine dimensions. If this did not necessarily happen, we might reduce all solid to plane Problems, and those higher than solid to solid Problems. But here I speak of curves irreducible in power. For if the equation by which the curve is defined may be reduced to a lower power, the curve will not be one single curve, but composed of two, or more, whose intersections may be severally found by different calculusses. After the same manner the two intersections of right lines with the conic sections come out always by equations of two dimensions; the three intersections of right lines with the irreducible curves of the third order by equations of three dimensions; the four intersections of right lines with the irreducible curves of the fourth order, by equations of four dimensions; and so on *in infinitum*. Wherefore the innumerable intersections of a right line with a spiral, since this is but one simple curve and not reducible to more curves, require equations infinite in number of dimensions and roots, by which they may be all exhibited together. For the law and calculus of all is the same. For if a perpendicular is let fall from the pole upon that intersecting right line, and that perpendicular together with the intersecting line revolves about the pole, the intersections of the spiral will mutually pass the one into the other; and that which was first or nearest, after one revolution, will be the second; after two, the third; and so on: nor will the equation in the mean time be changed but as the magnitudes of those quantities are changed, by which the position of the intersecting line is determined. Wherefore since those quantities after every revolution return to their first magnitudes, the equation will return to its first form; and consequently one and the same equation will exhibit all the intersections, and will therefore have an infinite number of roots, by which they may be all exhibited. And therefore the intersection of a right line with a spiral cannot be universally found by any finite equation; and of consequence

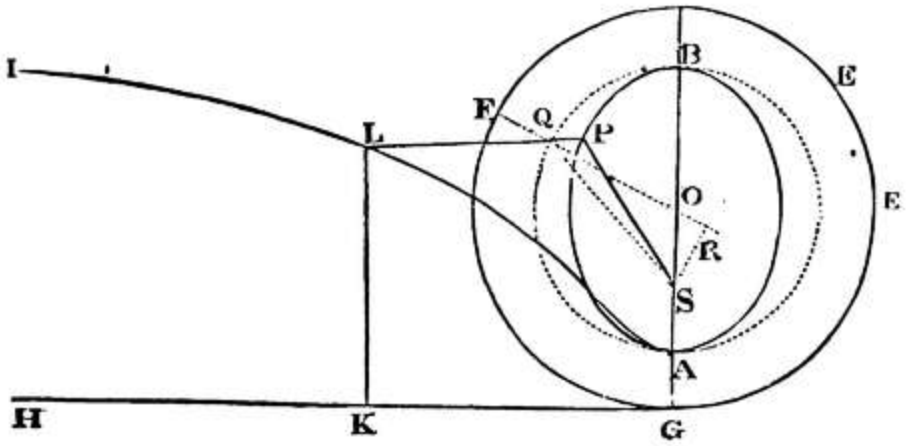
there is no oval figure whose area, cut off by right lines at pleasure, can be universally exhibited by any such equation.

By the same argument, if the interval of the pole and point by which the spiral is described is taken proportional to that part of the perimeter of the oval which is cut off; it may be proved that the length of the perimeter cannot be universally exhibited by any finite equation. But here I speak of ovals that are not touched by conjugate figures running out *in infinitum*.

Cor. Hence the area of an ellipsis, described by a radius drawn from the focus to the moving body, is not to be found from the time given by a finite equation; and therefore cannot be determined by the description of curves geometrically rational. Those curves I call geometrically rational, all the points whereof may be determined by lengths that are definable by equations; that is, by the complicated ratios of lengths. Other curves (such as spirals, quadratrixes, and cycloids) I call geometrically irrational. For the lengths which are or are not as number to number (according to the tenth Book of Elements) are arithmetically rational or irrational. And therefore I cut off an area of an ellipsis proportional to the time in which it is described by a curve geometrically irrational, in the following manner.

PROPOSITION XXXI. PROBLEM XXIII.

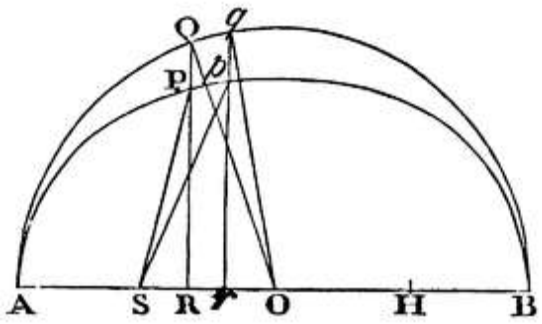
To find the place of a body moving in a given elliptic trajectory at any assigned time.



Suppose A to be the principal vertex, S the focus, and O the centre of the ellipsis APB; and let P be the place of the body to be found. Produce OA to G so as OG may be to OA as OA to OS. Erect the perpendicular GH; and about the centre O, with the interval OG, describe the circle GEF; and on the ruler GH, as a base, suppose the wheel GEF to move forwards, revolving about its axis, and in the mean time by its point A describing the cycloid ALI. Which done, take GK to the perimeter GEFG of the wheel, in the ratio of the time in which the body proceeding from A described the arc AP, to the time of a whole revolution in the ellipsis. Erect the perpendicular KL meeting the cycloid in L; then LP drawn parallel to KG will meet the ellipsis in P, the required place of the body.

For about the centre O with the interval OA describe the semi-circle AQB, and let LP, produced, if need be, meet the arc AQ in Q, and join SQ, OQ. Let OQ meet the arc EFG in F, and upon OQ let fall the perpendicular SR. The area APS is as the area AQS, that is, as the difference between the sector OQA and the triangle OQS, or as the difference of the rectangles ½OQ AQ, and ½OQ SR, that is, because ½OQ is given, as the difference between the arc AQ and the right line SR; and therefore (because of the equality of the given ratios SR to the sine of the arc AQ, OS to OA, OA to OG, AQ to GF; and by division, AQ - SR to GF - sine of the arc AQ) as GK, the difference between the arc GF and the sine of the arc AQ. Q.E.D.

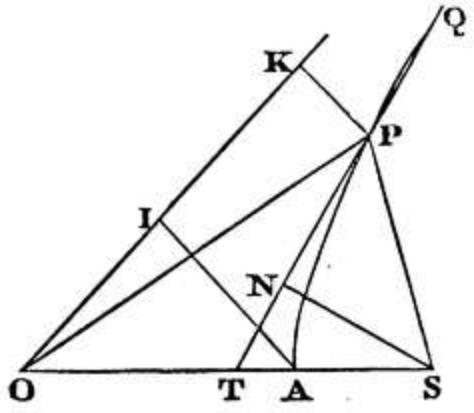
SCHOLIUM.



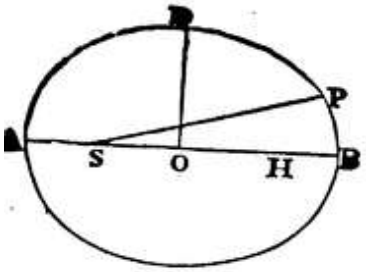
But since the description of this curve is difficult, a solution by approximation will be preferable. First, then, let there be found a certain

angle B which may be to an angle of 57,29578 degrees, which an arc equal to the radius subtends, as SH, the distance of the foci, to AB, the diameter of the ellipsis. Secondly, a certain length L, which may be to the radius in the same ratio inversely. And these being found, the Problem may be solved by the following analysis. By any construction (or even by conjecture), suppose we know P the place of the body near its true place *p*. Then letting fall on the axis of the ellipsis the ordinate PR from the proportion of the diameters of the ellipsis, the ordinate RQ of the circumscribed circle AQB will be given; which ordinate is the sine of the angle AOQ, supposing AO to be the radius, and also cuts the ellipsis in P. It will be sufficient if that angle is found by a rude calculus in numbers near the truth. Suppose we also know the angle proportional to the time, that is, which is to four right angles as the time in which the body described the arc A*p*, to the time of one revolution in the ellipsis. Let this angle be N. Then take an angle D, which may be to the angle B as the sine of the angle AOQ to the radius; and an angle E which may be to the angle N - AOQ + D as the length L to the same length L diminished by the cosine of the angle AOQ, when that angle is less than a right angle, or increased thereby when greater. In the next place, take an angle F that may be to the angle B as the sine of the angle AOQ + E to the radius, and an angle G, that may be to the angle N - AOQ - E + F as the length L to the same length L diminished by the cosine of the angle AOQ + E, when that angle is less than a right angle, or increased thereby when greater. For the third time take an angle H, that may be to the angle B as the sine of the angle AOQ + E + G to the radius; and an angle I to the angle N - AOQ - E - G + H, as the length L is to the same length L diminished by the cosine of the angle AOQ + E + G, when that angle is less than a right angle, or increased thereby when greater. And so we may proceed *in infinitum*. Lastly, take the angle AO*q* equal to the angle AOQ + E + G + I +, &c. and from its cosine O*r* and the ordinate *pr*, which is to its sine *qr* as the lesser axis of the ellipsis to the greater, we shall have *p* the correct place of the body. When the angle N - AOQ + D happens to be negative, the sign + of the angle E must be every where changed into -, and the sign - into +. And the same thing is to be understood of the signs of the angles G and I, when the angles N - AOQ - E + F, and N - AOQ - E - G + H come out negative. But the infinite series AOQ + E + G + I +, &c. converges so very fast, that it will be scarcely ever needful to proceed beyond the second term E. And the

calculus is founded upon this Theorem, that the area APS is as the difference between the arc AQ and the right line let fall from the focus S perpendicularly upon the radius OQ.



And by a calculus not unlike, the Problem is solved in the hyperbola. Let its centre be O, its vertex A, its focus S, and asymptote OK; and suppose the quantity of the area to be cut off is known, as being proportional to the time. Let that be A, and by conjecture suppose we know the position of a right line SP, that cuts off an area APS near the truth. Join OP, and from A and P to the asymptote draw AI, PK parallel to the other asymptote; and by the table of logarithms the area AIKP will be given, and equal thereto the area OPA, which subducted from the triangle OPS, will leave the area cut off APS. And by applying 2APS - SA, or 2A - SAPS, the double difference of the area A that was to be cut off, and the area APS that is cut off, to the line SN that is let fall from the focus S, perpendicular upon the tangent TP, we shall have the length of the chord PQ. Which chord PQ is to be inscribed between A and P, if the area APS that is cut off be greater than the area A that was to be cut off, but towards the contrary side of the point P, if otherwise: and the point Q will be the place of the body more accurately. And by repeating the computation the place may be found perpetually to greater and greater accuracy.



And by such computations we have a general analytical resolution of the Problem. But the particular calculus that follows is better fitted for astronomical purposes. Supposing AO, OB, OD, to be the semi-axis of the ellipsis, and L its latus rectum, and D the difference betwixt the lesser semi-axis OD, and ½L the half of the latus rectum: let an angle Y be found, whose sine may be to the radius as the rectangle under that difference D, and AO + OD the half sum of the axes to the square of the greater axis AB. Find also an angle Z, whose sine may be to the radius as the double rectangle under the distance of the foci SH and that difference D to triple the square of half the greater semi-axis AO. Those angles being once found, the place of the body may be thus determined. Take the angle T proportional to the time in which the arc BP was described, or equal to what is called the mean motion; and an angle V the first equation of the mean motion to the angle Y, the greatest first equation, as the sine of double the angle T is to the radius; and an angle X, the second equation, to the angle Z, the second greatest equation, as the cube of the sine of the angle T is to the cube of the radius. Then take the angle BHP the mean motion equated equal to T + X + V, the sum of the angles T, V, X, if the angle T is less than a right angle; or equal to T + X - V, the difference of the same, if that angle T is greater than one and less than two right angles; and if HP meets the ellipsis in P, draw SP, and it will cut off the area BSP nearly proportional to the time.

This practice seems to be expeditious enough, because the angles V and X, taken in second minutes, if you please, being very small, it will be sufficient to find two or three of their first figures. But it is likewise sufficiently accurate to answer to the theory of the planet's motions. For even in the orbit of Mars, where the greatest equation of the centre amounts to ten degrees, the error will scarcely exceed one second. But when the angle of the mean motion equated BHP is found, the angle of the true motion BSP, and the distance SP, are readily had by the known methods.

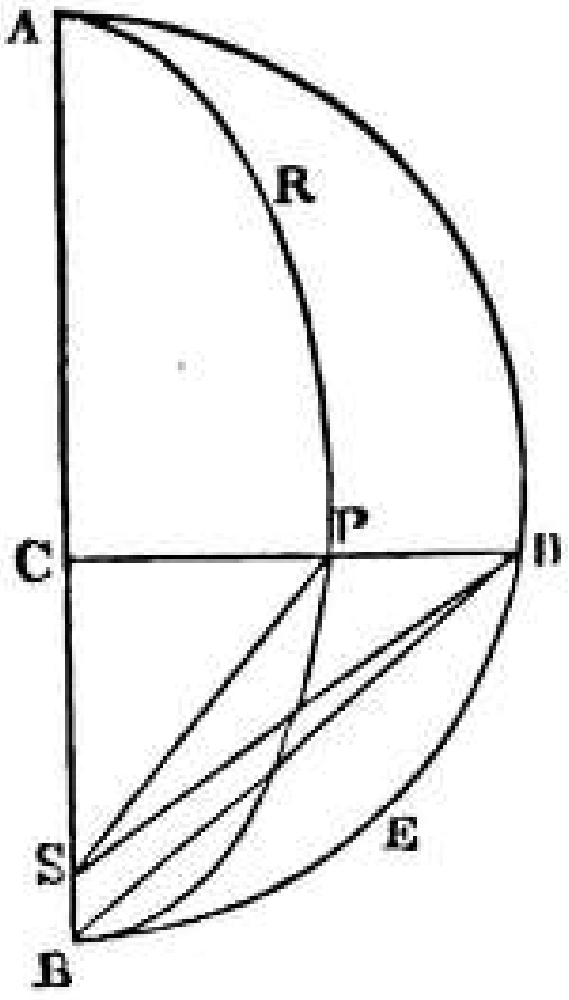
And so far concerning the motion of bodies in curve lines. But it may also come to pass that a moving body shall ascend or descend in a right line; and I shall now go on to explain what belongs to such kind of motions.

Section VII: Concerning the rectilinear ascent and descent of bodies

PROPOSITION XXXII. PROBLEM XXIV.

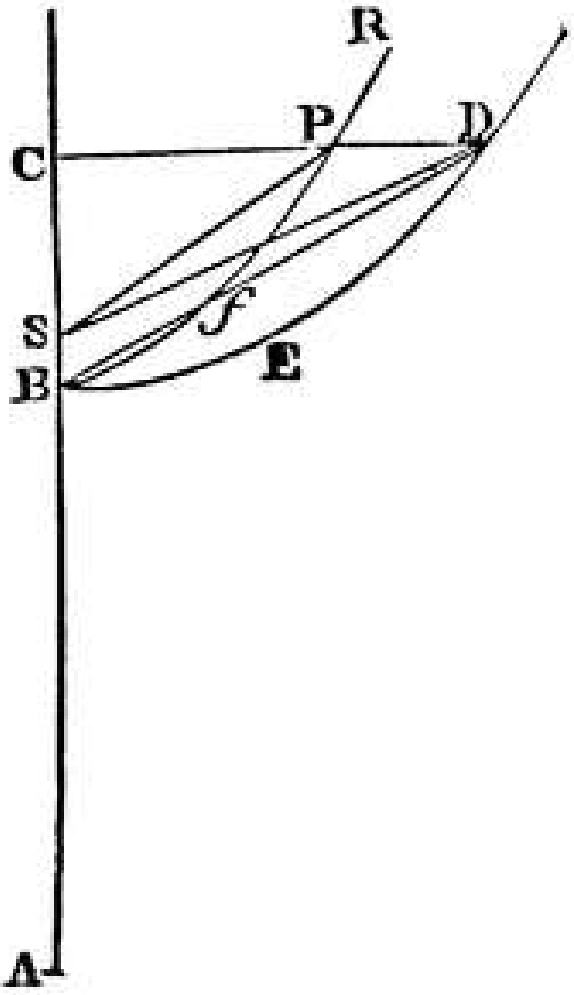
Supposing that the centripetal force is reciprocally proportional to the square of the distance of the places from the centre; it is required to define the spaces which a body, falling directly, describes in given times.

Case 1. If the body does not fall perpendicularly, it will (by Cor. 1

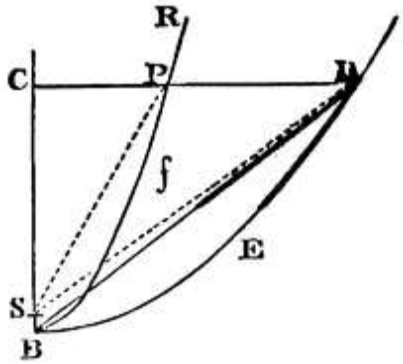


Prop. XIII) describe some conic section whose focus is A placed in the centre of force. Suppose that conic section to be ARPB and its focus S. And, first, if the figure be an ellipsis,

upon the greater axis thereof AB describe the semi-circle ADB, and let the right line DPC pass through the falling body, making right angles with the axis; and drawing DS, PS, the area ASD will be proportional to the area ASP, and therefore also to the time. The axis AB still remaining the same, let the breadth of the ellipsis be perpetually diminished, and the area ASD will always remain proportional to the time. Suppose that breadth to be diminished *in infinitum*; and the orbit APB in that case coinciding with the axis AB, and the focus S with the extreme point of the axis B, the body will descend in the right line AC, and the area ABD will become proportional to the time. Wherefore the space AC will be given which the body describes in a given time by its perpendicular fall from the place A, if the area ABD is taken proportional to the time, and from the point D the right line DC is let fall perpendicularly on the right line AB. Q.E.I.



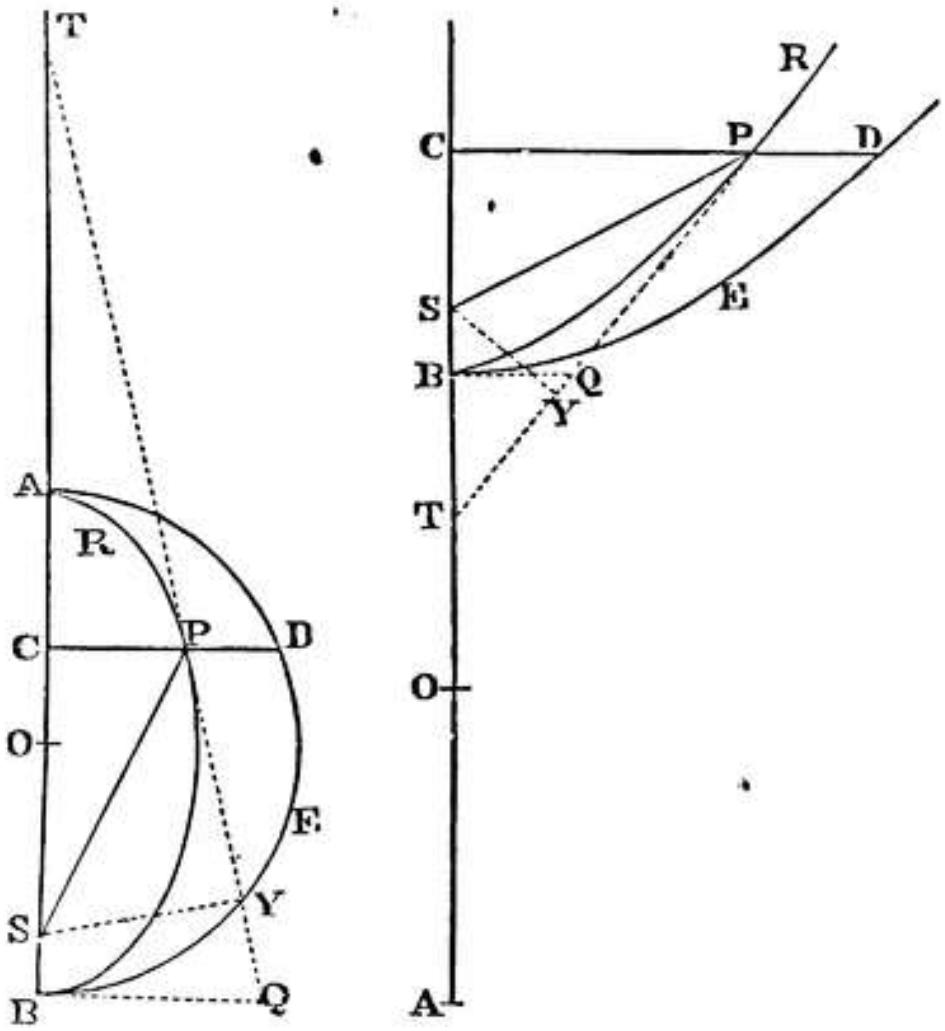
Case 2. If the figure RPB is an hyperbola, on the same principal diameter AB describe the rectangular hyperbola BED; and because the areas CSP, CB*f*P, SP*f*B, are severally to the several areas CSD, CBED, SDEB, in the given ratio of the heights CP, CD, and the area SP*f*B is proportional to the time in which the body P will move through the arc P*f*B. the area SDEB will be also proportional to that time. Let the latus rectum of the hyperbola RPB be diminished *in infinitum*, the latus transversum remaining the same; and the arc PB will come to coincide with the right line CB, and the focus S, with the vertex B, and the right line SD with the right line BD. And therefore the area BDEB will be proportional to the time in which the body C, by its perpendicular descent, describes the line CB. Q.E.I.



Case 3. And by the like argument, if the figure RPB is a parabola, and to the same principal vertex B another parabola BED is described, that may always remain given while the former para bola in whose perimeter the body P moves, by having its latus rectum diminished and reduced to nothing, comes to coincide with the line CB, the parabolic segment BDEB will be proportional to the time in which that body P or C will descend to the centre S or B. Q.E.I

PROPOSITION XXXIII. THEOREM IX.

The things above found being supposed. I say, that the velocity of a falling body in any place C *is to the velocity of a body, describing a circle about the centre* B *at the distance* BC*, in the subduplicate ratio of* AC*, the distance of the body from the remoter vertex* A *of the circle or rectangular hyperbola, to* ½AB*, the principal semi-diameter of the figure.*



Let AB, the common diameter of both figures RPB, DEB, be bisected in O; and draw the right line PT that may touch the figure RPB in P, and likewise cut that common diameter AB (produced, if need be) in T; and let SY be perpendicular to this line, and BQ to this diameter, and suppose the latus rectum of the figure RPB to be L. From Cor. 9, Prop. XVI, it is manifest that the velocity of a body, moving in the line RPB about the centre S, in any place P, is to the velocity of a body describing a circle about the same centre, at the distance SP, in the subduplicate ratio of the rectangle ½L SP to SY^2. For by the properties of the conic sections ACB is to CP^2 as 2AO to L, and therefore is equal to L. Therefore those velocities are to each other in the subduplicate ratio of to SY^2. Moreover, by the properties of the conic sections, CO is to BO as BO to TO, and (by composition or division) as CB to BT. Whence (by division or composition) BO - or + CO will be to

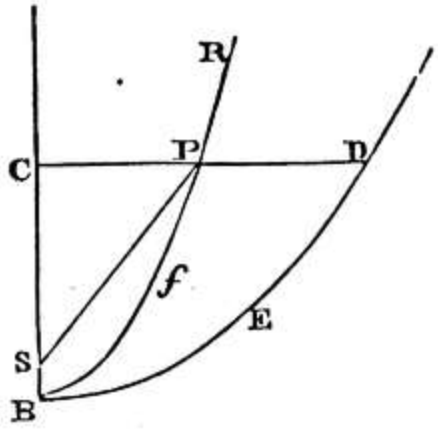
BO as CT to BT, that is, AC will be to AO as CP to BQ; and therefore is equal to. Now suppose CP, the breadth of the figure RPB, to be diminished *in infinitum*, so as the point P may come to coincide with the point C, and the point S with the point B, and the line SP with the line BC, and the line SY with the line BQ; and the velocity of the body now descending perpendicularly in the line CB will be to the velocity of a body describing a circle about the centre B, at the distance BC; in the subduplicate ratio of to SY^2, that is (neglecting the ratios of equality of SP to BC, and BQ^2 to SY^2), in the subduplicate ratio of AC to AO, or ½AB. Q.E.D.

Cor. 1. When the points B and S come to coincide, TC will become to TS as AC to AO.

Cor. 2. A body revolving in any circle at a given distance from the Centre, by its motion converted upwards, will ascend to double its distance from the centre.

PROPOSITION XXXIV. THEOREM X.

If the figure BED *is a parabola, I say, that the velocity of a falling body in any place* C *is equal to the velocity by which a body may uniformly describe a circle about the centre* B *at half the interval* BC.

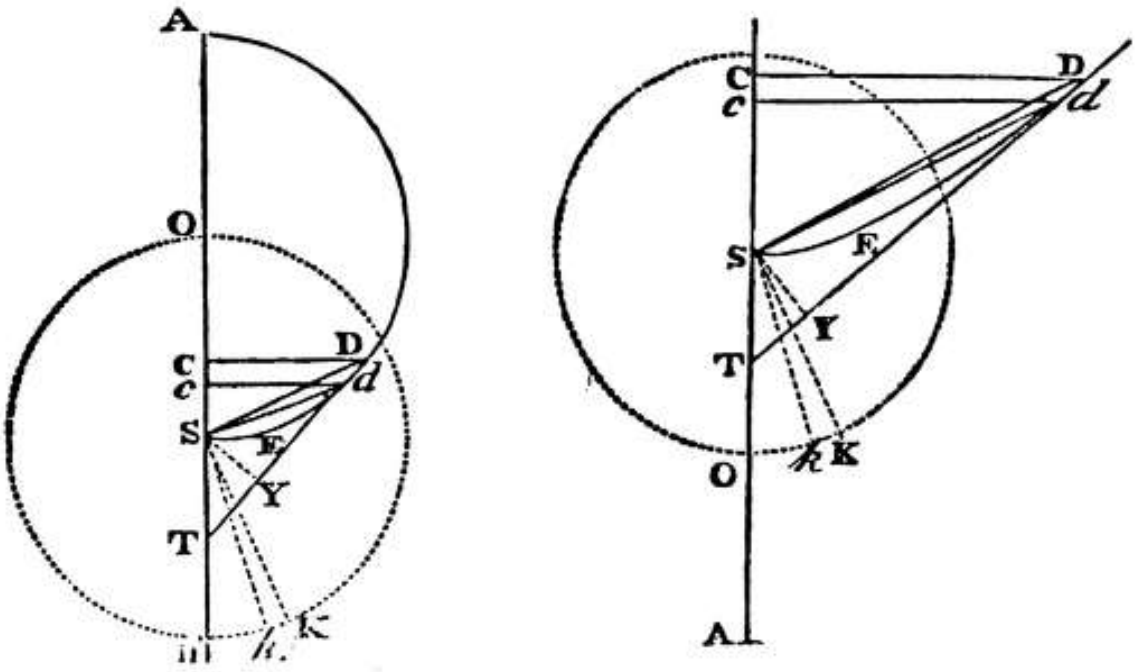


For (by Cor. 7, Prop. XVI) the velocity of a body describing a parabola RPB about the centre S, in any place P, is equal to the velocity of a body uniformly describing a circle about the same centre S at half the interval SP. Let the breadth CP of the parabola be diminished *in infinitum*, so as the

parabolic arc P*f*B may come to coincide with the right line CB, the centre S with the vertex B, and the interval SP with the interval BC, and the proposition will be manifest. Q.E.D.

PROPOSITION XXXV. THEOREM XI.

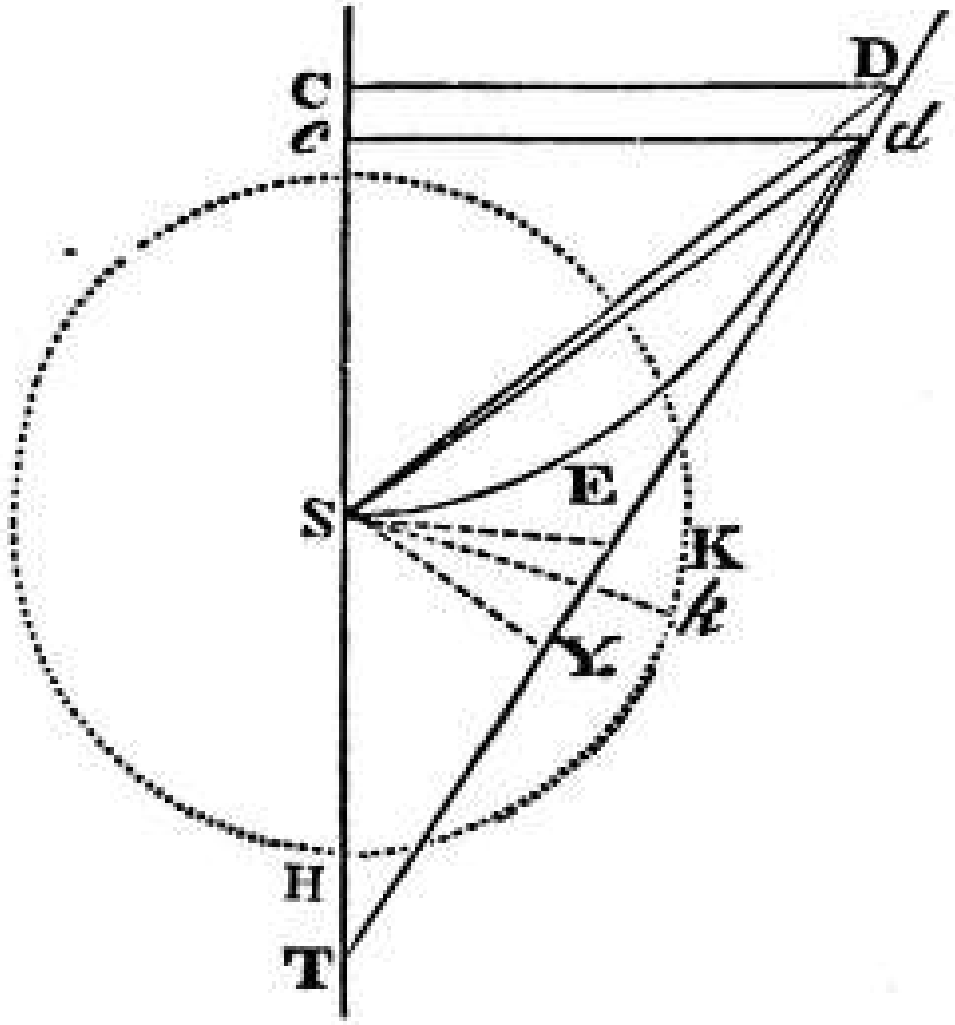
The same things supposed, I say, that the area of the figure DES*, described by the indefinite radius* SD*, is equal to the area which a body with a radius equal to half the latus rectum of the figure* DES*, by uniformly revolving about the centre* S*, may describe in the same time.*



For suppose a body C in the smallest moment of time describes in falling the infinitely little line C*c*, while another body K, uniformly revolving about the centre S in the circle OK*k*, describes the arc K*k*. Erect the perpendiculars CD, *cd*, meeting the figure DES in D, *d*. Join SD, S*d*, SK, S*k*, and draw D*d* meeting the axis AS in T, and thereon let fall the perpendicular SY.

Case 1. If the figure DES is a circle, or a rectangular hyperbola, bisect its transverse diameter AS in O, and SO will be half the latus rectum. And because TC is to TD as C*c* to D*d*, and TD to TS as CD to SY; *ex aequo* TC

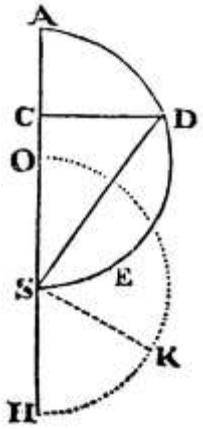
will be to TS as CD C*c* to SY D*d*. But (by Cor. 1, Prop. XXXIII) TC is to TS as AC to AO; to wit, if in the coalescence of the points D, *d*, the ultimate ratios of the lines are taken. Wherefore AC is to AO or SK as CD C*c* to SY D*d*. Farther, the velocity of the descending body in C is to the velocity of a body describing a circle about the centre S, at the interval SC, in the subduplicate ratio of AC to AO or SK (by Prop. XXXIII); and this velocity is to the velocity of a body describing the circle OK*k* in the subduplicate ratio of SK to SC (by Cor. 6, Prop IV); and, *ex aequo*, the first velocity to the last, that is, the little line C*c* to the arc K*k*, in the subduplicate ratio of AC to SC, that is, in the ratio of AC to CD. Wherefore CD C*c* is equal to AC K*k*, and consequently AC to SK as AC K*k* to SY D*d*, and thence SK K*k* equal to SY D*d*, and ½SK K*k* equal to ½SY D*d*, that is, the area KS*k* equal to the area SD*d*. Therefore in every moment of time two equal particles, KS*k* and SD*d*, of areas are generated, which, if their magnitude is diminished, and their number increased *in infinitum*, obtain the ratio of equality, and consequently (by Cor. Lem. IV), the whole areas together generated are always equal. Q.E.D.



Case 2. But if the figure DES is a parabola, we shall find, as above, CD C*c* to SY D*d* as TC to TS, that is, as 2 to 1; and that therefore ¼CD C*c* is equal to ½SY D*d*. But the velocity of the falling body in C is equal to the velocity with which a circle may be uniformly described at the interval ½SC (by Prop. XXXIV). And this velocity to the velocity with which a circle may be described with the radius SK, that is, the little line C*c* to the arc K*k*, is (by Cor. 6, Prop. IV) in the subduplicate ratio of SK to ½SC; that is, in the ratio of SK to ½CD. Wherefore ½SK K*k* is equal to ¼CD C*c*, and therefore equal to ½SY D*d*; that is, the area KS*k* is equal to the area SD*d*, as above. Q.E.D.

PROPOSITION XXXVI. PROBLEM XXV.

To determine the times of the descent of a body falling from place A.

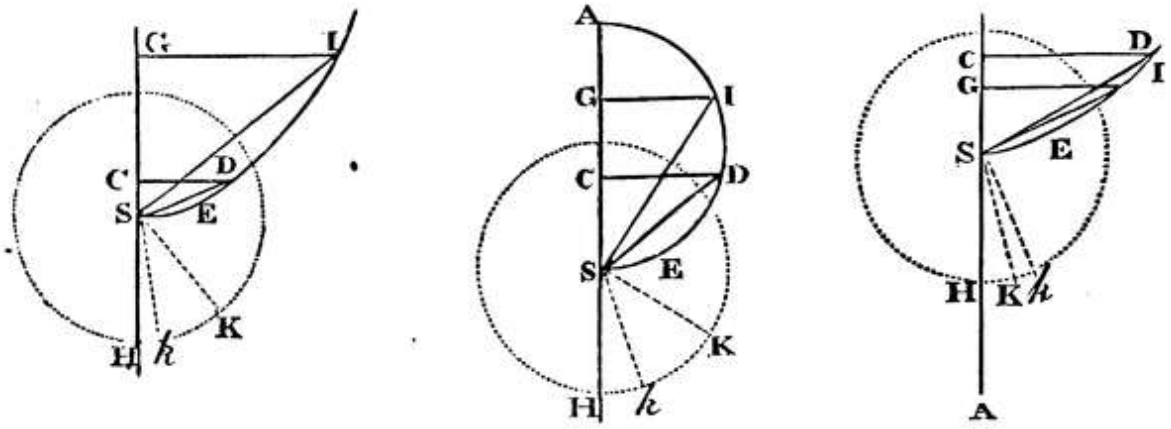


Upon the diameter AS, the distance of the body from the centre at the beginning, describe the semi-circle ADS, as likewise the semi-circle OKH equal thereto, about the centre S. From any place C of the body erect the ordinate CD. Join SD, and make the sector OSK equal to the area ASD. It is evident (by Prop. XXXV) that the body in falling will describe the space AC in the same time in which another body, uniformly revolving about the centre S, may describe the arc OK. Q.E.F.

PROPOSITION XXXVII. PROBLEM XXVI.

To define the times of the ascent or descent of a body projected upwards or downwards from a given place.

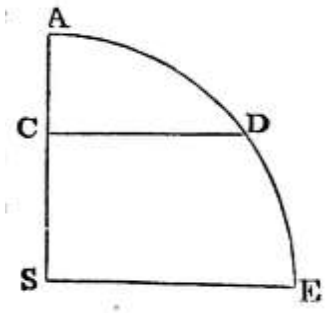
Suppose the body to go off from the given place G, in the direction of the line GS, with any velocity. In the duplicate ratio of this velocity to the uniform velocity in a circle, with which the body may revolve about



the centre S at the given interval SG, take GA to ½AS. If that ratio is the same as of the number 2 to 1, the point A is infinitely remote; in which case a parabola is to be described with any latus rectum to the vertex S, and axis SG; as appears by Prop. XXXIV. But if that ratio is less or greater than the ratio of 2 to 1, in the former case a circle, in the latter a rectangular hyperbola, is to be described on the diameter SA; as appears by Prop. XXXIII. Then about the centre S, with an interval equal to half the latus rectum, describe the circle H*k*K; and at the place G of the ascending or descending body, and at any other place C, erect the perpendiculars GI, CD, meeting the conic section or circle in I and D. Then joining SI, SD, let the sectors HSK, HS*k* be made equal to the segments SEIS, SEDS. and (by Prop. XXXV) the body G will describe the space GC in the same time in which the body K may describe the arc K*k*. Q.E.F.

PROPOSITION XXXVIII. THEOREM XII.

Supposing that the centripetal force is proportional to the altitude or distance of places from the centre. I say, that the times and velocities of falling bodies, and the spaces which they describe, are respectively proportional to the arcs, and the right and versed sines of the arcs.



Suppose the body to fall from any place A in the right line AS; and about the centre of force S, with the interval AS, describe the quadrant of a circle AE; and let CD be the right sine of any arc AD; and the body A will in the time AD in falling describe the space AC, and in the place C will acquire the velocity CD.

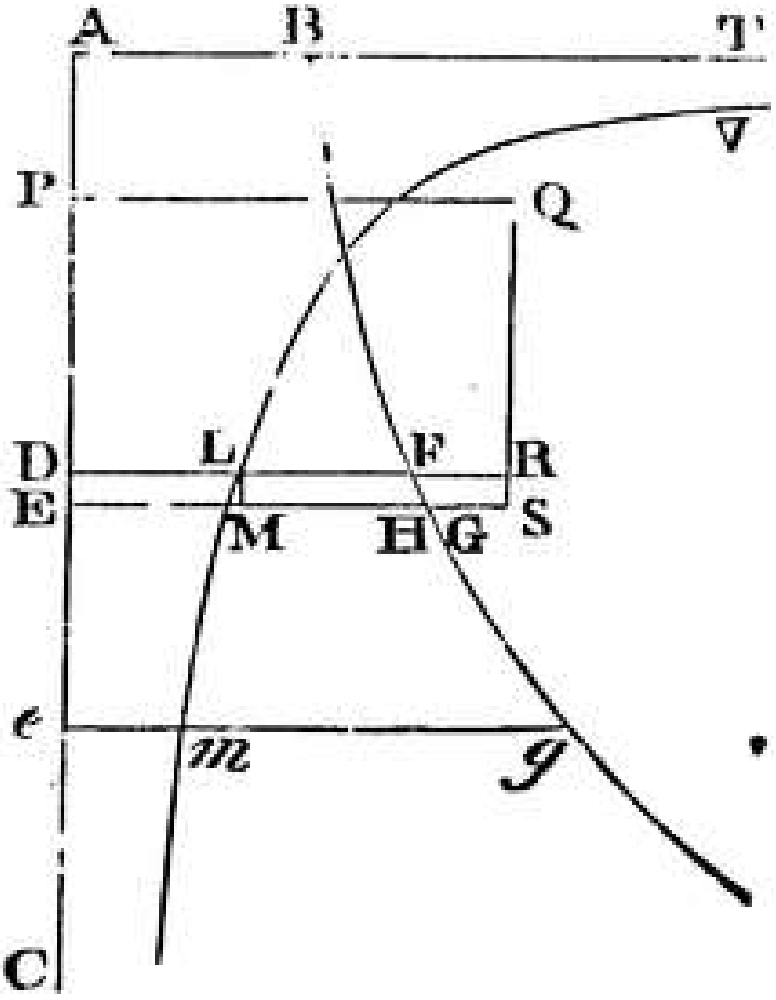
This is demonstrated the same way from Prop. X, as Prop. XXXII was demonstrated from Prop. XI.

Cor. 1. Hence the times are equal in which one body falling from the place A arrives at the centre S, and another body revolving describes the quadrantal arc ADE.

Cor. 2. Wherefore all the times are equal in which bodies falling from whatsoever places arrive at the centre. For all the periodic times of revolving bodies are equal (by Cor. 3, Prop. IV).

PROPOSITION XXXIX. PROBLEM XXVII.

Supposing a centripetal force of any kind, and granting the quadratures of curvilinear figures; it is required to find the velocity of a body, ascending or descending in a right line, in the several places through which it passes; as also the time in which it will arrive at any place: and vice versa.



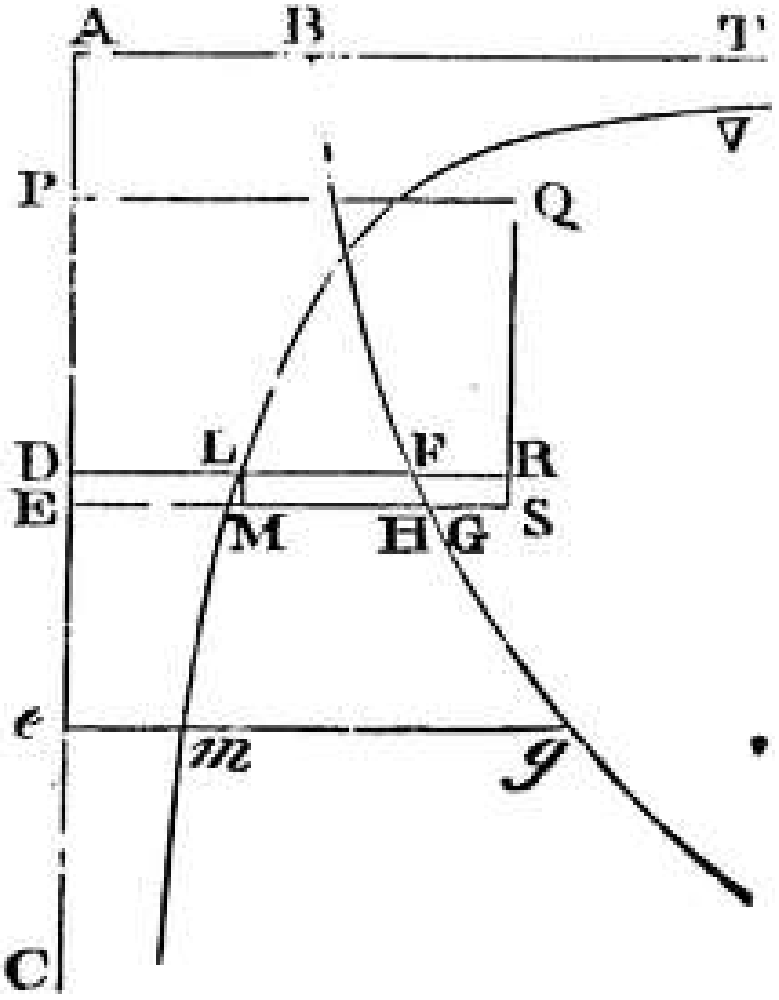
Suppose the body E to fall from any place A in the right line ADEC; and from its place E imagine a perpendicular EG always erected proportional to the centripetal force in that place tending to the centre C; and let BFG be a curve line, the locus of the point G. And in the beginning of the motion suppose EG to coincide with the perpendicular AB; and the velocity of the body in any place E will be as a right line whose square is equal to the curvilinear area ABGE. Q.E.I.

In EG take EM reciprocally proportional to a right line whose square is equal to the area ABGE, and let VLM he a curve line wherein the point M is always placed, and to which the right line AB produced is an asymptote; and the time in which the body in falling describes the line AE, will be as the curvilinear area ABTVME. Q.E.I.

For in the right line AE let there be taken the very small line DE of a given length, and let DLF be the place of the line EMG, when the body was in D; and if the centripetal force be such, that a right line, whose square is equal to the area ABGE, is as the velocity of the descending body, the area itself will be as the square of that velocity; that is, if for the velocities in D and E we write V and V + I, the area ABFD will be as VV, and the area ABGE as VV + 2VI + II; and by division, the area DFGE as 2VI + II, and therefore will be as; that is, if we take the first ratios of those quantities when just nascent, the length DF is as the quantity, and therefore also as half that quantity. But the time in which the body in falling describes the verv small line DE, is as that line directly and the velocity V inversely; and the force will be as the increment I of the velocity directly and the time inversely; and therefore if we take the first ratios when those quantities are just nascent, as, that is, as the length DF. Therefore a force proportional to DF or EG will cause the body to descend with a velocity that is as the right line whose square is equal to the area ABGE. Q.E.D.

Moreover, since the time in which a very small line DE of a given length may be described is as the velocity inversely, and therefore also inversely as a right line whose square is equal to the area ABFD; and since the line DL, and by consequence the nascent area DLME, will be as the same right line inversely, the time will be as the area DLME, and the sum of all the times will be as the sum of all the areas; that is (by Cor. Lem. IV), the whole time in which the line AE is described will be as the whole area ATVME. Q.E.D.

Cor. 1. Let P be the place from whence a body ought to fall, so as that, when urged by any known uniform centripetal force (such as gravity is vulgarly supposed to be), it may acquire in the place D a velocity equal to the velocity which another body, falling by any force whatever, hath acquired in that place D. In the perpendicular DF let there be taken DR, which may be to DF as that uniform force to the other force in the place D. Complete the rectangle PDRQ, and cut off the area ABFD equal to that rectangle. Then A



will be the place from whence the other body fell. For completing the rectangle DRSE, since the area ABFD is to the area DFGE as VV to 2VI, and therefore as ½V to I, that is, as half the whole velocity to the increment of the velocity of the body falling by the unequable force; and in like manner the area PQRD to the area DRSE as half the whole velocity to the increment of the velocity of the body falling by the uniform force; and since those increments (by reason of the equality of the nascent times) are as the generating forces, that is, as the ordinates DF, DR, and consequently as the nascent areas DFGE, DRSE: therefore, *ex aequo*, the whole areas ABFD, PQRD will be to one another as the halves of the whole velocities; and therefore, because the velocities are equal, they become equal also.

Cor. 2. Whence if any body be projected either upwards or downwards with a given velocity from any place D, and there be given the law of

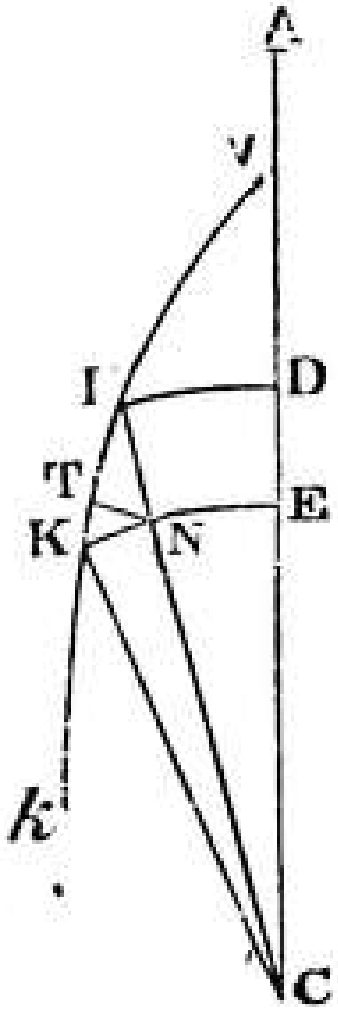
centripetal force acting on it, its velocity will be found in any other place, as *e*, by erecting the ordinate *eg*, and taking that velocity to the velocity in the place D as a right line whose square is equal to the rectangle PQRD, either increased by the curvilinear area DF*ge*, if the place *e* is below the place D, or diminished by the same area DF*ge*, if it be higher, is to the right line whose square is equal to the rectangle PQRD alone.

Cor. 3. The time is also known by erecting the ordinate *em* reciprocally proportional to the square root of PQRD + or - DF*ge*, and taking the time in which the body has described the line D*e* to the time in which another body has fallen with an uniform force from P, and in falling arrived at D in the proportion of the curvilinear area DL*me* to the rectangle 2PD DL. For the time in which a body falling with an uniform force hath described the line PD, is to the time in which the same body has described the line PE in the subduplicate ratio of PD to PE; that is (the very small line DE being just nascent), in the ratio of PD to PD + ½DE, or 2PD to 2PD + DE, and, by division, to the time in which the body hath described the small line DE, as 2PD to DE, and therefore as the rectangle 2PD DL to the area DLME; and the time in which both the bodies described the very small line DE is to the time in which the body moving unequably hath described the line D*e* as the area DLME to the area DL*me*; and, *ex aequo*, the first mentioned of these times is to the last as the rectangle 2PD DL to the area DL*me*.

Section VIII: Of the invention of orbits wherein bodies will revolve, being acted upon by any sort of centripetal force

PROPOSITION XL. THEOREM XIII.

If a body, acted upon by any centripetal force, is any how moved, and another body ascends or descends in a right line, and their velocities be equal in any one case of equal altitudes, their velocities will be also equal at all equal altitudes.



Let a body descend from A through D and E, to the centre C; and let another body move from V in the curve line VIK*k*. From the centre C, with any distances, describe the concentric circles DI, EK, meeting the right line AC in D and E, and the curve VIK in I and K. Draw IC meeting KE in N, and on IK let fall the perpendicular NT; and let the interval DE or IN between the circumferences of the circles be very small; and imagine the bodies in D and I to have equal velocities. Then because the distances CD and CI are equal, the centripetal forces in D and I will be also equal. Let those forces be expressed by the equal lineolae DE and IN; and let the force IN (by Cor. 2 of the Laws of Motion) be resolved into two others, NT and IT. Then the force NT acting in the direction of the line NT perpendicular to the path ITK of the body will not at all affect or change the velocity of the body in that path, but only draw it aside from a rectilinear course, and make it deflect perpetually from the tangent of the orbit, and proceed in the curvilinear path ITK*k*. That whole force, therefore, will be spent in producing this effect; but the other force IT, acting in the direction of the course of the body, will be all employed in accelerating it, and in the least given time will produce an acceleration proportional to itself. Therefore the accelerations of the bodies in D and I, produced in equal times, are as the lines DE, IT (if we take the first ratios of the nascent lines DE, IN, IK, IT, NT); and in unequal times as those lines and the times conjunctly. But the times in which DE and IK are described, are, by reason of the equal velocities (in D and I) as the spaces described DE and IK, and therefore the accelerations in the course of the bodies through the lines DE and IK are as DE and IT, and DE and IK conjunctly; that is, as the square of DE to the rectangle IT into IK. But the rectangle IT IK is equal to the square of IN, that is, equal to the square of DE; and therefore the accelerations generated in the passage of the bodies from D and I to E and K are equal. Therefore the velocities of the bodies in E and K are also equal, and by the same reasoning they will always be found equal in any subsequent equal distances. Q.E.D.

By the same reasoning, bodies of equal velocities and equal distances from the centre will he equally retarded in their ascent to equal distances. Q.E.D.

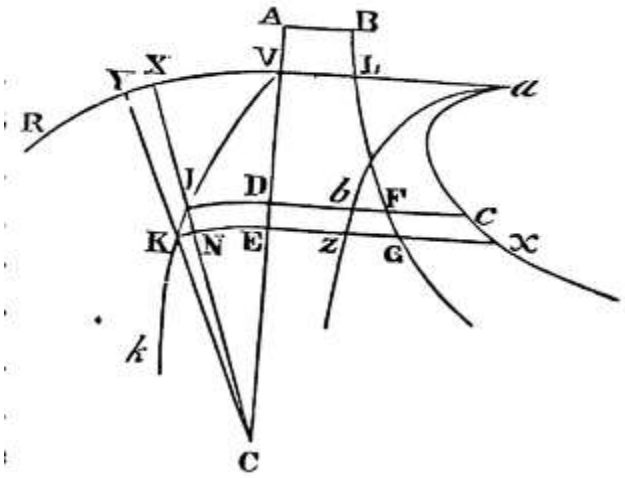
Cor. 1. Therefore if a body either oscillates by hanging to a string, or by any polished and perfectly smooth impediment is forced to move in a curve

line; and another body ascends or descends in a right line, and their velocities be equal at any one equal altitude, their velocities will be also equal at all other equal altitudes. For by the string of the pendulous body, or by the impediment of a vessel perfectly smooth, the same thing will be effected as by the transverse force NT. The body is neither accelerated nor retarded by it, but only is obliged to leave its rectilinear course.

Cor. 2. Suppose the quantity P to be the greatest distance from the centre to which a body can ascend, whether it be oscillating, or revolving in a trajectory, and so the same projected upwards from any point of a trajectory with the velocity it has in that point. Let the quantity A be the distance of the body from the centre in any other point of the orbit; and let the centripetal force be always as the power A^{n-1}, of the quantity A, the index of which power n-1 is any number n diminished by unity. Then the velocity in every altitude A will be as and therefore will be given. For by Prop. XXXIX, the velocity of a body ascending and descending in a right line is in that very ratio.

PROPOSITION XLI. PROBLEM XXVIII.

Supposing a centripetal force of any kind, and granting the quadratures of curvilinear figures, it is required to find as well the trajectories in which bodies will move, as the times of their motions in the trajectories found.

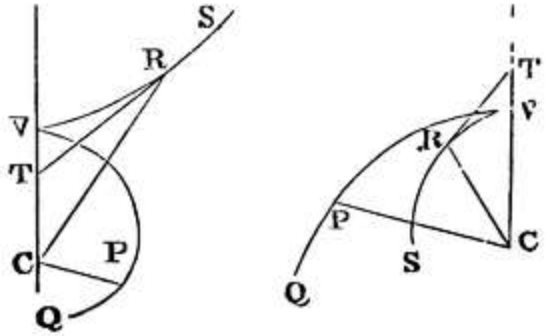


Let any centripetal force tend to the centre C, and let it be required to find the trajectory VIK*k*. Let there be given the circle VR, described from the centre C with any interval CV; and from the same centre describe any other circles ID, KE cutting the trajectory in I and K, and the right line CV in D and E. Then draw the right line CNIX cutting the circles KE, VR in N and X, and the right line CKY meeting the circle VR in Y. Let the points I and K be indefinitely near; and let the body go on from V through I and K to *k*; and let the point A be the place from whence another body is to fall, so as in the place D to acquire a velocity equal to the velocity of the first body in I. And things remaining as in Prop. XXXIX, the lineola IK, described in the least given time will be as the velocity, and therefore as the right line whose square is equal to the area ABFD, and the triangle ICK proportional to the time will be given, and therefore KN will be reciprocally as the altitude IC; that is (if there be given any quantity Q, and the altitude IC be called A), as. This quantity call Z, and suppose the magnitude of Q to be such that in some case may be to Z as IK to KN, and then in all cases will be to Z as IK to KN, and ABFD to ZZ as IK^2 to KN^2, and by division ABFD - ZZ to ZZ as IN^2 to KN^2, and therefore to Z; or as IN to KN; and therefore A KN will be equal to. Therefore since YX XC is to A KN as CX^2, to AA, the rectangle XY XC will be equal to. Therefore in the perpendicular DF let there be taken continually D*b*, D*c* equal to, respectively, and let the curve lines *ab, ac,* the foci of the points *b* and *c*, be described: and from the point V let the perpendicular V*a* be erected to the line AC, cutting off the curvilinear areas VD*ba*, VD*ca*, and let the ordinates E*z*, E*x*, be erected also. Then because the rectangle D*b* IN or D*bz*E is equal to half the rectangle A KN, or to the triangle ICK; and the rectangle D*c* IN or D*cx*E is equal to half the rectangle YX XC, or to the triangle XCY; that is, because the nascent particles D*bz*E, ICK of the areas VD*ba*, VIC are always equal; and the nascent particles D*cx*E, XCY of the areas VD*ca*, VCX are always equal: therefore the generated area VD*ba* will be equal to the generated area VIC, and therefore proportional to the time; and the generated area VD*ca* is equal to the generated sector VCX. If, therefore, any time be given during which the body has been moving from V, there will be also given the area proportional to it VD*ba*; and thence will be given the altitude of the body CD or CI; and the area VD*ca*, and the sector VCX equal thereto, together with its angle VCI. But the angle VCI, and the altitude CI being given, there

is also given the place I, in which the body will be found at the end of that time. Q.E.I.

Cor. 1. Hence the greatest and least altitudes of the bodies, that is, the apsides of the trajectories, may be found very readily. For the apsides are those points in which a right line IC drawn through the centre falls perpendicularly upon the trajectory VIK; which comes to pass when the right lines IK and NK become equal; that is, when the area ABFD is equal to ZZ.

Cor. 2. So also the angle KIN, in which the trajectory at any place cuts the line IC, may be readily found by the given altitude IC of the body: to wit, by making the sine of that angle to radius as KN to IK that is, as Z to the square root of the area ABFD.

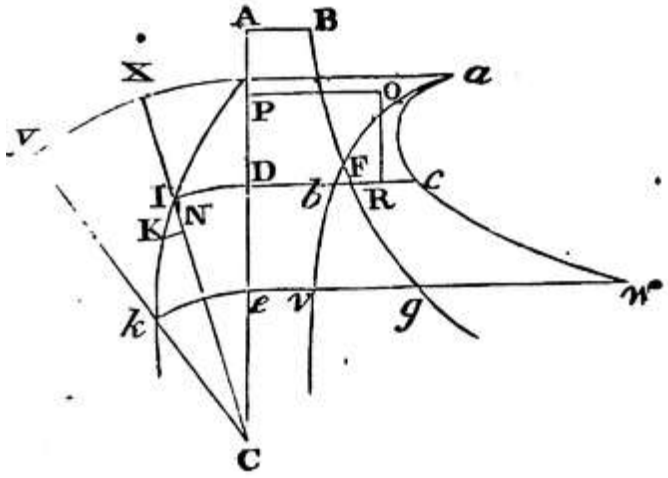


Cor. 3. If to the centre C, and the principal vertex V, there be described a conic section VRS; and from any point thereof, as R, there be drawn the tangent RT meeting the axis CV indefinitely produced in the point T; and then joining CR there be drawn the right line CP, equal to the abscissa CT, making an angle VCP proportional to the sector VCR; and if a centripetal force, reciprocally proportional to the cubes of the distances of the places from the centre, tends to the centre C; and from the place V there sets out a body with a just velocity in the direction of a line perpendicular to the right line CV; that body will proceed in a trajectory VPQ, which the point P will always touch; and therefore if the conic section VRS be an hyberbola, the body will descend to the centre; but if it be an ellipsis, it will ascend perpetually, and go farther and farther off *in infinitum*. And, on the contrary, if a body endued with any velocity goes off from the place V, and according as it begins either to descend obliquely to the centre, or ascends obliquely from it, the figure VRS be either an hyperbola or an ellipsis, the trajectory may be found by increasing or diminishing the angle VCP in a given ratio.

And the centripetal force becoming centrifugal, the body will ascend obliquely in the trajectory VPQ, which is found by taking the angle VCP proportional to the elliptic sector VRC, and the length CP equal to the length CT, as before. All these things follow from the foregoing Proposition, by the quadrature of a certain curve, the invention of which, as being easy enough, for brevity's sake I omit.

PROPOSITION XLII. PROBLEM XXIX.

The law of centripetal force being given, it is required to find the motion of a body setting out from a given place, with a given velocity, in the direction of a given right line.



Suppose the same things as in the three preceding propositions; and let the body go off from the place I in the direction of the little line, IK, with the same velocity as another body, by falling with an uniform centripetal force from the place P, may acquire in D; and let this uniform force be to the force with which the body is at first urged in I, as DR to DF. Let the body go on towards *k*; and about the centre C, with the interval C*k*, describe the circle *ke*, meeting the right line PD in *e*, and let there be erected the lines *eg, ev, ew*, ordinately applied to the curves BF*g*, *abv, acw*. From the given rectangle PDRQ and the given law of centripetal force, by which the first body is acted on, the curve line BF*g* is also given, by the construction of Prop. XXVII, and its Cor. 1. Then from the given angle CIK is given the

proportion of the nascent lines IK, KN; and thence, by the construction of Prob. XXVIII, there is given the quantity Q, with the curve lines *abv, acw*; and therefore, at the end of any time D*bve*, there is given both the altitude of the body C*e* or C*k*, and the area D*cwe*, with the sector equal to it XC*y*, the angle IC*k*, and the place *k*, in which the body will then be found. Q.E.I.

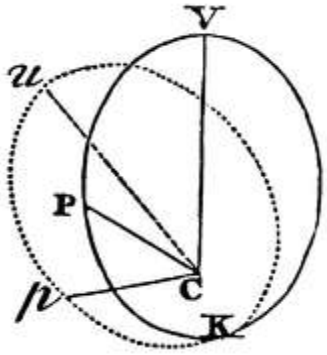
We suppose in these Propositions the centripetal force to vary in its recess from the centre according to some law, which any one may imagine at pleasure; but at equal distances from the centre to be everywhere the same.

I have hitherto considered the motions of bodies in immovable orbits. It remains now to add something concerning their motions in orbits which revolve round the centres of force.

Section IX: Of the motion of bodies in movable orbits; and of the motion of the apsides

PROPOSITION XLIII. PROBLEM XXX.

It is required to make a body move in a trajectory that revolves about the centre of force in the same manner as another body in the same trajectory at rest.

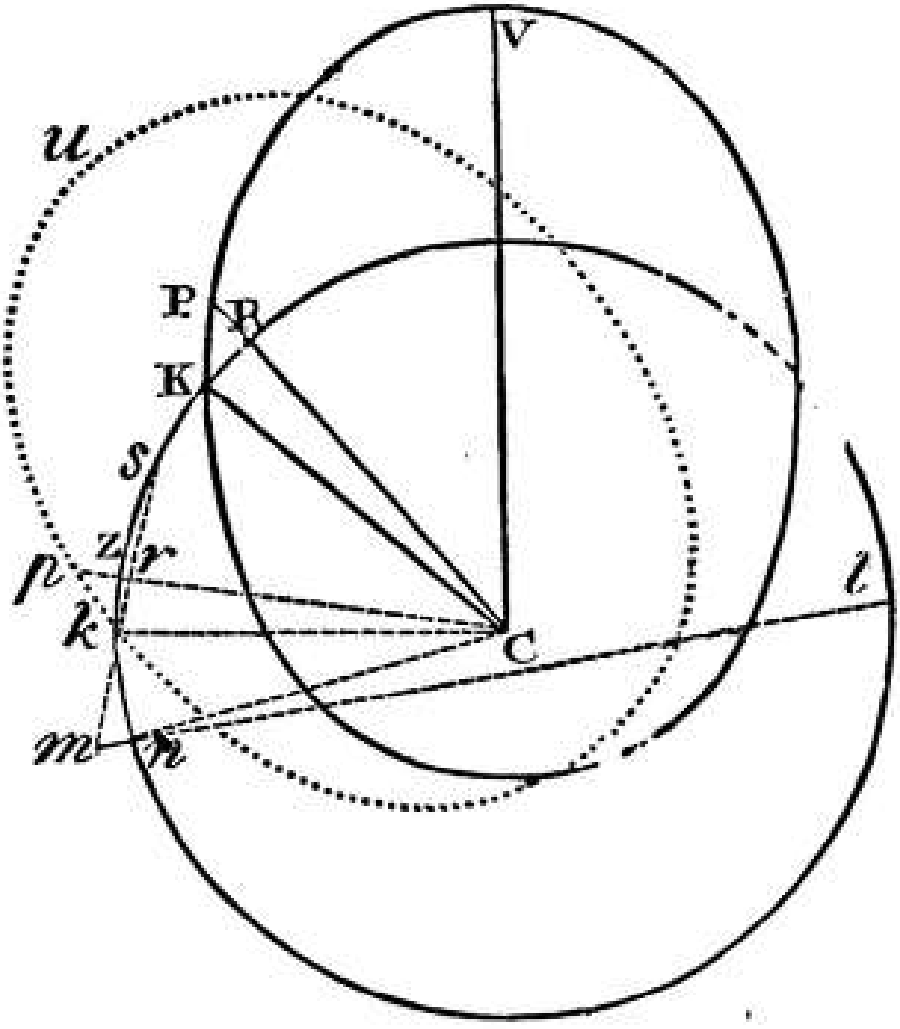


In the orbit VPK, given by position, let the body P revolve, proceeding from V towards K. From the centre C let there be continually drawn C*p*, equal to CP, making the angle VC*p* proportional to the angle VCP; and the area which the line C*p* describes will be to the area VCP, which the line CP describes at the same time, as the velocity of the describing line C*p* to the velocity of the describing line CP; that is, as the angle VC*p* to the angle VCP, therefore in a given ratio, and therefore proportional to the time. Since, then, the area described by the line C*p* in an immovable plane is proportional to the time, it is manifest that a body, being acted upon by a just quantity of centripetal force may revolve with the point *p* in the curve line which the same point *p*, by the method just now explained, may be made to describe an immovable plane. Make the angle VC*u* equal to the angle PC*p*, and the line C*u* equal to CV, and the figure *u*C*p* equal to the figure VCP, and the body being always in the point *p*, will move in the perimeter of the revolving figure *u*C*p*, and will describe its (revolving) arc *up* in the same time that the other body P describes the similar and equal arc

VP in the quiescent figure VPK. Find, then, by Cor. 5, Prop. VI., the centripetal force by which the body may be made to revolve in the curve line which the point *p* describes in an immovable plane, and the Problem will be solved. Q.E.F.

PROPOSITION XLIV. THEOREM XIV.

The difference of the forces, by which two bodies may be made to move equally, one in a quiescent, the other in the same orbit revolving, is in a triplicate ratio of their common altitudes inversely.

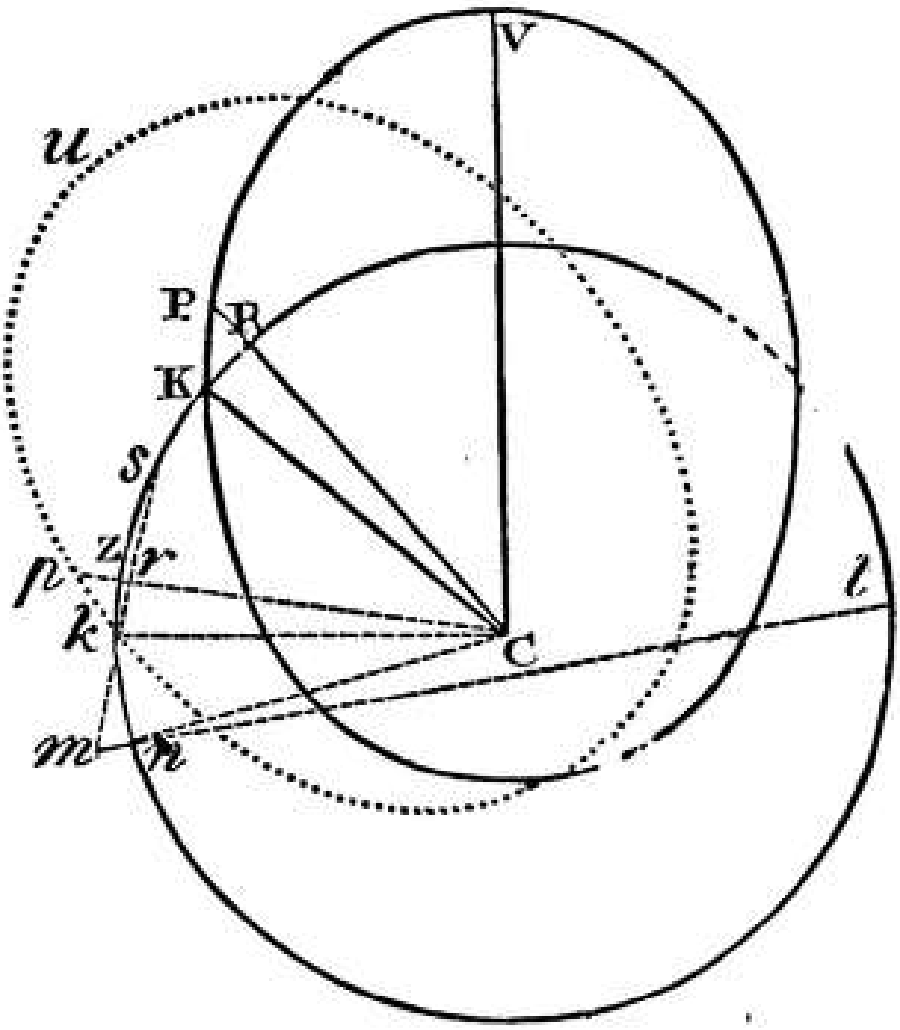


Let the parts of the quiescent orbit VP, PK be similar and equal to the parts of the revolving orbit *up*, pk; and let the distance of the points P and K

be supposed of the utmost smallness. Let fall a perpendicular *kr* from the point *k* to the right line *p*C, and produce it to *m*, so that *mr* may be to *kr* as the angle VC*p* to the angle VCP. Because the altitudes of the bodies PC and *p*C, KC and *k*C, are always equal, it is manifest that the increments or decrements of the lines PC and *p*C are always equal; and therefore if each of the several motions of the bodies in the places P and *p* be resolved into two (by Cor. 2 of the Laws of Motion), one of which is directed towards the centre, or according to the lines PC, *p*C, and the other, transverse to the former, hath a direction perpendicular to the lines PC and *p*C; the motions towards the centre will be equal, and the transverse motion of the body *p* will be to the transverse motion of the body P as the angular motion of the line *p*C to the angular motion of the line PC; that is, as the angle VC*p* to the angle VCP. Therefore, at the same time that the body P, by both its motions, comes to the point K, the body *p*, having an equal motion towards the centre, will be equally moved from *p* towards C; and therefore that time being expired, it will be found somewhere in the line *mkr*, which, passing through the point *k*, is perpendicular to the line *p*C; and by its transverse motion will acquire a distance from the line *p*C, that will be to the distance which the other body P acquires from the line PC as the transverse motion of the body *p* to the transverse motion of the other body P. Therefore since *kr* is equal to the distance which the body P acquires from the line PC, and *mr* is to *kr* as the angle VC*p* to the angle VCP, that is, as the transverse motion of the body *p* to the transverse motion of the body P, it is manifest that the body *p*, at the expiration of that time, will be found in the place *m*. These things will be so, if the bodies *p* and P are equally moved in the directions of the lines *p*C and PC, and are therefore urged with equal forces in those directions, but if we take an angle *p*C*n* that is to the angle *p*C*k* as the angle VC*p* to the angle VCP, and *n*C be equal to *k*C, in that case the body *p* at the expiration of the time will really be in *n*; and is therefore urged with a greater force than the body P, if the angle *n*C*p* is greater than the angle *k*C*p*, that is, if the orbit *upk*, move either *in consequentia* or *in antecedentia*, with a celerity greater than the double of that with which the line CP moves *in consequentia*; and with a less force if the orbit moves slower *in antecedentia*. And the difference of the forces will be as the interval *mn* of the places through which the body would be carried by the action of that difference in that given space of time. About the centre C with

the interval C*n* or C*k* suppose a circle described cutting the lines *mr, mn* produced in *s* and *t*, and the rectangle *mn mt* will be equal to the rectangle *mk ms*, and therefore *mn* will be equal to. But since the triangles *p*C*k*, *p*C*n*, in a given time, are of a given magnitude, *kr* and *mr*, and their difference *mk*, and their sum *ms*, are reciprocally as the altitude *p*C, and therefore the rectangle *mk ms* is reciprocally as the square of the altitude *p*C. But, moreover, *mt* is directly as ½*mt*, that is, as the altitude *p*C. These are the first ratios of the nascent lines: and hence, that is, the nascent lineola *mn*, and the difference of the forces proportional thereto, are reciprocally as the cube of the altitude *p*C. Q.E.D.

Cor. 1. Hence the difference of the forces in the places P and *p*, or K and *k*, is to the force with which a body may revolve with a circular motion from R to K, in the same time that the body P in an immovable orb describes the arc PK, as the nascent line *mn* to the versed sine of the nascent arc RK, that is, as to, or as *mk ms* to the square of *rk*; that is, if we take given quantities F and G in the same ratio to one another as the angle VCP bears to the angle VC*p*, as GG - FF to FF. And, therefore, if from the centre C, with any distance CP or C*p*, there be described a circular sector equal to the whole area VPC, which the body revolving in an immovable orbit has by a radius drawn to the centre described in any certain time, the difference of the forces, with which the body P revolves in an immovable orbit, and the body *p* in a movable orbit, will be to the centripetal force, with which another body by a radius drawn to the centre can uniformly describe that sector in the same time as the area VPC is described, as GG - FF to FF. For that sector and the area *p*C*k* are to one another as the times in which they are described.



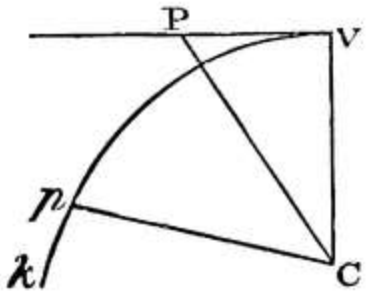
Cor. 2. If the orbit VPK be an ellipsis, having its focus C, and its highest apsis V, and we suppose the the ellipsis *upk* similar and equal to it, so that *p*C may be always equal to PC, and the angle VC*p* be to the angle VCP in the given ratio of G to F; and for the altitude PC or *p*C we put A, and 2R for the latus rectum of the ellipsis, the force with which a body may be made to revolve in a movable ellipsis will be as, and *vice versa*. Let the force with which a body may revolve in an immovable ellipsis be expressed by the quantity, and the force in V will be. But the force with which a body may revolve in a circle at the distance CV, with the same velocity as a body revolving in an ellipsis has in V, is to the force with which a body revolving in an ellipsis is acted upon in the apsis V, as half the latus rectum of the ellipsis to the semi-diameter CV of the circle, and therefore is as; and the force which is to this, as GG - FF to FF, is as: and this force (by Cor. 1 of

this Prop.) is the difference of the forces in V, with which the body P revolves in the immovable ellipsis VPK, and the body *p* in the movable ellipsis *upk*. Therefore since by this Prop, that difference at any other altitude A is to itself at the altitude CV as to, the same difference in every altitude A will be as. Therefore to the force, by which the body may revolve in an immovable ellipsis VPK add the excess, and the sum will be the whole force by which a body may revolve in the same time in the movable ellipsis *upk*.

Cor. 3. In the same manner it will be found, that, if the immovable orbit VPK be an ellipsis having its centre in the centre of the forces C, and there be supposed a movable ellipsis *upk*, similar, equal, and concentrical to it; and 2R be the principal latus rectum of that ellipsis, and 2T the latus transversum, or greater axis; and the angle VC*p* be continually to the angle VCP as G to F; the forces with which bodies may revolve in the immovable and movable ellipsis, in equal times, will be as and respectively.

Cor. 4. And universally, if the greatest altitude CV of the body be called T, and the radius of the curvature which the orbit VPK has in V, that is, the radius of a circle equally curve, be called R, and the centripetal force with which a body may revolve in any immovable trajectory VPK at the place V be called, and in other places P be indefinitely styled X; and the altitude CP be called A, and G be taken to F in the given ratio of the angle VC*p* to the angle VCP; the centripetal force with which the same body will perform the same motions in the same time, in the same trajectory *upk* revolving with a circular motion, will be as the sum of the forces.

Cor. 5. Therefore the motion of a body in an immovable orbit being given, its angular motion round the centre of the forces may be increased or diminished in a given ratio; and thence new immovable orbits may be found in which bodies may revolve with new centripetal forces.



Cor. 6. Therefore if there be erected the line VP of an indeterminate length, perpendicular to the line CV given by position, and CP be drawn, and C*p* equal to it, making the angle VC*p* having a given ratio to the angle VCP, the force with which a body may revolve in the curve line V*pk*, which the point *p* is continually describing, will be reciprocally as the cube of the altitude C*p*. For the body P, by its *vis inertiae* alone, no other force impelling it, will proceed uniformly in the right line VP. Add, then, a force tending to the centre C reciprocally as the cube of the altitude CP or C*p*, and (by what was just demonstrated) the body will deflect from the rectilinear motion into the curve line V*pk*. But this curve V*pk* is the same with the curve VPQ found in Cor. 3, Prop XLI, in which, I said, bodies attracted with such forces would ascend obliquely.

PROPOSITION XLV. PROBLEM XXXI.

To find the motion of the apsides in orbits approaching very near to circles.

This problem is solved arithmetically by reducing the orbit, which a body revolving in a movable ellipsis (as in Cor. 2 and 3 of the above Prop.) describes in an immovable plane, to the figure of the orbit whose apsides are required; and then seeking the apsides of the orbit which that body describes in an immovable plane. But orbits acquire the same figure. if the centripetal forces with which they are described, compared between themselves, are made proportional at equal altitudes. Let the point V be the highest apsis, and write T for the greatest altitude CV, A for any other altitude CP or C*p*, and X for the difference of the altitudes CV - CP; and the force with which a body moves in an ellipsis revolving about its focus C (as in Cor. 2), and which in Cor. 2 was as, that is as, , by substituting T - X for A; will become as. In like manner any other centripetal force is to be reduced to a fraction whose denominator is A^3, and the numerators are to be made analogous by collating together the homologous terms. This will be made plainer by Examples.

Example 1. Let us suppose the centripetal force to be uniform, and therefore as or, writing T - X for A in the numerator, as. Then collating together the correspondent terms of the numerators, that is, those that consist of given

quantities, with those of given quantities, and those of quantities not given with those of quantities not given, it will become RGG - RFF + TFF to T^3 as - FFX to 3TTX + 3TXX - X^3, or as - FF to - 3TT + 3TX - XX. Now since the orbit is supposed extremely near to a circle, let it coincide with a circle; and because in that case R and T become equal, and X is infinitely diminished, the last ratios will be, as RGG to T^2, so - FF to - 3TT, or as GG to TT, so FF to 3TT; and again, as GG to FF, so TT to 3TT, that is, as 1 to 3; and therefore G is to F, that is, the angle VC*p* to the angle VCP, as 1 to. Therefore since the body, in an immovable ellipsis, in descending from the upper to the lower apsis, describes an angle, if I may so speak, of 180 deg., the other body in a movable ellipsis, and therefore in the immovable orbit we are treating of, will in its descent from the upper to the lower apsis, describe an angle VC*p* of deg. And this comes to pass by reason of the likeness of this orbit which a body acted upon by an uniform centripetal force describes, and of that orbit which a body performing its circuits in a revolving ellipsis will describe in a quiescent plane. By this collation of the terms, these orbits are made similar; not universally, indeed, but then only when they approach very near to a circular figure. A body, therefore revolving with an uniform centripetalforce in an orbit nearly circular, will always describe an angle of deg., or 103 deg., 55 m., 23 sec., at the centre; moving from the upper apsis to the lower apsis when it has once described that angle, and thence returning to the upper apsis when it has described that angle again; and so on *in infinitum*.

Exam. 2. Suppose the centripetal force to be as any power of the altitude A, as, for example, A^{n-3} 3, or; where *n* - 3 and *n* signify any indices of powers whatever, whether integers or fractions, rational or surd, affirmative or negative. That numerator A^n or being reduced to an indeterminate series by my method of converging series, will become, &c. And conferring these terms with the terms of the other numerator RGG - RFF + TFF - FFX, it becomes as RGG - RFF + TFF to T^n, so - FF to, &c. And taking the last ratios where the orbits approach to circles, it becomes as RGG to T^n, so - FF to -*n*T^{n-1}, or as GG to T^{n-1}, so FF to *n*T^{n-}; and again, GG to FF, so T^{n-1} to *n*T^{n-1}, that is, as 1 to *n*; and therefore G is to F, that is the angle VC*p* to the angle VCP, as 1 to. Therefore since the angle VCP, described in the descent of the body from the upper apsis to the lower apsis in an ellipsis, is of 180

deg., the angle VC*p*, described in the descent of the body from the upper apsis to the lower apsis in an orbit nearly circular which a body describes with a centripetal force proportional to the power A^{n-3}, will be equal to an angle of deg., and this angle being repeated, the body will return from the lower to the upper apsis, and so on *in infinitum*. As if the centripetal force be as the distance of the body from the centre, that is, as A, or, *n* will be equal to 4, and equal to 2; and therefore the angle between the upper and the lower apsis will be equal to deg., or 90 deg. Therefore the body having performed a fourth part of one revolution, will arrive at the lower apsis, and having performed another fourth part, will arrive at the upper apsis, and so on by turns *in infinitum*. This appears also from Prop. X. For a body acted on by this centripetal force will revolve in an immovable ellipsis, whose centre is the centre of force. If the centripetal force is reciprocally as the distance, that is, directly as or, *n* will be equal to 2; and therefore the angle between the upper and lower apsis will be deg., or 127 deg., 16 min., 45 sec.; and therefore a body revolving with such a force, will by a perpetual repetition of this angle, move alternately from the upper to the lower and from the lower to the upper apsis for ever. So, also, if the centripetal force be reciprocally as the biquadrate root of the eleventh power of the altitude, that is, reciprocally as, and, therefore, directly as or as, *n* will be equal to ¼, and deg. will be equal to 360 deg.; and therefore the body parting from the upper apsis, and from thence perpetually descending, will arrive at the lower apsis when it has completed one entire revolution; and thence ascending perpetually, when it has completed another entire revolution, it will arrive again at the upper apsis; and so alternately for ever.

Exam. 3. Taking *m* and *n* for any indices of the powers of the altitude, and *b* and *c* for any given numbers, suppose the centripetal force to be as, that is, as or (by the method of converging series above-mentioned) as

&c.

and comparing the terms of the numerators, there will arise RGG - RFF + TFF to $bT^m + cT^n$ as - FF to $- mbT^{m-1} - ncT^n + bXT^{m-2} + cXT^{n-2}$, &c. And taking the last ratios that arise when the orbits come to a circular form, there will come forth GG to $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ as FF to $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$; and again,

GG to FF as $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ to $mbT^{n-1} + ncT^{n-1}$. This proportion, by expressing the greatest altitude CV or T arithmetically by unity, becomes, GG to FF as $b + c$ to $mb + nc$, and therefore as 1 to. Whence G becomes to F, that is, the angle VC*p* to the angle VCP, as 1 to. And therefore since the angle VCP between the upper and the lower apsis, in an immovable ellipsis, is of 180 deg., the angle VC*p* between the same apsides in an orbit which a body describes with a centripetal force, that is, as, will be equal to an angle of deg. And by the same reasoning, if the centripetal force be as, the angle between the apsides will be found equal to. After the same manner the Problem is solved in more difficult cases. The quantity to which the centripetal force is proportional must always be resolved into a converging series whose denominator is A^3. Then the given part of the numerator arising from that operation is to be supposed in the same ratio to that part of it which is not given, as the given part of this numerator RGG - RFF + TFF - FFX is to that part of the same numerator which is not given. And taking away the superfluous quantities, and writing unity for T, the proportion of G to F is obtained.

Cor. 1 . Hence if the centripetal force be as any power of the altitude, that power may be found from the motion of the apsides; and so contrariwise. That is, if the whole angular motion, with which the body returns to the same apsis, be to the angular motion of one revolution, or 360 deg., as any number as *m* to another as *n*, and the altitude called A; the force will be as the power of the altitude A; the index of which power is. This appears by the second example. Hence it is plain that the force in its recess from the centre cannot decrease in a greater than a triplicate ratio of the altitude. A body revolving with such a force and parting from the apsis, if it once begins to descend, can never arrive at the lower apsis or least altitude, but will descend to the centre, describing the curve line treated of in Cor. 3, Prop. XLI. But if it should, at its parting from the lower apsis, begin to ascend never so little, it will ascend *in infinitum*, and never come to the upper apsis; but will describe the curve line spoken of in the same Cor., and Cor. 6; Prop. XLIV. So that where the force in its recess from the centre decreases in a greater than a triplicate ratio of the altitude, the body at its parting from the apsis, will either descend to the centre, or ascend in infinitum, according as it descends or ascends at the beginning of its

motion. But if the force in its recess from the centre either decreases in a less than a triplicate ratio of the altitude, or increases in any ratio of the altitude whatsoever, the body will never descend to the centre, but will at some time arrive at the lower apsis; and, on the contrary, if the body alternately ascending and descending from one apsis to another never comes to the centre, then either the force increases in the recess from the centre, or it decreases in a less than a triplicate ratio of the altitude; and the sooner the body returns from one apsis to another, the farther is the ratio of the forces from the triplicate ratio. As if the body should return to and from the upper apsis by an alternate descent and ascent in 8 revolutions, or in 4, or 2, or 1½; that is, if *m* should be to *n* as 8, or 4, or 2, or 1½ to 1, and therefore, be - 3, or - 3, or - 3, or - 3; then the force will be as; or; or; or; that is, it will be reciprocally as, or, or, or. If the body after each revolution returns to the same apsis, and the apsis remains unmoved, then *m* will be to *n* as 1 to 1, and therefore will be equal to A^{-2}, or; and therefore the decrease of the forces will be in a duplicate ratio of the altitude; as was demonstrated above. If the body in three fourth parts, or two thirds, or one third, or one fourth part of an entire revolution, return to the same apsis; *m* will be to *n* as ¾ or ⅔ or ⅓ or ¼ to 1, and therefore is equal to, or, or, or; and therefore the force is either reciprocally as or, or directly as A^6 or A^{13}. Lastly if the body in its progress from the upper apsis to the same upper apsis again, goes over one entire revolution and three deg. more, and therefore that apsis in each revolution of the body moves three deg. *in consequentia*; then *m* will be to *n* as 363 deg. to 360 deg. or as 121 to 120, and therefore will be equal to, and therefore the centripetal force will be reciprocally as, or reciprocally as very nearly. Therefore the centripetal force decreases in a ratio something greater than the duplicate; but approaching 59¾ times nearer to the duplicate than the triplicate.

Cor. 2. Hence also if a body, urged by a centripetal force which is reciprocally as the square of the altitude, revolves in an ellipsis whose focus is in the centre of the forces; and a new and foreign force should be added to or subducted from this centripetal force, the motion of the apsides arising from that foreign force may (by the third Example) be known; and so on the contrary. As if the force with which the body revolves in the ellipsis be as; and the foreign force subducted as *c*A, and therefore the remaining force as;

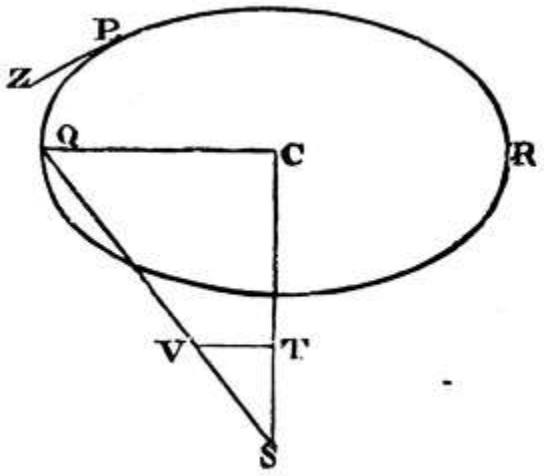
then (by the third Example) *b* will be equal to 1. *m* equal to 1, and *n* equal to 4; and therefore the angle of revolution be tween the apsides is equal to 180 deg. Suppose that foreign force to be 357.45 parts less than the other force with which the body revolves in the ellipsis; that is, *c* to be; A or T being equal to 1; and then 180 will be 180 or 180.7623, that is, 180 deg., 45 min., 44 sec. Therefore the body, parting from the upper apsis, will arrive at the lower apsis with an angular motion of 180 deg., 45 min., 44 sec, and this angular motion being repeated, will return to the upper apsis; and therefore the upper apsis in each revolution will go forward 1 deg., 31 min., 28 sec. The apsis of the moon is about twice as swift.

So much for the motion of bodies in orbits whose planes pass through the centre of force. It now remains to determine those motions in eccentrical planes. For those authors who treat of the motion of heavy bodies used to consider the ascent and descent of such bodies, not only in a perpendicular direction, but at all degrees of obliquity upon any given planes; and for the same reason we are to consider in this place the motions of bodies tending to centres by means of any forces whatsoever, when those bodies move in eccentrical planes. These planes are supposed to be perfectly smooth and polished, so as not to retard the motion of the bodies in the least. Moreover, in these demonstrations, instead of the planes upon which those bodies roll or slide, and which are therefore tangent planes to the bodies, I shall use planes parallel to them, in which the centres of the bodies move, and by that motion describe orbits. And by the same method I afterwards determine the motions of bodies performed in curve superficies.

Section X: Of the motion of bodies in given superficies; and of the reciprocal motion of funependulous bodies

PROPOSITION XLVI. PROBLEM XXXII.

Any kind of centripetal force being supposed, and the centre of force, and any plane whatsoever in which the body revolves, being given, and the quadratures of curvilinear figures being allowed; it is required to determine the motion of a body going off from a given place, with a given velocity, in the direction of a given right line in that plane.



Let S be the centre of force, SC the least distance of that centre from the given plane, P a body issuing from the place P in the direction of the right line PZ, Q the same body revolving in its trajectory, and PQR the trajectory itself which is required to be found, described in that given plane. Join CQ, QS, and if in QS we take SV proportional to the centripetal force with which the body is attracted towards the centre S, and draw VT parallel to CQ, and meeting SC in T; then will the force SV be resolved into two (by Cor. 2, of the Laws of Motion), the force ST, and the force TV; of which ST attracting the body in the direction of a line perpendicular to that plane, does not at all change its motion in that plane. But the action of the other force TV, coinciding with the position of the plane itself, attracts the body

directly towards the given point C in that plane; and therefore causes the body to move in this plane in the same manner as if the force ST were taken away, and the body were to revolve in free space about the centre C by means of the force TV alone. But there being given the centripetal force TV with which the body Q revolves in free space about the given centre C, there is given (by Prop. XLII) the trajectory PQR which the body describes; the place Q, in which the body will be found at any given time; and, lastly, the velocity of the body in that place Q. And so è contra. Q.E.I.

PROPOSITION XLVII. THEOREM XV.

Supposing the centripetal force to be proportional to the distance of the body from the centre; all bodies revolving in any planes whatsoever will describe ellipses, and complete their revolutions in equal times; and those which move in right lines, running backwards and forwards alternately, will complete their several periods of going and returning in the same times.

For letting all things stand as in the foregoing Proposition, the force SV, with which the body Q revolving in any plane PQR is attracted towards the centre S, is as the distance SQ; and therefore because SV and SQ, TV and CQ are proportional, the force TV with which the body is attracted towards the given point C in the plane of the orbit is as the distance CQ. Therefore the forces with which bodies found in the plane PQR are attracted towards the point C, are in proportion to the distances equal to the forces with which the same bodies are attracted every way towards the centre S; and therefore the bodies will move in the same times, and in the same figures, in any plane PQR about the point C, as they would do in free spaces about the centre S; and therefore (by Cor. 2, Prop. X, and Cor. 2, Prop. XXXVIII.) they will in equal times either describe ellipses in that plane about the centre C, or move to and fro in right lines passing through the centre C in that plane; completing the same periods of time in all cases. Q.E.D.

SCHOLIUM.

The ascent and descent of bodies in curve superficies has a near relation to these motions we have been speaking of. Imagine curve lines to be described on any plane, and to revolve about any given axes passing through the centre of force, and by that revolution to describe curve superficies; and that the bodies move in such sort that their centres may be always found in those superficies. If those bodies reciprocate to and fro with an oblique ascent and descent, their motions will be performed in planes passing through the axis, and therefore in the curve lines, by whose revolution those curve superficies were generated. In those cases, therefore, it will be sufficient to consider the motion in those curve lines.

PROPOSITION XLVIII. THEOREM XVI.

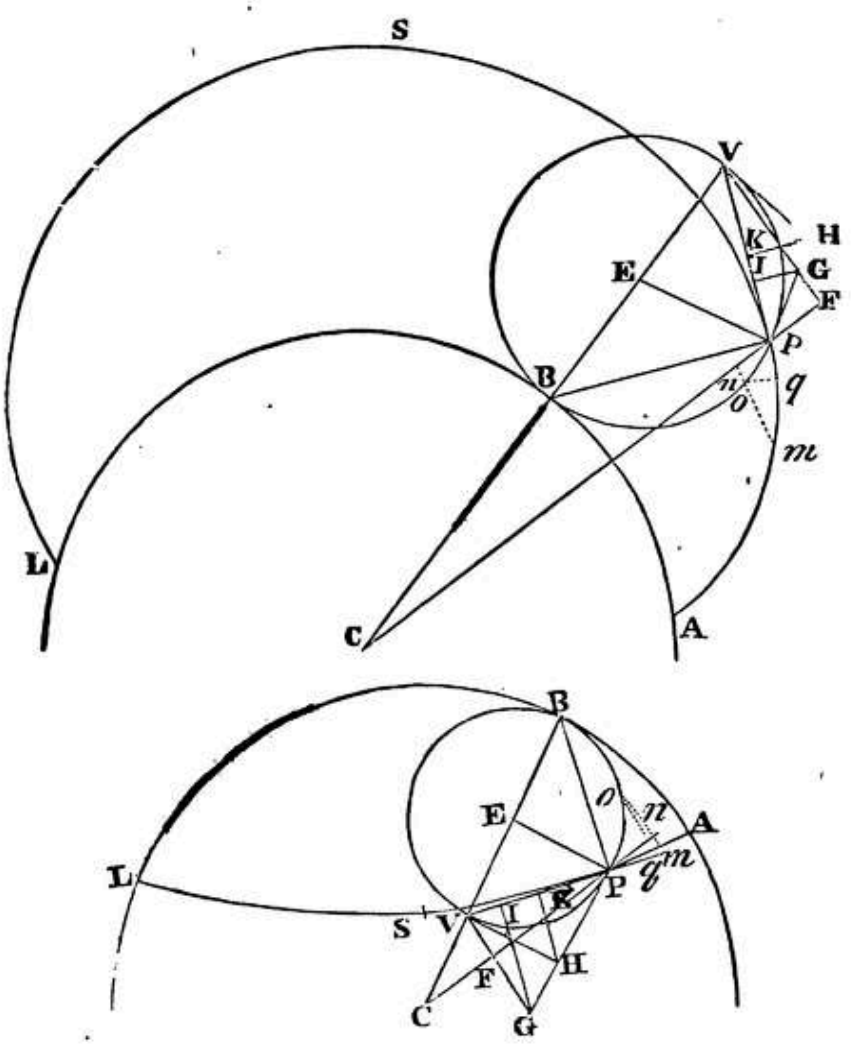
If a wheel stands upon the outside of a globe at right angles thereto, and revolving about its own axis goes forward in a great circle, the length of the curvilinear path which any point, given in the perimeter of the wheel, hath described since the time that it touched the globe (which curvilinear path we may call the cycloid or epicycloid), will be to double the versed sine of half the arc which since that time has touched the globe in passing over it, as the sum of the diameters of the globe and the wheel to the semi-diameter of the globe.

PROPOSITION XLIX. THEOREM XVII.

If a wheel stand upon the inside of a concave globe at right angles thereto, and revolving about its own axis go forward in one of the great circles of the globe, the length of the curvilinear path which any point, given in the perimeter of the wheel, hath described since it touched the globe, will be to the double of the versed sine of half the arc which in all that time has touched the globe in passing over it, as the difference of the diameters of the globe and the wheel to the semi-diameter of the globe.

Let ABL be the globe, C its centre, BPV the wheel insisting thereon, E the centre of the wheel, B the point of contact, and P the given point in the perimeter of the wheel. Imagine this wheel to proceed in the great circle ABL from A through B towards L, and in its progress to revolve in such a

manner that the arcs AB, PB may be always equal one to the other, and the given point P in the perimeter of the wheel may describe in the



mean time the curvilinear path AP. Let AP be the whole curvilinear path described since the wheel touched the globe in A, and the length of this path AP will be to twice the versed sine of the arc ½PB as 2CE to CB. For let the right line CE (produced if need be) meet the wheel in V, and join CP, BP, EP, VP; produce CP, and let fall thereon the perpendicular VF. Let PH, VH, meeting in H, touch the circle in P and V, and let PH cut VF in G, and to VP let fall the perpendiculars GI, HK. From the centre C with any interval let there be described the circle *nom*, cutting the right line CP in *n*, the perimeter of the wheel BP in *o*, and the curvilinear path AP in *m*; and from the centre V with the interval V*o* let there be described a circle cutting VP produced in *q*.

Because the wheel in its progress always revolves about the point of contact B, it is manifest that the right line BP is perpendicular to that curve line AP which the point P of the wheel describes, and therefore that the right line VP will touch this curve in the point P. Let the radius of the circle *nom* be gradually increased or diminished so that at last it become equal to the distance CP; and by reason of the similitude of the evanescent figure P*nomq*, and the figure PFGVI, the ultimate ratio of the evanescent lineolae P*m*, P*n*, P*o*, P*q*, that is, the ratio of the momentary mutations of the curve AP, the right line CP, the circular arc BP, and the right line VP, will be the same as of the lines PV, PF, PG, PI, respectively. But since VF is perpendicular to CF, and VH to CV, and therefore the angles HVG, VCF equal; and the angle VHG (because the angles of the quadrilateral figure HVEP are right in V and P) is equal to the angle CEP, the triangles VHG, CEP will be similar; and thence it will come to pass that as EP is to CE so is HG to HV or HP, and so KI to KP, and by composition or division as CB to CE so is PI to PK, and doubling the consequents as CB to 2CE so PI to PV, and so is P*q* to P*m*. Therefore the decrement of the line VP, that is, the increment of the line BV - VP to the increment of the curve line AP is in a given ratio of CB to 2CE, and therefore (by Cor. Lem. IV) the lengths BV - VP and AP, generated by those increments, are in the same ratio. But if BV be radius, VP is the cosine of the angle BVP or ½BEP, and therefore BV - VP is the versed sine of the same angle, and therefore in this wheel, whose radius is ½BV, BV - VP will be double the versed sine of the arc ½BP. Therefore AP is to double the versed sine of the arc ½BP as 2CE to CB. Q.E.D.

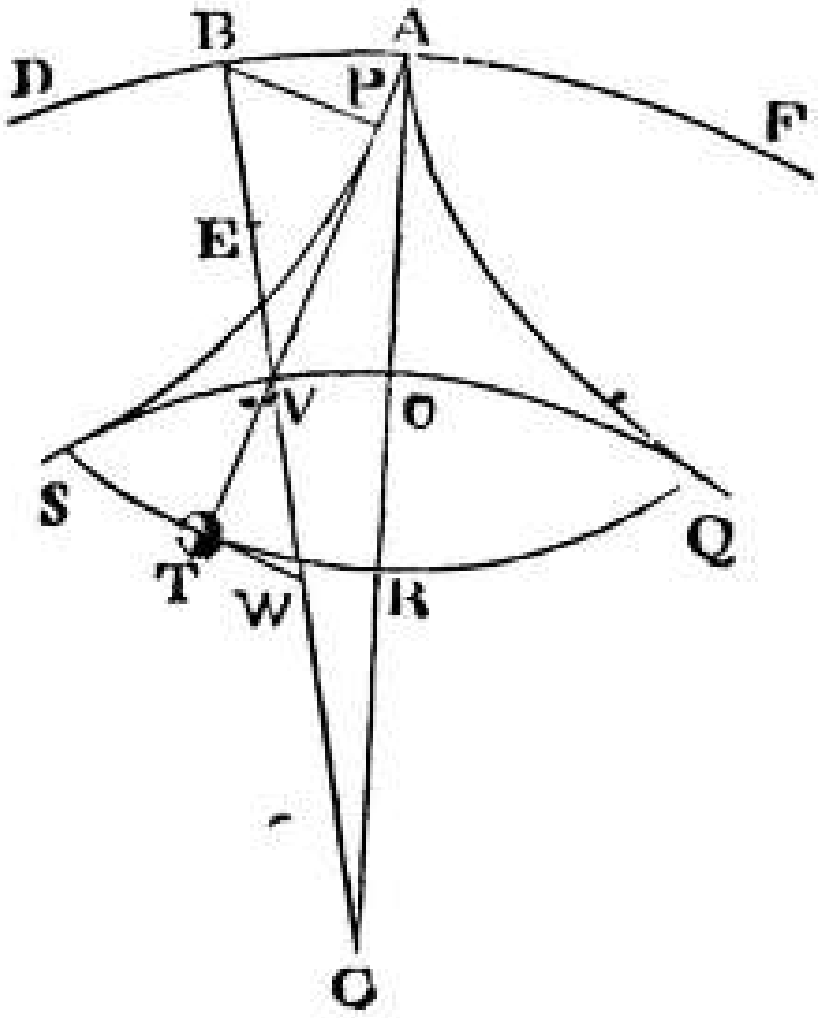
The line AP in the former of these Propositions we shall name the cycloid without the globe, the other in the latter Proposition the cycloid within the globe, for distinction sake.

Cor. 1. Hence if there be described the entire cycloid ASL, and the same be bisected in S, the length of the part PS will be to the length PV (which is the double of the sine of the angle VBP, when EB is radius) as 2CE to CB, and therefore in a given ratio.

Cor. 2. And the length of the semi-perimeter of the cycloid AS will be equal to a right line which is to the diameter of the wheel BV as 2CE to CB.

PROPOSITION L. PROBLEM XXXIII.

To cause a pendulous body to oscillate in a given cycloid.



Let there be given within the globe QVS described with the centre C, the cycloid QRS, bisected in R, and meeting the superficies of the globe with its extreme points Q and S on either hand. Let there be drawn CR bisecting the arc QS in O, and let it be produced to A in such sort that CA may be to CO as CO to CR. About the centre C, with the interval CA, let there be described an exterior globe DAF; and within this globe, by a wheel whose diameter is AO, let there be described two semi-cycloids AQ, AS, touching the interior globe in Q and S, and meeting the exterior globe in A. From that point A, with a thread APT in length equal to the line AR, let the body T

depend, and oscillate in such manner between the two semi-cycloids AQ, AS, that, as often as the pendulum parts from the perpendicular AR, the upper part of the thread AP may be applied to that semi-cycloid APS towards which the motion tends, and fold itself round that curve line, as if it were some solid obstacle, the remaining part of the same thread PT which has not yet touched the semi-cycloid continuing straight. Then will the weight T oscillate in the given cycloid QRS. Q.E.F.

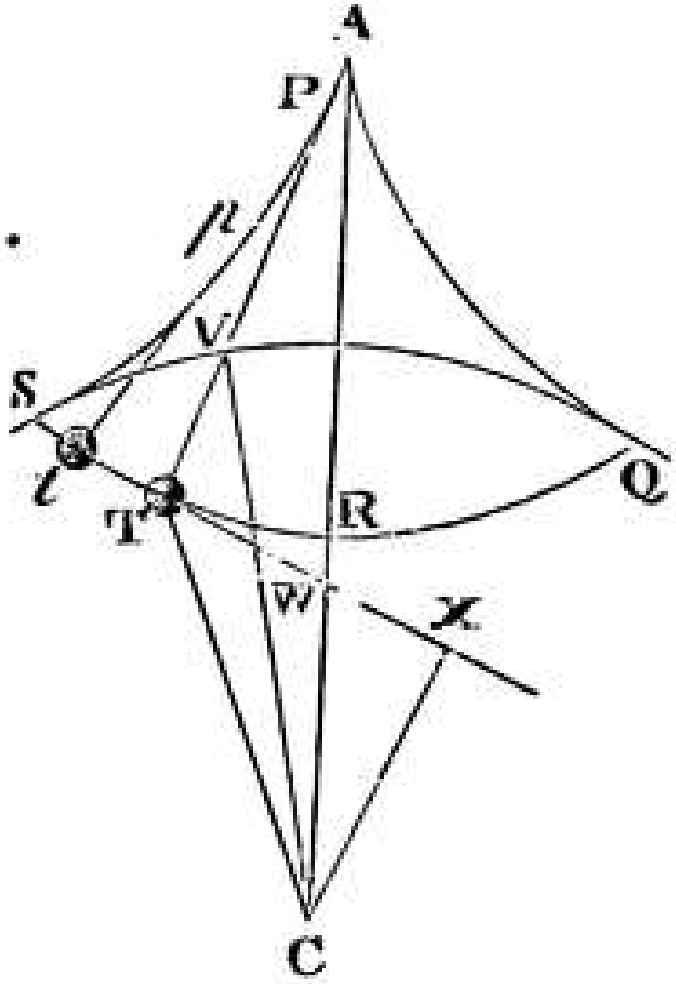
For let the thread PT meet the cycloid QRS in T, and the circle QOS in V, and let CV be drawn; and to the rectilinear part of the thread PT from the extreme points P and T let there be erected the perpendiculars BP, TW, meeting the right line CV in B and W. It is evident, from the construction and generation of the similar figures AS, SR, that those perpendiculars PB, TW, cut off from CV the lengths VB, VW equal the diameters of the wheels OA, OR. Therefore TP is to VP (which is double the sine of the angle VBP when ½BV is radius) as BW to BV, or AO + OR to AO, that is (since CA and CO, CO and CR, and by division AO and OR are proportional), as CA + CO to CA, or, if BV be bisected in E, as 2CE to CB. Therefore (by Cor. 1, Prop. XLIX), the length of the rectilinear part of the thread PT is always equal to the arc of the cycloid PS, and the whole thread APT is always equal to the half of the cycloid APS, that is (by Cor. 2, Prop. XLIX), to the length AR. And therefore contrariwise, if the string remain always equal to the length AR, the point T will always move in the given cycloid QRS. Q.E.D.

Cor. The string AR is equal to the semi-cycloid AS, and therefore has the same ratio to AC the semi-diameter of the exterior globe as the like semi-cycloid SR has to CO the semi-diameter of the interior globe.

PROPOSITION LI. THEOREM XVIII.

If a centripetal force tending on all sides to the centre C *of a globe, be in all places as the distance of the place from the centre, and by this force alone acting upon it, the body* T *oscillate (in the manner above described) in the perimeter of the cycloid* QRS*; I say, that all the oscillations, how unequal soever in themselves, will be performed in equal times.*

For upon the tangent TW infinitely produced let fall the perpendicular CX, and join CT. Because the centripetal force with which the body T is impelled towards C is as the distance CT, let this (by Cor. 2, of the Laws) be resolved into the parts CX, TX, of which CX impelling the body directly from P stretches the thread PT, and by the resistance the thread makes to it is totally employed, producing no other effect; but the other part TX, impelling the body transversely or towards X, directly accelerates the motion in the cycloid. Then it is plain that the acceleration of the body, proportional to this accelerating force, will be every



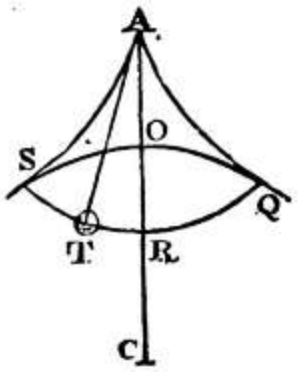
moment as the length TX, that is (because CV, WV, and TX, TW proportional to them are given), as the length TW, that is (by Cor. 1, Prop. XLIX) as the length of the arc of the cycloid TR. If therefore two pendulums APT, A*p*t, be unequally drawn aside from the perpendicular AR, and let fall together, their accelerations will be

always as the arcs to be described TR, *t*R. But the parts described at the beginning of the motion are as the accelerations, that is, as the wholes that are to be described at the beginning, and therefore the parts which remain to be described, and the subsequent accelerations proportional to those parts, are also as the wholes, and so on. Therefore the accelerations, and consequently the velocities generated, and the parts described with those velocities; and the parts to be described, are always as the wholes; and therefore the parts to be described preserving a given ratio to each other will vanish together, that is, the two bodies oscillating will arrive together at the perpendicular AR. And since on the other hand the ascent of the pendulums from the lowest place R through the same cycloidal arcs with a retrograde motion, is retarded in the several places they pass through by the same forces by which their descent was accelerated; it is plain that the velocities of their ascent and descent through the same arcs are equal, and consequently performed in equal times; and, therefore, since the two parts of the cycloid RS and RQ lying on either side of the perpendicular are similar and equal, the two pendulums will perform as well the wholes as the halves of their oscillations in the same times. Q.E.D.

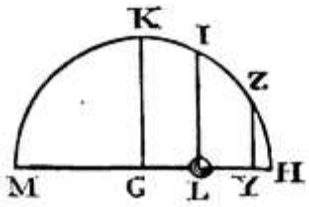
Cor. The force with which the body T is accelerated or retarded in any place T of the cycloid, is to the whole weight of the same body in the highest place S or Q as the arc of the cycloid TR is to the arc SR or QR.

PROPOSITION LII. PROBLEM XXXIV.

To define the velocities of the pendulums in the several places, and the times in which both the entire oscillations, and the several parts of them are performed.


A
O
S
Q
T
R
C

About any centre G, with the interval GH equal to the arc of the cycloid RS, describe a semi-circle HKM bisected by the semi-diameter GK. And if a centripetal force proportional to the distance of the places from the centre tend to the centre G, and it be in the perimeter HIK equal to the centripetal force in the perimeter of the globe QOS tending towards its centre, and at the same time that the pendulum T is let fall from the highest place S, a



body, as L, is let fall from H to G; then because the forces which act upon the bodies are equal at the beginning, and always proportional to the spaces to be described TR, LG, and therefore if TR and LG are equal, are also equal in the places T and L, it is plain that those bodies describe at the beginning equal spaces ST, HL, and therefore are still acted upon equally, and continue to describe equal spaces. Therefore by Prop. XXXVIII, the time in which the body describes the arc ST is to the time of one oscillation, as the arc HI the time in which the body H arrives at L, to the semi-periphery HKM, the time in which the body H will come to M. And the velocity of the pendulous body in the place T is to its velocity in the lowest place R, that is, the velocity of the body H in the place L to its velocity in the place G; or the momentary increment of the line HL to the momentary increment of the line HG (the arcs HI, HK increasing with an equable flux) as the ordinate LI to the radius GK, or as to SR. Hence, since in unequal oscillations there are described in equal time arcs proportional to the entire arcs of the oscillations, there are obtained from the times given, both the velocities and the arcs described in all the oscillations universally. Which was first required.

Let now any pendulous bodies oscillate in different cycloids described within different globes, whose absolute forces are also different; and if the absolute force of any globe QOS be called V, the accelerative force with which the pendulum is acted on in the circumference of this globe, when it begins to move directly towards its centre, will be as the distance of the pendulous body from that centre and the absolute force of the globe conjunctly, that is, as CO V. Therefore the lineola HY, which is as this

accelerated force CO V, will be described in a given time; and if there be erected the perpendicular YZ meeting the circumference in Z, the nascent arc HZ will denote that given time. But that nascent arc HZ is in the subduplicate ratio of the rectangle GHY, and therefore as. Whence the time of an entire oscillation in the cycloid QRS (it being as the semi-periphery HKM, which denotes that entire oscillation, directly; and as the arc HZ which in like manner denotes a given time inversely) will be as GH directly and inversely; that is, because GH and SR are equal, as, or (by Cor. Prop. L,) as. Therefore the oscillations in all globes and cycloids, performed with what absolute forces soever, are in a ratio compounded of the subduplicate ratio of the length of the string directly, and the subduplicate ratio of the distance between the point of suspension and the centre of the globe inversely, and the subduplicate ratio of the absolute force of the globe inversely also. Q.E.I.

Cor. 1. Hence also the times of oscillating, falling, and revolving bodies may be compared among themselves. For if the diameter of the wheel with which the cycloid is described within the globe is supposed equal to the semi-diameter of the globe, the cycloid will become a right line passing through the centre of the globe, and the oscillation will be changed into a descent and subsequent ascent in that right line. Whence there is given both the time of the descent from any place to the centre, and the time equal to it in which the body revolving uniformly about the centre of the globe at any distance describes an arc of a quadrant. For this time (by Case 2) is to the time of half the oscillation in any cycloid QRS as 1 to.

Cor. 2. Hence also follow what Sir *Christopher Wren* and M. *Huygens* have discovered concerning the vulgar cycloid. For if the diameter of the globe be infinitely increased, its sphaerical superficies will be changed into a plane, and the centripetal force will act uniformly in the direction of lines perpendicular to that plane, and this cycloid of our's will become the same with the common cycloid. But in that case the length of the arc of the cycloid between that plane and the describing point will become equal to four times the versed sine of half the arc of the wheel between the same plane and the describing point, as was discovered by Sir *Christopher Wren*. And a pendulum between two such cycloids will oscillate in a similar and equal cycloid in equal times, as M. *Huygens* demonstrated. The descent of

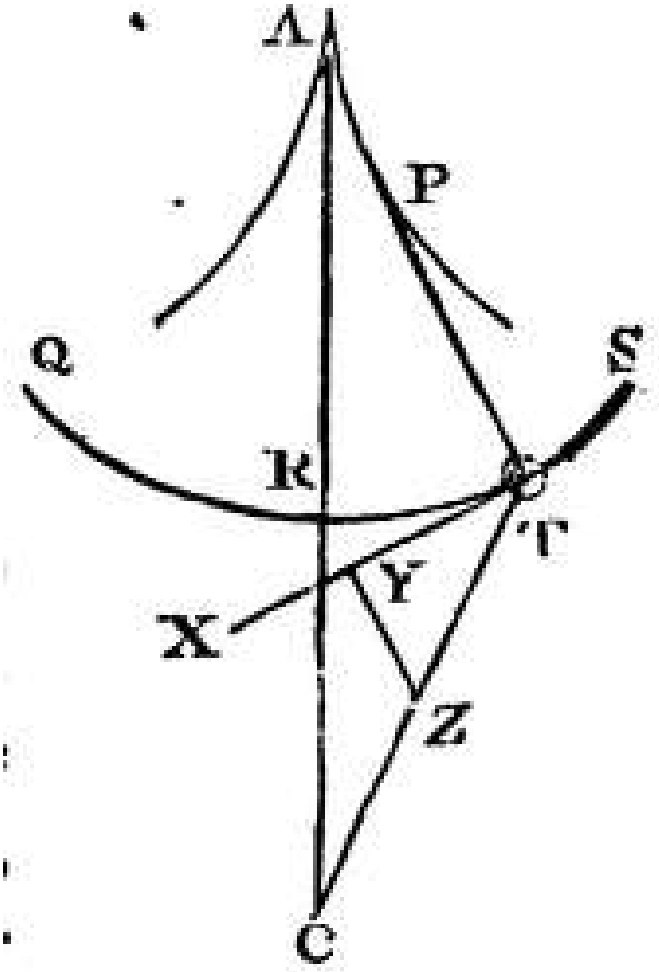
heavy bodies also in the time of one oscillation will be the same as M. *Huygens* exhibited.

The propositions here demonstrated are adapted to the true constitution of the Earth, in so far as wheels moving in any of its great circles will describe, by the motions of nails fixed in their perimeters, cycloids without the globe; and pendulums, in mines and deep caverns of the Earth, must oscillate in cycloids within the globe, that those oscillations may be performed in equal times. For gravity (as will be shewn in the third book) decreases in its progress from the superficies of the Earth; upwards in a duplicate ratio of the distances from the centre of the Earth; downwards in a simple ratio of the same.

PROPOSITION LIII. PROBLEM XXXV.

Granting the quadratures of curvilinear figures, it is required to find the forces with which bodies moving in given curve lines may always perform their oscillations in equal times.

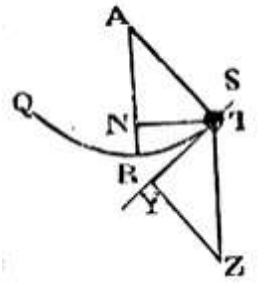
Let the body T oscillate in any curve line STRQ, whose axis is AR passing through the centre of force C. Draw TX touching that curve in any place of the body T, and in that tangent TX take TY equal to the arc TR. The length of that arc is known from the common methods used



for the quadratures of figures. From the point Y draw the right line YZ perpendicular to the tangent. Draw CT meeting that perpendicular in Z, and the centripetal force will be proportional to the right line TZ. Q.E.I.

For if the force with which the body is attracted from T towards C be expressed by the right line TZ taken proportional to it, that force will be resolved into two forces TY, YZ, of which YZ drawing the body in the direction of the length of the thread PT, does not at all change its motion; whereas the other force TY directly accelerates or retards its motion in the curve STRQ. Wherefore since that force is as the space to be described TR,

the accelerations or retardations of the body in describing two proportional parts (a greater and a less) of two oscillations, will be always as those parts, and therefore will cause those parts to be described together. But bodies which continually describe together parts proportional to the wholes, will describe the wholes together also. Q.E.D.



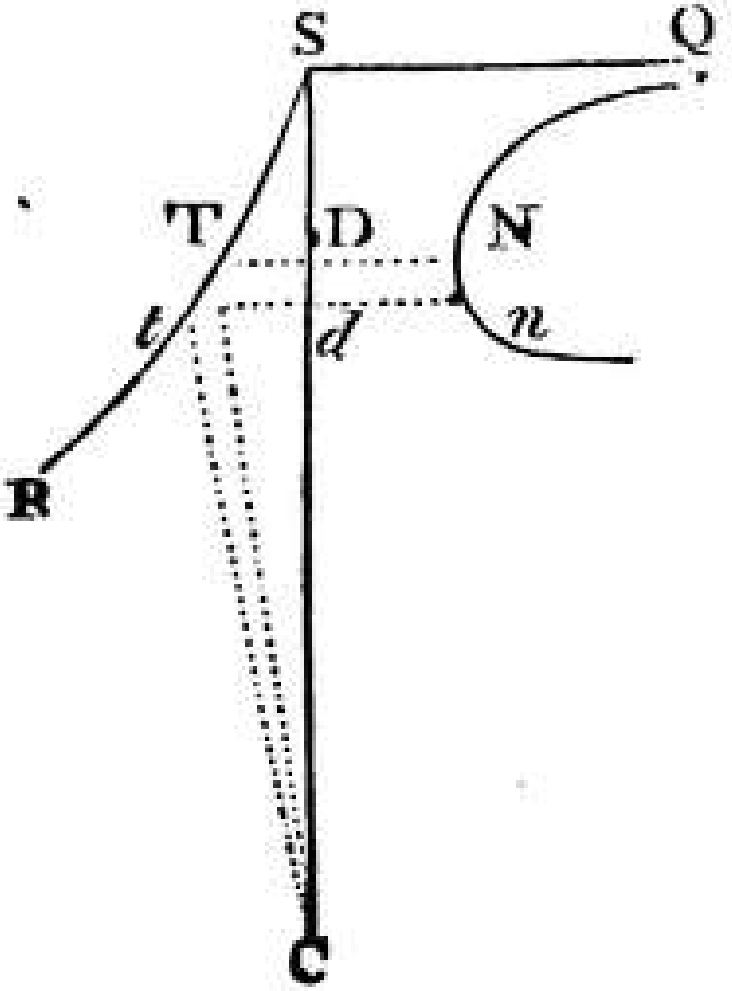
Cor. 1. Hence if the body T, hanging by a rectilinear thread AT from the centre A, describe the circular arc STRQ, and in the mean time be acted on by any force tending downwards with parallel directions, which is to the uniform force of gravity as the arc TR to its sine TN, the times of the several oscillations will be equal. For because TZ, AR are parallel, the triangles ATN, ZTY are similar; and therefore TZ will be to AT as TY to TN; that is, if the uniform force of gravity be expressed by the given length AT, the force TZ, by which the oscillations become isochronous, will be to the force of gravity AT, as the arc TR equal to TY is to TN the sine of that arc.

Cor. 2. And therefore in clocks, if forces were impressed by some machine upon the pendulum which preserves the motion, and so compounded with the force of gravity that the whole force tending downwards should be always as a line produced by applying the rectangle under the arc TR and the radius AR to the sine TN, all the oscillations will become isochronous.

PROPOSITION LIV. PROBLEM XXXVI.

Granting the quadratures of curvilinear figures, it is required to find the times in which bodies by means of any centripetal force will descend or ascend in any curve lines described in a plane passing through the centre of force.

Let the body descend from any place S, and move in any curve ST*t*R given in a plane passing through the centre of force C. Join CS, and let

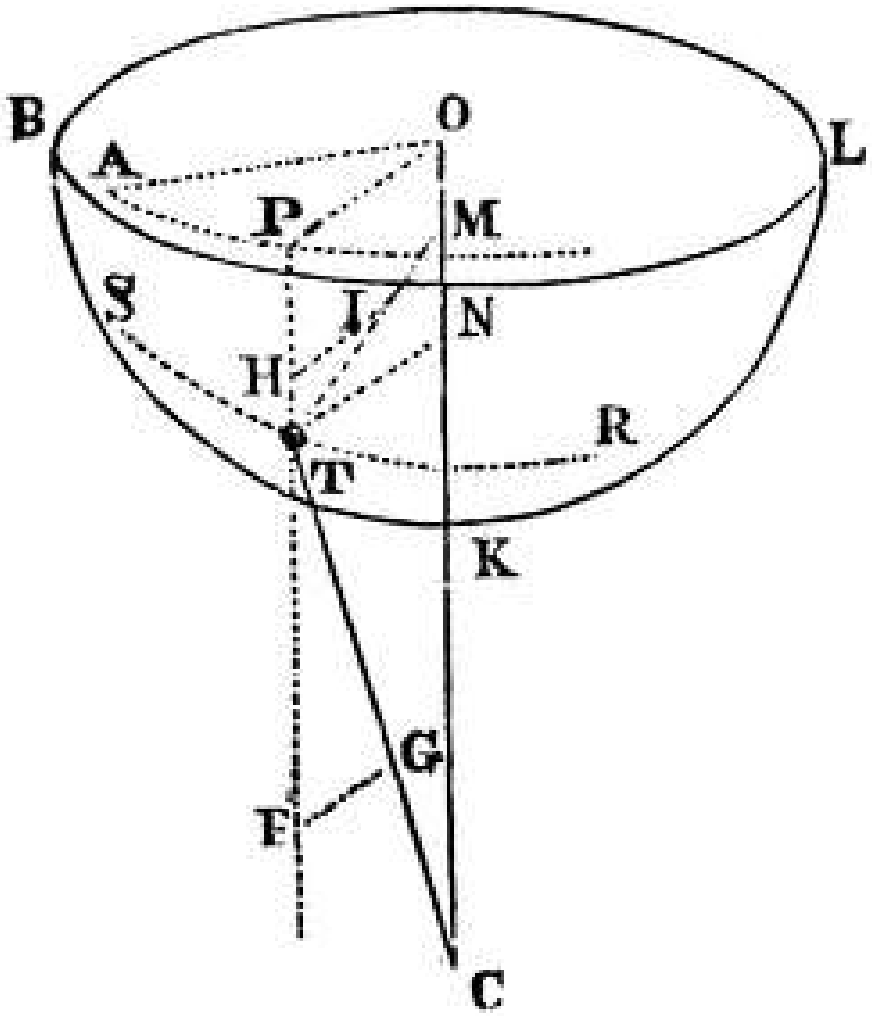


it be divided into innumerable equal parts, and let D*d* be one of those parts. From the centre C, with the intervals CD, C*d*, let the circles DT, *dt* be described, meeting the curve line ST*t*R in T and *t*. And because the law of centripetal force is given, and also the altitude CS from which the body at first fell, there will be given the velocity of the body in any other altitude CT (by Prop. XXXIX). But the time in which the body describes the lineola T*t* is as the length of that lineola, that is, as the secant of the angle *t*TC directly, and the velocity inversely. Let the ordinate DN, proportional to this time, be made perpendicular to the right line CS at the point D, and because D*d* is given, the rectangle D*d* DN, that is, the area DN*nd*, will be proportional to the same time. Therefore if PN*n* be a curve line in which the point N is

perpetually found, and its asymptote be the right line SQ standing upon the line CS at right angles, the area SQPND will be proportional to the time in which the body in its descent hath described the line ST; and therefore that area being found, the time is also given. Q.E.I.

PROPOSITION LV. THEOREM XIX.

If a body move in any curve superficies, whose axis passes through the centre of force, and from the body a perpendicular be let fall upon the axis; and a line parallel and equal thereto be drawn from any given point of the axis; I say, that this parallel line will describe an area proportional to the time.



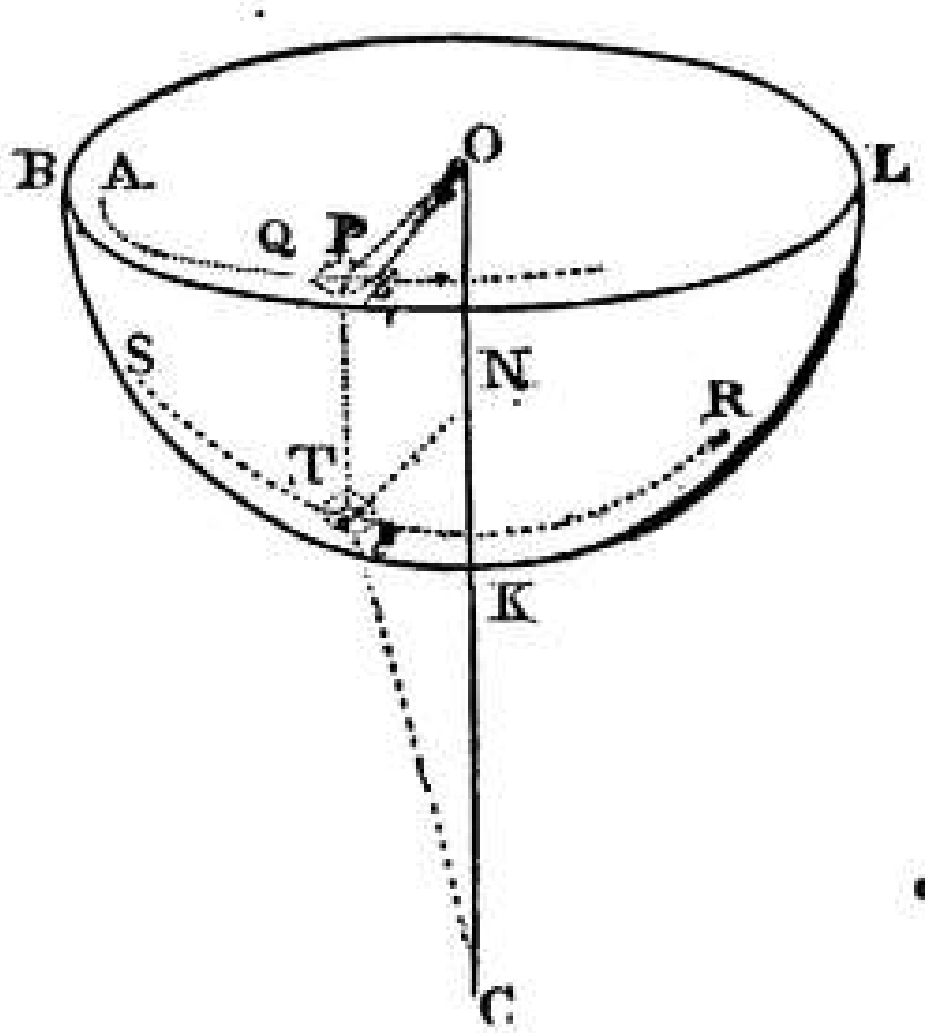
Let BKL be a curve superficies, T a body revolving in it, STR a trajectory which the body describes in the same, S the beginning of the trajectory, OMK the axis of the curve superficies, TN a right line let fall perpendicularly from the body to the axis; OP a line parallel and equal thereto drawn from the given point O in the axis; AP the orthographic projection of the trajectory described by the point P in the plane AOP in which the revolving line OP is found; A the beginning of that projection, answering to the point S; TC a right line drawn from the body to the centre; TG a part thereof proportional to the centripetal force with which the body tends towards the centre C; TM a right line perpendicular to the curve superficies; TI a part thereof proportional to the force of pressure with which the body urges the superficies, and therefore with which it is again repelled by the superficies towards M; PTF a right line parallel to the axis

and passing through the body, and GF, IH right lines let fall perpendicularly from the points G and I upon that parallel PHTF. I say, now. that the area AOP, described by the radius OP from the beginning of the motion, is proportional to the time. For the force TG (by Cor. 2, of the Laws of Motion) is resolved into the forces TF, FG; and the force TI into the forces TH, HI; but the forces TF, TH, acting in the direction of the line PF perpendicular to the plane AOP, introduce no change in the motion of the body but in a direction perpendicular to that plane. Therefore its motion, so far as it has the same direction with the position of the plane, that is, the motion of the point P, by which the projection AP of the trajectory is described in that plane, is the same as if the forces TF, TH were taken away, and the body were acted on by the forces FG, HI alone; that is, the same as if the body were to describe in the plane AOP the curve AP by means of a centripetal force tending to the centre O, and equal to the sum of the forces FG and HI. But with such a force as that (by Pro) the area AOP will be described proportional to the time. Q.E.D.

Cor. By the same reasoning, if a body, acted on by forces tending to two or more centres in any the same right line CO, should describe in a free space any curve line ST, the area AOP would be always proportional to the time.

PROPOSITION LVI. PROBLEM XXXVII.

Granting the quadratures of curvilinear figures, and supposing that there are given both the law of centripetal force tending to a given centre, and the curve superficies whose axis passes through that centre; it is required to find the trajectory which a body will describe in that superficies, when going off from a given place with a given velocity, and in a given direction in that superficies.



The last construction remaining, let the body T go from the given place S, in the direction of a line given by position, and turn into the trajectory sought STR, whose orthographic projection in the plane BDO is AP. And from the given velocity of the body in the altitude SC, its velocity in any other altitude TC will be also given. With that velocity, in a given moment of time, let the body describe the particle T*t* of its trajectory, and let P*p* be the projection of that particle described in the plane AOP. Join O*p*, and a little circle being described upon the curve superficies about the centre T with the interval T*t* let the projection of that little circle in the plane AOP be the ellipsis *p*Q. And because the magnitude of that little circle T*t*, and TN or PO its distance from the axis CO is also given, the ellipsis *p*Q will be given both in kind and magnitude, as also its position to the right line PO. And since the area PO*p* is proportional to the time, and therefore given because

the time is given, the angle PO*p* will be given. And thence will be given *p* the common intersection of the ellipsis and the right line O*p*, together with the angle OP*p*, in which the projection AP*p* of the trajectory cuts the line OP. But from thence (by conferring Prop. XLI, with its 2d Cor.) the manner of determining the curve AP*p* easily appears. Then from the several points P of that projection erecting to the plane AOP, the perpendiculars PT meeting the curve superficies in T, there will be given the several points T of the trajectory. Q.E.I.

Section XI: Of the motions of bodies tending to each other with centripetal forces

I have hitherto been treating of the attractions of bodies towards an immovable centre; though very probably there is no such thing existent in nature. For attractions are made towards bodies, and the actions of the bodies attracted and attracting are always reciprocal and equal, by Law III; so that if there are two bodies, neither the attracted nor the attracting body is truly at rest, but both (by Cor. 4, of the Laws of Motion), being as it were mutually attracted, revolve about a common centre of gravity. And if there be more bodies, which are either attracted by one single one which is attracted by them again, or which all of them, attract each other mutually, these bodies will be so moved among themselves, as that their common centre of gravity will either be at rest, or move uniformly forward in a right line. I shall therefore at present go on to treat of the motion of bodies mutually attracting each other; considering the centripetal forces as attractions; though perhaps in a physical strictness they may more truly be called impulses. But these propositions are to be considered as purely mathematical; and therefore, laying aside all physical considerations, I make use of a familiar way of speaking, to make myself the more easily understood by a mathematical reader.

PROPOSITION LVII. THEOREM XX.

Two bodies attracting each other mutually describe similar figures about their common centre of gravity, and about each other mutually.

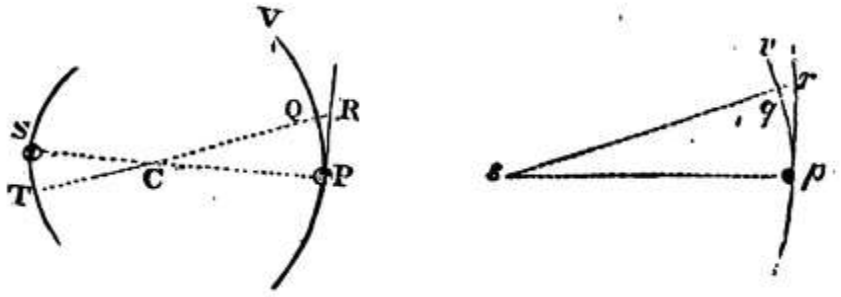
For the distances of the bodies from their common centre of gravity are reciprocally as the bodies; and therefore in a given ratio to each other: and thence, by composition of ratios, in a given ratio to the whole distance between the bodies. Now these distances revolve about their common term with an equable angular motion, because lying in the same right line they never change their inclination to each other mutually. But right lines that are

in a given ratio to each other, and revolve about their terms with an equal angular motion, describe upon planes, which either rest with those terms, or move with any motion not angular, figures entirely similar round those terms. Therefore the figures described by the revolution of these distances are similar. Q.E.D.

PROPOSITION LVIII. THEOREM XXI.

If two bodies attract each other mutually with forces of any kind, and in the mean time revolve about the common centre of gravity; I say, that, by the same forces, there may be described round either body unmoved a figure similar and equal to the figures which the bodies so moving describe round each other mutually.

Let the bodies S and P revolve about their common centre of gravity C, proceeding from S to T, and from P to Q. From the given point *s* let



there be continually drawn *sp, sq*, equal and parallel to SP, TQ; and the curve *pqv*, which the point *p* describes in its revolution round the immovable point *s*, will be similar and equal to the curves which the bodies S and P describe about each other mutually; and therefore, by Theor. XX, similar to the curves ST and PQV which the same bodies describe about their common centre of gravity C; and that because the proportions of the lines SC, CP, and SP or *sp*, to each other, are given.

Case 1. The common centre of gravity C (by Cor. 4, of the Laws of Motion) is either at rest, or moves uniformly in a right line. Let us first suppose it at rest, and in *s* and *p* let there be placed two bodies, one immovable in *s*, the other movable in *p*, similar and equal to the bodies S and P. Then let the right lines PR and *pr* touch the curves PQ and *pq* in P

and *p*, and produce CQ and *sq* to R and *r*. And because the figures CPRQ, *sprq* are similar, RQ will be to *rq* as CP to *sp*, and therefore in a given ratio. Hence if the force with which the body P is attracted towards the body S, and by consequence towards the intermediate point the centre C, were to the force with which the body *p* is attracted towards the centre *s*, in the same given ratio, these forces would in equal times attract the bodies from the tangents PR, *pr* to the arcs PQ, *pq*, through the intervals proportional to them RQ, *rq*; and therefore this last force (tending to *s*) would make the body *p* revolve in the curve *pqv*, which would become similar to the curve PQV, in which the first force obliges the body P to revolve; and their revolutions would be completed in the same times. But because those forces are not to each other in the ratio of CP to *sp*, but (by reason of the similarity and equality of the bodies S and *s*, P and *p* and the equality of the distances SP, *sp*) mutually equal, the bodies in equal times will be equally drawn from the tangents; and therefore that the body *p* may be attracted through the greater interval *rq*, there is required a greater time, which will be in the subduplicate ratio of the intervals; because, by Lemma X, the spaces described at the very beginning of the motion are in a duplicate ratio of the times. Suppose, then the velocity of the body *p* to be to the velocity of the body P in a subduplicate ratio of the distance *sp* to the distance CP, so that the arcs *pq*, PQ, which are in a simple proportion to each other, may be described in times that are in a subduplicate ratio of the distances; and the bodies P, *p*, always attracted by equal forces, will describe round the quiescent centres C and *s* similar figures PQV, *pqv*, the latter of which *pqv* is similar and equal to the figure which the body P describes round the movable body S. Q.E.D.

Case 2. Suppose now that the common centre of gravity, together with the space in which the bodies are moved among themselves, proceeds uniformly in a right line; and (by Cor. 6, of the Laws of Motion) all the motions in this space will be performed in the same manner as before; and therefore the bodies will describe mutually about each other the same figures as before, which will be therefore similar and equal to the figure *pqv*. Q.E.D.

Cor. 1. Hence two bodies attracting each other with forces proportional to their distance, describe (by Prop. X) both round their common centre of gravity, and round each other mutually concentrical ellipses; and, *vice*

versa, if such figures are described, the forces are proportional to the distances.

Cor. 2. And two bodies, whose forces are reciprocally proportional to the square of their distance, describe (by Prop. XI, XII, XIII), both round their common centre of gravity, and round each other mutually, conic sections having their focus in the centre about which the figures are described. And, *vice versa*, if such figures are described, the centripetal forces are reciprocally proportional to the squares of the distance.

Cor. 3. Any two bodies revolving round their common centre of gravity describe areas proportional to the times, by radii drawn both to that centre and to each other mutually.

PROPOSITION LIX. THEOREM XXII.

The periodic time of two bodies S *and* P *revolving round their common centre of gravity* C*, is to the periodic time of one of the bodies* P *revolving round the other* S *remaining unmoved, and describing a figure similar and equal to those which the bodies describe about each other mutually, in a subduplicate ratio of the other body* S *to the sum of the bodies* S + P.

For, by the demonstration of the last Proposition, the times in which any similar arcs PQ, and *pq* are described are in a subduplicate ratio of the distances CP and SP, or *sp*, that is, in a subduplicate ratio of the body S to the sum of the bodies S + P. And by composition of ratios, the sums of the times in which all the similar arcs PQ and *pq* are described, that is, the whole times in which the whole similar figures are described are in the same subduplicate ratio. Q.E.D.

PROPOSITION LX. THEOREM XXIII.

If two bodies S *and* P*, attracting each other with forces reciprocally proportional to the squares of their distance, revolve about their common centre of gravity; I say, that the principal axis of the ellipsis which either of the bodies, as* P*, describes by this motion about the other* S*, will be to the principal axis of the ellipsis, which the same body* P *may describe in the*

same periodical time about the other body S *quiescent, as the sum of the two bodies* S + P *to the first of two mean proportionals between that sum and the other body* S.

For if the ellipses described were equal to each other, their periodic times by the last Theorem would be in a subduplicate ratio of the body S to the sum of the bodies $S + P$. Let the periodic time in the latter ellipsis be diminished in that ratio, and the periodic times will become equal; but, by Prop. XV, the principal axis of the ellipsis will be diminished in a ratio sesquiplicate to the former ratio; that is, in a ratio to which the ratio of S to S + P is triplicate; and therefore that axis will be to the principal axis of the other ellipsis as the first of two mean proportionals between S + P and S to S + P. And inversely the principal axis of the ellipsis described about the movable body will be to the principal axis of that described round the immovable as S + P to the first of two mean proportionals between S + P and S. Q.E.D.

PROPOSITION LXI. THEOREM XXIV.

If two bodies attracting each other with any kind of forces, and not otherwise agitated or obstructed, are moved in any manner whatsoever, those motions will be the same as if they did not at all attract each other mutually, but were both attracted with the same forces by a third body placed in their common centre of gravity; and the law of the attracting forces will he the same in respect of the distance of the bodies from the common centre, as in respect of the distance between the two bodies. For those forces with which the bodies attract each other mutually, by tending to the bodies, tend also to the common centre of gravity lying directly between them; and therefore are the same as if they proceeded from in intermediate body. Q.E.D.

And because there is given the ratio of the distance of either body from that common centre to the distance between the two bodies, there is given, of course, the ratio of any power of one distance to the same power of the other distance; and also the ratio of any quantity derived in any manner from one of the distances compounded any how with given quantities, to

another quantity derived in like manner from the other distance, and as many given quantities having that given ratio of the distances to the first. Therefore if the force with which one body is attracted by another be directly or inversely as the distance of the bodies from each other, or as any power of that distance; or, lastly, as any quantity derived after any manner from that distance compounded with given quantities; then will the same force with which the same body is attracted to the common centre of gravity be in like manner directly or inversely as the distance of the attracted body from the common centre, or as any power of that distance; or, lastly, as a quantity derived in like sort from that distance compounded with analogous given quantities. That is, the law of attracting force will be the same with respect to both distances. Q.E.D.

PROPOSITION LXII. PROBLEM XXXVIII.

To determine the motions of two bodies which attract each other with forces reciprocally proportional to the squares of the distance between them, and are let fall from given places.

The bodies, by the last Theorem, will be moved in the same manner as if they were attracted by a third placed in the common centre of their gravity; and by the hypothesis that centre will be quiescent at the beginning of their motion, and therefore (by Cor. 4, of the Laws of Motion) will be always quiescent. The motions of the bodies are therefore to be determined (by Prob. XXV) in the same manner as if they were impelled by forces tending to that centre; and then we shall have the motions of the bodies attracting each other mutually. Q.E.I.

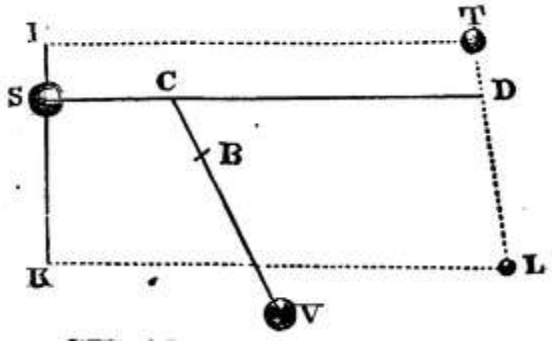
PROPOSITION LXIII. PROBLEM XXXIX.

To determine the motions of two bodies attracting each other with forces reciprocally proportional to the squares of their distance, and going off from given places in given directions with given velocities.

The motions of the bodies at the beginning being given, there is given also the uniform motion of the common centre of gravity, and the motion of the space which moves along with this centre uniformly in a right line, and also the very first, or beginning motions of the bodies in respect of this space. Then (by Cor. 5. of the Laws, and the last Theorem) the subsequent motions will be performed in the same manner in that space, as if that space together with the common centre of gravity were at rest, and as if the bodies did not attract each other, but were attracted by a third body placed in that centre. The motion therefore in this movable space of each body going off from a given place, in a given direction, with a given velocity, and acted upon by a centripetal force tending to that centre, is to be determined by Prob. IX and XXVI, and at the same time will be obtained the motion of the other round the same centre. With this motion compound the uniform progressive motion of the entire system of the space and the bodies revolving in it, and there will be obtained the absolute motion of the bodies in immovable space. Q.E.I.

PROPOSITION LXIV. PROBLEM XL.

Supposing forces with which bodies mutually attract each other to increase in a simple ratio of their distances from the centres; it is required to find the motions of several bodies among themselves.



Suppose the first two bodies T and L to have their common centre of gravity in D. These, by Cor. 1, Theor. XXI, will describe ellipses having their centres in D, the magnitudes of which ellipses are known by Prob. V.

Let now a third body S attract the two former T and L with the accelerative forces ST, SL, and let it be attracted again by them. The force ST (by Cor. 2, of the Laws of Motion) is resolved into the forces SD, DT; and the force SL into the forces SD and DL. Now the forces DT, DL, which are as their sum TL, and therefore as the accelerative forces with which the bodies T and L attract each other mutually, added to the forces of the bodies T and L, the first to the first, and the last to the last, compose forces proportional to the distances DT and DL as before, but only greater than those former forces: and therefore (by Cor. 1, Prop. X, and Cor. 1, and 8, Prop. IV) they will cause those bodies to describe ellipses as before, but with a swifter motion. The remaining accelerative forces SD and DL, by the motive forces SD T and SD L, which are as the bodies attracting those bodies equally and in the direction of the lines TI, LK parallel to DS, do not at all change their situations with respect to one another, but cause them equally to approach to the line IK; which must be imagined drawn through the middle of the body S, and perpendicular to the line DS. But that approach to the line IK will be hindered by causing the system of the bodies T and L on one side, and the body S on the other, with proper velocities, to revolve round the common centre of gravity C. With such a motion the body S, because the sum of the motive forces SD T and SD L is proportional to the distance CS, tends to the centre C, will describe an ellipsis round the same centre C; and the point D, because the lines CS and CD are proportional, will describe a like ellipsis over against it. But the bodies T and L, attracted by the motive forces SD T and SD L, the first by the first, and the last by the last, equally and in the direction of the parallel lines TI and LK, as was said before, will (by Cor. 5 and 6, of the Laws of Motion) continue to describe their ellipses round the movable centre D, as before. Q.E.I.

Let there be added a fourth body V, and, by the like reasoning, it will be demonstrated that this body and the point C will describe ellipses about the common centre of gravity B; the motions of the bodies T, L, and S round the centres D and C remaining the same as before; but accelerated. And by the same method one may add yet more bodies at pleasure. Q.E.I

This would be the case, though the bodies T and L attract each other mutually with accelerative forces either greater or less than those with which they attract the other bodies in proportion to their distance. Let all the

mutual accelerative attractions be to each other as the distances multiplied into the attracting bodies; and from what has gone before it will easily be concluded that all the bodies will describe different ellipses with equal periodical times about their common centre of gravity B, in an immovable plane. Q.E.I.

PROPOSITION LXV. THEOREM XXV.

Bodies, whose forces decrease in a duplicate ratio of their distances from their centres, may move among themselves in ellipses; and by radii drawn to the foci may describe areas proportional to the times very nearly.

In the last Proposition we demonstrated that case in which the motions will be performed exactly in ellipses. The more distant the law of the forces is from the law in that case, the more will the bodies disturb each other's motions; neither is it possible that bodies attracting each other mutually according to the law supposed in this Proposition should move exactly in ellipses, unless by keeping a certain proportion of distances from each other. However, in the following crises the orbits will not much differ from ellipses.

Case I. Imagine several lesser bodies to revolve about some very great one at different distances from it, and suppose absolute forces tending to every one of the bodies proportional to each. And because (by Cor. 4, of the Laws) the common centre of gravity of them all is either at rest, or moves uniformly forward in a right line, suppose the lesser bodies so small that the great body may be never at a sensible distance from that centre; and then the great body will, without any sensible error, be either at rest, or move uniformly forward in a right line; and the lesser will revolve about that great one in ellipses, and by radii drawn thereto will describe areas proportional to the times; if we except the errors that may be introduced by the receding of the great body from the common centre of gravity, or by the mutual actions of the lesser bodies upon each other. But the lesser bodies may be so far diminished, as that this recess and the mutual actions of the bodies on each other may become less than any assignable; and therefore so as that

the orbits may become ellipses, and the areas answer to the times, without any error that is not less than any assignable. Q.E.O.

Case 2. Let us imagine a system of lesser bodies revolving about a very great one in the manner just described, or any other system of two bodies revolving about each other to be moving uniformly forward in a right line, and in the mean time to be impelled sideways by the force of another vastly greater body situate at a great distance. And because the equal accelerative forces with which the bodies are impelled in parallel directions do not change the situation of the bodies with respect to each other, but only oblige the whole system to change its place while the parts still retain their motions among themselves, it is manifest that no change in those motions of the attracted bodies can arise from their attractions towards the greater, unless by the inequality of the accelerative attractions, or by the inclinations of the lines towards each other, in whose directions the attractions are made. Suppose, therefore, all the accelerative attractions made towards the great body to be among themselves as the squares of the distances reciprocally; and then, by increasing the distance of the great body till the differences of the right lines drawn from that to the others in respect of their length, and the inclinations of those lines to each other, be less than any given, the motions of the parts of the system will continue without errors that are not less than any given. And because, by the small distance of those parts from each other, the whole system is attracted as if it were but one body, it will therefore be moved by this attraction as if it were one body; that is, its centre of gravity will describe about the great body one of the conic sections (that is, a parabola or hyperbola when the attraction is but languid and an ellipsis when it is more vigorous); and by radii drawn thereto, it will describe areas proportional to the times, without any errors but those which arise from the distances of the parts, which are by the supposition exceedingly small, and may be diminished at pleasure. Q.E.O.

By a like reasoning one may proceed to more compounded cases *in infinitum*.

Cor. 1. In the second Case, the nearer the very great body approaches to the system of two or more revolving bodies, the greater will the perturbation be of the motions of the parts of the system among themselves; because the inclinations of the lines drawn from that great body to those parts become greater; and the inequality of the proportion is also greater.

Cor. 2. But the perturbation will be greatest of all, if we suppose the accelerative attractions of the parts of the system towards the greatest body of all are not to each other reciprocally as the squares of the distances from that great body; especially if the inequality of this proportion be greater than the inequality of the proportion of the distances from the great body. For if the accelerative force, acting in parallel directions and equally, causes no perturbation in the motions of the parts of the system, it must of course, when it acts unequally, cause a perturbation somewhere, which will be greater or less as the inequality is greater or less. The excess of the greater impulses acting upon some bodies, and not acting upon others, must necessarily change their situation among themselves. And this perturbation, added to the perturbation arising from the inequality and inclination of the lines, makes the whole perturbation greater.

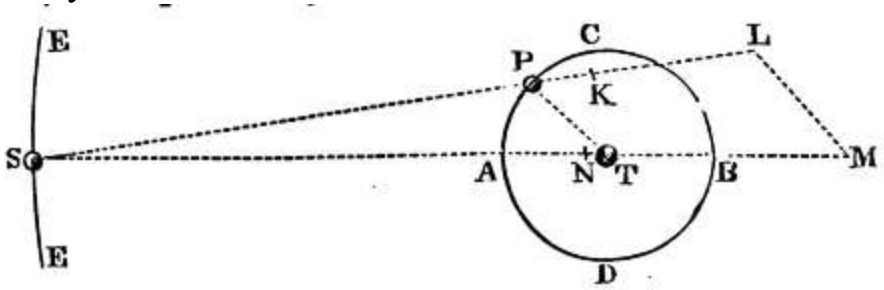
Cor. 3. Hence if the parts of this system move in ellipses or circles without any remarkable perturbation, it is manifest that, if they are at all impelled by accelerative forces tending to any other bodies, the impulse is very weak, or else is impressed very near equally and in parallel directions upon all of them.

PROPOSITION LXVI. THEOREM XXVI.

If three bodies whose forces decrease in a duplicate ratio of the distances attract each other mutually; and the accelerative attractions of any two towards the third be between themselves reciprocally as the squares of the distances; and the two least revolve about the greatest; I say, that the interior of the two revolving bodies will, by radii drawn to the innermost and greatest, describe round that body areas more proportional to the times, and a figure more approaching to that of an ellipsis having its focus in the point of concourse of the radii, if that great body be agitated by those attractions, than it would do if that great body were not attracted at all by the lesser, but remained at rest; or than, it would if that great body were very much more or very much less attracted, or very much more or very much less agitated, by the attractions.

This appears plainly enough from the demonstration of the second Corollary of the foregoing Proposition; but it maybe made out after this manner by a way of reasoning more distinct and more universally convincing.

Case 1. Let the lesser bodies P and S revolve in the same plane about the greatest body T, the body P describing the interior orbit PAB, and S the exterior orbit ESE. Let SK be the mean distance of the bodies P and S; and let the accelerative attraction of the body P towards S, at that mean distance, be expressed by that line SK. Make SL to SK as the



square of SK to the square of SP, and SL will be the accelerative attraction of the body P towards S at any distance SP. Join PT, and draw LM parallel to it meeting ST in M; and the attraction SL will be resolved (by Cor. 2, of the Laws of Motion) into the attractions SM, LM. And so the body P will be urged with a threefold accelerative force. One of these forces tends towards T, and arises from the mutual attraction of the bodies T and P. By this force alone the body P would describe round the body T, by the radius PT, areas proportional to the times, and an ellipsis whose focus is in the centre of the body T; and this it would do whether the body T remained unmoved, or whether it were agitated by that attraction. This appears from Prop. XI, and Cor. 2 and 3 of Theor. XXI. The other force is that of the attraction LM, which, because it tends from P to T, will be superadded to and coincide with the former force; and cause the areas to be still proportional to the times, by Cor. 3, Theor. XXI. But because it is not reciprocally proportional to the square of the distance PT, it will compose, when added to the former, a force varying from that proportion; which variation will be the greater by how much the proportion of this force to the former is greater, *caeteris paribus*. Therefore, since by Prop. XI, and by Cor. 2, Theor. XXI, the force with which the ellipsis is described about the focus T ought to be directed to that focus, and to be reciprocally

proportional to the square of the distance PT, that compounded force varying from that proportion will make the orbit PAB vary from the figure of an ellipsis that has its focus in the point T; and so much the more by how much the variation from that proportion is greater; and by consequence by how much the proportion of the second force LM to the first force is greater, *caeteris paribus*. But now the third force SM, attracting the body P in a direction parallel to ST, composes with the other forces a new force which is no longer directed from P to T; and which varies so much more from this direction by how much the proportion of this third force to the other forces is greater, *caeteris paribus*; and therefore causes the body P to describe, by the radius TP, areas no longer proportional to the times; and therefore makes the variation from that proportionality so much greater by how much the proportion of this force to the others is greater. But this third force will increase the variation of the orbit PAB from the elliptical figure before-mentioned upon two accounts; first because that force is not directed from P to T; and, secondly, because it is not reciprocally proportional to the square of the distance PT. These things being premised, it is manifest that the areas are then most nearly proportional to the times, when that third force is the least possible, the rest preserving their former quantity; and that the orbit PAB does then approach nearest to the elliptical figure above-mentioned, when both the second and third, but especially the third force, is the least possible; the first force remaining in its former quantity.

Let the accelerative attraction of the body T towards S be expressed by the line SN; then if the accelerative attractions SM and SN were equal, these, attracting the bodies T and P equally and in parallel directions would not at all change their situation with respect to each other. The motions of the bodies between themselves would be the same in that case as if those attractions did not act at all, by Cor. 6, of the Laws of Motion. And, by a like reasoning, if the attraction SN is less than the attraction SM, it will take away out of the attraction SM the part SN, so that there will remain only the part (of the attraction) MN to disturb the proportionality of the areas and times, and the elliptical figure of the orbit. And in like manner if the attraction SN be greater than the attraction SM, the perturbation of the orbit and proportion will be produced by the difference MN alone. After this manner the attraction SN reduces always the attraction SM to the attraction MN, the first and second attractions remaining perfectly unchanged; and

therefore the areas and times come then nearest to proportionality, and the orbit PAB to the above-mentioned elliptical figure, when the attraction MN is either none, or the least that is possible; that is, when the accelerative attractions of the bodies P and T approach as near as possible to equality; that is, when the attraction SN is neither none at all, nor less than the least of all the attractions SM, but is, as it were; a mean between the greatest and least of all those attractions SM, that is, not much greater nor much less than the attraction SK. Q.E.D.

Case 2. Let now the lesser bodies P, S, revolve about a greater T in different planes; and the force LM, acting in the direction of the line PT situate in the plane of the orbit PAB, will have the same effect as before; neither will it draw the body P from the plane of its orbit. But the other force NM acting in the direction of a line parallel to ST (and which, therefore, when the body S is without the line of the nodes is inclined to the plane of the orbit PAB), besides the perturbation of the motion just now spoken of as to longitude, introduces another perturbation also as to latitude, attracting the body P out of the plane of its orbit. And this perturbation, in any given situation of the bodies P and T to each other, will be as the generating force MN; and therefore becomes least when the force MN is least, that is (as was just now shewn), where the attraction SN is not much greater nor much less than the attraction SK. Q.E.D.

Cor. 1. Hence it may be easily collected, that if several less bodies P, S, R, &c., revolve about a very great body T, the motion of the innermost revolving body P will be least disturbed by the attractions of the others, when the great body is as well attracted and agitated by the rest (according to the ratio of the accelerative forces) as the rest are by each other mutually.

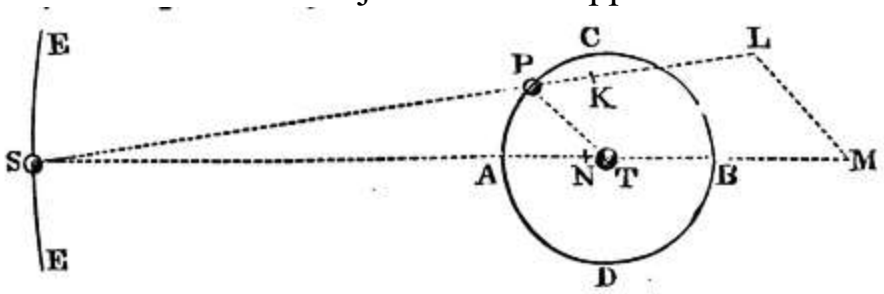
Cor. 2. In a system of three bodies, T, P, S, if the accelerative attractions of any two of them towards a third be to each other reciprocally as the squares of the distances, the body P, by the radius PT, will describe its area about the body T swifter near the conjunction A and the opposition B than it will near the quadratures C and D. For every force with which the body P is acted on and the body T is not, and which does not act in the direction of the line PT, does either accelerate or retard the description of the area, according as it is directed, whether *in consequentia* or *in antecedentia*. Such is the force NM. This force in the passage of the body P from C to A is directed *in consequentia* to its motion, and therefore accelerates it; then as

far as D *in antecedentia*, and retards the motion; then *in consequentia* as far as B; and lastly *in antecedentia* as it moves from B to C.

Cor. 3. And from the same reasoning it appears that the body P *caeteris paribus*, moves more swiftly in the conjunction and opposition than in the quadratures.

Cor. 4. The orbit of the body P, *caeteris paribus*, is more curve at the quadratures than at the conjunction and opposition. For the swifter bodies move, the less they deflect from a rectilinear path. And besides the force KL, or NM, at the conjunction and opposition, is contrary to the force with which the body T attracts the body P, and therefore diminishes that force; but the body P will deflect the less from a rectilinear path the less it is impelled towards the body T.

Cor. 5. Hence the body P, *caeteris paribus*, goes farther from the body T at the quadratures than at the conjunction and opposition. This is said,



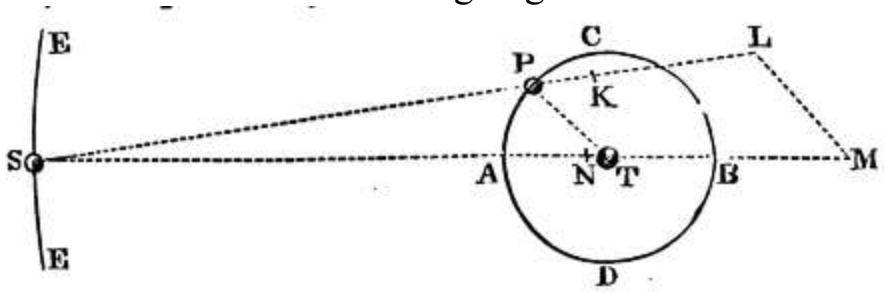
however, supposing no regard had to the motion of eccentricity. For if the orbit of the body P be eccentrical, its eccentricity (as will be shewn presently by Cor. 9) will be greatest when the apsides are in the syzygies; and thence it may sometimes come to pass that the body P, in its near approach to the farther apsis, may go farther from the body T at the syzygies than at the quadratures.

Cor. 6. Because the centripetal force of the central body T, by which the body P is retained in its orbit, is increased at the quadratures by the addition caused by the force LM, and diminished at the syzygies by the subduction caused by the force KL, and, because the force KL is greater than LM, it is more diminished than increased; and, moreover, since that centripetal force (by Cor. 2, Prop. IV) is in a ratio compounded of the simple ratio of the radius TP directly, and the duplicate ratio of the periodical time inversely; it is plain that this compounded ratio is diminished by the action of the force KL; and therefore that the periodical time, supposing the radius of the orbit

PT to remain the same, will be increased, and that in the subduplicate of that ratio in which the centripetal force is diminished; and, therefore, supposing this radius increased or diminished, the periodical time will be increased more or diminished less than in the sesquiplicate ratio of this radius, by Cor. 6, Prop. IV. If that force of the central body should gradually decay, the body P being less and less attracted would go farther and farther from the centre T; and, on the contrary, if it were increased, it would draw nearer to it. Therefore if the action of the distant body S, by which that force is diminished, were to increase and decrease by turns, the radius TP will be also increased and diminished by turns; and the periodical time will be increased and diminished in a ratio compounded of the sesquiplicate ratio of the radius, and of the subduplicate of that ratio in which the centripetal force of the central body T is diminished or increased, by the increase or decrease of the action of the distant body S.

Cor. 7. It also follows, from what was before laid down, that the axis of the ellipsis described by the body P, or the line of the apsides, does as to its angular motion go forwards and backwards by turns, but more forwards than backwards, and by the excess of its direct motion is in the whole carried forwards. For the force with which the body P is urged to the body T at the quadratures, where the force MN vanishes, is compounded of the force LM and the centripetal force with which the body T attracts the body P. The first force LM, if the distance PT be increased, is increased in nearly the same proportion with that distance, and the other force decreases in the duplicate ratio of the distance; and therefore the sum of these two forces decreases in a less than the duplicate ratio of the distance PT; and therefore, by Cor. 1, Prop. XLV, will make the line of the apsides, or, which is the same thing, the upper apsis, to go backward. But at the conjunction and opposition the force with which the body P is urged towards the body T is the difference of the force KL, and of the force with which the body T attracts the body P; and that difference, because the force KL is very nearly increased in the ratio of the distance PT, decreases in more than the duplicate ratio of the distance PT; and therefore, by Cor. 1, Prop. XLV, causes the line of the apsides to go forwards. In the places between the syzygies and the quadratures, the motion of the line of the apsides depends upon both of these causes conjunctly, so that it either goes forwards or backwards in proportion to the excess of one of these causes above the

other. Therefore since the force KL in the syzygies is almost twice as great as the force LM in the quadratures, the excess will be on the side of the force KL, and by consequence the line of the apsides will be carried forwards. The truth of this and the foregoing



Corollary will be more easily understood by conceiving the system of the two bodies T and P to be surrounded on every side by several bodies S, S, S, &c., disposed about the orbit ESE. For by the actions of these bodies the action of the body T will be diminished on every side, and decrease in more than a duplicate ratio of the distance.

Cor. 8. But since the progress or regress of the apsides depends upon the decrease of the centripetal force, that is, upon its being in a greater or less ratio than the duplicate ratio of the distance TP, in the passage of the body from the lower apsis to the upper; and upon a like increase in its return to the lower apsis again; and therefore becomes greatest where the proportion of the force at the upper apsis to the force at the lower apsis recedes farthest from the duplicate ratio of the distances inversely; it is plain, that, when the apsides are in the syzygies, they will, by reason of the subducting force KL or NM - LM, go forward more swiftly; and in the quadratures by the additional force LM go backward more slowly. Because the velocity of the progress or slowness of the regress is continued for a long time; this inequality becomes exceedingly great.

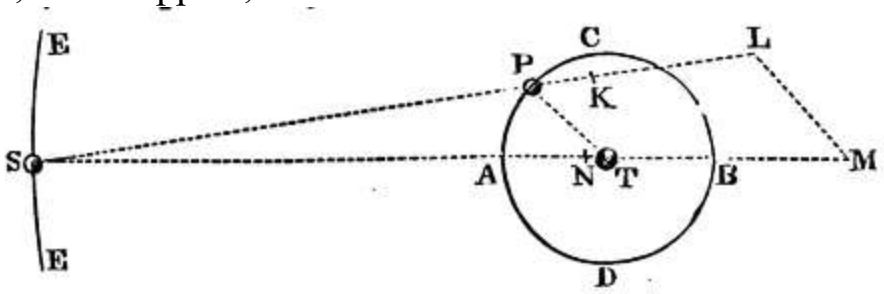
Cor. 9. If a body is obliged, by a force reciprocally proportional to the square of its distance from any centre, to revolve in an ellipsis round that centre; and afterwards in its descent from the upper apsis to the lower apsis, that force by a perpetual accession of new force is increased in more than a duplicate ratio of the diminished distance; it is manifest that the body, being impelled always towards the centre by the perpetual accession of this new force, will incline more towards that centre than if it were urged by that force alone which decreases in a duplicate ratio of the diminished distance,

and therefore will describe an orbit interior to that elliptical orbit, and at the lower apsis approaching nearer to the centre than before. Therefore the orbit by the accession of this new force will become more eccentrical. If now, while the body is returning from the lower to the upper apsis, it should decrease by the same degrees by which it increases before the body would return to its first distance; and therefore if the force decreases in a yet greater ratio, the body, being now less attracted than before, will ascend to a still greater distance, and so the eccentricity of the orbit will be increased still more. Therefore if the ratio of the increase and decrease of the centripetal force be augmented each revolution, the eccentricity will be augmented also; and, on the contrary, if that ratio decrease, it will be diminished.

Now, therefore, in the system of the bodies T, P, S, when the apsides of the orbit PAB are in the quadratures, the ratio of that increase and decrease is least of all, and becomes greatest when the apsides are in the syzygies. If the apsides are placed in the quadratures, the ratio near the apsides is less, and near the syzygies greater, than the duplicate ratio of the distances; and from that greater ratio arises a direct motion of the line of the apsides, as was just now said. But if we consider the ratio of the whole increase or decrease in the progress between the apsides, this is less than the duplicate ratio of the distances. The force in the lower is to the force in the upper apsis in less than a duplicate ratio of the distance of the upper apsis from the focus of the ellipsis to the distance of the lower apsis from the same focus; and, contrariwise, when the apsides are placed in the syzygies, the force in the lower apsis is to the force in the upper apsis in a greater than a duplicate ratio of the distances. For the forces LM in the quadratures added to the forces of the body T compose forces in a less ratio; and the forces KL in the syzygies subducted from the forces of the body T, leave the forces in a greater ratio. Therefore the ratio of the whole increase and decrease in the passage between the apsides is least at the quadratures and greatest at the syzygies; and therefore in the passage of the apsides from the quadratures to the syzygies it is continually augmented, and increases the eccentricity of the ellipsis; and in the passage from the syzygies to the quadratures it is perpetually decreasing, and diminishes the eccentricity.

Cor. 10. That we may give an account of the errors as to latitude, let us suppose the plane of the orbit EST to remain immovable; and from the

cause of the errors above explained, it is manifest, that, of the two forces NM, ML, which are the only and entire cause of them, the force ML acting always in the plane of the orbit PAB never disturbs the motions as to latitude; and that the force NM, when the nodes are in the syzygies, acting also in the same plane of the orbit, does not at that time affect those motions. But when the nodes are in the quadratures, it disturbs them very much, and, attracting the body P perpetually out of the plane of its orbit, it diminishes the inclination of the plane in the passage of the body from the quadratures to the syzygies, and again increases the same in the passage from the syzygies to the quadratures. Hence it comes to pass that when the body is in the syzygies, the inclination is then least of all, and returns to the first magnitude nearly, when the body arrives at the next node. But if the nodes are situate at the octants after the quadratures, that is, between C and A, D and B, it will appear, from



what was just now shewn, that in the passage of the body P from either node to the ninetieth degree from thence, the inclination of the plane is perpetually diminished; then, in the passage through the next 45 degrees to the next quadrature, the inclination is increased; and afterwards, again, in its passage through another 45 degrees to the next node, it is diminished. Therefore the inclination is more diminished than increased, and is therefore always less in the subsequent node than in the preceding one. And, by a like reasoning, the inclination is more increased than diminished when the nodes are in the other octants between A and D, B and C. The inclination, therefore, is the greatest of all when the nodes are in the syzygies. In their passage from the syzygies to the quadratures the inclination is diminished at each appulse of the body to the nodes: and be comes least of all when the nodes are in the quadratures, and the body in the syzygies; then it increases by the same degrees by which it decreased

before; and, when the nodes come to the next syzygies, returns to its former magnitude.

Cor. 11. Because when the nodes are in the quadratures the body P is perpetually attracted from the plane of its orbit; and because this attraction is made towards S in its passage from, the node C through the conjunction A to the node D; and to the contrary part in its passage from the node D through the opposition B to the node C; it is manifest that, in its motion from the node C, the body recedes continually from the former plane CD of its orbit till it comes to the next node; and therefore at that node, being now at its greatest distance from the first plane CD, it will pass through the plane of the orbit EST not in D, the other node of that plane, but in a point that lies nearer to the body S, which therefore be comes a new place of the node *in antecedentia* to its former place. And, by a like reasoning, the nodes will continue to recede in their passage from this node to the next. The nodes, therefore, when situate in the quadratures, recede perpetually; and at the syzygies, where no perturbation can be produced in the motion as to latitude, are quiescent: in the intermediate places they partake of both conditions, and recede more slowly; and, therefore, being always either retrograde or stationary, they will be carried backwards, or *in antecedentia*, each revolution.

Cor. 12. All the errors described in these corrollaries are a little greater at the conjunction of the bodies P, S, than at their opposition; because the generating forces NM and ML are greater.

Cor. 13. And since the causes and proportions of the errors and variations mentioned in these Corollaries do not depend upon the magnitude of the body S, it follows that all things before demonstrated will happen, if the magnitude of the body S be imagined so great as that the system of the two bodies P and T may revolve about it. And from this increase of the body S, and the consequent increase of its centripetal force, from which the errors of the body P arise, it will follow that all these errors, at equal distances, will be greater in this case, than in the other where the body S revolves about the system of the bodies P and T.

Cor. 14. But since the forces NM, ML, when the body S is exceedingly distant, are very nearly as the force SK and the ratio PT to ST conjunctly; that is, if both the distance PT, and the absolute force of the body S be given, as ST^3 reciprocally; and since those forces NM, ML are the causes of

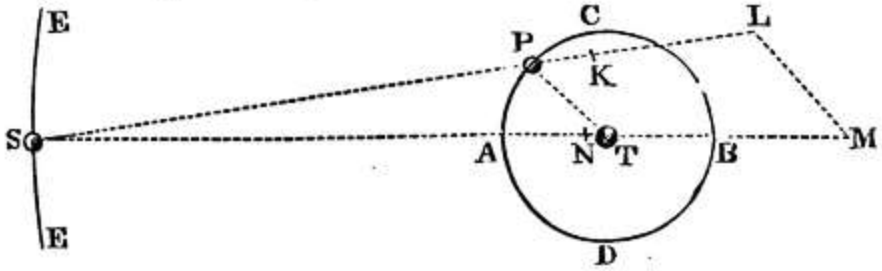
all the errors and effects treated of in the foregoing Corollaries; it is manifest that all those effects, if the system of bodies T and P continue as before, and only the distance ST and the absolute force of the body S be changed, will be very nearly in a ratio compounded of the direct ratio of the absolute force of the body S, and the triplicate inverse ratio of the distance ST. Hence if the system of bodies T and P revolve about a distant body S, those forces NM, ML, and their effects, will be (by Cor. 2 and 6, Prop IV) reciprocally in a duplicate ratio of the periodical time. And thence, also, if the magnitude of the body S be proportional to its absolute force, those forces NM, ML, and their effects, will be directly as the cube of the apparent diameter of the distant body S viewed from T, and so *vice versa*. For these ratios are the same as the compounded ratio above mentioned.

Cor. 15. And because if the orbits ESE and PAB, retaining their figure, proportions, and inclination to each other, should alter their magnitude; and the forces of the bodies S and T should either remain, or be changed in any given ratio; these forces (that is, the force of the body T, which obliges the body P to deflect from a rectilinear course into the orbit PAB, and the force of the body S, which causes the body P to deviate from that orbit) would act always in the same manner, and in the same proportion; it follows, that all the effects will be similar and proportional, and the times of those effects proportional also; that is, that all the linear errors will be as the diameters of the orbits, the angular errors the same as before; and the times of similar linear errors, or equal angular errors, as the periodical times of the orbits.

Cor. 16. Therefore if the figures of the orbits and their inclination to each other be given, and the magnitudes, forces, and distances of the bodies be any how changed, we may, from the errors and times of those errors in one case, collect very nearly the errors and times of the errors in any other case. But this may be done more expeditiously by the following method. The forces NM, ML, other things remaining unaltered, are as the radius TP; and their periodical effects (by Cor. 2, Lem. X) are as the forces and the square of the periodical time of the body P conjunctly. These are the linear errors of the body P; and hence the angular errors as they appear from the centre T (that is, the motion of the apsides and of the nodes, and all the apparent errors as to longitude and latitude) are in each revolution of the body P as the square of the time of the revolution, very nearly. Let these ratios be compounded with the ratios in Cor. 14, and in any system of bodies T, P, S,

where P revolves about T very near to it, and T revolves about S at a great distance, the angular errors of the body P, observed from the centre T, will be in each revolution of the body P as the square of the periodical time of the body P directly, and the square of the periodical time of the body T inversely. And therefore the mean motion of the line of the apsides will be in a given ratio to the mean motion of the nodes; and both those motions will be as the periodical time of the body P directly, and the square of the periodical time of the body T inversely. The increase or diminution of the eccentricity and inclination of the orbit PAB makes no sensible variation in the motions of the apsides and nodes, unless that increase or diminution be very great indeed.

Cor. 17. Since the line LM becomes sometimes greater and sometimes less than the radius PT, let the mean quantity of the force LM be expressed



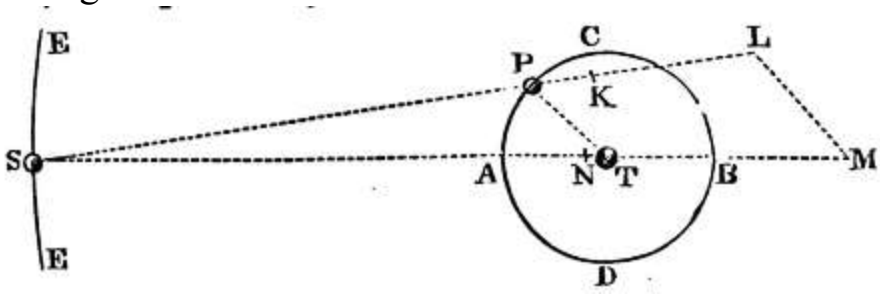
by that radius PT; and then that mean force will be to the mean force SK or SN (which may be also expressed by ST) as the length PT to the length ST. But the mean force SN or ST, by which the body T is retained in the orbit it describes about S, is to the force with which the body P is retained in its orbit about T in a ratio compounded of the ratio of the radius ST to the radius PT, and the duplicate ratio of the periodical time of the body P about T to the periodical time of the body T about S. And, *ex aequo*, the mean force LM is to the force by which the body P is retained in its orbit about T (or by which the same body P might revolve at the distance PT in the same periodical time about any immovable point T) in the same duplicate ratio of the periodical times. The periodical times therefore being given, together with the distance PT, the mean force LM is also given; and that force being given, there is given also the force MN, very nearly, by the analogy of the lines PT and MN.

Cor. 18. By the same laws by which the body P revolves about the body T, let us suppose many fluid bodies to move round T at equal distances from

it; and to be so numerous, that they may all become contiguous to each other, so as to form a fluid annulus, or ring, of a round figure, and concentrical to the body T; and the several parts of this annulus, performing their motions by the same law as the body P, will draw nearer to the body T, and move swifter in the conjunction and opposition of themselves and the body S, than in the quadratures. And the nodes of this annulus, or its intersections with the plane of the orbit of the body S or T, will rest at the syzygies; but out of the syzygies they will be carried backward, or *in antecedentia*; with the greatest swiftness in the quadratures, and more slowly in other places. The inclination of this annulus also will vary, and its axis will oscillate each revolution, and when the revolution is completed will return to its former situation, except only that it will be carried round a little by the precession of the nodes.

Cor. 19. Suppose now the sphaerical body T, consisting of some matter not fluid, to be enlarged, and to extend itself on every side as far as that annulus, and that a channel were cut all round its circumference containing water; and that this sphere revolves uniformly about its own axis in the same periodical time. This water being accelerated and retarded by turns (as in the last Corollary), will be swifter at the syzygies, and slower at the quadratures, than the surface of the globe, and so will ebb and flow in its channel after the manner of the sea. If the attraction of the body's were taken away, the water would acquire no motion of flux and reflux by revolving round the quiescent centre of the globe. The case is the same of a globe moving uniformly forwards in a right line, and in the mean time revolving about its centre (by Cor. 5 of the Laws of Motion), and of a globe uniformly attracted from its rectilinear course (by Cor. 6, of the same Laws). But let the body S come to act upon it, and by its unequable attraction the water will receive this new motion; for there will be a stronger attraction upon that part of the water that is nearest to the body, and a weaker upon that part which is more remote. And the force LM will attract the water downwards at the quadratures, and depress it as far as the syzygies; and the force KL will attract it upwards in the syzygies, and withhold its descent, and make it rise as far as the quadratures; except only in so far as the motion of flux and reflux may be directed by the channel of the water, and be a little retarded by friction.

Cor. 20. If, now, the annulus becomes hard, and the globe is diminished, the motion of flux and reflux will cease; but the oscillating motion of the inclination and the praecession of the nodes will remain. Let the globe have the same axis with the annulus, and perform its revolutions in the same times, and at its surface touch the annulus within, and adhere to it; then the globe partaking of the motion of the annulus, this whole compages will oscillate, and the nodes will go backward, for the globe, as we shall shew presently, is perfectly indifferent to the receiving of all impressions. The greatest angle of the inclination of the annulus single is when the nodes are in the syzygies. Thence in the progress of the nodes to the quadratures, it endeavours to diminish its inclination, arid by that endeavour impresses a motion upon the whole globe. The globe retains this motion impressed, till the annulus by a contrary endeavour destroys that motion, and impresses a new motion in a contrary direction. And by this means the greatest motion of the decreasing inclination happens when the nodes are in the quadratures; and the least angle of inclination in the octants



after the quadratures; and, again, the greatest motion of reclination happens when the nodes are in the syzygies; and the greatest angle of reclination in the octants following. And the case is the same of a globe without this annulus, if it be a little higher or a little denser in the equatorial than in the polar regions; for the excess of that matter in the regions near the equator supplies the place of the annulus. And though we should suppose the centripetal force of this globe to be any how increased, so that all its parts were to tend downwards, as the parts of our earth gravitate to the centre, yet the phenomena of this and the preceding Corollary would scarce be altered; except that the places of the greatest and least height of the water will be different: for the water is now no longer sustained and kept in its orbit by its centrifugal force, but by the channel in which it flows. And, besides, the force LM attracts the water downwards most in the quadratures,

and the force KL or NM - LM attracts it upwards most in the syzygies. And these forces conjoined cease to attract the water downwards, and begin to attract it upwards in the octants before the syzygies; and cease to attract the water upwards, and begin to attract the water downwards in the octants after the syzygies. And thence the greatest height of the water may happen about the octants after the syzygies; and the least height about the octants after the quadratures; excepting only so far as the motion of ascent or descent impressed by these forces may by the *vis insita* of the water continue a little longer, or be stopped a little sooner by impediments in its channel.

Cor. 21. For the same reason that redundant matter in the equatorial regions of a globe causes the nodes to go backwards, and therefore by the increase of that matter that retrogradation is increased, by the diminution is diminished, and by the removal quite ceases: it follows, that, if more than that redundant matter be taken away, that is, if the globe be either more depressed, or of a more rare consistence near the equator than near the poles, there will arise a motion of the nodes *in consequentia*.

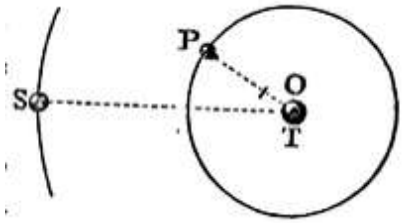
Cor. 22. And thence from the motion of the nodes is known the constitution of the globe. That is, if the globe retains unalterably the same poles, and the motion (of the nodes) be *in antecedentia*, there is a redundance of the matter near the equator; but if *in consequentia*, a deficiency. Suppose a uniform and exactly spherical globe to be first at rest in a free space: then by some impulse made obliquely upon its superficies to be driven from its place, and to receive a motion partly circular and partly right forward. Because this globe is perfectly indifferent to all the axes that pass through its centre, nor has a greater propensity to one axis or to one situation of the axis than to any other, it is manifest that by its own force it will never change its axis, or the inclination of it. Let now this globe be impelled obliquely by a new impulse in the same part of its superficies as before, and since the effect of an impulse is not at all changed by its coming sooner or later, it is manifest that these two impulses, successively impressed, will produce the same motion as if they were impressed at the same time: that, is, the same motion as if the globe had been impelled by a simple force compounded of them both (by Cor. 2, of the Laws), that is, a simple motion about an axis of a given inclination. And the case is the same if the second impulse were made upon any other place of the equator of the first motion; and also if the first impulse were made upon any place in the

equator of the motion which would be generated by the second impulse alone; and therefore, also, when both impulses are made in any places whatsoever; for these impulses will generate the same circular motion as if they were impressed together, and at once, in the place of the intersections of the equators of those motions, which would be generated by each of them separately. Therefore, a homogeneous and perfect globe will not retain several distinct motions, but will unite all those that are impressed on it, and reduce them into one; revolving, as far as in it lies, always with a simple and uniform motion about one single given axis, with an inclination perpetually invariable. And the inclination of the axis, or the velocity of the rotation, will not be changed by centripetal force. For if the globe be supposed to be divided into two hemispheres, by any plane whatsoever passing through its own centre, and the centre to which the force is directed, that force will always urge each hemisphere equally; and therefore will not incline the globe any way as to its motion round its own axis. But let there be added any where between the pole and the equator a heap of new matter like a mountain, and this, by its perpetual endeavour to recede from the centre of its motion, will disturb the motion of the globe, and cause its poles to wander about its superficies, describing circles about themselves and their opposite points. Neither can this enormous evagatior of the poles be corrected, unless by placing that mountain either in one of the poles; in which case, by Cor. 21, the nodes of the equator will go forwards; or in the equatorial regions, in which case, by Cor. 20, the nodes will go backwards; or, lastly, by adding on the other side of the axis a new quantity of matter, by which the mountain may be balanced in its motion; and then the nodes will either go forwards or backwards, as the mountain and this newly added matter happen to be nearer to the pole or to the equator.

PROPOSITION LXVII. THEOREM XXVII.

The same laws of attraction being supposed, I say, that the exterior body S *does, by radii drawn to the point* O*, the common centre of gravity of the interior bodies* P *and* T*, describe round that centre areas more proportional to the times, and an orbit more approaching to the form of an ellipsis*

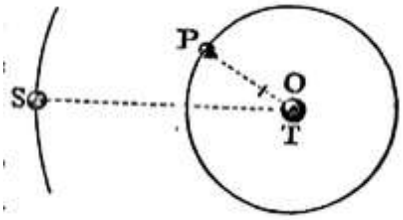
having its focus in that centre, than it can describe round the innermost and greatest body T *by radii drawn to that body.*



For the attractions of the body S towards T and P compose its absolute attraction, which is more directed towards O, the common centre of gravity of the bodies T and P, than it is to the greatest body T; and which is more in a reciprocal proportion to the square of the distance SO, than it is to the square of the distance ST; as will easily appear by a little consideration.

PROPOSITION LXVIII. THEOREM XXVIII.

The same laws of attraction supposed, I say, that the exterior body S *will, by radii drawn to* O*, the common centre of gravity of the interior bodies* P *and* T*, describe round that centre areas more proportional to the times, and an orbit more approaching to the form of an ellipsis having its focus in that centre, if the innermost and greatest body be agitated by these attractions as well as the rest, than it would do if that body were either at rest as not attracted, or were much more or much less attracted, or much more or much less agitated.*

This may be demonstrated after the same manner as Prop. LXVI, but by a more prolix reasoning, which I therefore pass over. It will be sufficient to consider it after this manner. From the demonstration of the last Proposition it is plain, that the centre, towards which the body S is urged by the two forces conjunctly, is very near to the common centre of gravity of those two other bodies. If this centre were to coincide with that common centre, and moreover the common centre of gravity of all the three bodies were at rest, the body S on one side, and the common centre of gravity of the other two bodies on the other side, would describe true ellipses about that quiescent common centre. This appears from Cor. 2, Prop LVIII, compared with what was demonstrated in Prop. LXIV, and LXV. Now this accurate elliptical motion will be disturbed a little by the distance of the centre of the two bodies from the centre towards which the third body S is attracted. Let there be added, moreover, a motion to the common centre of the three, and the perturbation will be increased yet more. 

Therefore the perturbation is least when the common centre of the three bodies is at rest; that is, when the innermost and greatest body T is attracted according to the same law as the rest are; and is always greatest when the common centre of the three, by the diminution of the motion of the body T, begins to be moved, and is more and more agitated.

Cor. And hence if more lesser bodies revolve about the great one, it may easily be inferred that the orbits described will approach nearer to ellipses; and the descriptions of areas will be more nearly equable, if all the bodies mutually attract and agitate each other with accelerative forces that are as their absolute forces directly, and the squares of the distances inversely; and if the focus of each orbit be placed in the common centre of gravity of all the interior bodies (that is, if the focus of the first and innermost orbit be placed in the centre of gravity of the greatest and inner most body; the focus of the second orbit in the common centre of gravity of the two innermost bodies; the focus of the third orbit in the common centre of gravity of the

three innermost; and so on), than if the innermost body were at rest, and was made the common focus of all the orbits.

PROPOSITION LXIX. THEOREM XXIX.

In a system of several bodies A, B, C, D, *&c., if any one of those bodies, as* A*, attract all the rest,* B, C, D, *&c., with accelerative forces that are reciprocally as the squares of the distances from the attracting body; and another body, as* B*, attracts also the rest.* A, C, D, *&c., with forces that are reciprocally as the squares of the distances from the attracting body; the absolute forces of the attracting bodies* A *and* B *will be to each other as those very bodies A and B to which those forces belong.*

For the accelerative attractions of all the bodies B, C, D, towards A, are by the supposition equal to each other at equal distances; and in like manner the accelerative attractions of all the bodies towards B are also equal to each other at equal distances. But the absolute attractive force of the body A is to the absolute attractive force of the body B as the accelerative attraction of all the bodies towards A to the accelerative attraction of all the bodies towards B at equal distances; and so is also the accelerative attraction of the body B towards A to the accelerative attraction of the body A towards B. But the accelerative attraction of the body B towards A is to the accelerative attraction of the body A towards B as the mass of the body A to the mass of the body B; because the motive forces which (by the 2d, 7th, and 8th Definition) are as the accelerative forces and the bodies attracted conjunctly are here equal to one another by the third Law. Therefore the absolute attractive force of the body A is to the absolute attractive force of the body B as the mass of the body A to the mass of the body B. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore if each of the bodies of the system A, B, C, D, &c. does singly attract all the rest with accelerative forces that are reciprocally as the squares of the distances from the attracting body, the absolute forces of all those bodies will be to each other as the bodies themselves.

Cor. 2. By a like reasoning, if each of the bodies of the system A, B, C, D, &c., do singly attract all the rest with accelerative forces, which are either reciprocally or directly in the ratio of any power whatever of the

distances from the attracting body; or which are defined by the distances from each of the attracting bodies according to any common law; it is plain that the absolute forces of those bodies are as the bodies themselves.

Cor. 3. In a system of bodies whose forces decrease in the duplicate ratio of the distances, if the lesser revolve about one very great one in ellipses, having their common focus in the centre of that great body, and of a figure exceedingly accurate; and moreover by radii drawn to that great body describe areas proportional to the times exactly; the absolute forces of those bodies to each other will be either accurately or very nearly in the ratio of the bodies. And so on the contrary. This appears from Cor. of Prop. XLVIII, compared with the first Corollary of this Prop.

SCHOLIUM.

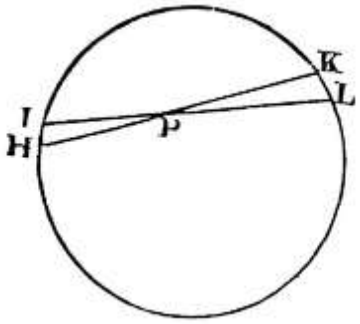
These Propositions naturally lead us to the analogy there is between centripetal forces, and the central bodies to which those forces used to be directed; for it is reasonable to suppose that forces which are directed to bodies should depend upon the nature and quantity of those bodies, as we see they do in magnetical experiments. And when such cases occur, we are to compute the attractions of the bodies by assigning to each of their particles its proper force, and then collecting the sum of them all. I here use the word attraction in general for any endeavour, of what kind soever, made by bodies to approach to each other; whether that endeavour arise from the action of the bodies themselves, as tending mutually to or agitating each other by spirits emitted; or whether it arises from the action of the aether or of the air, or of any medium whatsoever, whether corporeal or incorporeal, any how impelling bodies placed therein towards each other. In the same general sense I use the word impulse, not defining in this treatise the species or physical qualities of forces, but investigating the quantities and mathematical proportions of them; as I observed before in the Definitions. In mathematics we are to investigate the quantities of forces with their proportions consequent upon any conditions supposed; then, when we enter upon physics, we compare those proportions with the phenomena of Nature, that we may know what conditions of those forces answer to the several

kinds of attractive bodies. And this preparation being made, we argue more safely concerning the physical species, causes, and proportions of the forces. Let us see, then, with what forces sphaerical bodies consisting of particles endued with attractive powers in the manner above spoken of must act mutually upon one another: and what kind of motions will follow from thence.

Section XII: Of the attractive forces of sphaerical bodies

PROPOSITION LXX. THEOREM XXX.

If to every point of a sphaerical surface there tend equal centripetal forces decreasing in the duplicate ratio of the distances from those points; I say, that a corpuscle placed within that superficies will not be attracted by those forces any way.

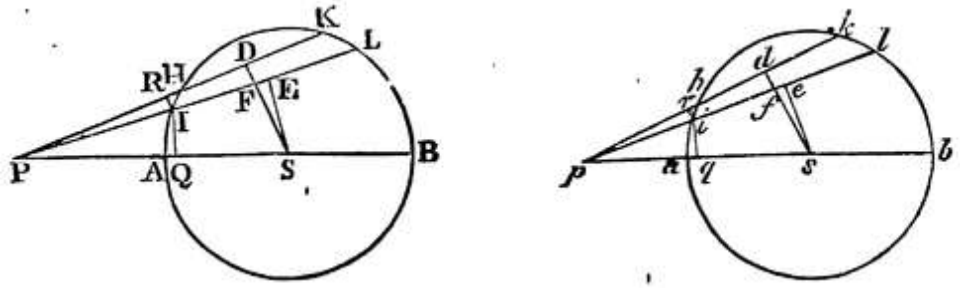


Let HIKL, be that sphaerical superficies, and P a corpuscle placed within. Through P let there be drawn to this superficies to two lines HK, IL, intercepting very small arcs HI, KL; and because (by Cor. 3, Lem. VII) the triangles HPI, LPK are alike, those arcs will be proportional to the distances HP, LP; and any particles at HI and KL of the sphaerical superficies, terminated by right lines passing through P, will be in the duplicate ratio of those distances. Therefore the forces of these particles exerted upon the body P are equal between themselves. For the forces are as the particles directly, and the squares of the distances inversely. And these two ratios compose the ratio of equality. The attractions therefore, being made equally towards contrary parts, destroy each other. And by a like reasoning all the attractions through the whole sphaerical superficies are destroyed by contrary attractions. Therefore the body P will not be any way impelled by those attractions. Q.E.D.

PROPOSITION LXXI. THEOREM XXXI.

The same things supposed as above, I say, that a corpuscle placed with out the sphaerical superficies is attracted towards the centre of the sphere with a force reciprocally proportional to the square of its distance from that centre.

Let AHKB, *ahkb*, be two equal sphaerical superficies described about the centre S, *s*; their diameters AB, *ab*; and let P and *p* be two corpuscles situate without the spheres in those diameters produced. Let there



be drawn from the corpuscles the lines PHK, PIL, *phk, pil*, cutting off from the great circles AHB, *ahb*, the equal arcs HK, *hk*, IL, *il*; and to those lines let fall the perpendiculars SD, *sd*, SE, *se*, IR, *ir*; of which let SD, *sd*, cut PL, *pl*, in F and *f*. Let fall also to the diameters the perpendiculars IQ, *iq*. Let now the angles DPE, *dpe*, vanish; and because DS and *ds*, ES and *es* are equal, the lines PE, PF, and *pe, pf*, and the lineolao DF, *df* may be taken for equal; because their last ratio, when the angles DPE, *dpe* vanish together, is the ratio of equality. These things then supposed, it will be, as PI to PF so is RI to DF, and as *pf* to *pi* so is *df* or DF to *ri*; and, *ex aequo*, as PI *pf* to PF *pi* so is RI to *ri*, that is (by Cor. 3, Lem VII), so is the arc IH to the arc *ih*. Again, PI is to PS as IQ to SE, and *ps* to *pi* as *se* or SE to *iq*; and, *ex aequo*, PI *ps* to PS *pi* as IQ to *iq*. And compounding the ratios PI^2 *pf ps* is to pi^2 PF PS, as IH IQ to *ih iq*; that is, as the circular superficies which is described by the arc IH, as the semi-circle AKB revolves about the diameter AB, is to the circular superficies described by the arc *ih* as the semi-circle *akb* revolves about the diameter *ab*. And the forces with which these superficies attract the corpuscles P and *p* in the direction of lines tending to those superficies are by the hypothesis as the superficies themselves directly, and the squares of the distances of the superficies from those corpuscles inversely; that is, as *pf ps* to PF PS. And these forces again are to

the oblique parts of them which (by the resolution of forces as in Cor. 2, of the Laws) tend to the centres in the directions of the lines PS, *ps*, as PI to PQ, and *pi* to *pq*; that is (because of the like triangles PIQ and PSF, *piq* and *psf*), as PS to PF and *ps* to *pf*. Thence *ex aequo*, the attraction of the corpuscle P towards S is to the attraction of the corpuscle *p* towards *s* as is to, that is, as ps^2 to PS^2 . And, by a like reasoning, the forces with which the superficies described by the revolution of the arcs KL, *kl* attract those corpuscles, will be as ps^2 to PS^2 . And in the same ratio will be the forces of all the circular superficies into which each of the sphaerical superficies may be divided by taking *sd* always equal to SD, and *se* equal to SE. And therefore, by composition, the forces of the entire sphaerical superficies exerted upon those corpuscles will be in the same ratio. Q.E.D

PROPOSITION LXXII. THEOREM XXXII.

If to the several points of a sphere there tend equal centripetal forces decreasing in a duplicate ratio of the distances from those points; and there be given both the density of the sphere and the ratio of the diameter of the sphere to the distance of the corpuscle from its centre; I say, that the force with which the corpuscle is attracted is proportional to the semi-diameter of the sphere.

For conceive two corpuscles to be severally attracted by two spheres, one by one, the other by the other, and their distances from the centres of the spheres to be proportional to the diameters of the spheres respectively, and the spheres to be resolved into like particles, disposed in a like situation to the corpuscles. Then the attractions of one corpuscle towards the several particles of one sphere will be to the attractions of the other towards as many analogous particles of the other sphere in a ratio compounded of the ratio of the particles directly, and the duplicate ratio of the distances inversely. But the particles are as the spheres, that is, in a triplicate ratio of the diameters, and the distances are as the diameters; and the first ratio directly with the last ratio taken twice inversely, becomes the ratio of diameter to diameter. Q.E.D.

Cor. 1. Hence if corpuscles revolve in circles about spheres composed of matter equally attracting, and the distances from the centres of the spheres

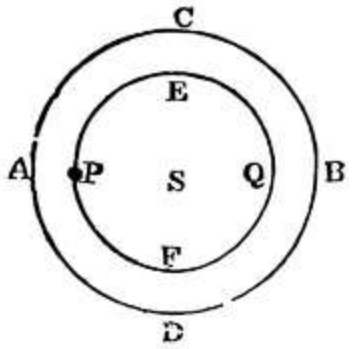
be proportional to their diameters, the periodic times will be equal.

Cor. 2. And, *vice versa*, if the periodic times are equal, the distances will be proportional to the diameters. These two Corollaries appear from Cor. 3, Prop. IV.

Cor. 3. If to the several points of any two solids whatever, of like figure and equal density, there tend equal centripetal forces decreasing in a duplicate ratio of the distances from those points, the forces, with which corpuscles placed in a like situation to those two solids will be attracted by them, will be to each other as the diameters of the solids.

PROPOSITION LXXIII. THEOREM XXXIII.

If to the several points of a given sphere there tend equal centripetal forces decreasing in a duplicate ratio of the distances from the points; I say, that a corpuscle placed within the sphere is attracted by a force proportional to its distance from the centre.



In the sphere ABCD, described about the centre S, let there be placed the corpuscle P; and about the same centre S, with the interval SP, conceive described an interior sphere PEQF. It is plain (by Prop. LXX) that the concentric sphaerical superficies, of which the difference AEBF of the spheres is composed, have no effect at all upon the body P, their attractions being destroyed by contrary attractions. There remains, therefore, only the attraction of the interior sphere PEQF. And (by Prop, LXXII) this is as the distance PS. Q.E.D.

SCHOLIUM.

By the superficies of which I here imagine the solids composed, I do not mean superficies purely mathematical, but orbs so extremely thin, that their thickness is as nothing; that is, the evanescent orbs of which the sphere will at last consist when the number of the orbs is increased, and their thickness diminished without end. In like manner, by the points of which lines, surfaces, and solids are said to be composed, are to be understood equal particles, whose magnitude is perfectly inconsiderable.

PROPOSITION LXXIV. THEOREM XXXIV.

The same things supposed, I say, that a corpuscle situate without the sphere is attracted with a force reciprocally proportional to the square of its distance from the centre.

For suppose the sphere to be divided into innumerable concentric sphaerical superficies, and the attractions of the corpuscle arising from the several superficies will be reciprocally proportional to the square of the distance of the corpuscle from the centre of the sphere (by Prop. LXXI). And, by composition, the sum of those attractions, that is, the attraction of the corpuscle towards the entire sphere, will be in the same ratio. Q.E.D.

Cor. 1. Hence the attractions of homogeneous spheres at equal distances from the centres will be as the spheres themselves. For (by Prop. LXXII) if the distances be proportional to the diameters of the spheres, the forces will be as the diameters. Let the greater distance be diminished in that ratio; and the distances now being equal, the attraction will be increased in the duplicate of that ratio; and therefore will be to the other attraction in the triplicate of that ratio; that is, in the ratio of the spheres.

Cor. 2. At any distances whatever the attractions are as the spheres applied to the squares of the distances.

Cor. 3. If a corpuscle placed without an homogeneous sphere is attracted by a force reciprocally proportional to the square of its distance from the centre, and the sphere consists of attractive particles, the force of every particle will decrease in a duplicate ratio of the distance from each particle.

PROPOSITION LXXV. THEOREM XXXV.

If to the several points of a given sphere there tend equal centripetal forces decreasing in a duplicate ratio of the distances from the points; I say, that another similar sphere will be attracted by it with a force reciprocally proportional to the square of the distance of the centres.

For the attraction of every particle is reciprocally as the square of its distance from the centre of the attracting sphere (by Prop. LXXIV), and is therefore the same as if that whole attracting force issued from one single corpuscle placed in the centre of this sphere. But this attraction is as great as on the other hand the attraction of the same corpuscle would be, if that were itself attracted by the several particles of the attracted sphere with the same force with which they are attracted by it. But that attraction of the corpuscle would be (by Prop. LXXIV) reciprocally proportional to the square of its distance from the centre of the sphere; therefore the attraction of the sphere, equal thereto, is also in the same ratio. Q.E.D.

Cor. 1. The attractions of spheres towards other homogeneous spheres are as the attracting spheres applied to the squares of the distances of their centres from the centres of those which they attract.

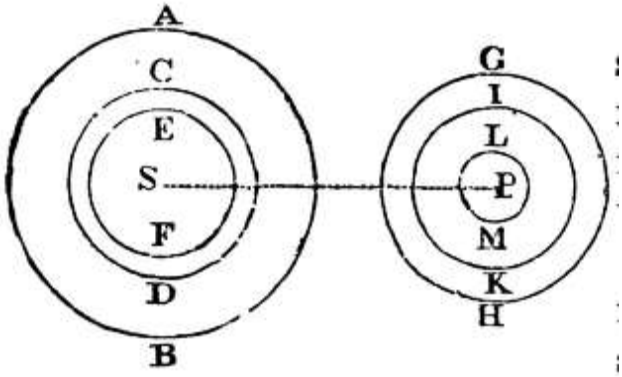
Cor. 2. The case is the same when the attracted sphere does also attract. For the several points of the one attract the several points of the other with the same force with which they themselves are attracted by the others again; and therefore since in all attractions (by Law III) the attracted and attracting point are both equally acted on, the force will be doubled by their mutual attractions, the proportions remaining.

Cor. 3. Those several truths demonstrated above concerning the motion of bodies about the focus of the conic sections will take place when an attracting sphere is placed in the focus, and the bodies move without the sphere.

Cor. 4. Those things which were demonstrated before of the motion of bodies about the centre of the conic sections take place when the motions are performed within the sphere.

PROPOSITION LXXVI. THEOREM XXXVI.

If spheres be however dissimilar (as to density of matter and attractive force) in the same ratio onward from the centre to the circumference; but every where similar, at every given distance from the centre, on all sides round about; and the attractive force of every point decreases in the duplicate ratio of the distance of the body attracted; I say, that the whole force with which one of these spheres attracts the other will be reciprocally proportional to the square of the distance of the centres.



Imagine several concentric similar spheres, AB, CD, EF, &c., the innermost of which added to the outermost may compose a matter more dense towards the centre, or subducted from them may leave the same more lax and rare. Then, by Prop. LXXV, these spheres will attract other similar concentric spheres GH, IK, LM, &c., each the other, with forces reciprocally proportional to the square of the distance SP. And, by composition or division, the sum of all those forces, or the excess of any of them above the others; that is, the entire force with which the whole sphere AB (composed of any concentric spheres or of their differences) will attract the whole sphere GH (composed of any concentric spheres or their differences) in the same ratio. Let the number of the concentric spheres be increased *in infinitum*, so that the density of the matter together with the attractive force may, in the progress from the circumference to the centre, increase or decrease according to any given law; and by the addition of matter not attractive, let the deficient density be supplied, that so the spheres may acquire any form desired; and the force with which one of these attracts the other will be still, by the former reasoning, in the same ratio of the square of the distance inversely. Q.E.D.

Cor. 1. Hence if many spheres of this kind, similar in all respects, attract each other mutually, the accelerative attractions of each to each, at any equal distances of the centres, will be as the attracting spheres.

Cor. 2. And at any unequal distances, as the attracting spheres applied to the squares of the distances between the centres.

Cor. 3. The motive attractions, or the weights of the spheres towards one another, will be at equal distances of the centres as the attracting and attracted spheres conjunctly; that is, as the products arising from multiplying the spheres into each other.

Cor. 4. And at unequal distances, as those products directly, and the squares of the distances between the centres inversely.

Cor. 5. These proportions take place also when the attraction arises from the attractive virtue of both spheres mutually exerted upon each other. For the attraction is only doubled by the conjunction of the forces, the proportions remaining as before.

Cor. 6. If spheres of this kind revolve about others at rest, each about each; and the distances between the centres of the quiescent and revolving bodies are proportional to the diameters of the quiescent bodies; the periodic times will be equal.

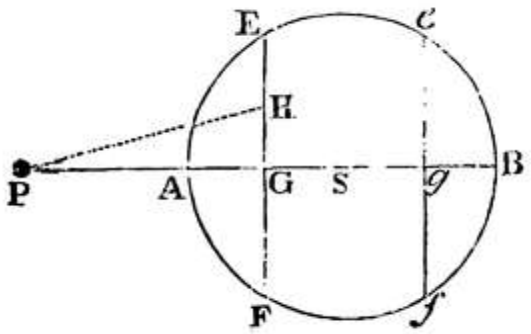
Cor. 7. And, again, if the periodic times are equal, the distances will be proportional to the diameters.

Cor. 8. All those truths above demonstrated, relating to the motions of bodies about the foci of conic sections, will take place when an attracting sphere, of any form and condition like that above described, is placed in the focus.

Cor. 9. And also when the revolving bodies are also attracting spheres of any condition like that above described.

PROPOSITION LXXVII. THEOREM XXXVII.

If to the several points of spheres there tend centripetal forces proportional to the distances of the points from the attracted bodies; I say, that the compounded force with which two spheres attract each other mutually is as the distance between the centres of the spheres.



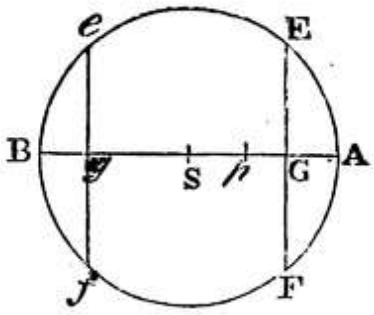
Case 1. Let AEBF be a sphere; S its centre; P a corpuscle attracted; PASB the axis of the sphere passing through the centre of the corpuscle; EF, *ef* two planes cutting the sphere, and perpendicular to the axis, and equidistant, one on one side, the other on the other, from the centre of the sphere; G and *g* the intersections of the planes and the axis; and H any point in the plane EF. The centripetal force of the point H upon the corpuscle P, exerted in the direction of the line PH, is as the distance PH; and (by Cor. 2, of the Laws) the same exerted in the direction of the line PG, or towards the centre S, is as the length PG. Therefore the force of all the points in the plane EF (that is, of that whole plane) by which the corpuscle P is attracted towards the centre S is as the distance PG multiplied by the number of those points, that is, as the solid contained under that plane EF and the distance PG. And in like manner the force of the plane *ef*, by which the corpuscle P is attracted towards the centre S, is as that plane drawn into its distance P*g*, or as the equal plane EF drawn into that distance P*g*; and the sum of the forces of both planes as the plane EF drawn into the sum of the distances PG + P*g*, that is, as that plane drawn into twice the distance PS of the centre and the corpuscle; that is, as twice the plane EF drawn into the distance PS, or as the sum of the equal planes EF + *ef* drawn into the same distance. And, by a like reasoning, the forces of all the planes in the whole sphere, equidistant on each side from the centre of the sphere, are as the sum of those planes drawn into the distance PS, that is, as the whole sphere and the distance PS conjunctly. Q.E.D.

Case 2. Let now the corpuscle P attract the sphere AEBF. And, by the same reasoning, it will appear that the force with which the sphere is attracted is as the distance PS. Q.E.D.

Case 3. Imagine another sphere composed of innumerable corpuscles P; and because the force with which every corpuscle is attracted is as the

distance of the corpuscle from the centre of the first sphere, and as the same sphere conjunctly, and is therefore the same as if it all proceeded from a single corpuscle situate in the centre of the sphere, the entire force with which all the corpuscles in the second sphere are attracted, that is, with which that whole sphere is attracted, will be the same as if that sphere were attracted by a force issuing from a single corpuscle in the centre of the first sphere; and is therefore proportional to the distance between the centres of the spheres. Q.E.D.

Case 4. Let the spheres attract each other mutually, and the force will be doubled, but the proportion will remain. Q.E.D.



Case 5. Let the corpuscle *p* be placed within the sphere AEBF; and because the force of the plane *ef* upon the corpuscle is as the solid contained under that plane and the distance *pg*; and the contrary force of the plane EP as the solid contained under that plane and the distance *p*G; the force compounded of both will be as the difference of the solids, that is, as the sum of the equal planes drawn into half the difference of the distances; that is, as that sum drawn into *pS*, the distance of the corpuscle from the centre of the sphere. And, by a like reasoning, the attraction of all the planes EF, *ef*, throughout the whole sphere, that is, the attraction of the whole sphere, is conjunctly as the sum of all the planes, or as the whole sphere, and as *p*S, the distance of the corpuscle from the centre of the sphere. Q.E.D.

Case 6. And if there be composed a new sphere out of innumerable corpuscles such as *p*, situate within the first sphere AEBF, it may be proved, as before, that the attraction, whether single of one sphere towards the other, or mutual of both towards each other, will be as the distance *p*S of the centres. Q.E.D.

PROPOSITION LXXVIII. THEOREM XXXVIII.

If spheres is the progress from the centre to the circumference be however dissimilar and unequable, but similar on every side round about at all given distances from the centre; and the attractive force of every point be as the distance of the attracted body; I say, that the entire force with which two spheres of this kind attract each other mutually is proportional to the distance between the centres of the spheres.

This is demonstrated from the foregoing Proposition, in the same manner as Proposition LXXVI was demonstrated from Proposition LXXV.

Cor. Those things that were above demonstrated in Prop. X and LXIV, of the motion of bodies round the centres of conic sections, take place when all the attractions are made by the force of sphaerical bodies of the condition above described, and the attracted bodies are spheres of the same kind.

SCHOLIUM.

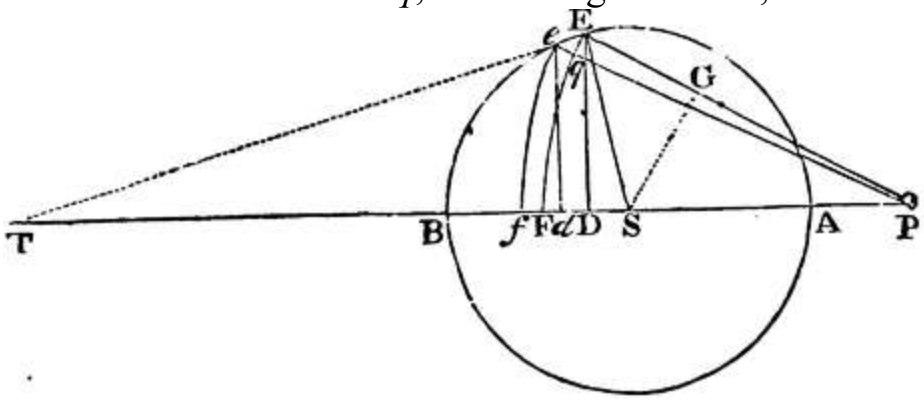
I have now explained the two principal cases of attractions; to wit, when the centripetal forces decrease in a duplicate ratio of the distances, or increase in a simple ratio of the distances, causing the bodies in both cases to revolve in conic sections, and composing sphaerical bodies whose centripetal forces observe the same law of increase or decrease in the recess from the centre as the forces of the particles themselves do; which is very remarkable. It would be tedious to run over the other cases, whose conclusions are less elegant and important, so particularly as I have done these. I choose rather to comprehend and determine them all by one general method as follows.

LEMMA XXIX.

If about the centre S *there be described any circle as* AEB*, and about the centre* P *there be also described two circles* EF, ef*, cutting the first in* E *and* e*, and the line PS in F and f; and there be let fall to PS the perpendiculars ED, ed; I say, that if the distance of the arcs* EF, ef *be supposed to be*

infinitely diminished, the last ratio of the evanescent line Dd *to the evanescent line* Ff *is the same as that of the line* PE *to the line* PS.

For if the line P*e* cut the arc EF in *q*; and the right line E*e*, which

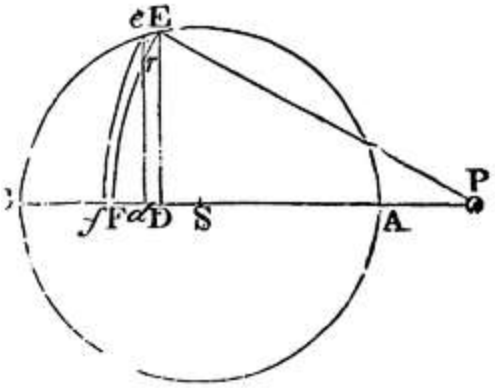


coincides with the evanescent arc E*e*, be produced, and meet the right line PS in T; and there be let fall from S to PE the perpendicular SG; then, because of the like triangles DTE, *d*T*e*, DES, it will be as D*d* to E*e* so DT to TE, or DE to ES: and because the triangles, E*eq*, ESG (by Lem. VIII, and Cor. 3, Lem. VII) are similar, it will be as E*e* to *eq* or F*f* so ES to SG; and, *ex aequo*, as D*d* to F*f* so DE to SG; that is (because of the similar triangles PDE, PGS), so is PE to PS. Q.E.D.

PROPOSITION LXXIX. THEOREM XXXIX.

Suppose a superficies as EFfe *to have its breadth infinitely diminished, and to be just vanishing and that the same superficies by its revolution round the axis* PS *describes a sphaerical concavo-convex solid, to the several equal particles of which there tend equal centripetal forces; I say, that the force with which that solid attracts a corpuscle situate in* P *is in a ratio compounded of the ratio of the solid* DE^2 Ff *and the ratio of the force with which the given particle in the place* Ff *would, attract the same corpuscle.*

For if we consider, first, the force of the sphaerical superficies FE which



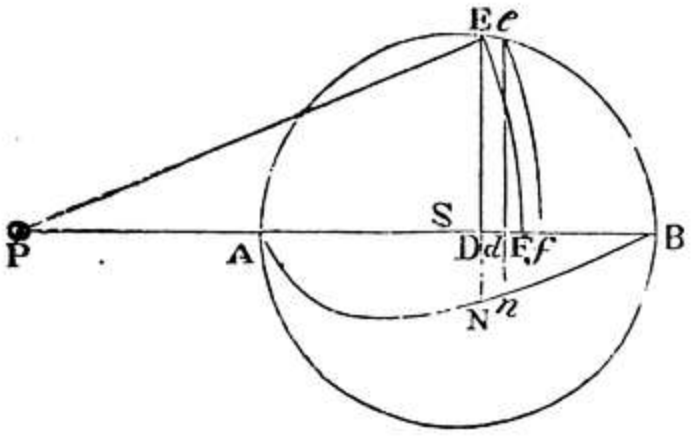
is generated by the revolution of the arc FE, and is cut any where, as in *r*, by the line *de*, the annular part of the superficies generated by the revolution of the arc *r*E will be as the lineola D*d*, the radius of the sphere PE remaining the same; as *Archimedes* has demonstrated in his Book of the Sphere and Cylinder. And the force of this superficies exerted in the direction of the lines PE or P*r* situate all round in the conical superficies, will be as this annular superficies itself; that is as the lineola D*d*, or, which is the same, as the rectangle under the given radius PE of the sphere and the lineola D*d*; but that force, exerted in the direction of the line PS tending to the centre S, will be less in the ratio PD to PE, and therefore will be as PD D*d*. Suppose now the line DF to be divided into innumerable little equal particles, each of which call D*d*, and then the superficies FE will be divided into so many equal annuli, whose forces will be as the sum of all the rectangles PD D*d*, that is, as ½PF² - ½PD², and therefore as DE². Let now the superficies FE be drawn into the altitude F*f*; and the force of the solid EF*fe* exerted upon the corpuscle P will be as DE² F*f*; that is, if the force be given which any given particle as F*f* exerts upon the corpuscle P at the distance PF. But if that force be not given, the force of the solid EF*fe* will be as the solid DE² F*f* and that force not given, conjunctly. Q.E.D.

PROPOSITION LXXX. THEOREM XL.

If to the several equal parts of a sphere ABE *described about the centre S there tend equal centripetal forces; and from the several points* D *in the axis of the sphere* AB *in which a corpuscle, as* F*, is placed, there be erected the*

perpendiculars DE *meeting the sphere in* E*, and if in those perpendiculars the lengths* DN *be taken as the quantity, and as the force which a particle of the sphere situate in the axis exerts at the distance* PE *upon the corpuscle* P *conjunctly; I say, that the whole force with which the corpuscle* P *is attracted towards the sphere is as the area* ANB*, comprehended under the axis of the sphere* AB*, and the crrve line* ANB*, the locus of the point N.*

For supposing the construction in the last Lemma and Theorem to stand, conceive the axis of the sphere AB to be divided into innumerable equal particles D*d*, and the whole sphere to be divided into so many sphserical concavo-convex laminae EF*fe*; and erect the perpendicular *dn*. By the last Theorem, the force with which the laminae EF*fe* attracts the corpuscle *P* is as DE^2 F*f* and the force of one particle exerted at the



distance PE or PF, conjunctly. But (by the last Lemma) D*d* is to F*f* as PE to PS, and therefore F*f* is equal to; and DE^2 F*f* is equal to D*d*; and therefore the force of the lamina EF*fe* is as D*d* and the force of a particle exerted at the distance PF conjunctly; that is, by the supposition, as DN D*d*, or as the evanescent area DN*nd*. Therefore the forces of all the laminae exerted upon the corpuscle P are as all the areas DN*nd*, that is, the whole force of the sphere will be as the whole area ANB. Q.E.D.

Cor. 1. Hence if the centripetal force tending to the several particles remain always the same at all distances, and DN be made as the whole force with which the corpuscle is attracted by the sphere is as the area ANB.

Cor. 2. If the centripetal force of the particles be reciprocally as the distance of the corpuscle attracted by it, and DN be made as, the force with

which the corpuscle P is attracted by the whole sphere will be as the area ANB.

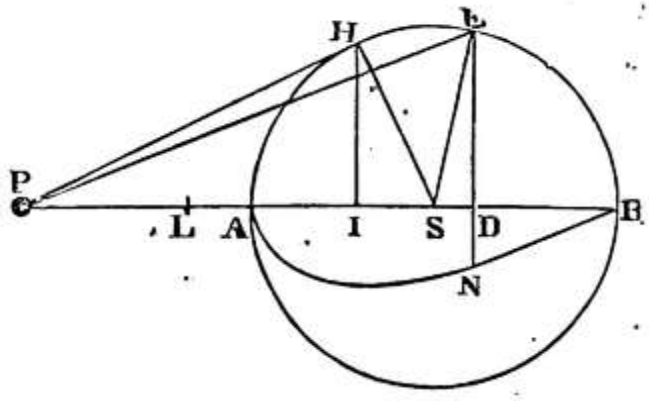
Cor. 3. If the centripetal force of the particles be reciprocally as the cube of the distance of the corpuscle attracted by it, and DN be made as, the force with which the corpuscle is attracted by the whole sphere will be as the area ANB.

Cor. 4. And universally if the centripetal force tending to the several particles of the sphere be supposed to be reciprocally as the quantity V; and DN be made as; the force with which a corpuscle is attracted by the whole sphere will be as the area ANB.

PROPOSITION LXXXI. PROBLEM XLI.

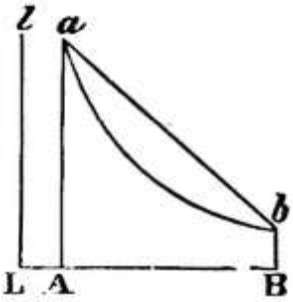
The things remaining as above, it is required to measure the area ANB.

From the point P let there be drawn the right line PH touching the sphere in H; and to the axis PAB, letting fall the perpendicular HI, bisect PI in L; and (by Prop. XII, Book II, Elem.) PE^2 is equal to



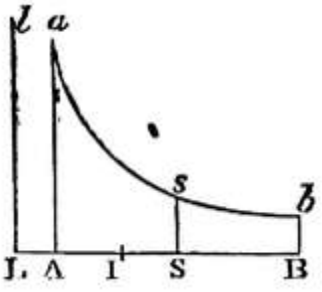
$PS^2 + SE^2 + 2PSD$. But because the triangles SPH, SHI are alike, SE^2 or SH^2 is equal to the rectangle PSI. Therefore PE^2 is equal to the rectangle contained under PS and PS + SI + 2SD; that is, under PS and 2LS + 2SD; that is, under PS and 2LD. Moreover DE^2 is equal to $SE^2 - SD^2$, or $SE^2 - LS^2 + 2SLD - LD^2$, that is, $2SLD - LD^2 - ALB$. For $LS^2 - SE^2$ or $LS^2 - SA^2$ (by Prop. VI, Book II, Elem.) is equal to the rectangle ALB. Therefore if instead of DE^2 we write $2SLD - LD^2 - ALB$, the quantity, which (by Cor. 4 of the foregoing Prop.) is as the length of the ordinate DN, will now resolve itself into three parts; where if instead of V we write the inverse ratio of the centripetal force, and instead of PE the mean proportional between PS and 2LD, those three parts will become ordinates to so many curve lines, whose areas are discovered by the common methods. Q.E.D.

Example 1. If the centripetal force tending to the several particles of the sphere be reciprocally as the distance; instead of V write PE the distance, then 2PS LD for PE^2; and DN will become as SL - ½LD -. Suppose DN equal to its double 2SL - LD -; and 2SL the given part of the ordinate drawn into the length AB will describe the rectangular area 2SL AB; and the indefinite part LD, drawn perpendicularly into the same length with a continued motion, in such sort as in its motion one way or another it may either by increasing or decreasing remain always equal to the length LD, will describe the area, that is, the area SL AB; which taken from the former area 2SL AB, leaves the area SL AB. But the third part, drawn after the same manner with a continued motion perpendicularly into the same length,



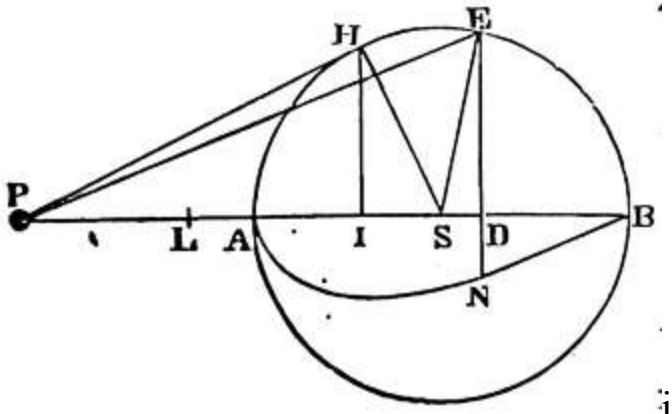
will describe the area of an hyperbola, which subducted from the area SL AB will leave ANB the area sought. Whence arises this construction of the Problem. At the points, L, A, B, erect the perpendiculars L*l*, A*a*, B*b*; making A*a* equal to LB, and B*b* equal to LA. Making L*l* and LB asymptotes, describe through the points *a, b,* the hyperbolic curve *ab*. And the chord *ba* being drawn, will inclose the area *aba* equal to the area sought ANB.

Example 2. If the centripetal force tending to the several particles of the sphere be reciprocally as the cube of the distance, or (which is the same thing) as that cube applied to any given plane; write for V, and 2PS LD for PE^2; and DN will become as that is (because PS, AS, SI are continually proportional), as. If we draw then these three parts into the length AB, the first will generate the area of an hyperbola; the second ½SI the area ½AB SI; the third the area, that is, ½AB SI. From the first subduct the sum of the second and third, and there will remain ANB, the area sought. Whence arises this construction of the problem. At the points L, A, S, B, erect



the perpendiculars L*l* A*a* S*s*, B*b*, of which suppose S*s* equal to SI; and through the point *s*, to the asymptotes L*l*, LB, describe the hyperbola *asb* meeting the perpendiculars A*a*, B*b*, in *a* and *b*; and the rectangle 2ASI, subducted from the hyberbolic area A*asb*B, will leave ANB the area sought.

Example 3. If the centripetal force tending to the several particles of the spheres decrease in a quadruplicate ratio of the distance from the particles; write for V, then for PE, and DN will become as. These three parts drawn into the length AB, produce so many areas, viz.

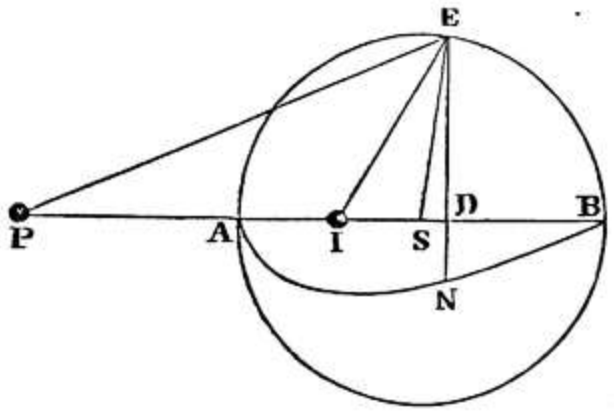


into; into; and into. And these after due reduction come forth, SI^2, and SI^2 +. And these by subducting the last from the first, become. Therefore the entire force with which the corpuscle P is attracted towards the centre of the sphere is as, that is, reciprocally as PS^3 PI. Q.E.I.

By the same method one may determine the attraction of a corpuscle situate within the sphere, but more expeditiously by the following Theorem.

PROPOSITION LXXXII. THEOREM XLI.

In a sphere described about the centre S with the interval SA, if there be taken SI, SA, SP *continually proportional; I say, that the attraction of a corpuscle within the sphere in any place* I *is to its attraction without the sphere in the place* P *in a ratio compounded of the subduplicate ratio of* IS, PS*, the distances from the centre, and the subduplicate ratio of the centripetal forces tending to the centre in those places* P *and* I.



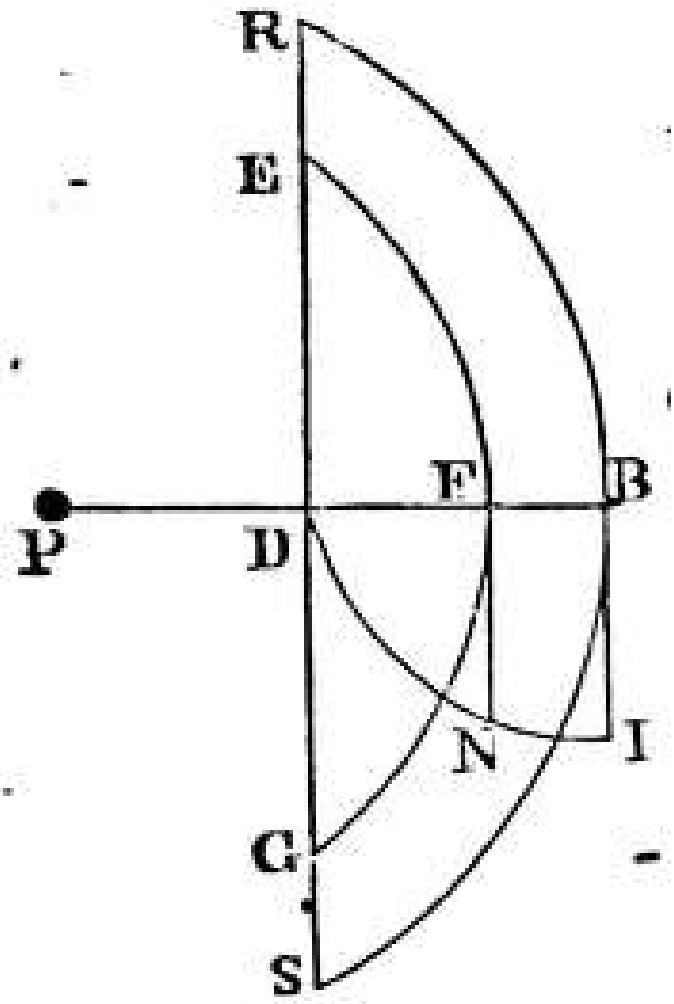
As if the centripetal forces of the particles of the sphere be reciprocally as the distances of the corpuscle attracted by them; the force with which the corpuscle situate in I is attracted by the entire sphere will be to the force with which it is attracted in P in a ratio compounded of the subduplicate ratio of the distance SI to the distance SP, and the subduplicate ratio of the centripetal force in the place I arising from any particle in the centre to the centripetal force in the place P arising from the same particle in the centre; that is, in the subduplicate ratio of the distances SI, SP to each other reciprocally. These two subduplicate ratios compose the ratio of equality, and therefore the attractions in I and P produced by the whole sphere are equal. By the like calculation, if the forces of the particles of the sphere are reciprocally in a duplicate ratio of the distances, it will be found that the attraction in I is to the attraction in P as the distance SP to the semi-diameter SA of the sphere. If those forces are reciprocally in a triplicate ratio of the distances, the attractions in I and P will be to each other as SP^2 to SA^2; if in a quadruplicate ratio, as SP^3 to SA^3. Therefore since the attraction in P was found in this last case to be reciprocally as PS^3 PI, the attraction in I will be reciprocally as SA^3 PI, that is, because SA^3 is given reciprocally as PI. And the progression is the same *in infinitum*. The demonstration of this Theorem is as follows:

The things remaining as above constructed, and a corpuscle being in any place P, the ordinate DN was found to be as. Therefore if IE be drawn, that ordinate for any other place of the corpuscle, as I, will become (*mutatis mutandis*) as. Suppose the centripetal forces flowing from any point of the sphere, as E, to be to each other at the distances IE and PE as PE^n to IE^n (where the number *n* denotes the index of the powers of PE and IE), and

those ordinates will become as and whose ratio to each other is as PS IE IE^n to IS PE PE^n. Because SI, SE, SP are in continued proportion, the triangles SPE, SEI are alike; and thence IE is to PE as IS to SE or SA. For the ratio of IE to PE write the ratio of IS to SA; and the ratio of the ordinates becomes that of PS IE^n to SA PE^n. But the ratio of PS to SA is subduplicate of that of the distances PS, SI; and the ratio of IE^n to PE^n (because IE is to PE as IS to SA) is subduplicate of that of the forces at the distances PS, IS. Therefore the ordinates, and consequently the areas which the ordinates describe, and the attractions proportional to them, are in a ratio compounded of those subduplicate ratios. Q.E.D.

PROPOSITION LXXXIII. PROBLEM XLII.

To find the force with which a corpuscle placed in the centre of a sphere is attracted towards any segment of that sphere whatsoever.

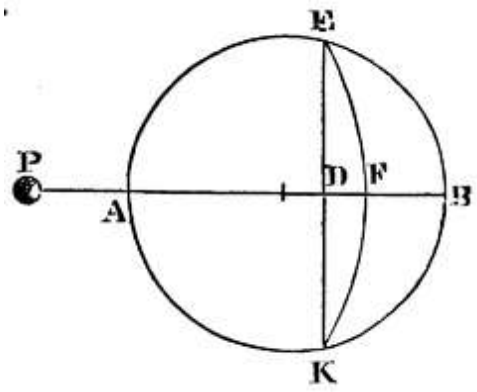


Let P be a body in the centre of that sphere and RBSD a segment thereof contained under the plane RDS, and thesphaerical superficies RBS. Let DB be cut in F by a sphaerical superficies EFG described from the centre P, and let the segment be divided into the parts BREFGS, FEDG. Let us suppose that segment to be not a purely mathematical but a physical superficies, having some, but a perfectly inconsiderable thickness. Let that thickness be called O, and (by what *Archimedes* has demonstrated) that superficies will be as PF DF O. Let us suppose besides the attractive forces of the particles of the sphere to be reciprocally as that power of the distances, of which *n* is index; and the force with which the superficies EFG attracts the body P will be (by Prop. LXXIX) as, that is, as. Let the perpendicular FN drawn into O be proportional to this quantity; and the curvilinear area BDI, which the ordinate FN, drawn through the length DB with a continued motion will

describe, will be as the whole force with which the whole segment RBSD attracts the body P. Q.E.I.

PROPOSITION LXXXIV. PROBLEM XLIII.

To find the force with which a corpuscle, placed without the centre of a sphere in the axis of any segment, is attracted by that segment.



Let the body P placed in the axis ADB of the segment EBK be attracted by that segment. About the centre P, with the interval PE, let the spherical superficies EFK be described; and let it divide the segment into two parts EBKFE and EFKDE. Find the force of the first of those parts by Prop. LXXXI, and the force of the latter part by Prop. LXXXIII, and the sum of the forces will be the force of the whole segment EBKDE. Q.E.I.

SCHOLIUM.

The attractions of sphaerical bodies being now explained, it comes next in order to treat of the laws of attraction in other bodies consisting in like manner of attractive particles; but to treat of them particularly is not necessary to my design. It will be sufficient to subjoin some general propositions relating to the forces of such bodies, and the motions thence arising, because the knowledge of these will be of some little use in philosophical inquiries.

Section XIII: Of the attractive forces of bodies which are not of a sphaerical figure

PROPOSITION LXXXV. THEOREM XLII.

If a body be attracted by another, and its attraction be vastly stronger when it is contiguous to the attracting body than when they are separated from one another by a very small interval; the forces of the particles of the attracting body decrease, in the recess of the body attracted, in more than a duplicate ratio of the distance of the particles.

For if the forces decrease in a duplicate ratio of the distances from the particles, the attraction towards a sphaerical body being (by Prop. LXXIV) reciprocally as the square of the distance of the attracted body from the centre of the sphere, will not be sensibly increased by the contact, and it will be still less increased by it, if the attraction, in the recess of the body attracted, decreases in a still less proportion. The proposition, therefore, is evident concerning attractive spheres. And the case is the same of concave sphaerical orbs attracting external bodies. And much more does it appear in orbs that attract bodies placed within them, because there the attractions diffused through the cavities of those orbs are (by Prop. LXX) destroyed by contrary attractions, and therefore have no effect even in the place of contact. Now if from these spheres and sphaerical orbs we take away any parts remote from the place of contact, and add new parts any where at pleasure, we may change the figures of the attractive bodies at pleasure; but the parts added or taken away, being remote from the place of contact, will cause no remarkable excess of the attraction arising from the contact of the two bodies. Therefore the proposition holds good in bodies of all figures. Q.E.D.

PROPOSITION LXXXVI. THEOREM XLIII.

If the forces of the particles of which an attractive body is composed decrease, in the recess of the attractive body, in a triplicate or more than a triplicate ratio of the distance from the particles, the attraction will be vastly stronger in the point of contact than when the attracting and attracted bodies are separated from each other, though by never so small an interval.

For that the attraction is infinitely increased when the attracted corpuscle comes to touch an attracting sphere of this kind, appears, by the solution of Problem XLI, exhibited in the second and third Examples. The same will also appear (by comparing those Examples and Theorem XLI together) of attractions of bodies made towards concavo-convex orbs, whether the attracted bodies be placed without the orbs, or in the cavities within them. And by adding to or taking from those spheres and orbs any attractive matter any where without the place of contact, so that the attractive bodies may receive any assigned figure, the Proposition will hold good of all bodies universally. Q.E.D.

PROPOSITION LXXXVII. THEOREM XLIV.

If two bodies similar to each other, and consisting of matter equally attractive, attract separately two corpuscles proportional to those bodies, and in a like situation to them, the accelerative attractions of the corpuscles towards the entire bodies will be as the accelerative attractions of the corpuscles towards particles of the bodies proportional to the wholes, and alike situated in them.

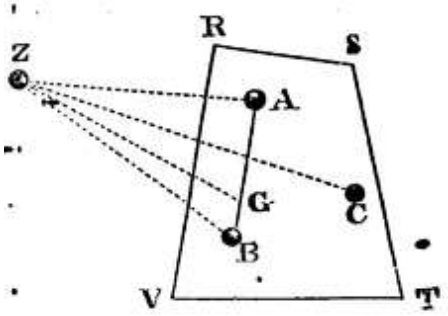
For if the bodies are divided into particles proportional to the wholes, and alike situated in them, it will be, as the attraction towards any particle of one of the bodies to the attraction towards the correspondent particle in the other body, so are the attractions towards the several particles of the first body, to the attractions towards the several correspondent particles of the other body; and, by composition, so is the attraction towards the first whole body to the attraction towards the second whole body. Q.E.D.

Cor. 1 . Therefore if, as the distances of the corpuscles attracted increase, the attractive forces of the particles decrease in the ratio of any power of the distances, the accelerative attractions towards the whole bodies will be as the bodies directly, and those powers of the distances inversely. As if the forces of the particles decrease in a duplicate ratio of the distances from the corpuscles attracted, and the bodies are as A^3 and B^3, and therefore both the cubic sides of the bodies, and the distance of the attracted corpuscles from the bodies, are as A and B; the accelerative attractions towards the bodies will be as and, that is, as A and B the cubic sides of those bodies. If the forces of the particles decrease in a triplicate ratio of the distances from the attracted corpuscles, the accelerative attractions towards the whole bodies will be as and, that is, equal. If the forces decrease in a quadruplicate ratio, the attractions towards the bodies will be as and, that is, reciprocally as the cubic sides A and B. And so in other cases.

Cor. 2. Hence, on the other hand, from the forces with which like bodies attract corpuscles similarly situated, may be collected the ratio of the decrease of the attractive forces of the particles as the attracted corpuscle recedes from them; if so be that decrease is directly or inversely in any ratio of the distances.

PROPOSITION LXXXVIII. THEOREM XLV.

If the attractive forces of the equal particles of any body be as the distance of the places from the particles, the force of the whole body will tend to its centre of gravity; and will be the same with the force of a globe, consisting of similar and equal matter, and having its centre in the centre of gravity.



Let the particles A, B, of the body RSTV attract any corpuscle Z with forces which, supposing the particles to be equal between themselves, are as the distances AZ, BZ; but, if they are supposed unequal, are as those particles and their distances AZ, BZ, conjunctly, or (if I may so speak) as those particles drawn into their distances AZ, BZ respectively. And let those forces be expressed by the contents under A AZ, and B BZ. Join AB, and let it be cut in G, so that AG may be to BG as the particle B to the particle A; and G will be the common centre of gravity of the particles A and B. The force A AZ will (by Cor. 2, of the Laws) be resolved into the forces A GZ and A AG; and the force B BZ into the forces B GZ and B BG. Now the forces A AG and B BG, because A is proportional to B, and BG to AG, are equal, and therefore having contrary directions destroy one another. There remain then the forces A GZ and B GZ. These tend from Z towards the centre G, and compose the force GZ; that is, the same force as if the attractive particles A and B were placed in their common centre of gravity G, composing there a little globe.

By the same reasoning, if there be added a third particle C, and the force of it be compounded with the force GZ tending to the centre G, the force thence arising will tend to the common centre of gravity of that globe in G and of the particle C; that is, to the common centre of gravity of the three particles A, B, C; and will be the same as if that globe and the particle C were placed in that common centre composing a greater globe there; and so we may go on *in infinitum*. Therefore the whole force of all the particles of any body whatever RSTV is the same as if that body, without removing its centre of gravity, were to put on the form of a globe. Q.E.D.

Cor. Hence the motion of the attracted body Z will be the same as if the attracting body RSTV were sphaerical; and therefore if that attracting body be either at rest, or proceed uniformly in a right line, the body attracted will move in an ellipsis having its centre in the centre of gravity of the attracting body.

PROPOSITION LXXXIX. THEOREM XLVI.

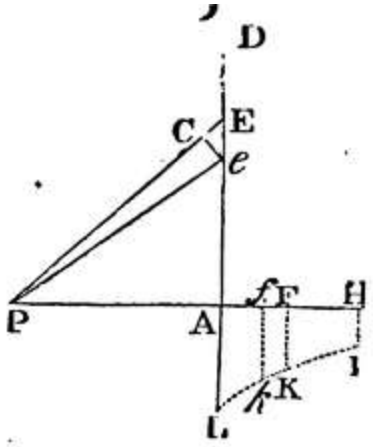
If there be several bodies consisting of equal particles whose forces are as the distances of the places from each, the force compounded of all the forces by which any corpuscle is attracted will tend to the common centre of gravity of the attracting bodies; and will be the same as if those attracting bodies, preserving their common centre of gravity, should unite there, and be formed into a globe.

This is demonstrated after the same manner as the foregoing Proposition.

Cor. Therefore the motion of the attracted body will be the same as if the attracting bodies, preserving their common centre of gravity, should unite there, and be formed into a globe. And, therefore, if the common centre of gravity of the attracting bodies be either at rest, or proceed uniformly in a right line, the attracted body will move in an ellipsis having its centre in the common centre of gravity of the attracting bodies.

PROPOSITION XC. PROBLEM XLIV.

If to the several points of any circle there tend equal centripetal forces, increasing or decreasing in any ratio of the distances; it is required to find the force with which a corpuscle is attracted, that is, situate any where in a right line which stands at right angles to the plant of the circle at its centre.



Suppose a circle to be described about the centre A with any interval AD in a plane to which the right line AP is perpendicular; and let it be required to find the force with which a corpuscle P is attracted towards the same. From any point E of the circle, to the attracted corpuscle P, let there be drawn the right line PE. In the right line PA take PF equal to PE, and make a

perpendicular FK, erected at F, to be as the force with which the point E attracts the corpuscle P. And let the curve line IKL be the locus of the point K. Let that curve meet the plane of the circle in L. In PA take PH equal to PD, and erect the perpendicular HI meeting that curve in I; and the attraction of the corpuscle P towards the circle will be as the area AHIL drawn into the altitude AP. Q.E.I.

For let there be taken in AE a very small line E*e*. Join P*e*, and in PE, PA take PC, P*f* equal to P*e*. And because the force, with which any point E of the annulus described about the centre A with the interval AE in the aforesaid plane attracts to itself the body P, is supposed to be as FK; and, therefore, the force with which that point attracts the body P towards A is as; and the force with which the whole annulus attracts the body P towards A is as the annulus and conjunctly; and that annulus also is as the rectangle under the radius AE and the breadth E*e*, and this rectangle (because PE and AE, E*e* and CE are proportional) is equal to the rectangle PE CE or PE F*f*; the force with which that annulus attracts the body P towards A will be as PE F*f* and conjunctly; that is, as the content under F*f* FK AP, or as the area FK*kf* drawn into AP. And therefore the sum of the forces with which all the annuli, in the circle described about the centre A with the interval AD, attract the body P towards A, is as the whole area AHIKL drawn into AP. Q.E.D.

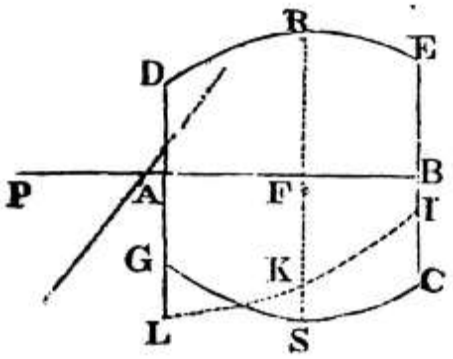
Cor. 1. Hence if the forces of the points decrease in the duplicate ratio of the distances, that is, if FK be as and therefore the area AHIKL as; the attraction of the corpuscle P towards the circle will be as 1 -; that is, as.

Cor. 2. And universally if the forces of the points at the distances D be reciprocally as any power D^n of the distances; that is, if FK be as and therefore the area AHIKL as; the attraction of the corpuscle P towards the circle will be as.

Cor. 3. And if the diameter of the circle be increased *in infinitum*, and the number *n* be greater than unity; the attraction of the corpuscle P towards the whole infinite plane will be reciprocally as PA^{n-2}, because the other term vanishes.

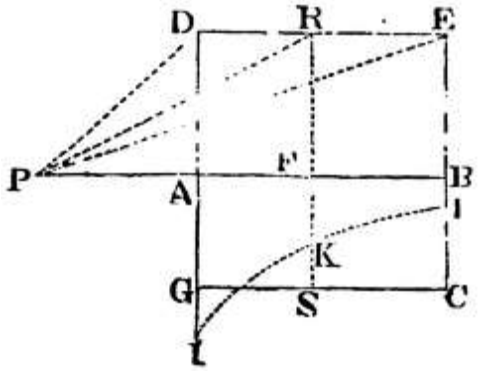
PROPOSITION XCI. PROBLEM XLV.

To find the attraction of a corpuscle situate in the axis of a round solid, to whose several points there tend equal centripetal forces decreasing in any ratio of the distances whatsoever.

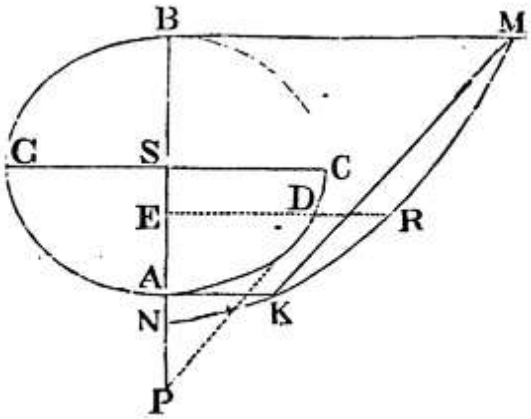


Let the corpuscle P, situate in the axis AB of the solid DECG, be attracted towards that solid. Let the solid be cut by any circle as RFS, perpendicular to the axis: and in its semi-diameter FS, in any plane PALKB passing through the axis, let there be taken (by Prop. XC) the length FK proportional to the force with which the corpuscle P is attracted towards that circle. Let the locus of the point K be the curve line LKI, meeting the planes of the outermost circles AL and BI in L and I; and the attraction of the corpuscle P towards the solid will be as the area LABI. Q.E.I.

Cor. 1. Hence if the solid be a cylinder described by the parallelogram ADEB revolved about the axis AB, and the centripetal forces tending to the several points be reciprocally as the squares of the distances from the points; the attraction of the corpuscle P towards this cylinder will be as AB - PE + PD. For the ordinate FK (by Cor. 1, Prop. XC) will be as 1 -. The part 1 of this quantity, drawn into the length AB, describes

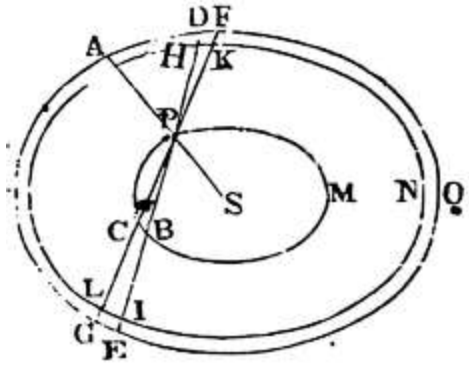


the area 1 AB; and the other part, drawn into the length PB describes the area 1 into (as may be easily shewn from the quadrature of the curve LKI); and, in like manner, the same part drawn into the length PA describes the area 1 into, and drawn into AB, the difference of PB and PA, describes 1 into, the difference of the areas. From the first content 1 AB take away the last content 1 into, and there will remain the area LABI equal to 1 into. Therefore the force, being proportional to this area, is as AB - PE + PD.



Cor. 2. Hence also is known the force by which a spheroid AGBC attracts any body P situate externally in its axis AB. Let NKRM be a conic section whose ordinate ER perpendicular to PE may be always equal to the length of the line PD, continually drawn to the point D in which that ordinate cuts the spheroid. From the vertices A, B, of the spheriod, let there

be erected to its axis AB the perpendiculars AK, BM, respectively equal to AP, BP, and therefore meeting the conic section in K and M; and join KM cutting off from it the segment KMRK. Let S be the centre of the spheroid, and SC its greatest semi-diameter; and the force with which the spheroid attracts the body P will be to the force with with which a sphere described with the diameter AB attracts the same body as is to. And by a calculation founded on the same principles may be found the forces of the segments of the spheroid.



Cor. 3. If the corpuscle be placed within the spheroid and in its axis, the attraction will be as its distance from the centre. This may be easily collected from the following reasoning, whether the particle be in the axis or in any other given diameter. Let AGOF be an attracting spheroid, S its centre, and P the body attracted. Through the body P let there be drawn the semi-diameter SPA, and two right lines DE, FG meeting the spheroid in D and E, F and G; and let PCM, HLN be the superficies of two interior spheroids similar and concentrical to the exterior, the first of which passes through the body P, and cuts the right lines DE, FG in B and C; and the latter cuts the same right lines in H and I, K and L. Let the spheroids have all one common axis, and the parts of the right lines intercepted on both sides DP and BE, FP and CG, DH and IE, FK and LG, will be mutually equal; because the right lines DE, PB, and HI, are bisected in the same point, as are also the right lines FG, PC, and KL. Conceive now DPF, EPG to represent opposite cones described with the infinitely small vertical angles DPF, EPG, and the lines DH, EI to be infinitely small also. Then the particles of the cones DHKF, GLIE, cut off by the spheroidical superficies, by reason of the equality of the lines DH and EI, will be to one another as the squares of the distances from the body P, and will therefore attract that

corpuscle equally. And by a like reasoning if the spaces DPF, EGCB be divided into particles by the superficies of innumerable similar spheroids concentric to the former and having one common axis, all these particles will equally attract on both sides the body P towards contrary parts. Therefore the forces of the cone DPF, and of the conic segment EGCB, are equal, and by their contrariety destroy each other. And the case is the same of the forces of all the matter that lies without the interior spheroid PCBM. Therefore the body P is attracted by the interior spheroid PCBM alone, and therefore (by Cor. 3, Prop. LXXII) its attraction is to the force with which the body A is attracted by the whole spheroid AGOD as the distance PS to the distance AS. Q.E.D.

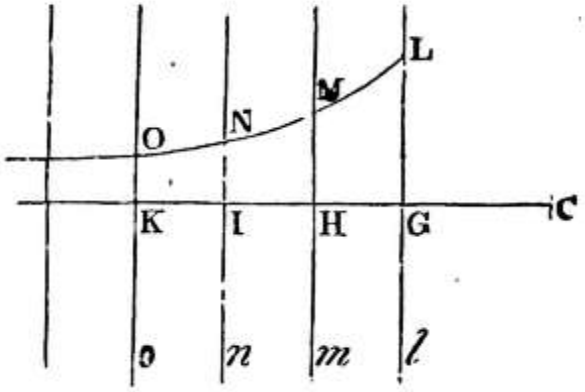
PROPOSITION XCII. PROBLEM XLVI.

An attracting body being given, it is required to find the ratio of the decrease of the centripetal forces tending to its several points.

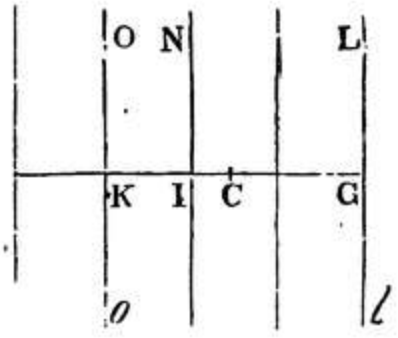
The body given must be formed into a sphere, a cylinder, or some regular figure, whose law of attraction answering to any ratio of decrease may be found by Prop. LXXX, LXXXI, and XCI. Then, by experiments, the force of the attractions must be found at several distances, and the law of attraction towards the whole, made known by that means, will give the ratio of the decrease of the forces of the several parts; which was to be found.

PROPOSITION XCIII. THEOREM XLVII.

If a solid be plane on one side, and infinitely extended on all other sides, and consist of equal particles equally attractive, whose forces decrease, in the recess from the solid, in the ratio of any power greater than the square of the distances; and a corpuscle placed towards either part of the plane is attracted by the force of the whole solid; I say that the attractive force of the whole solid, in the recess from its plane superficies, will decrease in the ratio of a power whose side is the distance of the corpuscle from the plane, and its index less by 3 *than the index of the power of the distances.*



Case 1. Let LG*l* be the plane by which the solid is terminated. Let the solid lie on that hand of the plane that is towards I, and let it be resolved into innumerable planes *m*HM, *n*IN, *o*KO, &c., parallel to GL. And first let the attracted body C be placed without the solid. Let there be drawn CGHI perpendicular to those innumerable planes, and let the attractive forces of the points of the solid decrease in the ratio of a power of the distances whose index is the number *n* not less than 3. Therefore (by Cor. 3, Prop. XC) the force with which any plane *m*HM attracts the point C is reciprocally as CH^{n-2}. In the plane *m*HM take the length HM reciprocally proportional to CH^{n-2}, and that force will be as HM. In like manner in the several planes *l*GL, *n*IN, *o*KO, &c., take the lengths GL, IN, KO, &c., reciprocally proportional to CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c., and the forces of those planes will be as the lengths so taken, and therefore the sum of the forces as the sum of the lengths, that is, the force of the whole solid as the area GLOK produced infinitely towards OK. But that area (by the known methods of quadratures) is reciprocally as CG^{n-3}, and therefore the force of the whole solid is reciprocally as CG^{n-3}. Q.E.D.



Case 2. Let the corpuscle C be now placed on that hand of the plane *l*GL that is within the solid, and take the distance CK equal to the distance CG. And the part of the solid LG*lo*KO terminated by the parallel planes *l*GL, *o*KO, will attract the corpuscle C, situate in the middle, neither one way nor another, the contrary actions of the opposite points destroying one another by reason of their equality. Therefore the corpuscle C is attracted by the force only of the solid situate beyond the plane OK. But this force (by Case 1) is reciprocally as CK^{n-3}, that is, (because CG, CK are equal) reciprocally as CG^{n-3}. Q.E.D.

Cor. 1. Hence if the solid LGIN be terminated on each side by two infinite parallel places LG, IN, its attractive force is known, subducting from the attractive force of the whole infinite solid LGKO the attractive force of the more distant part NIKO infinitely produced towards KO.

Cor. 2. If the more distant part of this solid be rejected, because its attraction compared with the attraction of the nearer part is inconsiderable, the attraction of that nearer part will, as the distance increases, decrease nearly in the ratio of the power CG^{n-3}.

Cor. 3. And hence if any finite body, plane on one side, attract a corpuscle situate over against the middle of that plane, and the distance between the corpuscle and the plane compared with the dimensions of the attracting body be extremely small; and the attracting body consist of homogeneous particles, whose attractive forces decrease in the ratio of any power of the distances greater than the quadruplicate; the attractive force of the whole body will decrease very nearly in the ratio of a power whose side is that very small distance, and the index less by 3 than the index of the former power. This assertion does not hold good, however, of a body consisting of particles whose attractive forces decrease in the ratio of the triplicate power of the distances; because, in that case, the attraction of the remoter part of the infinite body in the second Corollary is always infinitely greater than the attraction of the nearer part.

SCHOLIUM.

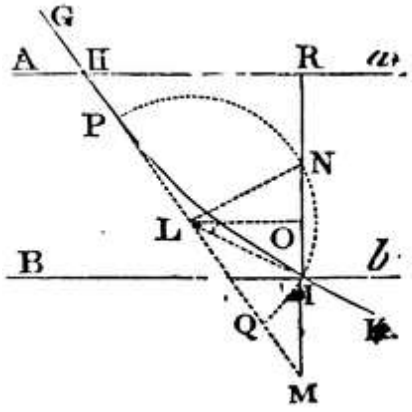
If a body is attracted perpendicularly towards a given plane, and from the law of attraction given, the motion of the body be required; the Problem will be solved by seeking (by Prop. XXXIX) the motion of the body descending in a right line towards that plane, and (by Cor. 2, of the Laws) compounding that motion with an uniform motion performed in the direction of lines parallel to that plane. And, on the contrary, if there be required the law of the attraction tending towards the plane in perpendicular directions, by which the body may be caused to move in any given curve line, the Problem will be solved by working after the manner of the third Problem.

But the operations may be contracted by resolving the ordinates into converging series. As if to a base A the length B be ordinately applied in any given angle, and that length be as any power of the base A; and there be sought the force with which a body, either attracted towards the base or driven from it in the direction of that ordinate, may be caused to move in the curve line which that ordinate always describes with its superior extremity; I suppose the base to be increased by a very small part O, and I resolve the ordinate into an infinite series &c., and I suppose the force proportional to the term of this series in which O is of two dimensions, that is, to the term. Therefore the force sought is as, or, which is the same thing, as. As if the ordinate describe a parabola, *m* being = 2, and *n* = 1, the force will be as the given quantity 2B°, and therefore is given. Therefore with a given force the body will move in a parabola, as *Galileo* has demonstrated. If the ordinate describe an hyperbola, *m* being = 0 - 1, and *n* = 1, the force will be as $2A^{-3}$ or $2B^{3}$; and therefore a force which is as the cube of the ordinate will cause the body to move in an hyperbola. But leaving this kind of propositions, I shall go on to some others relating to motion which I have hot yet touched upon.

Section XIV: Of the motion of very small bodies when agitated by centripetal forces tending to the several parts of any very great body

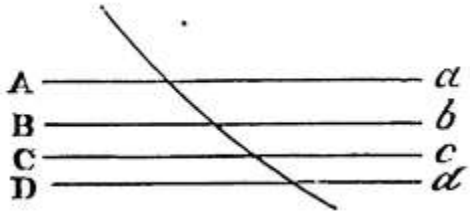
PROPOSITION XCIV. THEOREM XLVIII.

If two similar mediums be separated from each other by a space terminated on both sides by parallel planes, and a body in its passage through that space be attracted or impelled perpendicularly towards either of those mediums, and not agitated or hindered by any other force; and the attraction be every where the same at equal distances from either plane, taken towards the same hand of the plane; I say, that the sine of incidence upon either plane will be to the sine of emergence of the other plane in a given ratio.



Case 1. Let A*a* and B*b* be two parallel planes, and let the body light upon the first plane A*a* in the direction of the line GH, and in its whole passage through the intermediate space let it be attracted or impelled towards the medium of incidence, and by that action let it be made to describe a curve line HI, and let it emerge in the direction of the line IK. Let there be erected IM perpendicular to B*b* the plane of emergence, and meeting the line of incidence GH prolonged in M, and the plane of incidence A*a* in R; and let the line of emergence KI be produced and meet HM in L. About the centre

L, with the interval LI, let a circle be described cutting both HM in P and Q, and MI produced in N; and, first, if the attraction or impulse be supposed uniform, the curve HI (by what *Galileo* has demonstrated) be a parabola, whose property is that of a rectangle under its given latus rectum and the line IM is equal to the square of HM; and moreover the line HM will be bisected in L. Whence if to MI there be let fall the perpendicular LO, MO, OR will be equal: and adding the equal lines ON, OI, the wholes MN, IR will be equal also. Therefore since IR is given, MN is also given, and the rectangle NMI is to the rectangle under the latus rectum and IM, that is, to HM^2 in a given ratio. But the rectangle NMI is equal to the rectangle PMQ, that is, to the difference of the squares ML^2, and PL^2 or LI^2; and HM^2 hath a given ratio to its fourth part ML^2; therefore the ratio of $ML^2 - LI^2$ to ML^2 is given, and by conversion the ratio of LI^2 to ML^2, and its subduplicate, the ratio of LI to ML. But in every triangle, as LMI, the sines of the angles are proportional to the opposite sides. Therefore the ratio of the sine of the angle of incidence LMR to the sine of the angle of emergence LIR is given. Q.E.D.

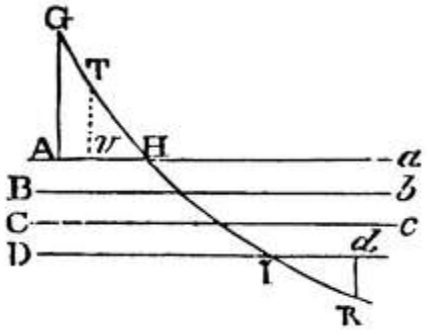


Case 2. Let now the body pass successively through several spaces terminated with parallel planes A*ab*B, E*bc*C, &c., and let it be acted on by a force which is uniform in each of them separately, but different in the different spaces; and by what was just demonstrated, the sine of the angle of incidence on the first plane A*a* is to the sine of emergence from the second plane B*b* in a given ratio; and this sine of incidence upon the second plane B*b* will be to the sine of emergence from the third plane C*c* in a given ratio; and this sine to the sine of emergence from the fourth plane D*d* in a given ratio; and so on *in infinitum*; and, by equality, the sine of incidence on the first plane to the sine of emergence from the last plane in a given ratio. Let now the intervals of the planes be diminished, and their number be infinitely increased, so that the action of attraction or impulse, exerted according to any assigned law, may become continual, and the ratio of the

sine of incidence on the first plane to the sine of emergence from the last plane being all along given, will be given then also. Q.E.D.

PROPOSITION XCV. THEOREM XLIX.

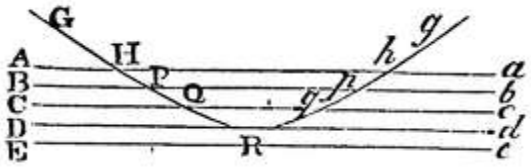
The same things being supposed, I say, that the velocity of the body before its incidence is to its velocity after emergence as the sine of emergence to the sine of incidence.



Make AH and I*d* equal, and erect the perpendiculars AG, *d*K meeting the lines of incidence and emergence GH, IK, in G and K. In GH take TH equal to IK, and to the plane A*a* let fall a perpendicular T*v*. And (by Cor. 2 of the Laws of Motion) let the motion of the body be resolved into two, one perpendicular to the planes A*a*, B*b*, C*c*, &c, and another parallel to them. The force of attraction or impulse, acting in directions perpendicular to those planes, does not at all alter the motion in parallel directions; and therefore the body proceeding with this motion will in equal times go through those equal parallel intervals that lie between the line AG and the point H, and between the point I and the line *d*K; that is, they will describe the lines GH, IK in equal times. Therefore the velocity before incidence is to the velocity after emergence as GH to IK or TH, that is, as AH or I*d* to *v*H; that is (supposing TH or IK radius), as the sine of emergence to the sine of incidence. Q.E.D.

PROPOSITION XCVI. THEOREM L.

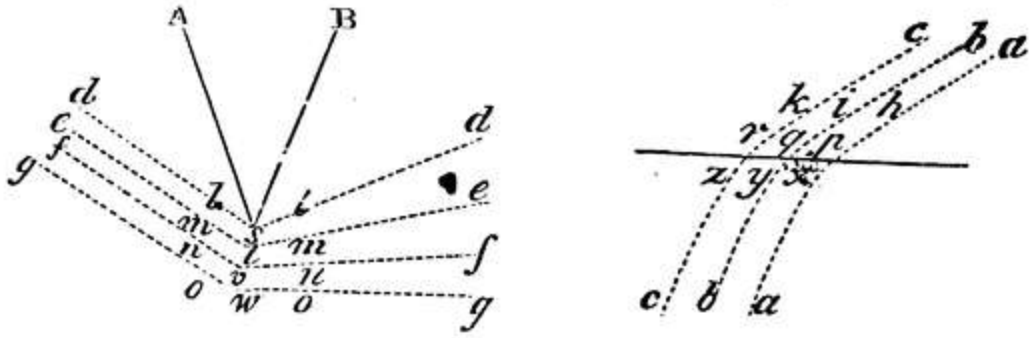
The same things being supposed, and that the motion before incidence is swifter than afterwards; I say, that if the line of incidence be inclined continually, the body will be at last reflected, and the angle of reflexion will be equal to the angle of incidence.



For conceive the body passing between the parallel planes A*a*, B*b*, C*c*, &c., to describe parabolic arcs as above; and let those arcs be HP, PQ, QR, &c. And let the obliquity of the line of incidence GH to the first plane A*a* be such that the sine of incidence may be to the radius of the circle whose sine it is, in the same ratio which the same sine of incidence hath to the sine of emergence from the plane D*d* into the space D*de*E; and because the sine of emergence is now become equal to radius, the angle of emergence will be a right one, and therefore the line of emergence will coincide with the plane D*d*. Let the body come to this plane in the point R; and because the line of emergence coincides with that plane, it is manifest that the body can proceed no farther towards the plane E*e*. But neither can it proceed in the line of emergence R*d*; because it is perpetually attracted or impelled towards the medium of incidence. It will return, therefore, between the planes C*c*, D*d*, describing an arc of a parabola QR*q*, whose principal vertex (by what *Galileo* has demonstrated) is in R, cutting the plane C*c* in the same angle at *q*, that it did before at Q; then going on in the parabolic arcs *qp, ph,* &c., similar and equal to the former arcs QP, PH, &c., it will cut the rest of the planes in the same angles at *p, h,* &c., as it did before in P, H, &c., and will emerge at last with the same obliquity at *h* with which it first impinged on that plane at H. Conceive now the intervals of the planes A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c., to be infinitely diminished, and the number in finitely increased, so that the action of attraction or impulse, exerted according to any assigned law, may become continual; and, the angle of emergence remaining all along equal to the angle of incidence, will be equal to the same also at last. Q.E.D.

SCHOLIUM.

These attractions bear a great resemblance to the reflexions and refractions of light made in a given ratio of the secants, as was discovered by *Snellius*; and consequently in a given ratio of the sines, as was exhibited by *Des Cartes*. For it is now certain from the phenomena of *Jupiter's* Satellites, confirmed by the observations of different astronomers, that light is propagated in succession, and requires about seven or eight minutes to travel from the sun to the earth. Moreover, the rays of light that are in our air (as lately was discovered by *Grimaldus*, by the admission of light into a dark room through a small hole, which I have also tried) in their passage near the angles of bodies, whether transparent or opaque (such as the circular and rectangular edges of gold, silver and brass coins, or of knives, or broken pieces of stone or glass), are bent or inflected round those bodies as if they were attracted to them; and those rays which in their passage come nearest to the bodies are the most inflected, as if they were most attracted: which tiling I myself have also carefully observed. And those which pass at greater distances are less inflected; and those at still greater distances are a little inflected the contrary way, and form three fringes of colours. In the figure *s* represents the edge of a knife, or any

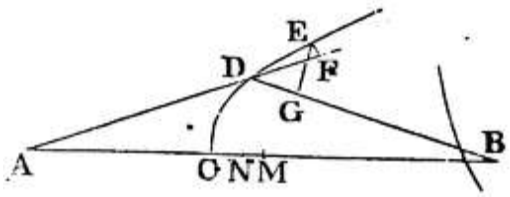


kind of wedge A*s*B; and *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld*, are rays inflected towards the knife in the arcs *owo, nvn, mtm, lsl*; which inflection is greater or less according to their distance from the knife. Now since this inflection of the rays is performed in the air without the knife, it follows that the rays which fall upon the knife are first inflected in the air before they touch the knife. And the case is the same of the rays falling upon glass. The refraction, therefore, is made not in the point of incidence, but gradually, by a continual inflection of the rays: which is done partly in the air before they touch the glass, partly (if I mistake not) within the glass, after they have entered it; as is represented in the rays *ckzc, biyb, ahxa*, falling upon *r, q, p,*

and inflected between *k* and *z, i* and *y, h* and *x*. Therefore because of the analogy there is between the propagation of the rays of light and the motion of bodies, I thought it not amiss to add the following Propositions for optical uses: not at all considering the nature of the rays of light, or inquiring whether they are bodies or not; but only determining the trajectories of bodies which are extremely like the trajectories of the rays.

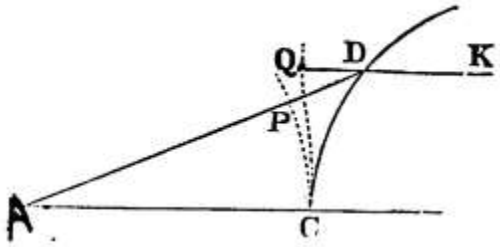
PROPOSITION XCVII. PROBLEM XLVII.

Supposing the sine of incidence upon any superficies to be in a given ratio to the sine of emergence; and that the inflection of the paths of those bodies near that superficies is performed in a very short space, which may be considered as a point; it is required to determine such a superficies as may cause all the corpuscles issuing from any one given place to converge to another given place.



Let A be the place from whence the corpuscles diverge; B the place to which they should converge; CDE the curve line which by its revolution round the axis AB describes the superficies sought; D, E, any two points of that curve: and EF, EG, perpendiculars let fall on the paths of the bodies AD, DB. Let the point D approach to and coalesce with the point E; and the ultimate ratio of the line DF by which AD is increased, to the line DG by which DB is diminished, will be the same as that of the sine of incidence to the sine of emergence. Therefore the ratio of the increment of the line AD to the decrement of the line DB is given; and therefore if in the axis AB there be taken any where the point C through which the curve CDE must pass, and CM the increment of AC be taken in that given ratio to CN the decrement of BC, and from the centres A, B, with the intervals AM, BN, there be described two circles cutting each other in D; that point D will touch the curve sought CDE, and, by touching it any where at pleasure, will determine that curve. Q.E.I.

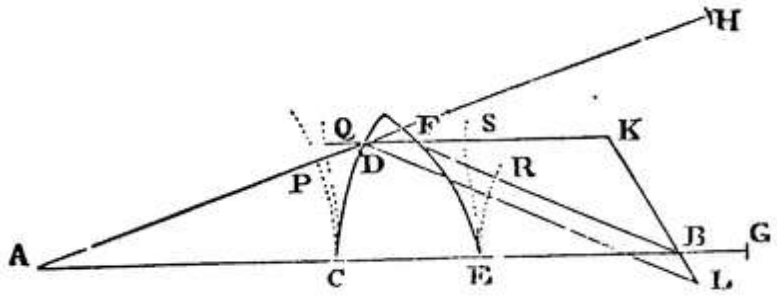
Cor. 1. By causing the point A or B to go off sometimes *in infinitum*, and sometimes to move towards other parts of the point C, will be obtained all those figures which *Cartesius* has exhibited in his Optics and Geometry relating to refractions. The invention of which *Cartesius* having thought fit to conceal, is here laid open in this Proposition.



Cor. 2. If a body lighting on any superficies CD in the direction of a right line AD, drawn according to any law, should emerge in the direction of another right line DK; and from the point C there be drawn curve lines CP, CQ, always perpendicular to AD, DK; the increments of the lines PD, QD, and therefore the lines themselves PD, QD, generated by those increments, will be as the sines of incidence and emergence to each other, and *è contra*.

PROPOSITION XCVIII. PROBLEM XLVIII.

The same things supposed; if round the axis AB *any attractive superficies be described as* CD*, regular or irregular, through which the bodies issuing from the given place* A *must pass; it is required to find a second attractive superficies* EF*, which may make those bodies converge to a given place* B.



Let a line joining AB cut the first superficies in C and the second in E, the point D being taken any how at pleasure. And supposing the sine of incidence on the first superficies to the sine of emergence from the same,

and the sine of emergence from the second superficies to the sine of incidence on the same, to be as any given quantity M to another given quantity N; then produce AB to G, so that BG may be to CE as M - N to N; and AD to H, so that AH may be equal to AG; and DF to K, so that DK may be to DH as N to M. Join KB, and about the centre D with the interval DH describe a circle meeting KB produced in L, and draw BF parallel to DL; and the point F will touch the line EF, which, being turned round the axis AB, will describe the superficies sought. Q.E.F.

For conceive the lines CP, CQ, to be every where perpendicular to AD, DF, and the lines ER, ES to FB, FD respectively, and therefore QS to be always equal to CE; and (by Cor. 2, Prop. XCVII) PD will be to QD as M to N, and therefore as DL to DK, or FB to FK; and by division as DL - FB or PH - PD - FB to FD or FQ - QD; and by composition as PH - FB to FQ, that is (because PH and CG, QS and CE, are equal), as CE + BG - FR to CE - FS. But (because BG is to CE as M - N to N) it comes to pass also that CE + BG is to CE as M to N; and therefore, by division, FR is to FS as M to N; and therefore (by Cor. 2, Prop XCVII) the superficies EF compels a body, falling upon it in the direction DF, to go on in the line FR to the place B. Q.E.D.

SCHOLIUM.

In the same manner one may go on to three or more superficies. But of all figures the spherical is the most proper for optical uses. If the object glasses of telescopes were made of two glasses of a sphaerical figure, containing water between them, it is not unlikely that the errors of the refractions made in the extreme parts of the superficies of the glasses may be accurately enough corrected by the refractions of the water. Such object glasses are to be preferred before elliptic and hyperbolic glasses, not only because they may be formed with more ease and accuracy, but because the pencils of rays situate without the axis of the glass would be more accurately refracted by them. But the different refrangibility of different rays is the real obstacle that hinders optics from being made perfect by sphaerical or any other

figures. Unless the errors thence arising can be corrected, all the labour spent in correcting the others is quite thrown away.

Book II. Of the Motion of Bodies

Section I: Of the motion of bodies that are resisted in the ratio of the velocity

PROPOSITION I. THEOREM I.

If a body is resisted in the ratio of its velocity, the motion lost by resistance is as the space gone over in its motion.

For since the motion lost in each equal particle of time is as the velocity, that is, as the particle of space gone over, then, by composition, the motion lost in the whole time will be as the whole space gone over. Q.E.D.

Cor. Therefore if the body, destitute of all gravity, move by its innate force only in free spaces, and there be given both its whole motion at the beginning, and also the motion remaining after some part of the way is gone over, there will be given also the whole space which the body can describe in an infinite time. For that space will be to the space now described as the whole motion at the beginning is to the part lost of that motion.

LEMMA I.

Quantities proportional to their differences are continually proportional.

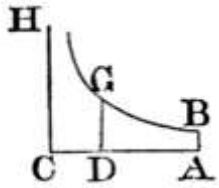
Let A be to A - B as B to B - C and C to C - D, &c., and, by conversion, A will be to B as B to C and C to D, &c. Q.E.D.

PROPOSITION II. THEOREM II.

If a body is resisted in the ratio of its velocity, and moves, by its vis insita *only, through a similar medium, and the times be taken equal, the velocities in the beginning of each of the times are in a geometrical progression, and the spaces described in each of the times are as the velocities.*

Case 1. Let the time be divided into equal particles; and if at the very beginning of each particle we suppose the resistance to act with one single impulse which is as the velocity, the decrement of the velocity in each of the particles of time will be as the same velocity. Therefore the velocities are proportional to their differences, and therefore (by Lem. 1, Book II) continually proportional. Therefore if out of an equal number of particles there be compounded any equal portions of time, the velocities at the beginning of those times will be as terms in a continued progression, which are taken by intervals, omitting every where an equal number of intermediate terms. But the ratios of these terms are compounded of the equal ratios of the intermediate terms equally repeated, and therefore are equal. Therefore the velocities, being proportional to those terms, are in geometrical progression. Let those equal particles of time be diminished, and their number increased *in infinitum*, so that the impulse of resistance may become continual; and the velocities at the beginnings of equal times, always continually proportional, will be also in this case continually proportional. Q.E.D.

Case 2. And, by division, the differences of the velocities, that is, the parts of the velocities lost in each of the times, are as the wholes; but the spaces described in each of the times are as the lost parts of the velocities (by Pro, Book I), and therefore are also as the wholes. Q.E.D.

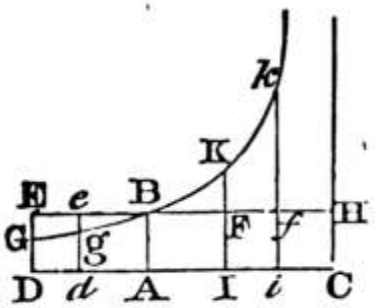


Corol. Hence if to the rectangular asymptotes AC, CH, the hyperbola BG is described, and AB, DG be drawn perpendicular to the asymptote AC, and both the velocity of the body, and the resistance of the medium, at the very beginning of the motion, be expressed by any given line AC, and, after some time is elapsed, by the indefinite line DC; the time may be expressed by the area ABGD, and the space described in that time by the line AD. For if that area, by the motion of the point D, be uniformly increased in the same manner as the time, the right line DC will decrease in a geometrical

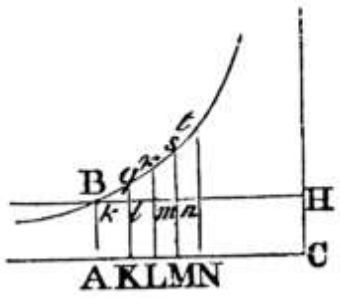
ratio in the same manner as the velocity; and the parts of the right line AC, described in equal times, will decrease in the same ratio.

PROPOSITION III. PROBLEM I.

To define the motion of a body which, in a similar medium, ascends or descends in a right line, and is resisted in the ratio of its velocity, and acted upon by an uniform force of gravity.



The body ascending, let the gravity be expounded by any given rectangle BACH; and the resistance of the medium, at the beginning of the ascent, by the rectangle BADE, taken on the contrary side of the right line AB. Through the point B, with the rectangular asymptotes AC, CH, describe an hyperbola, cutting the perpendiculars DE, *de*, in G, *g*; and the body ascending will in the time DG*gd* describe the space EG*ge*; in the time DGBA, the space of the whole ascent EGB; in the time ABKI, the space of descent BFK; and in the time IK*ki* the space of descent KF*fk*; and the velocities of the bodies (proportional to the resistance of the medium) in these periods of time will be ABED, AB*ed*, O, ABFI, AB*fi* respectively; and the greatest velocity which the body can acquire by descending will be BACH.



For let the rectangle BACH be resolved into innumerable rectangles A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, &c., which shall be as the increments of the velocities produced in so many equal times; then will O, A*k*, A*l*, A*m*, A*n*, &c., be as the whole velocities; and therefore (by supposition) as the resistances of the medium in the beginning of each of the equal times. Make AC to AK, or ABHC to AB*k*K, as the force of gravity to the resistance in the beginning of the second time; then from the force of gravity subduct the resistances, and ABHC, K*k*HC, L*l*HC, M*m*HC, &c., will be as the absolute forces with which the body is acted upon in the beginning of each of the times, and therefore (by Law I) as the increments of the velocities, that is, as the rectangles A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, &c., and therefore (by Lem. 1, Book II) in a geometrical progression. Therefore, if the right lines K*k*, L*l*, M*m*, N*n*, &c., are produced so as to meet the hyperbola in *q, r, s, t,* &c. the areas AB*q*K, K*qr*L, L*rs*M, M*st*N, &c., will be equal, and therefore analogous to the equal times and equal gravitating forces. But the area AB*q*K (by Corol. 3, Lem. VII and VIII, Book I) is to the area B*kq* as K*q* to ½*kq*, or AC to ½AK, that is, as the force of gravity to the resistance in the middle of the first time. And by the like reasoning, the areas *q*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t*, &c., are to the areas *qklr, rlms, smnt,* &c., as the gravitating forces to the resistances in the middle of the second, third, fourth time, and so on. Therefore since the equal areas BAK*q*, *q*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t*, &c., are analogous to the gravitating forces, the areas B*kq*, *qklr, rlms, smnt,* &c., will be analogous to the resistances in the middle of each of the times, that is (by supposition), to the velocities, and so to the spaces described. Take the sums of the analogous quantities, and the areas B*kq*, B*lr*, B*ms*, B*ut*, &c., will be analogous to the whole spaces described; and also the areas AB*q*K, AB*r*L, AB*s*M, AB*t*N, &c., to the times. Therefore the body, in descending, will in any time AB*r*L describe the space B*lr*, and in the time L*rt*N the space *rlnt*. Q.E.D. And the like demonstration holds in ascending motion.

Corol. 1. Therefore the greatest velocity that the body can acquire by falling is to the velocity acquired in any given time as the given force of gravity which perpetually acts upon it to the resisting force which opposes it at the end of that time.

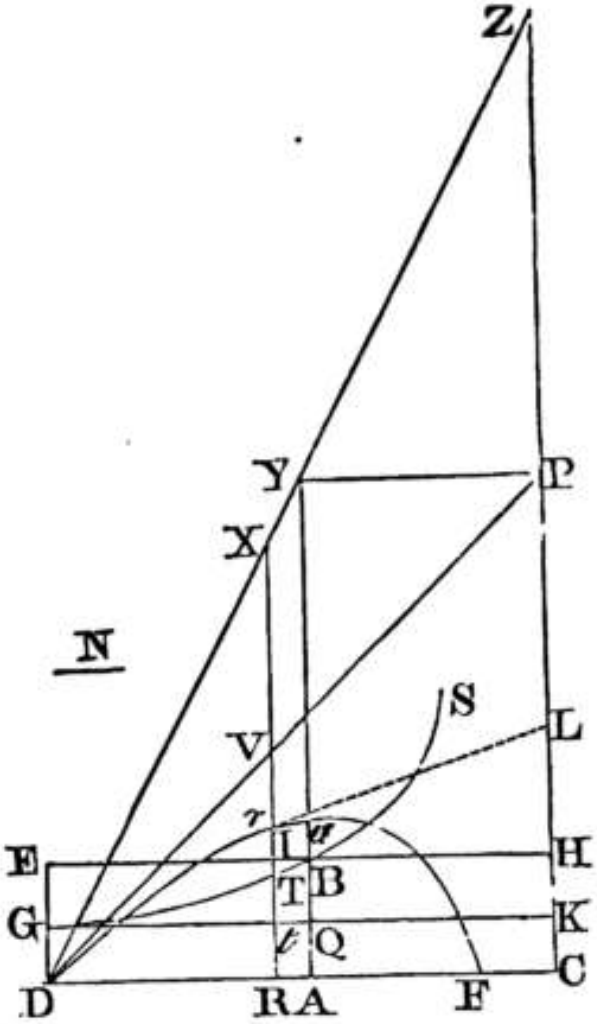
Corol. 2. But the time being augmented in an arithmetical progression, the sum of that greatest velocity and the velocity in the ascent, and also their difference in the descent, decreases in a geometrical progression.

Corol. 3. Also the differences of the spaces, which are described in equal differences of the times, decrease in the same geometrical progression.

Corol. 4. The space described by the body is the difference of two spaces, whereof one is as the time taken from the beginning of the descent, and the other as the velocity; which [spaces] also at the beginning of the descent are equal among themselves.

PROPOSITION IV. PROBLEM II.

Supposing the force of gravity in any similar medium to be uniform, and to tend perpendicularly to the plane of the horizon; to define the motion of a projectile therein, which suffers resistance proportional to its velocity.



Let the projectile go from any place D in the direction of any right line DP, and let its velocity at the beginning of the motion be expounded by the length DP. From the point P let fall the perpendicular PC on the horizontal line DC, and cut DC in A, so that DA may be to AC as the resistance of the medium arising from the motion upwards at the beginning to the force of gravity; or (which comes to the same) so that the rectangle under DA and DP may be to that under AC and CP as the whole resistance at the beginning of the motion to the force of gravity. With the asymptotes DC, CP describe any hyperbola GTBS cutting the perpendiculars DG, AB in G and B; complete the parallelogram DGKC, and let its side GK cut AB in Q. Take a line N in the same ratio to QB as DC is in to CP; and from any point R of the right line DC erect RT perpendicular to it, meeting the hyperbola in T, and the right lines EH, GK, DP in I, *t*, and V; in that perpendicular take V*r* equal to, or which is the same thing, take R*r* equal to; and the projectile in the time DRTG will arrive at the point *r* describing the curve line D*ra*F, the locus of the point *r*; thence it will come to its greatest height a in the perpendicular AB; and afterwards ever approach to the asymptote PC. And its velocity in any point *r* will be as the tangent *r*L to the curve. Q.E.I.

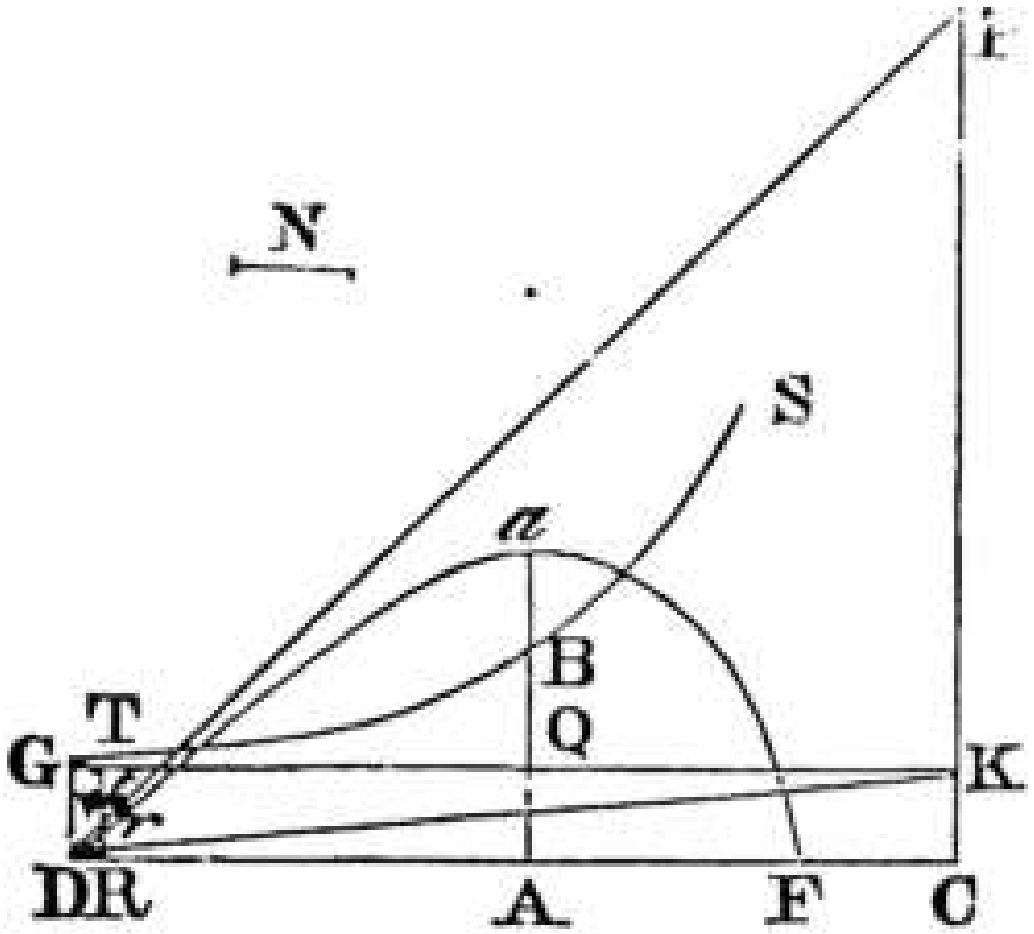
For N is to QB as DC to CP or DR to RV, and therefore RV is equal to, and R*r* (that is, RV -V*r*, or) is equal to. Now let the time be expounded by the area RDGT and (by Laws, Cor. 2), distinguish the motion of the body into two others, one of ascent, the other lateral. And since the resistance is as the motion, let that also be distinguished into two parts proportional and contrary to the parts of the motion: and therefore the length described by the lateral motion will be (by Prop. II, Book II) as the line DR, and the height (by Prop. III, Book II) as the area DR AB - RDGT, that is, as the line R*r*. But in the very beginning of the motion the area RDGT is equal to the rectangle DR AQ, and therefore that line R*r* (or) will then be to DR as AB - AQ or QB to N, that is, as CP to DC; and therefore as the motion upwards to the motion lengthwise at the beginning. Since, therefore, R*r* is always as the height, and DR always as the length, and R*r* is to DR at the beginning as the height to the length, it follows, that R*r* is always to DR as the height to the length; and therefore that the body will move in the line D*ra*F, which is the locus of the point *r*. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore *R*r is equal to, and therefore if RT be produced to X so that RX may be equal to, that is, if the parallelogram ACPY be completed,

and DY cutting CP in Z be drawn, and RT be produced till it meets DY in X; X*r* will be equal to, and therefore proportional to the time.

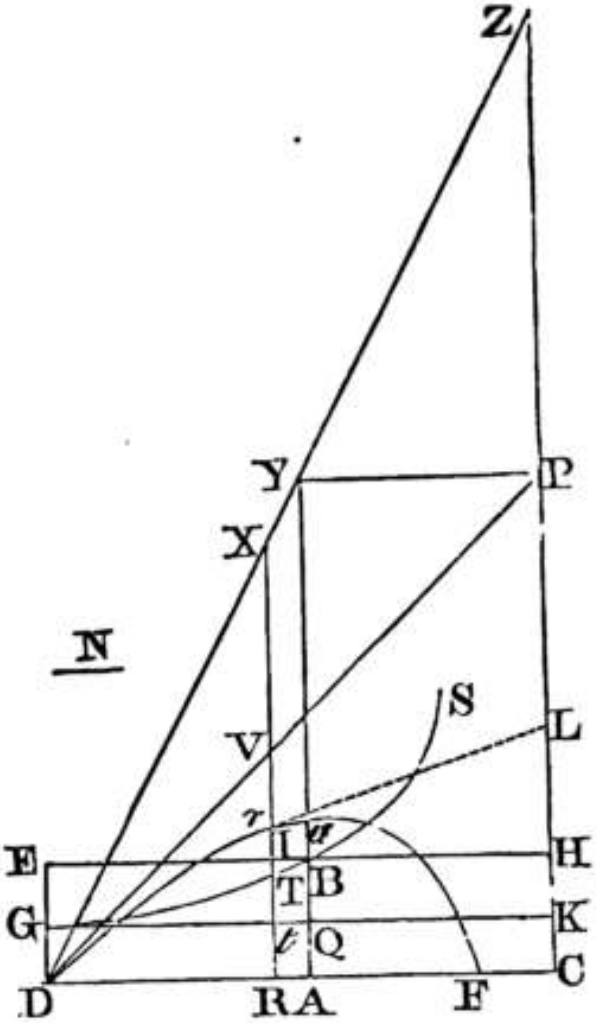
Cor. 2. Whence if innumerable lines CR, or, which is the same, innumerable lines ZX, be taken in a geometrical progression, there will be as many lines X*r* in an arithmetical progression. And hence the curve D*ra*F is easily delineated by the table of logarithms.

Cor. 3. If a parabola be constructed to the vertex D, and the diameter DG produced downwards, and its latus rectum is to 2 DP as the whole resistance at the beginning of the notion to the gravitating force, the velocity with which the body ought to go from the place D, in the direction of the right line DP, so as in an uniform resisting medium to describe the curve D*ra*F, will be the same as that with which it ought to go from the same place D in the direction of the same right line DP, so as to describe



a

parabola in a non-resisting medium. For the latus rectum of this parabola, at the very beginning of the motion, is; and V*r* is. But a right line, which, if drawn, would touch the hyperbola GTS in G, is parallel to DK, and therefore T*t* is, and N is. And therefore V*r* is equal to, that is, (because DR and DC, DV and DP are proportionals), to; and the latus rectum comes out, that is (because QB and CK, DA, and AC are proportional), , and therefore ist to 2DP as DP DA to CP AC; that is, as the resistance to the gravity. Q.E.D.

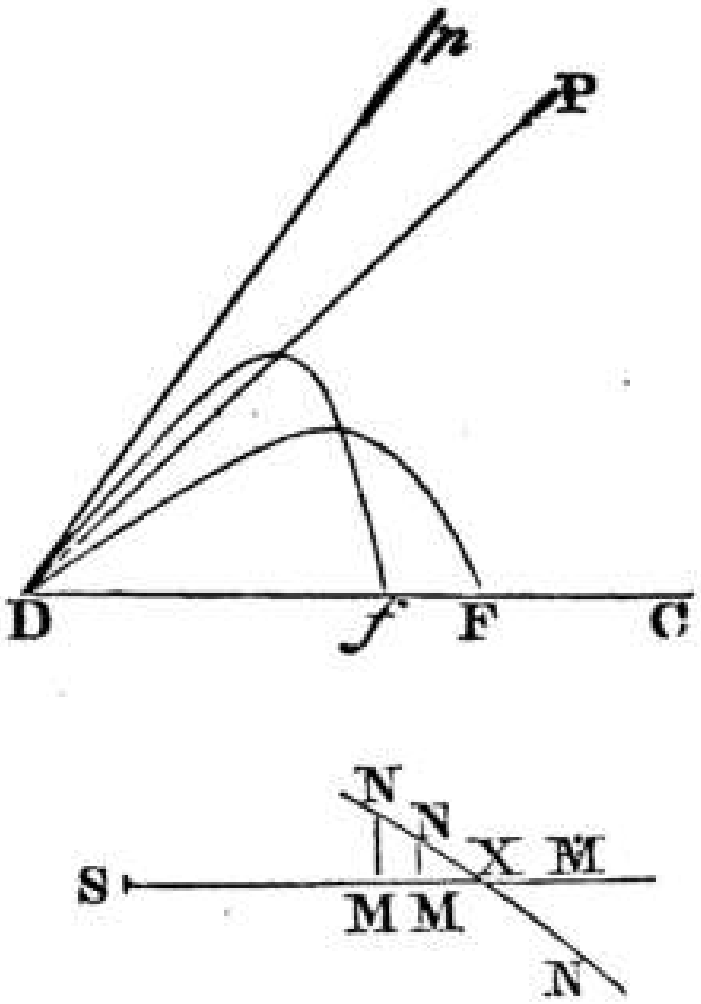


Cor. 4. Hence if a body be projected from any place D with a given velocity, in the direction of a right line DP given by position, and the resistance of the medium, at the beginning of the motion, be given, the curve D*ra*F, which that body will describe, may be found. For the velocity being given, the latus rectum of the parabola is given, as is well known. And taking 2DP to that latus rectum, as the force of gravity to the resisting

force, DP is also given. Then cutting DC in A, so that CP AC may be to DP DA in the same ratio of the gravity to the resistance, the point A will be given. And hence the curve D*ra*F is also given.

Cor. 5. And, on the contrary, if the curve D*ra*F be given, there will be given both the velocity of the body and the resistance of the medium in each of the places *r*. For the ratio of CP AC to DP DA being given, there is given both the resistance of the medium at the beginning of the motion, and the latus rectum of the parabola; and thence the velocity at the beginning of the motion is given also. Then from the length of the tangent L there is given both the velocity proportional to it, and the resistance proportional to the velocity in any place *r*.

Cor. 6. But since the length 2DP is to the latus rectum of the parabola as the gravity to the resistance in D; and, from the velocity augmented, the resistance is augmented in the same ratio, but the latus rectum of the parabola is augmented in the duplicate of that ratio, it is plain that the length 2DP is augmented in that simple ratio only; and is therefore always proportional to the velocity; nor will it be augmented or diminished by the change of the angle CDP, unless the velocity be also changed.



Cor. 7. Hence appears the method of determining the curve D*ra*F nearly from the phenomena, and thence collecting the resistance and velocity with which the body is projected. Let two similar and equal bodies be projected with the same velocity, from the place D, in different angles CDP, CD*p*; and let the places F, *f*, where they fall upon the horizontal plane DC, be known. Then taking any length for DP or D*p* suppose the resistance in D to be to the gravity in any ratio whatsoever, and let that ratio be expounded by any length SM. Then, by computation, from that assumed length DP, find the lengths DP, D*f*; and from the ratio, found by calculation, subduct the same ratio as found by experiment; and let the difference be expounded by the perpendicular MN. Repeat the same a second and a third time, by assuming always a new ratio SM of the resistance to the gravity, and collecting a new difference MN. Draw the affirmative differences on one side of the right

line SM, and the negative on the other side; and through the points N, N, N, draw a regular curve NNN. cutting the right line SMMM in X, and SX will be the true ratio of the resistance to the gravity, which was to be found. From this ratio the length DF is to be collected by calculation; and a length, which is to the assumed length DP as the length DF known by experiment to the length DF just now found, will be the true length DP. This being known, you will have both the curve line D*ra*F which the body describes, and also the velocity and resistance of the body in each place.

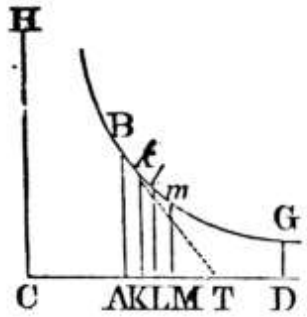
SCHOLIUM.

But, yet, that the resistance of bodies is in the ratio of the velocity, is more a mathematical hypothesis than a physical one. In mediums void of all tenacity, the resistances made to bodies are in the duplicate ratio of the velocities. For by the action of a swifter body, a greater motion in proportion to a greater velocity is communicated to the same quantity of the medium in a less time; and in an equal time, by reason of a greater quantity of the disturbed medium, a motion is communicated in the duplicate ratio greater; and the resistance (by Law II and III) is as the motion communicated. Let us, therefore, see what motions arise from this law of resistance.

Section II: Of the motion of bodies that are resisted in the duplicate ratio of their velocities

PROPOSITION V. THEOREM III.

If a body is resisted in the duplicate ratio of its velocity, and moves by its innate force only through a similar medium; and the times be taken in a geometrical progression, proceeding from less to greater terms: I say, that the velocities at the beginning of each of the times are in the same geometrical progression inversely; and that the spaces are equal, which are described in each of the times.



For since the resistance of the medium is proportional to the square of the velocity, and the decrement of the velocity is proportional to the resistance: if the time be divided into innumerable equal particles, the squares of the velocities at the beginning of each of the times will be proportional to the differences of the same velocities. Let those particles of time be AK, KL, LM, &c., taken in the right line CD; and erect the perpendiculars AB, K*k*, L*l*, M*m*, &c., meeting the hyperbola B*klm*G, described with the centre C, and the rectangular asymptotes CD, CH, in B, *k, l, m,* &c.; then AB will be to K*k* as CK to CA, and, by division, AB - K*k* to K*k* as AK to CA, and alternately, AB - K*k* to AK as K*k* to CA; and therefore as AB K*k* to AB CA. Therefore since AK and AB CA are given, AB - K*k* will be as AB KA; and, lastly, when AB and K*k* coincide, as AB^2. And, by the like reasoning, K*k* - L*l*, L*l* - M*m*, &c., will be as $K*k*^2$, $L*l*^2$, &c.

Therefore the squares of the lines AB, K*k*, L*l*, M*m*, &c., are as their differences; and, therefore, since the squares of the velocities were shewn above to be as their differences, the progression of both will be alike. This being demonstrated it follows also that the areas described by these lines are in a like progression with the spaces described by these velocities. Therefore if the velocity at the beginning of the first time AK be expounded by the line AB, and the velocity at the beginning of the second time KL by the line K*k* and the length described in the first time by the area AK*k*B, all the following velocities will be expounded by the following lines L*l*, M*m*, &c. and the lengths described, by the areas K*l*, L*m*. &c. And, by composition, if the whole time be expounded by AM, the sum of its parts, the whole length described will be expounded by AM*m*B the sum of its parts. Now conceive the time AM to be divided into the parts AK, KL, LM, &c. so that CA, CK, CL, CM, &c. may be in a geometrical progression; and those parts will be in the same progression, and the velocities AB, K*k*, L*l*, M*m*, &c., will be in the same progression inversely, and the spaces described A*k*, K*l*, L*m*, &c., will be equal. Q.E.D.

Cor. 1. Hence it appears, that if the time be expounded by any part AD of the asymptote, and the velocity in the beginning of the time by the ordinate AB, the velocity at the end of the time will be expounded by the ordinate DG; and the whole space described by the adjacent hyperbolic area ABGD; and the space which any body can describe in the same time AD, with the first velocity AB, in a nonresisting medium, by the rectangle AB AD.

Cor 2. Hence the space described in a resisting medium is given, by taking it to the space described with the uniform velocity AB in a nonresisting medium, as the hyperbolic area ABGD to the rectangle AB AD.

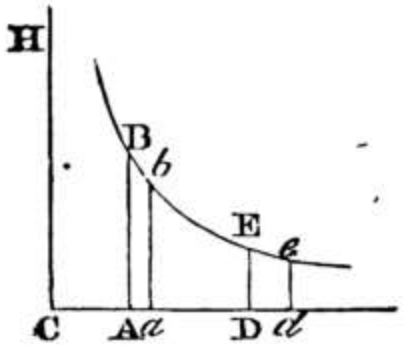
Cor. 3. The resistance of the medium is also given, by making it equal, in the very beginning of the motion, to an uniform centripetal force, which could generate, in a body falling through a nonresisting medium, the velocity AB in the time AC. For if BT be drawn touching the hyperbola in B, and meeting the asymptote in T, the right line AT will be equal to AC, and will express the time in which the first resistance, uniformly continued, may take away the whole velocity AB

Cor. 4. And thence is also given the proportion of this resistance to the force of gravity, or any other given centripetal force.

Cor. 5. And, *vice versa*, if there is given the proportion of the resistance to any given centripetal force, the time AC is also given, in which a centripetal force equal to the resistance may generate any velocity as AB; and thence is given the point B, through which the hyperbola, having CH, CD for its asymptotes, is to be described; as also the space ABGD, which a body, by beginning its motion with that velocity AB, can describe in any time AD, in a similar resisting medium.

PROPOSITION VI. THEOREM IV.

Homogeneous and equal spherical bodies, opposed by resistances that are in the duplicate ratio of the velocities, and moving on by their innate force only, will, in times which are reciprocally as the velocities at the beginning, describe equal spaces, and lose parts of their velocities proportional to the wholes.



To the rectangular asymptotes CD, CH describe any hyperbola B*b*E*e*, cutting the perpendiculars AB, *ab*, DE, *de* in B, *b*, E, *e*; let the initial velocities be expounded by the perpendiculars AB, DE, and the times by the lines A*a*, D*d*. Therefore as A*a* is to D*d*, so (by the hypothesis) is DE to AB, and so (from the nature of the hyperbola) is CA to CD; and, by composition, so is C*a* to C*d*. Therefore the areas AB*ba*, DE*ed*, that is, the spaces described, are equal among themselves, and the first velocities AB, DE are proportional to the last *ab, de*; and therefore, by division, proportional to the parts of the velocities lost, AB - *ab*, DE - *de*. Q.E.D.

PROPOSITION VII. THEOREM V.

If spherical bodies are resisted in the duplicate ratio of their velocities, in times which are as the first motions directly, and the first resistances inversely, they will lose parts of their motions proportional to the wholes, and will describe spaces proportional to those times and the first velocities conjunctly.

For the parts of the motions lost are as the resistances and times conjunctly. Therefore, that those parts may be proportional to the wholes, the resistance and time conjunctly ought to be as the motion. Therefore the time will be as the motion directly and the resistance inversely. Wherefore the particles of the times being taken in that ratio, the bodies will always lose parts of their motions proportional to the wholes, and therefore will retain velocities always proportional to their first velocities. And because of the given ratio of the velocities, they will always describe spaces which are as the first velocities and the times conjunctly. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore if bodies equally swift are resisted in a duplicate ratio of their diameters, homogeneous globes moving with any velocities whatsoever, by describing spaces proportional to their diameters, will lose parts of their motions proportional to the wholes. For the motion of each globe will be as its velocity and mass conjunctly, that is, as the velocity and the cube of its diameter; the resistance (by supposition) will be as the square of the diameter and the square of the velocity conjunctly; and the time (by this proposition) is in the former ratio directly, and in the latter inversely, that is, as the diameter directly and the velocity inversely; and therefore the space, which is proportional to the time and velocity is as the diameter.

Cor. 2. If bodies equally swift are resisted in a sesquiplicate ratio of their diameters, homogeneous globes, moving with any velocities whatsoever, by describing spaces that are in a sesquiplicate ratio of the diameters, will lose parts of their motions proportional to the wholes.

Cor. 3. And universally; if equally swift bodies are resisted in the ratio of any power of the diameters, the spaces, in which homogeneous globes, moving with any velocity whatsoever, will lose parts of their motions proportional to the wholes, will be as the cubes of the diameters applied to that power. Let those diameters be D and E; and if the resistances, where the velocities are supposed equal, are as D^n and E^n; the spaces in which the globes, moving with any velocities whatsoever, will lose parts of their

motions proportional to the wholes, will be as D^{3-n} and E^{3-n}. And therefore homogeneous globes, in describing spaces proportional to D^{3-n} and E^{3-n}, will retain their velocities in the same ratio to one another as at the beginning.

Cor. 4. Now if the globes are not homogeneous, the space described by the denser globe must be augmented in the ratio of the density. For the motion, with an equal velocity, is greater in the ratio of the density, and the time (by this Prop.) is augmented in the ratio of motion directly, and the space described in the ratio of the time.

Cor. 5. And if the globes move in different mediums, the space, in a medium which, *caeteris paribus*, resists the most, must be diminished in the ratio of the greater resistance. For the time (by this Prop.) will be diminished in the ratio of the augmented resistance, and the space in the ratio of the time.

LEMMA II.

The moment of any genitum is equal to the moments of each of the generating sides drawn into the indices of the powers of those sides, and into their coefficients continually.

I call any quantity a *genitum* which is not made by addition or subduction of divers parts, but is generated or produced in arithmetic by the multiplication, division, or extraction of the root of any terms whatsoever; in geometry by the invention of contents and sides, or of the extremes and means of proportionals. Quantities of this kind are products, quotients, roots, rectangles, squares, cubes, square and cubic sides, and the like. These quantities I here consider as variable and indetermined, and increasing or decreasing, as it were, by a perpetual motion or flux; and I understand their momentaneous increments or decrements by the name of moments; so that the increments may be esteemed as added or affirmative moments; and the decrements as subducted or negative ones. But take care not to look upon finite particles as such. Finite particles are not moments, but the very quantities generated by the moments. We are to conceive them as the just

nascent principles of finite magnitudes. Nor do we in this Lemma regard the magnitude of the moments, but their first proportion, as nascent. It will be the same thing, if, instead of moments, we use either the velocities of the increments and decrements (which may also be called the motions, mutations, and fluxions of quantities), or any finite quantities proportional to those velocities. The coefficient of any generating side is the quantity which arises by applying the genitum to that side.

Wherefore the sense of the Lemma is, that if the moments of any quantities A, B, C, &c., increasing or decreasing by a perpetual flux, or the velocities of the mutations which are proportional to them, be called *a, b, c,* &c., the moment or mutation of the generated rectangle AB will be aB + bA; the moment of the generated content ABC will be aBC + bAC + cAB; and the moments of the generated powers A^2, A^3, A^4, $A^{½}$, $A^{3/}{}_2$, $A^{⅓}$, $A^{⅔}$, A^{-1}, A^{-2}, $A^{-½}$ will be 2aA, 3$a$$A^2$, 4$a$$A^3$, ½$a$$A^{-½}$, $^3/_2$$a$$A^{½}$, ⅓$a$$A^{-⅔}$, ⅔$a$$A^{-⅓}$, -$a$$A^{-2}$, -2$a$$A^{-3}$, - ½$a$$A^{-3/}{}_2$ respectively; and in general, that the moment of any power A, will be aA. Also, that the moment of the generated quantity A^2B bill be 2aAB + bA^2; the moment of the generated quantity A^3 B^4 C^2 will be 3$a$$A^2$ B^4 C^2 + 4$b$$A^3$$B^3$$C^2$ + 2$c$$A^3$$B^4$C; and the moment of the generated quantity or A^3B^{-2} will be 3$a$$A^2B^{-2}-2b$$A^3B^{-3}$; and so on. The Lemma is thus demonstrated.

Case 1. Any rectangle, as AB, augmented by a perpetual flux, when, as yet, there wanted of the sides A and B half their moments ½a and ½b, was A-½a into B-½b, or AB - ½a B - ½b A + ¼ab; but as soon as the sides A and B are augmented by the other half moments, the rectangle becomes A + ½a into B + ½b, or AB + ½a B + ½b A + ¼ab. From this rectangle subduct the former rectangle, and there will remain the excess aB + bA. Therefore with the whole increments a and b of the sides, the increment aB + bA of the rectangle is generated. Q.E.D.

Case 2. Suppose AB always equal to G, and then the moment of the content ABC or GC (by Case 1) will be gC + cG, that is (putting AB and aB + bA for G and g), aBC + bAC + cAB. And the reasoning is the same for contents under ever so many sides. Q.E.D.

Case 3. Suppose the sides A, B, and C, to be always equal among themselves; and the moment aB + bA, of A^2, that is, of the rectangle AB,

will be $2a$A; and the moment aBC + bAC + cAB of A^3, that is, of the content ABC, will be $3aA^2$. And by the same reasoning the moment of any power A^n is naA^{n-1}. Q.E.D

Case 4. Therefore since into A is 1, the moment of drawn into A, together with drawn into *a*, will be the moment of 1, that is, nothing. Therefore the moment of, or of A^{-1}, is. And generally since into A^n is 1, the moment of drawn into A^n together with into naA^{n-1} will be nothing. And, therefore, the moment of or A^{-n} will be. Q.E.D.

Case 5. And since $A^{½}$ into $A^{½}$ is A, the moment of $A^{½}$ drawn into $2A^{½}$ will be *a* (by Case 3); and, therefore, the moment of $A^{½}$ will be or $½aA^{-½}$. And, generally, putting equal to B, then A^m will be equal to B^n, and therefore maA^{m-1} equal to nbB^{n-1}, and maA^{-1} equal to nbB^{-1}, or; and therefore is equal to *b*, that is, equal to the moment of. Q.E.D.

Case 6. Therefore the moment of any generated quantity A^mB^n is the moment of A^m drawn into B^n, together with the moment of B^n drawn into A^m, that is, $maA^{m-1}\ B^n + nbB^{n-1}\ A^m$; and that whether the indices *m* and *n* of the powers be whole numbers or fractions, affirmative or negative. And the reasoning is the same for contents under more powers. Q.E.D.

Cor. 1. Hence in quantities continually proportional, if one term is given, the moments of the rest of the terms will be as the same terms multiplied by the number of intervals between them nd the given term. Let A, B, C, D, E, F, be continually proportional; then if the term C is given, the moments of the rest of the terms will be among themselves as -2A, -B, D, 2E, 3F.

Cor. 2. And if in four proportionals the two means are given, the moments of the extremes will be as those extremes. The same is to be understood of the sides of any given rectangle.

Cor. 3. And if the sum or difference of two squares is given, the moments of the sides will be reciprocally as the sides.

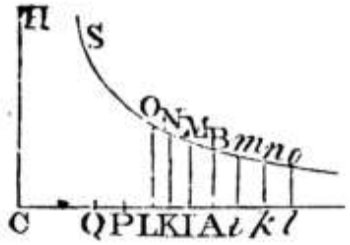
SCHOLIUM.

In a letter of mine to Mr. *J. Collins*, dated *December* 10, 1672, having described a method of tangents, which I suspected to be the same with

Slusius's method, which at that time was not made public, I subjoined these words: *This is one particular, or rather a Corollary, of a general method, which extends itself, without any troublesome calculation, not only to the drawing of tangents to any curve lines, whether geometrical or mechanical, or any how respecting right lines or other curves, but also to the resolving other abstruser kinds of problems about the crookedness, areas, lengths, centres of gravity of curves, &c.; nor is it (as* Hudden's *method* de Maximis & Minimis*) limited to equations which are free from surd quantities. This method I have interwoven with that other of working in equations, by reducing them to infinite series.* So far that letter. And these last words relate to a treatise I composed on that subject in the year 1671. The foundation of that general method is contained in the preceding Lemma.

PROPOSITION VIII. THEOREM VI.

If a body in an uniform medium, being uniformly acted upon by the force of gravity, ascends or descends in a right line; and the whole space described be distinguished into equal parts, and in the beginning of each of the parts (by adding or subducting the resisting force of the medium to or from the force of gravity, when the body ascends or descends] you collect the absolute forces; I say, that those absolute forces are in a geometrical progression.



For let the force of gravity be expounded by the given line AC; the force of resistance by the indefinite line AK; the absolute force in the descent of the body by the difference KC: the velocity of the body by a line AP, which shall be a mean proportional between AK and AC, and therefore in a subduplicate ratio of the resistance; the increment of the resistance made in a given particle of time by the lineola KL, and the contemporaneous increment of the velocity by the lineola PQ; and with the centre C, and

rectangular asymptotes CA, CH, describe any hyperbola BNS meeting the erected perpendiculars AB, KN, LO in B, N and O. Because AK is as AP^2, the moment KL of the one will be as the moment 2APQ of the other, that is, as AP KC; for the increment PQ of the velocity is (by Law II) proportional to the generating force KC. Let the ratio of KL be compounded with the ratio KN, and the rectangle KL KN will become as AP KC KN; that is (because the rectangle KC KN is given), as AP. But the ultimate ratio of the hyperbolic area KNOL to the rectangle KL KN becomes, when the points K and L coincide, the ratio of equality. Therefore that hyperbolic evanescent area is as AP. Therefore the whole hyperbolic area ABOL is composed of particles KNOL which are always proportional to the velocity AP; and therefore is itself proportional to the space described with that velocity. Let that area be now divided into equal parts as ABMI, IMNK, KNOL, &c., and the absolute forces AC, IC, KC, LC, &c., will be in a geometrical progression. Q.E.D. And by a like reasoning, in the ascent of the body, taking, on the contrary side of the point A, the equal areas AB*mi, imnk, knol,* &c., it will appear that the absolute forces AC, *i*C, *k*C, *l*C, &c., are continually proportional. Therefore if all the spaces in the ascent and descent are taken equal, all the absolute forces *l*C, *k*C, *i*C, AC, IC, KC, LC, &c., will be continually proportional. Q.E.D.

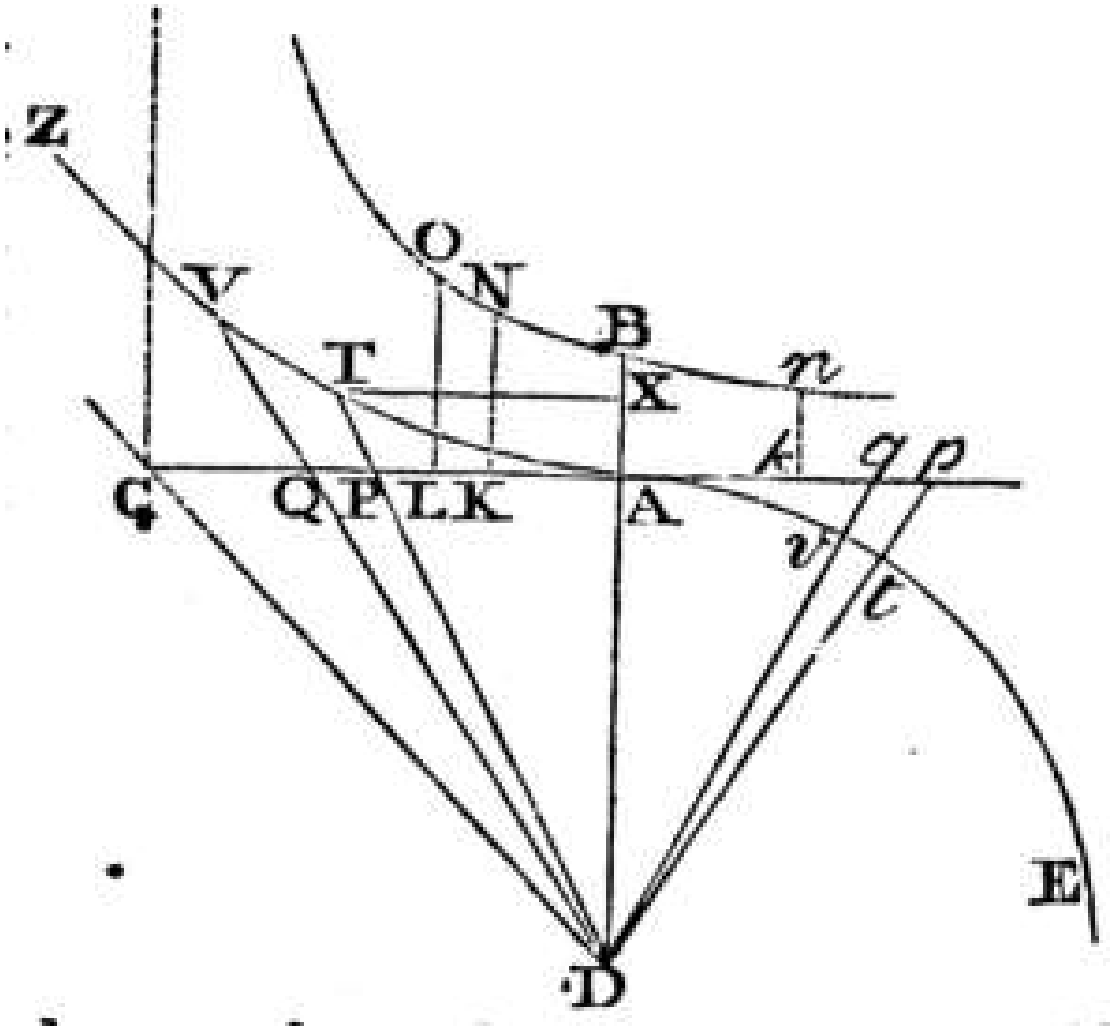
Cor. 1. Hence if the space described be expounded by the hyperbolic area ABNK, the force of gravity, the velocity of the body, and the resistance of the medium, may be expounded by the lines AC, AP, and AK respectively; and *vice versa*.

Cor. 2. And the greatest velocity which the body can ever acquire in an infinite descent will be expounded by the line AC.

Cor. 3. Therefore if the resistance of the medium answering to any given velocity be known, the greatest velocity will be found, by taking it to that given velocity in a ratio subduplicate of the ratio which the force of gravity bears to that known resistance of the medium.

PROPOSITION IX. THEOREM VII.

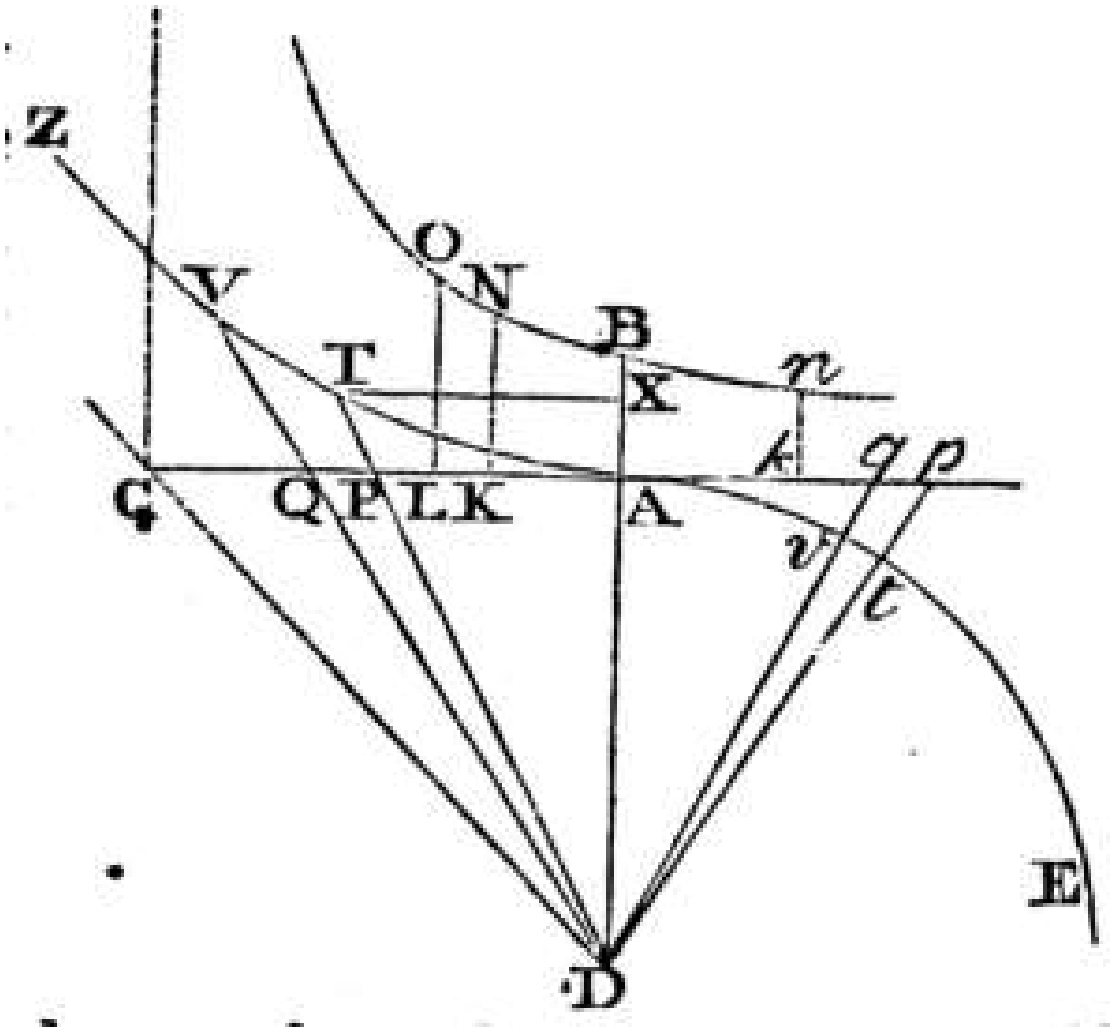
Supposing what is above demonstrated, I say, that if the tangents of the angles of the sector of a circle, and of an hyperbola, be taken proportional to the velocities, the radius being of a fit magnitude, all the time of the ascent to the highest place will be as the sector of the circle, and all the time of descending from the highest place as the sector of the hyperbola.



To the right line AC, which expresses the force of gravity, let AD be drawn perpendicular and equal. From the centre D with the semi-diameter AD describe as well the quadrant A*t*E of a circle, as the rectangular hyperbola AVZ, whose axis is AK, principal vertex A, and asymptote DC. Let D*p*, DP be drawn; and the circular sector A*t*D will be as all the time of the ascent to the highest place; and the hyperbolic sector ATD as all the time of descent from the highest place; if so be that the tangents A*p*, AP of those sectors be as the velocities.

Case 1. Draw D*vq* cutting off the moments or least particles *t*D*v* and *q*D*p*, described in the same time, of the sector AD*t* and of the triangle AD*p*. Since those particles (because of the common angle D) are in a duplicate ratio of the sides, the particle *t*D*v* will be as, that is (because *t*D is given), as. But *p*D² is AD² + A*p*², that is, AD² + AD A*k*, or AD C*k*; and *q*D*p* is ½AD *pq*. Therefore *t*D*v*, the particle of the sector, is as; that is, as the least decrement *pq* of the velocity directly, and the force C*k* which diminishes the velocity, inversely; and therefore as the particle of time answering to the decrement of the velocity. And, by composition, the sum of all the particles *t*D*v* in the sector AD*t* will be as the sum of the particles of time answering to each of the lost particles *pq* of the decreasing velocity A*p*, till that velocity, being diminished into nothing, vanishes; that is, the whole sector AD*t* is as the whole time of ascent to the highest place. Q.E.D.

Case 2. Draw DQV cutting off the least particles TDV and PDQ of the sector DAV, and of the triangle DAQ; and these particles will be to each other as DT² to DP², that is (if TX and AP are parallel), as DX² to DA² or TX² to AP²; and, by division, as DX² - TX² to DA² - AP² . But, from the nature of the hyperbola, DX² - TX² is AD²; and, by the supposition, AP² is AD AK. Therefore the particles are to each other as AD² to AD² - AD AK; that is, as AD to AD - AK or AC to CK: and therefore the particle TDV of the sector is; and therefore (because AC and AD are given) as; that is, as the increment of the velocity directly, and as the force generating the increment inversely; and therefore as the particle of the time answering to the increment. And, by composition, the sum of the particles of time, in which all the particles PQ of the velocity AP are generated, will be as the sum of the particles of the sector ATD; that is, the whole time will be as the whole sector. Q.E.D.



Cor. 1. Hence if AB be equal to a fourth part of AC, the space which a body will describe by falling in any time will be to the space which the body could describe, by moving uniformly on in the same time with its greatest velocity AC, as the area ABNK, which expresses the space described in falling to the area ATD, which expresses the time. For since AC is to AP as AP to AK, then (by Cor. 1, Lem. II, of this Book) LK is to PQ as 2AK to AP, that is, as 2AP to AC, and thence LK is to ½PQ as AP to ¼AG or AB; and KN is to AC or AD as AB to CK; and therefore, *ex aequo*, LKNO to DPQ as AP to CK. But DPQ was to DTV as CK to AC. Therefore, *ex aequo*, LKNO is to DTV as AP to AC; that is, as the velocity of the falling body to the greatest velocity which the body by falling can acquire. Since, therefore, the moments LKNO and DTV of the areas ABNK and ATD are as the velocities, all the parts of those areas generated in the

same time will be as the spaces described in the same time; and therefore the whole areas ABNK and ADT, generated from the beginning, will be as the whole spaces described from the beginning of the descent. Q.E.D.

Cor. 2. The same is true also of the space described in the ascent. That is to say, that all that space is to the space described in the same time, with the uniform velocity AC, as the area AB*uk* is to the sector AD*t*.

Cor. 3. The velocity of the body, falling in the time ATD, is to the velocity which it would acquire in the same time in a nonresisting space, as the triangle APD to the hyperbolic sector ATD. For the velocity in a nonresisting medium would be as the time ATD, and in a resisting medium is as AP, that is, as the triangle APD. And those velocities, at the beginning of the descent, are equal among themselves, as well as those areas ATD, APD.

Cor. 4. By the same argument, the velocity in the ascent is to the velocity with which the body in the same time, in a nonresisting space, would lose all its motion of ascent, as the triangle A*p*D to the circular sector A*t*D; or as the right line A*p* to the arc A*t*.

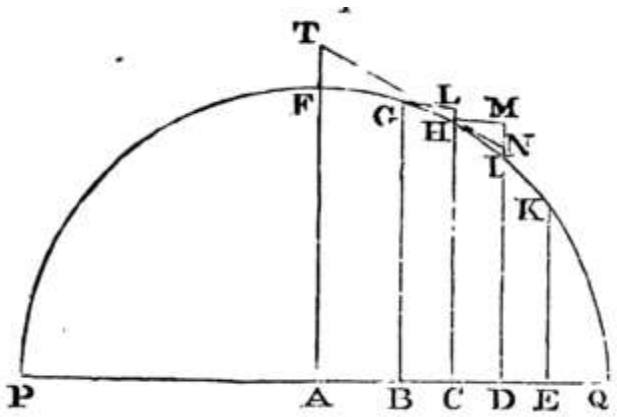
Cor. 5. Therefore the time in which a body, by falling in a resisting medium, would acquire the velocity AP, is to the time in which it would acquire its greatest velocity AC, by falling in a nonresisting space, as the sector ADT to the triangle ADC: and the time in which it would lose its velocity A*p*, by ascending in a resisting medium, is to the time in which it would lose the same velocity by ascending in a nonresisting space, as the arc A*t* if to its tangent A*p*.

Cor. 6. Hence from the given time there is given the space described in the ascent or descent. For the greatest velocity of a body descending *in infinitum* is given (by Corol. 2 and 3, Theor. VI, of this Book); and thence the time is given in which a body would acquire that velocity by falling in a nonresisting space. And taking the sector ADT or AD*t* to the triangle ADC in the ratio of the given time to the time just now found, there will be given both the velocity AP or A*p*, and the area ABNK or AB*nk*, which is to the sector ADT, or AD*t*, as the space sought to the space which would, in the given time, be uniformly described with that greatest velocity found just before.

Cor. 7. And by going backward, from the given space of ascent or descent AB*nk* or ABNK, there will be given the time AD*t* or ADT.

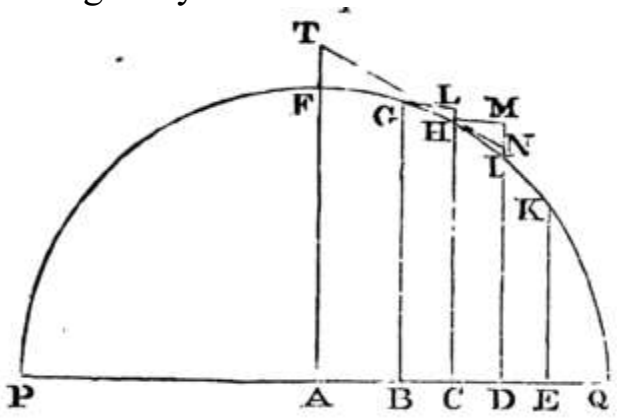
PROPOSITION X. PROBLEM III.

Suppose the uniform force of gravity to tend directly to the plane of the horizon, and the resistance to be as the density of the medium and the square of the velocity conjunctly: it is proposed to find the density of the medium in each place, which shall make the body move in any given curve line; the velocity of the body and the resistance of the medium in each place.



Let PQ, be a plane perpendicular to the plane of the scheme itself; PFHQ a curve line meeting that plane in the points P and Q; G, H, I, K four places of the body going on in this curve from F to Q; and GB, HC, ID, KE four parallel ordinates let fall from these points to the horizon, and standing on the horizontal line PQ, at the points B, C, D, E; and let the distances BC, CD, DE, of the ordinates be equal among themselves. From the points G and H let the right lines GL, HN, be drawn touching the curve in G and H, and meeting the ordinates CH, DI, produced upwards, in L and N: and complete the parallelogram HCDM. And the times in which the body describes the arcs GH, HI, will be in a subduplicate ratio of the altitudes LH, NI, which the bodies would describe in those times, by falling from the tangents; and the velocities will be as the lengths described GH, HI directly, and the times inversely. Let the times be expounded by T and *t*, and the velocities by and; and the decrement of the velocity produced in the time *t* will be expounded by. This decrement arises from the resistance which retards the body, and from the gravity which accelerates it. Gravity, in a falling body, which in its fall describes the space NI, produces a velocity with which it would be able to describe twice that space in the same time, as

Galileo has demonstrated; that is, the velocity: but if the body describes the arc HI, it augments that arc only by the length HI - HN or; and therefore generates only the velocity. Let this velocity be added to the beforementioned decrement, and we shall have the decrement of the velocity arising from the resistance alone, that is,. Therefore since, in the same time, the action of gravity generates, in a falling body, the velocity, the resistance will be to the gravity as or as to 2NI.



Now for the abscissas CB, CD, CE, put -*o, o, 2o*. For the ordinate CH put P; and for MI put any series Q*o* + R*o*² + S*o*³ +, &c. And all the terms of the series after the first, that is, R*o*² + S*o*³ +, &c., will be NI; and the ordinates DI, EK, and BG will be P - Q*o* - R*o*² - S*o*³ -, &c., P - 2Q*o* - 4R*o*² - 8S*o*³ -, &c., and P + Q*o* - R*o*² + S*o*³ -, &c., respectively. And by squaring the differences of the ordinates BG - CH and CH - DI, and to the squares thence produced adding the squares of BC and CD themselves, you will have *oo* + QQ*oo* - 2QR*o*³ +, &c., and *oo* + QQ*oo* + 2QR*o*³ +, &c., the squares of the arcs GH, HI; whose roots, and are the arcs GH and HI. Moreover, if from the ordinate CH there be subducted half the sum of the ordinates BG and DI, and from the ordinate DI there be subducted half the sum of the ordinates CH and EK, there will remain R*oo* and R*oo* + 3S*o*³, the versed sines of the arcs GI and HK. And these are proportional to the lineolae LH and NI, and therefore in the duplicate ratio of the infinitely small times T and *t*: and thence the ratio is or; and, by substituting the values of, GH, HI, MI and NI just found, becomes. And since 2NI is 2R*oo*, the resistance will be now to the gravity as, that is, as to 4RR.

And the velocity will be such, that a body going off therewith from any place H, in the direction of the tangent HN, would describe, in vacuo, a parabola, whose diameter is HC, and its latus rectum or.

And the resistance is as the density of the medium and the square of the velocity conjunctly; and therefore the density of the medium is as the resistance directly, and the square of the velocity inversely; that is, as directly and inversely; that is, as. Q.E.I.

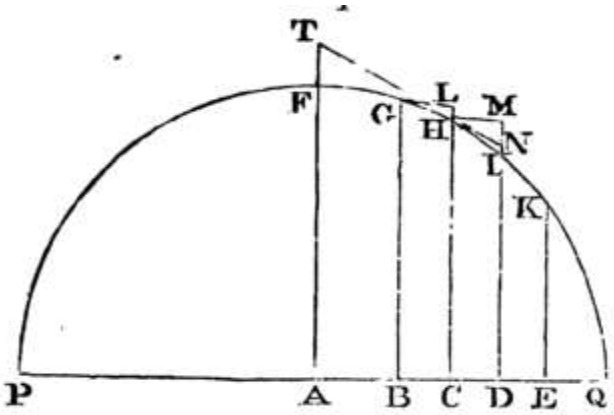
Cor. 1. If the tangent HN be produced both ways, so as to meet any ordinate AF in T will be equal to; and therefore in what has gone before may be put for. By this means the resistance will be to the gravity as 3S HT to 4RR AC; the velocity will be as, and the density of the medium will be as.

Cor. 2. And hence, if the curve line PFHQ be defined by the relation between the base or abscissa AC and the ordinate CH, as is usual, and the value of the ordinate be resolved into a converging series, the Problem will be expeditiously solved by the first terms of the series; as in the following examples.

Example 1. Let the line PFHQ be a semi-circle described upon the diameter PQ, to find the density of the medium that shall make a projectile move in that line.

Bisect the diameter PQ in A; and call AQ, *n*; AC, *a*; CH, *e*; and CD, *o*; then DI^2 or $AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo$, or $ee - 2ao - oo$; and the root being extracted by our method, will give, &c. Here put *nn* for $ee + aa$, and DI will become, &c

Such series I distinguish into successive terms after this manner: I call that the first term in which the infinitely small quantity *o* is not found; the second, in which that quantity is of one dimension only; the third, in which it arises to two dimensions; the fourth, in which it is of three; and so *ad infinitum*. And the first term, which here is *e*, will always denote the length of the ordinate CH, standing at the beginning of the indefinite quantity *o*. The second term, which here is, will denote the difference between CH and DN; that is, the lineola MN which is cut off by completing the parallelogram HCDM; and therefore always determines the position of the tangent HN; as, in this case, by taking MN to HM as to *o*, or *a* to *e*. The third term, which here is, will represent the lineola IN, which lies between the tangent and the curve; and therefore determines the angle of contact IHN, or the curvature which the curve line



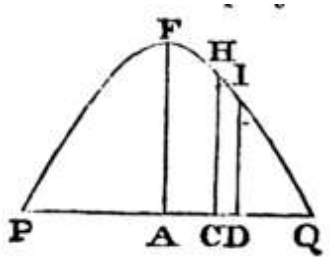
has in H. If that lineola IN is of a finite magnitude, it will be expressed by the third term, together with those that follow *in infinitum*. But if that lineola be diminished *in infinitum*, the terms following become in finitely less than the third term, and therefore may be neglected. The fourth term determines the variation of the curvature; the fifth, the variation of the variation; and so on. Whence, by the way, appears no contemptible use of these series in the solution of problems that depend upon tangents, and the curvature of curves.

Now compare the series &c., with the series P - Q*o* - R*oo* - S*o*³ - &c., and for P, Q, R and S, put *e*, , and, and for put or: and the density of the medium will come out as; that is (because *n* is given), as or, that is, as that length of the tangent HT, which is terminated at the semi-diameter AF standing perpendicularly on PQ: and the resistance will be to the gravity as 3*a* to 2*n*, that is, as 3AC to the diameter PQ of the circle; and the velocity will be as. Therefore if the body goes from the place F, with a due velocity, in the direction of a line parallel to PQ, and the density of the medium in each of the places H is as the length of the tangent HT, and the resistance also in any place H is to the force of gravity as 3AC to PQ, that body will describe the quadrant FHQ of a circle. Q.E.I.

But if the same body should go from the place P, in the direction of a line perpendicular to PQ, and should begin to move in an arc of the semi circle PFQ, we must take AC or *a* on the contrary side of the centre A; and therefore its sign must be changed, and we must put -*a* for +*a*. Then the density of the medium would come out as -. But nature does not admit of a negative density, that is, a density which accelerates the motion of bodies; and therefore it cannot naturally come to pass that a body by ascending from P should describe the quadrant PF of a circle. To produce such an

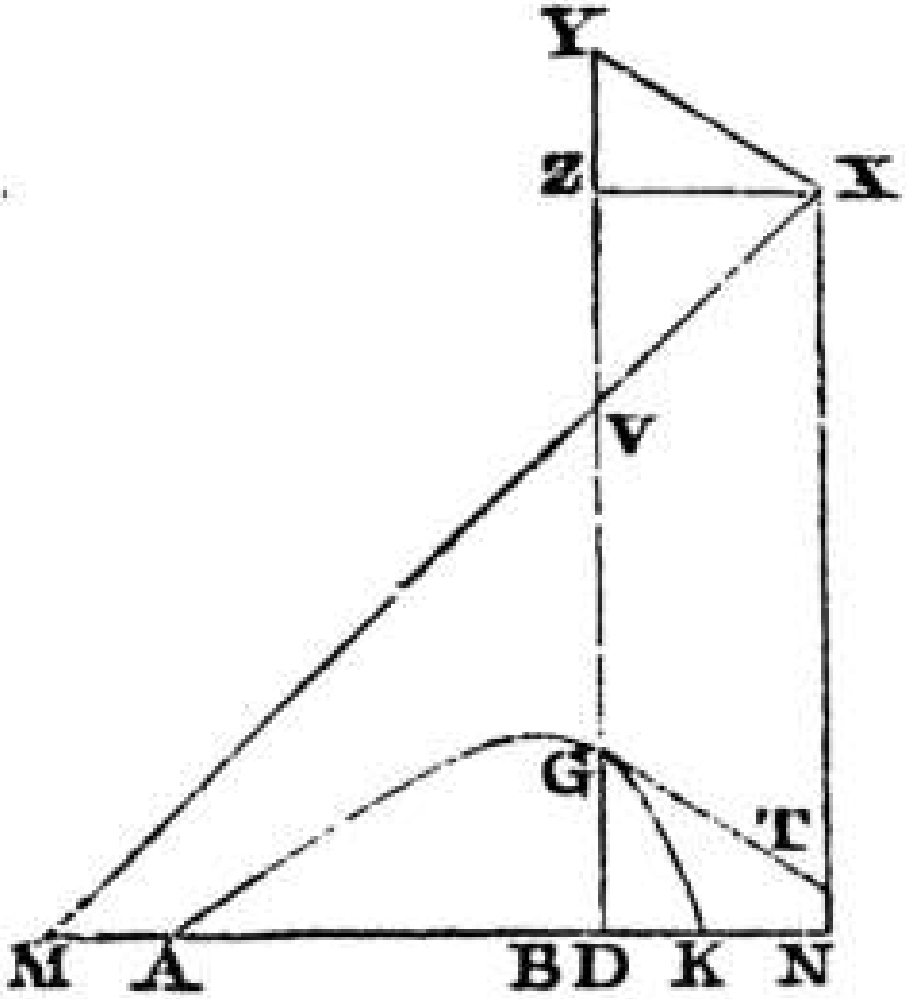
effect, a body ought to be accelerated by an impelling medium, and not impeded by a resisting one.

Example 2. Let the line PFQ be a parabola, having its axis AF perpendicular to the horizon PQ, to find the density of the medium, which will make a projectile move in that line.



From the nature of the parabola, the rectangle PDQ is equal to the rectangle under the ordinate DI and some given right line; that is, if that right line be called *b*; PC, *a*; PQ, *c*; CH, *e*; and CD, *o*; the rectangle $a + o$ into $c - a - o$ or $ac - aa - 2ao + co - oo$, is equal to the rectangle *b* into DI, and therefore DI is equal to. Now the second term of this series is to be put for Q*o*, and the third term for R*oo*. But since there are no more terms, the coefficient S of the fourth term will vanish; and therefore the quantity, to which the density of the medium is proportional, will be nothing. Therefore, where the medium is of no density, the projectile will move in a parabola; as *Galileo* hath heretofore demonstrated. Q.E.I.

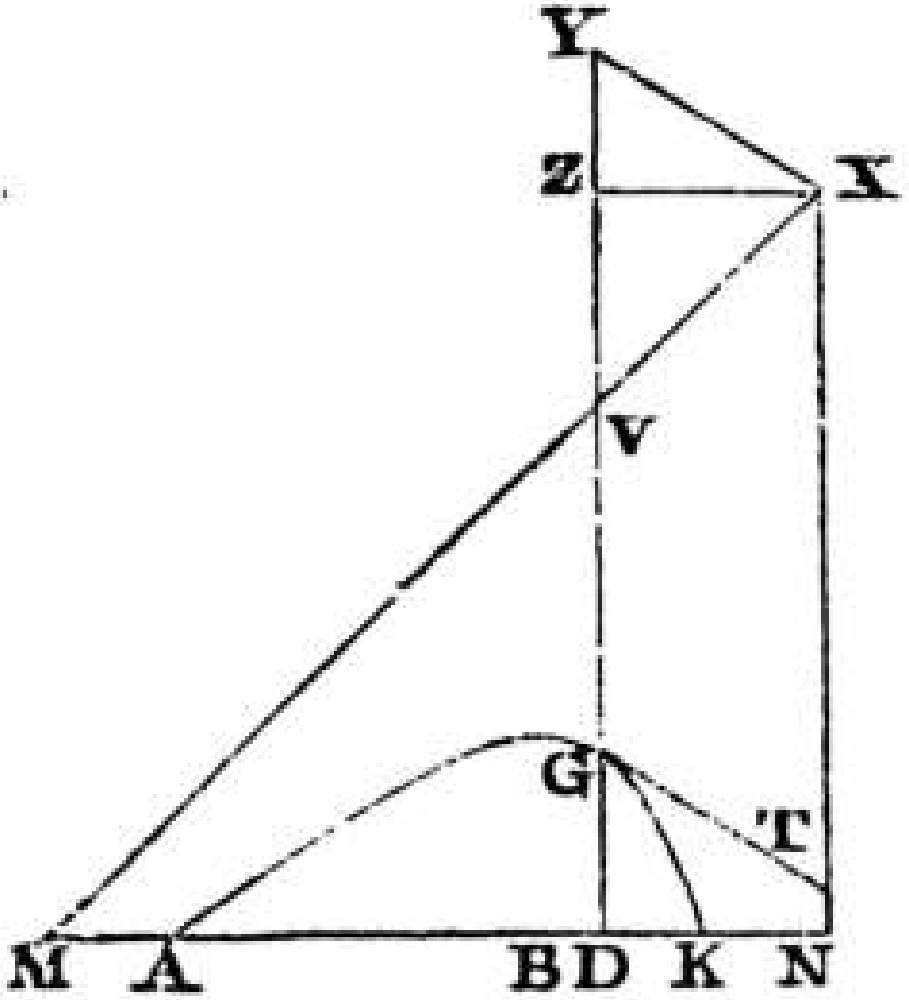
Example 3. Let the line AGK be an hyperbola, having its asymptote NX perpendicular to the horizontal plane AK, to find the density of the medium that will make a projectile move in that line.



Let MX be the other asymptote, meeting the ordinate DG produced in V; and from the nature of the hyperbola, the rectangle of XV into VG will be given. There is also given the ratio of DN to VX, and therefore the rectangle of DN into VG is given. Let that be *bb*: and, completing the parallelogram DNXZ, let BN be called *a*; BD, *o*; NX, *c*; and let the given ratio of VZ to ZX or DN be. Then DN will be equal to *a* - *o*, VG equal to, VZ equal to, and GD or NX - VZ - VG equal to. Let the term be resolved into the converging series, &c., and GD will become equal to, &c. The second term of this series is to be used for Q*o*; the third, with its sign changed for Ro^2; and the fourth, with its sign changed also for So^3, and their coefficients, and are to be put for Q, R, and S in the former rule. Which being done, the density of the medium will come out as or, that is, if in VZ you take VY equal to VG, as. For *aa* and are the squares of XZ and ZY. But the ratio of

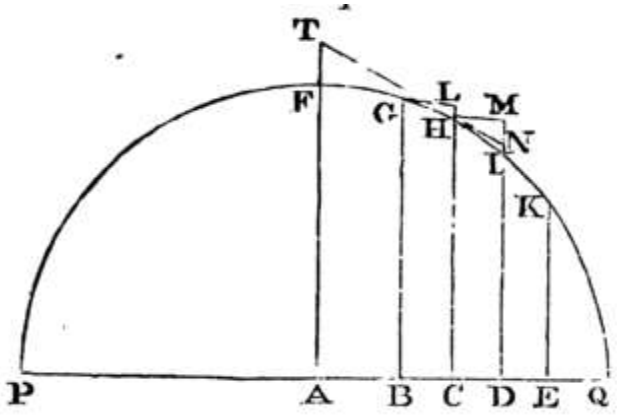
the resistance to gravity is found to be that of 3XY to 2YG; and the velocity is that with which the body would describe a parabola, whose vertex is G, diameter DG, latus rectum. Suppose, therefore, that the densities of the medium in each of the places G are reciprocally as the distances XY, and that the resistance in any place G is to the gravity as 3XY to 2YG; and a body let go from the place A, with a due velocity, will describe that hyperbola AGK. Q.E.I.

Example 4. Suppose, indefinitely, the line AGK to be an hyperbola described with the centre X, and the asymptotes MX, NX, so that, having constructed the rectangle XZDN, whose side ZD cuts the hyperbola in G and its asymptote in V, VG may be reciprocally as any power DN^n of the line ZX or DN, whose index is the number *n*: to find the density of the medium in which a projected body will describe this curve.



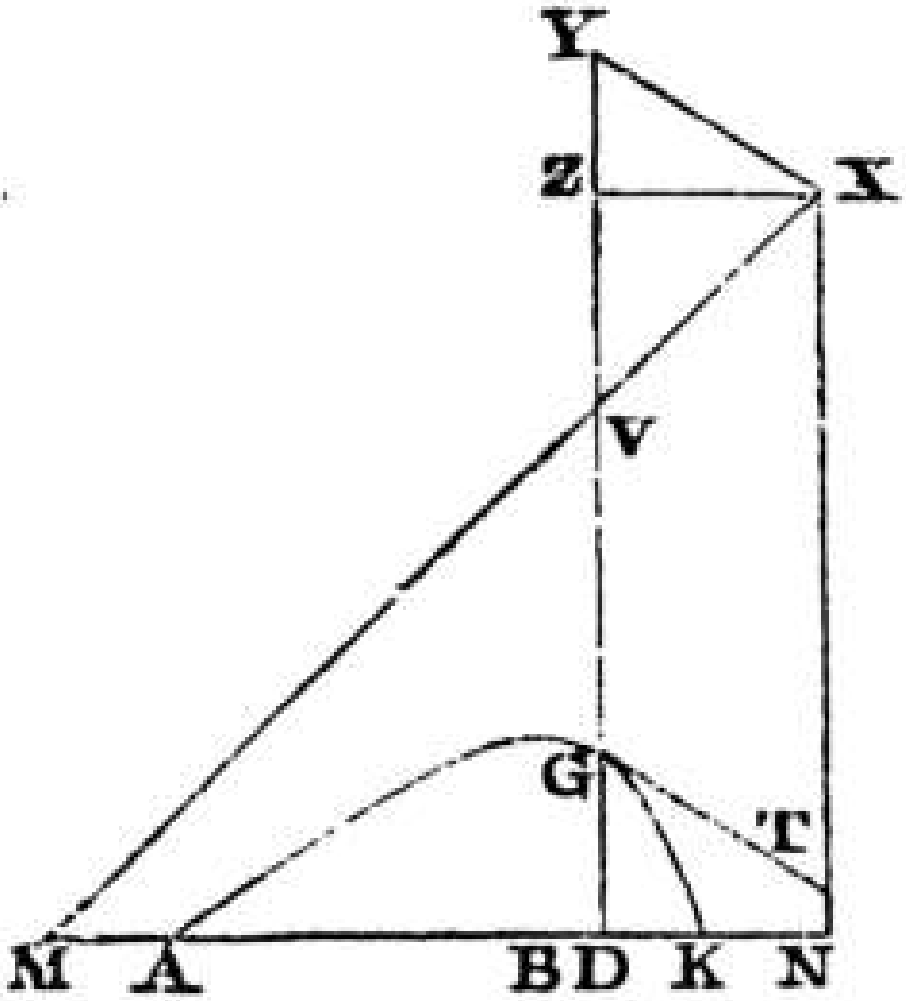
For BN, BD, NX, put A, O, C, respectively, and let VZ be to XZ or DN as *d* to *e*, and VG be equal to; then DN will be equal to A - O, , , and GD or NX - VZ - VG equal to. Let the term be resolved into an infinite series,&c.,and GD will be equal to, &c. The second term of this series is to be used for Q*o*, the third for R*oo*, the fourth for So³. And thence the density of the medium, in any place G, will be, and therefore if in VZ you take VY equal to *n* VG, that density is reciprocally as XY. For A² and are the squares of XZ and ZY. But the resistance in the same place G is to the force of gravity as 3S to 4RR, that is, as XY to VG. And the velocity there is the same wherewith the projected body would move in a parabola, whose vertex is G, diameter GD, and latus rectum or. Q.E.I.

SCHOLIUM.



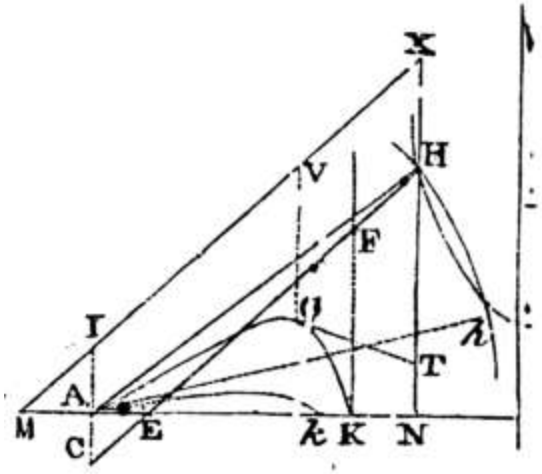
In the same manner that the density of the medium comes out to be as, in Cor. 1, if the resistance is put as any power V^n of the velocity V, the density of the medium will come out to be as

And therefore if a curve can be found, such that the ratio of to to, or of to may be given; the body, in an uniform medium, whose resistance is as the power V^n of the velocity V, will move in this curve. But let us return to more simple curves.



Because there can be no motion in a parabola except in a nonresisting medium, but in the hyperbolas here described it is produced by a perpetual resistance; it is evident that the line which a projectile describes in an uniformly resisting medium approaches nearer to these hyperbolas than to a parabola. That line is certainly of the hyperbolic kind, but about the vertex it is more distant from the asymptotes, and in the parts remote from the vertex draws nearer to them than these hyperbolas here described. The difference, however, is not so great between the one and the other but that these latter may be commodiously enough used in practice instead of the former. And perhaps these may prove more useful than an hyperbola that is more accurate, and at the same time more compounded. They may be made use of, then, in this manner.

Complete the parallelogram XYGT, and the right line GT will touch the hyperbola in G, and therefore the density of the medium in G is reciprocally as the tangent GT, and the velocity there as; and the resistance is to the force of gravity as GT to



Therefore if a body projected from the place A, in the direction of the right line AH, describes the hyperbola AGK and AH produced meets the asymptote NX in H, and AI drawn parallel to it meets the other asymptote MX in I; the density of the medium in A will be reciprocally as AH, and the velocity of the body as, and the resistance there to the force of gravity as AH to. Hence the following rules are deduced.

Rule 1. If the density of the medium at A, and the velocity with which the body is projected remain the same, and the angle NAH be changed, the lengths AH, AI, HX will remain. Therefore if those lengths, in any one case, are found, the hyperbola may afterwards be easily determined from any given angle NAH.

Rule 2. If the angle NAH, and the density of the medium at A, re main the same, and the velocity with which the body is projected be changed, the length AH will continue the same; and AI will be changed in a duplicate ratio of the velocity reciprocally.

Rule 3. If the angle NAH, the velocity of the body at A, and the accelerative gravity remain the same, and the proportion of the resistance at A to the motive gravity be augmented in any ratio; the proportion of AH to AI will be augmented in the same ratio, the latus rectum of the abovementioned parabola remaining the same, and also the length proportional to it; and therefore AH will be diminished in the same ratio,

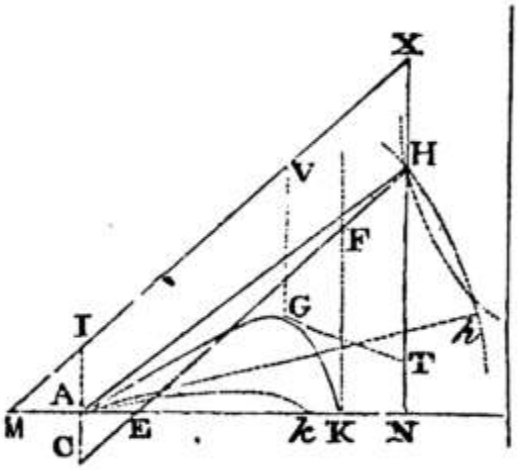
and AI will be diminished in the duplicate of that ratio. But the proportion of the resistance to the weight is augmented, when either the specific gravity is made less, the magnitude remaining equal, or when the density of the medium is made greater, or when, by diminishing the magnitude, the resistance becomes diminished in a less ratio than the weight.

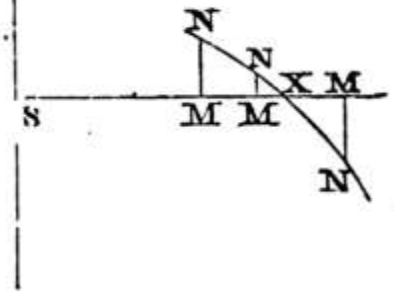
Rule 4. Because the density of the medium is greater near the vertex of the hyperbola than it is in the place A, that a mean density may be preserved, the ratio of the least of the tangents GT to the tangent AH ought to be found, and the density in A augmented in a ratio a little greater than that of half the sum of those tangents to the least of the tangents GT.

Rule 5. If the lengths AH, AI are given, and the figure AGK is to be described, produce HN to X, so that HX may be to AI as $n + 1$ to 1; and with the centre X, and the asymptotes MX, NX, describe an hyperbola through the point A, such that AI may be to any of the lines VG as XV^n to XI^n.

Rule 6. By how much the greater the number n is, so much the more accurate are these hyperbolas in the ascent of the body from A, and less accurate in its descent to K; and the contrary. The conic hyperbola keeps a mean ratio between these, and is more simple than the rest. Therefore if the hyperbola be of this kind, and you are to find the point K, where the projected body falls upon any right line AN passing through the point A, let AN produced meet the asymptotes MX, NX in M and N, and take NK equal to AM.

Rule 7. And hence appears an expeditious method of determining this hyperbola from the phenomena. Let two similar and equal bodies be projected with the same velocity, in different angles HAK, *h*A*k*, and let them fall upon the plane of the horizon in K and *k*; and note the proportion of AK to A*k*. Let it be as *d* to *e*. Then erecting a perpendicular AI of any length, assume any how the length AH or A*h*, and thence graphically, or by scale and compass, collect the lengths AK, A*k* (by Rule 6). If the ratio of AK to A*k* be the same with that of *d* to *e*, the length of AH was

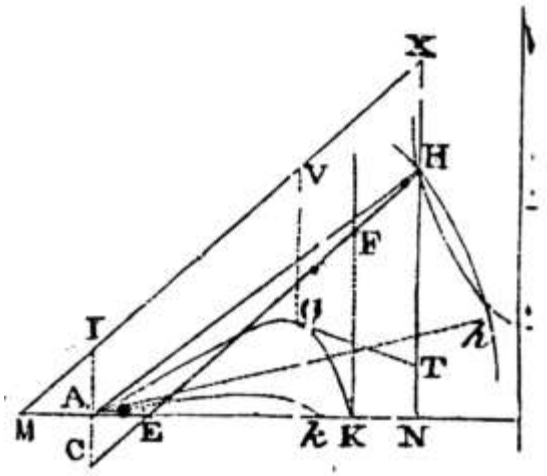




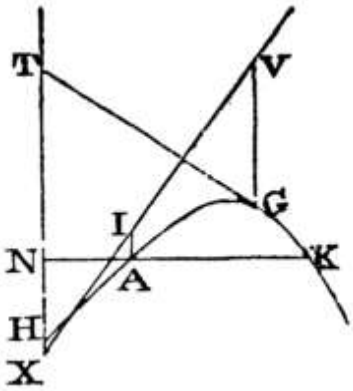
rightly assumed. If not, take on the indefinite right line SM, the length SM equal to the assumed AH; and erect a perpendicular MN equal to the difference of the ratios drawn into any given right line. By the like method, from several assumed lengths AH, you may find several points N; and draw through them all a regular curve NNXN, cutting the right line SMMM in X. Lastly, assume AH equal to the abscissa SX, and thence find again the length AK; and the lengths, which are to the assumed length AI, and this last AH, as the length AK known by experiment, to the length AK last found, will be the true lengths AI and AH, which were to be found. But these being given, there will be given also the resisting force of the medium in the place A, it being to the force of gravity as AH to $^{4}/_{3}$AI. Let the density of the medium be increased by Rule 4, and if the resisting force just found be increased in the same ratio, it will become still more accurate.

Rule 8. The lengths AH, HX being found; let there be now required the position of the line AH, according to which a projectile thrown with that given velocity shall fall upon any point K. At the joints A and K, erect the lines AC, KF perpendicular to the horizon; whereof let AC be drawn downwards, and be equal to AI or ½HX. With the asymptotes AK, KF, describe an hyperbola, whose conjugate shall pass through the point C; and from the centre A, with the interval AH, describe a circle cutting that hyperbola in the point H; then the projectile thrown in the direction of the right line AH will fall upon the point K. Q.E.I. For the point H, because of the given length AH, must be somewhere in the circumference of the described circle. Draw CH meeting AK and KF in E and F; and because CH, MX are parallel, and AC, AI equal, AE will be equal to AM, and

therefore also equal to KN. But CE is to AE as FH to KN, and therefore CE and FH are equal. Therefore the point H falls upon the hyperbolic curve described with the asymptotes AK, KF whose conjugate passes through the



point C; and is therefore found in the common intersection of this hyperbolic curve and the circumference of the described circle. Q.E.D. It is to be observed that this operation is the same, whether the right line AKN be parallel to the horizon, or inclined thereto in any angle; and that from two intersections H, *h*, there arise two angles NAH, NA*h*; and that in mechanical practice it is sufficient once to describe a circle, then to apply a ruler CH, of an indeterminate length, so to the point C, that its part FH, intercepted between the circle and the right line FK, may be equal to its part CE placed between the point C and the right line AK



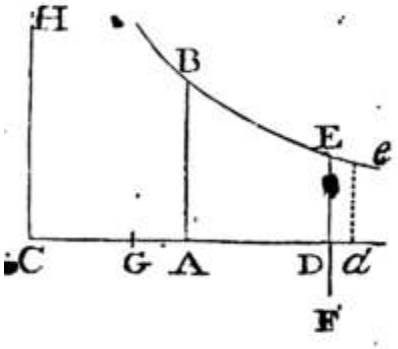
What has been said of hyperbolas may be easily applied to parabolas. For if a parabola be represented by XAGK, touched by a right line XV in the vertex X, and the ordinates IA, VG be as any powers XI^n, XV^n, of the abscissas XI, XV; draw XT, GT, AH, whereof let XT be parallel to VG, and let GT, AH touch the parabola in G and A: and a body projected from any

place A, in the direction of the right line AH, with a due velocity, will describe this parabola, if the density of the medium in each of the places G be reciprocally as the tangent GT. In that case the velocity in G will be the same as would cause a body, moving in a nonresisting space, to describe a conic parabola, having G for its vertex, VG produced downwards for its diameter, and for its latus rectum. And the resisting force in G will be to the force of gravity as GT to. Therefore if NAK represent an horizontal line, and both the density of the medium at A, and the velocity with which the body is projected, remaining the same, the angle NAH be any how altered, the lengths AH, AI, HX will remain; and thence will be given the vertex X of the parabola, and the position of the right line XI; and by taking VG to IA as XV^n to XI^n, there will be given all the points G of the parabola, through which the projectile will pass.

Section III: Of the motions of bodies which are resisted partly in the ratio of the velocities, and partly in the duplicate of the same ratio

PROPOSITION XI. THEOREM VIII.

If a body be resisted partly in the ratio and partly in the duplicate ratio of its velocity, and moves in a similar medium by its innate force only; and the times be taken in arithmetical progression; then quantities reciprocally proportional to the velocities, increased by a certain given quantity, will be in geometrical progression.



With the centre C, and the rectangular asymptotes CAD*d* and CH, describe an hyperbola BE*e*, and let AB, DE, *de,* be parallel to the asymptote CH. In the asymptote CD let A, G be given points; and if the time be expounded by the hyperbolic area ABED uniformly increasing, I say, that the velocity may be expressed by the length DF, whose reciprocal GD, together with the given line CG, compose the length CD increasing in a geometrical progression.

For let the areola DE*ed* be the least given increment of the time, and D*d* will be reciprocally as DE, and therefore directly as CD. Therefore the decrement of, which (by Lem. II. Book II) is, will be also as or, that is, as. Therefore the time ABED uniformly increasing by the addition of the given particles ED*de*, it follows that decreases in the same ratio with the velocity.

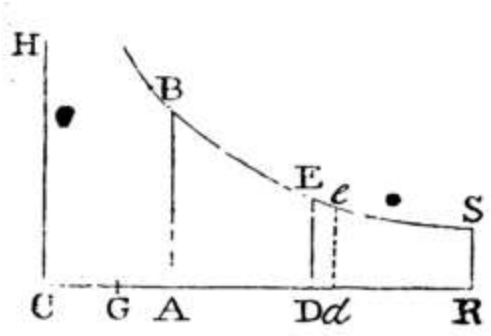
For the decrement of the velocity is as the resistance, that is (by the supposition), as the sum of two quantities, whereof one is as the velocity, and the other as the square of the velocity; and the decrement of is as the sum of the quantities and, whereof the first is itself, and the last is as: therefore is as the velocity, the decrements of both being analogous. And if the quantity GD reciprocally proportional to, be augmented by the given quantity CG; the sum CD, the time ABED uniformly increasing, will increase in a geometrical progression. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore, if, having the points A and G given, the time be expounded by the hyperbolic area ABED, the velocity may be expounded by the reciprocal of GD.

Cor. 2. And by taking GA to GD as the reciprocal of the velocity at the beginning to the reciprocal of the velocity at the end of any time ABED, the point G will be found. And that point being found the velocity may be found from any other time given.

PROPOSITION XII. THEOREM IX.

The same things being supposed, I say, that if the spaces described are taken in arithmetical progression, the velocities augmented by a certain given quantity will be in geometrical progression.



In the asymptote CD let there be given the point R, and, erecting the perpendicular RS meeting the hyperbola in S, let the space described be expounded by the hyperbolic area RSED; and the velocity will be as the length GD, which, together with the given line CG, composes a length CD

decreasing in a geometrical progression, while the space RSED increases in an arithmetical progression.

For, because the increment ED*de* of the space is given, the lineola D*d*, which is the decrement of GD, will be reciprocally as ED, and therefore directly as CD; that is, as the sum of the same GD and the given length CG. But the decrement of the velocity, in a time reciprocally proportional thereto, in which the given particle of space D*de*E is described, is as the resistance and the time conjunctly, that is, directly as the sum of two quantities, whereof one is as the velocity, the other as the square of the velocity, and inversely as the velocity; and therefore directly as the sum of two quantities, one of which is given, the other is as the velocity. Therefore the decrement both of the velocity and the line GD is as a given quantity and a decreasing quantity conjunctly; and, because the decrements are analogous, the decreasing quantities will always be analogous; viz., the velocity, and the line GD. Q.E.D.

Cor. 1. If the velocity be expounded by the length GD, the space described will be as the hyperbolic area DESR.

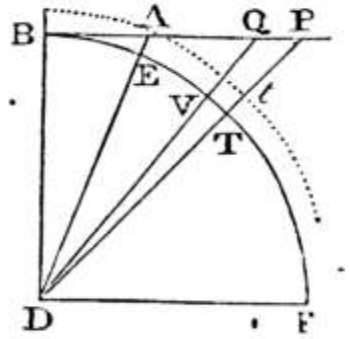
Cor. 2. And if the point R be assumed any how, the point G will be found, by taking GR to GD as the velocity at the beginning to the velocity after any space RSED is described. The point G being given, the space is given from the given velocity: and the contrary.

Cor. 3. Whence since (by Prop. XI) the velocity is given from the given time, and (by this Prop.) the space is given from the given velocity; the space will be given from the given time: and the contrary.

PROPOSITION XIII. THEOREM X.

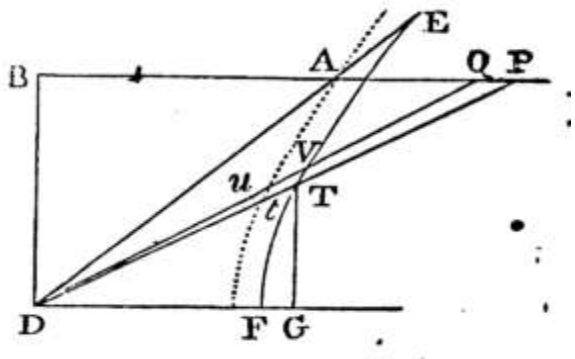
Supposing that a body attracted downwards by an uniform gravity ascends or descends in a right line; and that the same is resisted partly in the ratio of its velocity, and partly in the duplicate ratio thereof: I say, that, if right lines parallel to the diameters of a circle and an hyperbola, be drawn through the ends of the conjugate diameters, and the velocities be as some segments of those parallels drawn from a given point, the times will be as

the sectors of the areas cut off by right lines drawn from the centre to the ends of the segments; and the contrary.



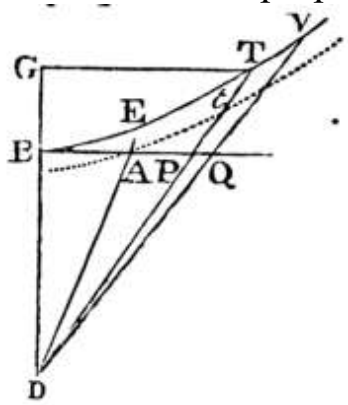
Case 1. Suppose first that the body is ascending, and from the centre D, with any semi-diameter DB, describe a quadrant BETF of a circle, and through the end B of the semi-diameter DB draw the indefinite line BAP, parallel to the semi-diameter DF. In that line let there be given the point A, and take the segment AP proportional to the velocity. And since one part of the resistance is as the velocity, and another part as the square of the velocity, let the whole resistance be as $AP^2 + 2BAP$. Join DA, DP, cutting the circle in E and T, and let the gravity be expounded by DA^2, so that the gravity shall be to the resistance in P as DA^2 to $AP^2 + 2BAP$; and the time of the whole ascent will be as the sector EDT of the circle.

For draw DVQ, cutting off the moment PQ of the velocity AP, and the moment DTV of the sector DET answering to a given moment of time; and that decrement PQ of the velocity will be as the sum of the forces of gravity DA^2 and of resistance $AP^2 + 2BAP$, that is (by Prop. XII Book II, Elem.), as DP^2. Then the area DPQ, which is proportional to PQ, is as DP^2, and the area DTV, which is to the area DPQ as DT^2 to DP^2, is as the given quantity DT^2. Therefore the area EDT decreases uniformly according to the rate of the future time, by subduction of given particles DTV, and is therefore proportional to the time of the whole ascent. Q.E.D.



Case 2. If the velocity in the ascent of the body be expounded by the length AP as before, and the resistance be made as $AP^2 + 2BAP$, and if the force of gravity be less than can be expressed by DA^2; take BD of such a length, that $AB^2 - BD^2$ maybe proportional to the gravity, and let DF be perpendicular and equal to DB, and through the vertex F describe the hyperbola FTVE, whose conjugate semi-diameters are DB and DF, and which cuts DA in E, and DP, DQ in T and V; and the time of the whole ascent will be as the hyperbolic sector TDE.

For the decrement PQ of the velocity, produced in a given particle of time, is as the sum of the resistance $AP^2 + 2BAP$ and of the gravity $AB^2 - BD^2$, that is, as $BP^2 - BD^2$. But the area DTV is to the area DPQ as DT^2 to DP^2; and, therefore, if GT be drawn perpendicular to DF, as GT^2 or $GD^2 - DF^2$ to BD^2, and as GD^2 to BP^2, and, by division, as DF^2 to $BP^2 - BD^2$. Therefore since the area DPQ is as PQ, that is, as $BP^2 - BD^2$, the area DTV will be as the given quantity DF^2. Therefore the area EDT decreases uniformly in each of the equal particles of time, by the subduction of so many given particles DTV, and therefore is proportional to the time. Q.E.D.



Case 3. Let AP be the velocity in the descent of the body, and $AP^2 + 2BAP$ the force of resistance, and $BD^2 - AB^2$ the force of gravity, the angle

DBA being a rirht one. And if with the centre D, and the principal vertex B, there be described a rectangular hyperbola BETV cutting DA, DP, and DQ produced in E, T, and V; the sector DET of this hyperbola will be as the whole time of descent.

For the increment PQ of the velocity, and the area DPQ proportional to it, is as the excess of the gravity above the resistance, that is, as $BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2$ or $BD^2 - BP^2$. And the area DTV is to the area DPQ as DT^2 to DP^2; and therefore as GT^2 or $GD^2 - BD^2$ to BP^2, and as GD^2 to BD^2, and, by division, as BD^2 to $BD^2 - BP^2$. Therefore since the area DPQ is as $BD^2 - BP^2$, the area DTV will be as the given quantity BD^2. Therefore the area EDT increases uniformly in the several equal particles of time by the addition of as many given particles DTV, and therefore is proportional to the time of the descent. Q.E.D.

Cor. If with the centre D and the semi-diameter DA there be drawn through the vertex A an arc A*t* similar to the arc ET, and similarly subtending the angle ADT, the velocity AP will be to the velocity which the body in the time EDT, in a non-resisting space, can lose in its ascent, or acquire in its descent, as the area of the triangle DAP to the area of the sector DA*t*; and therefore is given from the time given. For the velocity in a non-resisting medium is proportional to the time, and therefore to this sector; in a resisting medium, it is as the triangle; and in both mediums, where it is least, it approaches to the ratio of equality, as the sector and triangle do.

SCHOLIUM

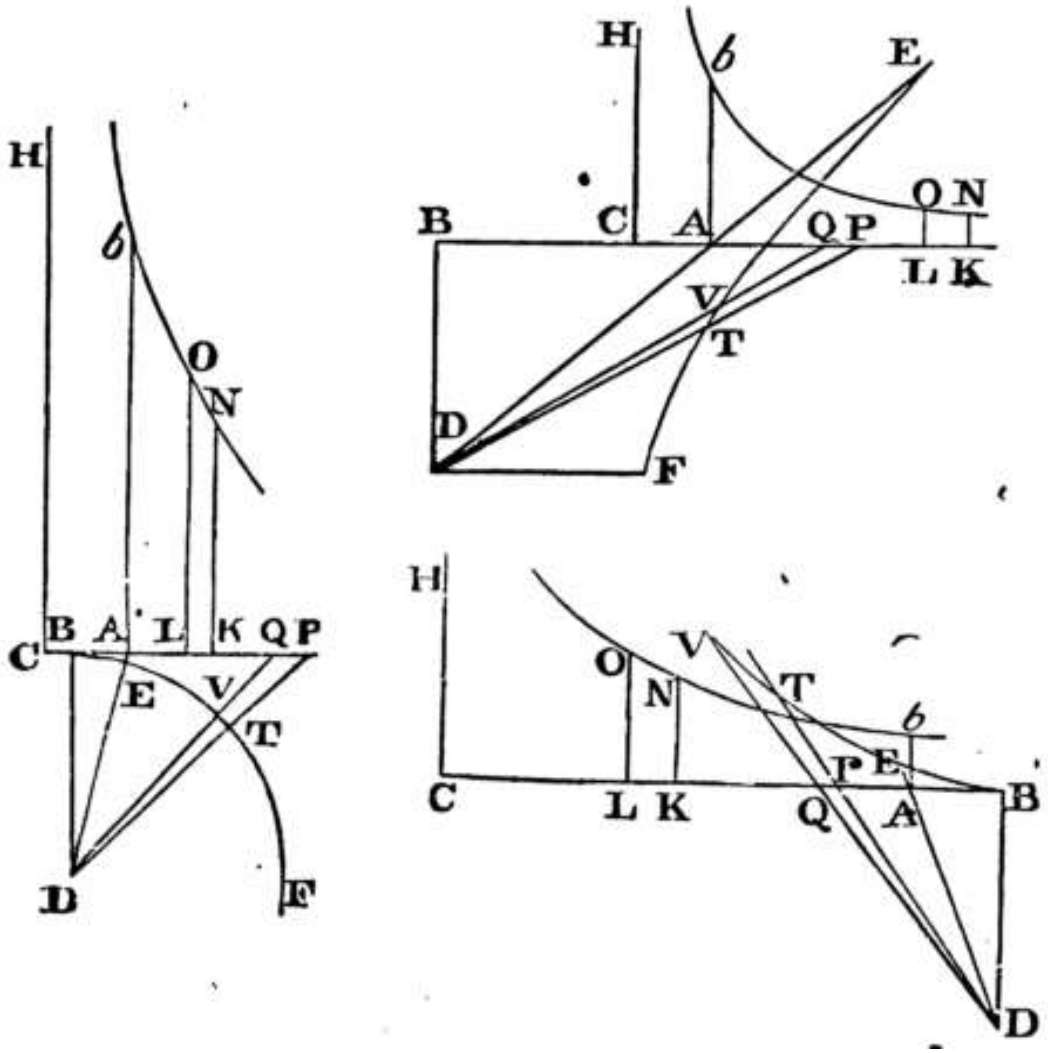
One may demonstrate also that case in the ascent of the body, where the force of gravity is less than can be expressed by DA^2 or $AB^2 + BD^2$, and greater than can be expressed by $AB^2 - DB^2$, and must be expressed by AB^2. But I hasten to other things.

PROPOSITION XIV. THEOREM XI.

The same things being supposed, I say, that the space described in the ascent or descent is as the difference of the area by which the time is expressed, and of some other area which is augmented or diminished in an

arithmetical progression; if the forces compounded of the resistance and the gravity be taken, in a geometrical progression.

Take AC (in these three figures) proportional to the gravity, and AK to the resistance; but take them on the same side of the point A, if the



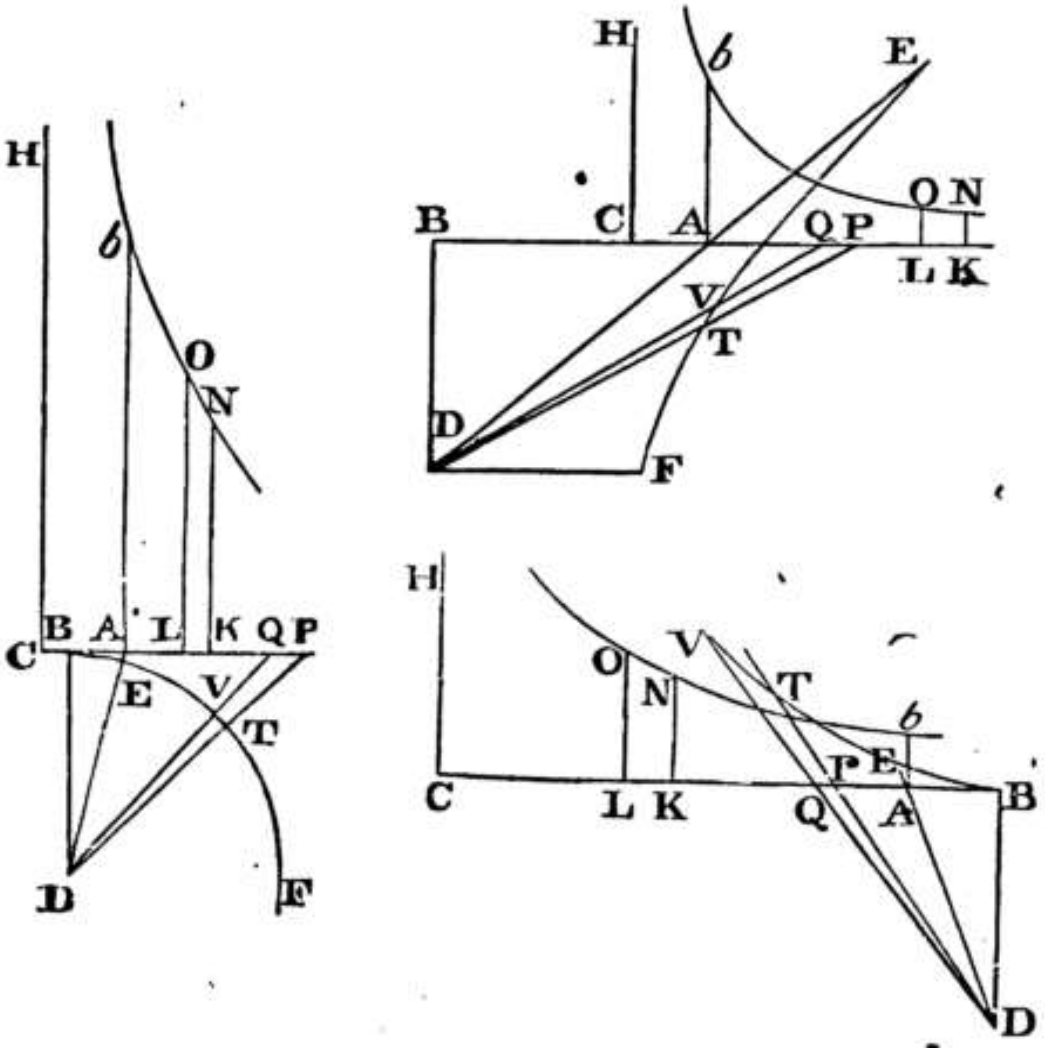
body is descending, otherwise on the contrary. Erect A*b*, which make to DB as DB² to 4BAC: and to the rectangular asymptotes CK, CH, describe the hyperbola *b*N; and, erecting KN perpendicular to CK, the area A*b*NK will be augmented or diminished in an arithmetical progression, while the forces CK are taken in a geometrical progression. I say, therefore, that the distance of the body from its greatest altitude is as the excess of the area A*b*NK above the area DET.

For since AK is as the resistance, that is, as AP² 2BAP; assume any given quantity Z, and put AK equal to; then (by Lem, II of this Book) the moment

KL of AK will be equal to or, and the moment KLON of the area A*b*NK will be equal to or.

Case 1. Now if the body ascends, and the gravity be as $AB^2 + BD^2$, BET being a circle, the line AC, which is proportional to the gravity, will be, and DP^2 or $AP^2 + 2BAP + AB^2 + BD^2$ will be AK Z + AC Z or CK Z; and therefore the area DTV will be to the area DPQ as DT^2 or DB^2 to CK Z.

Case 2. If the body ascends, and the gravity be as $AB^2 - BD^2$, the line AC will be, and DT^2 will be to DP^2 as DF^2 or DB^2 to $BP^2 - BD^2$ or $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, that is, to AK Z +



AC Z or CK Z. And therefore the area DTV will be to the area DPQ as DB^2 to CK Z.

Case 3. And by the same reasoning, if the body descends, and therefore the gravity is as $BD^2 - AB^2$, and the line AC becomes equal to; the area

DTV will be to the area DPQ, as DB^2 to CK Z: as above.

Since, therefore, these areas are always in this ratio, if for the area DTV, by which the moment of the time, always equal to itself, is expressed, there be put any determinate rectangle, as BD *m*, the area DPQ, that is, ½BD PQ, will be to BD *m* as CK Z to BD^2. And thence PQ BD^3 becomes equal to 2BD *m* CK Z, and the moment KLON of the area A*b*NK, found before, becomes. From the area DET subduct its moment DTV or BD *m*, and there will remain. Therefore the difference of the moments, that is, the moment of the difference of the areas, is equal to; and therefore (because of the given quantity) as the velocity AP; that is, as the moment of the space which the body describes in its ascent or descent. And therefore the difference of the areas, and that space, increasing or decreasing by proportional moments, and beginning together or vanishing together, are proportional. Q.E.D.

Cor. If the length, which arises by applying the area DET to the line BD, be called M; and another length V be taken in that ratio to the length M, which the line DA has to the line DE; the space which a body, in a resisting medium, describes in its whole ascent or descent, will be to the space which a body, in a non-resisting medium, falling from rest, can describe in the same time, as the difference of the aforesaid areas to; and therefore is given from the time given. For the space in a non-resisting medium is in a duplicate ratio of the time, or as V^2; and, because BD and AB are given, as. This area is equal to the area and the moment of M is *m*; and therefore the moment ot this area is. But this moment is to the moment of the difference of the aforesaid areas DET and A*b*NK, viz., to, as to ½BD AP, or as into DET to DAP; and, therefore, when the areas DET and DAP are least, in the ratio of equality. Therefore the area and the difference of the areas DET and A*b*NK, when all these areas are least, have equal moments; and are therefore equal. Therefore since the velocities, and therefore also the spaces in both mediums described together, in the beginning of the descent, or the end of the ascent, approach to equality, and therefore are then one to another as the area, and the difference of the areas DET and A*b*NK; and moreover since the space, in a non-resisting medium, is perpetually as, and the space, in a resisting medium, is perpetually as the difference of the areas DET and A*b*NK; it necessarily follows, that the spaces, in both mediums,

described in any equal times, are one to another as that area, and the difference of the areas DET and A*b*NK. Q.E.D.

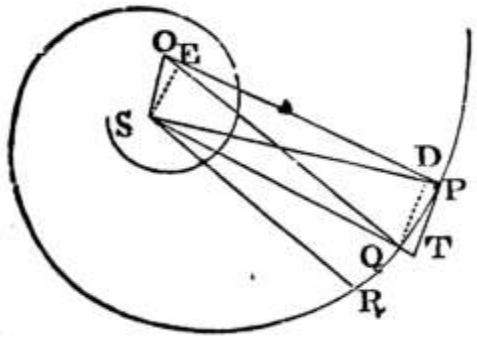
SCHOLIUM.

The resistance of spherical bodies in fluids arises partly from the tenacity, partly from the attrition, and partly from the density of the medium. And that part of the resistance which arises from the density of the fluid is, as I said, in a duplicate ratio of the velocity; the other part, which arises from the tenacity of the fluid, is uniform, or as the moment of the time; and, therefore, we might now proceed to the motion of bodies, which are resisted partly by an uniform force, or in the ratio of the moments of the time, and partly in the duplicate ratio of the velocity. But it is sufficient to have cleared the way to this speculation in Prop. VIII and IX foregoing, and their Corollaries. For in those Propositions, instead of the uniform resistance made to an ascending body arising from its gravity, one may substitute the uniform resistance which arises from the tenacity of the medium, when the body moves by its *vis insita* alone; and when the body ascends in a right line, add this uniform resistance to the force of gravity, and subduct it when the body descends in a right line. One might also go on to the motion of bodies which are resisted in part uniformly, in part in the ratio of the velocity, and in part in the duplicate ratio of the same velocity. And I have opened a way to this in Prop. XIII and XIV foregoing, in which the uniform resistance arising from the tenacity of the medium may be substituted for the force of gravity, or be compounded with it as before. But I hasten to other things.

Section IV: Of the circular motion of bodies in resisting mediums

LEMMA III.

Let PQR *be a spiral cutting all the radii* SP, SQ, SR*, &c., in equal angles. Draw the right line* PT *touching the spiral in any point* P*, and cutting the radius* SQ *in* T*; draw* PO, QO *perpendicular to the spiral, and meeting in* O*, and join* SO. *I say, that if the points* P *and* Q *approach and coincide, the angle* PSO *will become a right angle, and the ultimate ratio of the rectangle* TQ 2PS *to* PQ^2 *will be the ratio of equality.*

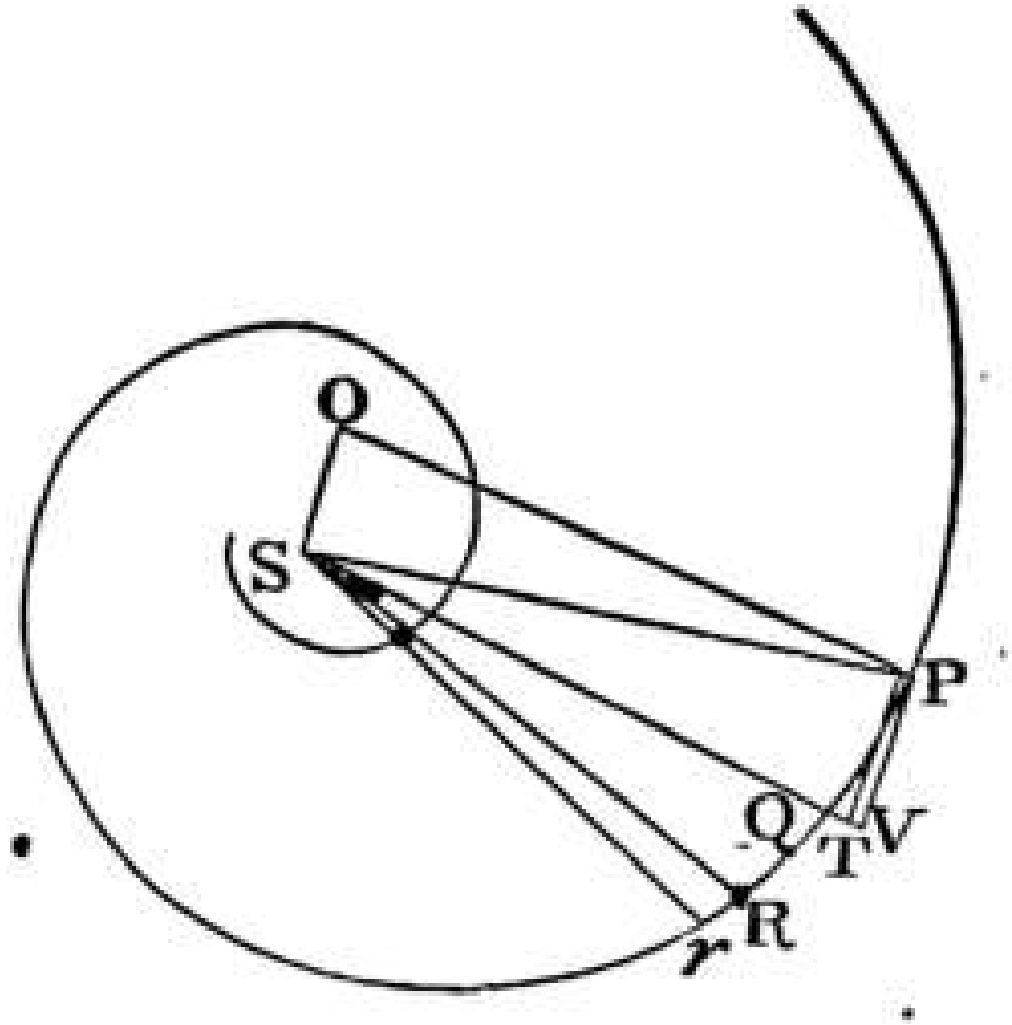


For from the right angles OPQ, OQR, subduct the equal angles SPQ, SQR, and there will remain the equal angles OPS, OQS. Therefore a circle which passes through the points OSP will pass also through the point Q. Let the points P and Q coincide, and this circle will touch the spiral in the place of coincidence PQ, and will therefore cut the right line OP perpendicularly. Therefore OP will become a diameter of this circle, and the angle OSP, being in a semi-circle, becomes a right one. Q.E.D.

Draw QD, SE perpendicular to OP, and the ultimate ratios of the lines will be as follows: TQ to PD as TS or PS to PE, or 2PO to 2PS; and PD to PQ as PQ to 2PO; and, *ex aequo perturbatè*, to TQ to PQ as PQ to 2PS. Whence PQ^2 becomes equal to TQ 2PS. Q.E.D.

PROPOSITION XV. THEOREM XII.

If the density of a medium in each place thereof be reciprocally as the distance of the places from an immovable centre, and the centripetal force be in the duplicate ratio of the density; I say, that a body may revolve in a spiral which cuts all the radii drawn from that centre in a given angle.



Suppose every thing to be as in the foregoing Lemma, and produce SQ to V so that SV may be equal to SP. In any time let a body, in a resisting medium, describe the least arc PQ, and in double the time the least arc PR; and the decrements of those arcs arising from the resistance, or their differences from the arcs which would be described in a non-resisting medium in the same times, will be to each other as the squares of the times in which they are generated; therefore the decrement of the arc PQ is the fourth part of the decrement of the arc PR. Whence also if the area QS*r* be taken equal to the area PSQ, the decrement of the arc PQ will be equal to

half the lineola R*r*; and therefore the force of resistance and the centripetal force are to each other as the lineola ½R*r* and TQ which they generate in the same time. Because the centripetal force with which the body is urged in P is reciprocally as SP^2, and (by Lem. X, Book I) the lineola TQ, which is generated by that force, is in a ratio compounded of the ratio of this force and the duplicate ratio of the time in which the arc PQ is described (for in this case I neglect the resistance, as being infinitely less than the centripetal force), it follows that TQ SP^2, that is (by the last Lemma), ½PQ^2 SP, will be in a duplicate ratio of the time, and therefore the time is as PQ; and the velocity of the body, with which the arc PQ is described in that time, as or, that is, in the subduplicate ratio of SP reciprocally. And, by a like reasoning, the velocity with which the arc QR is described, is in the subduplicate ratio of SQ reciprocally. Now those arcs PQ and QR are as the describing velocities to each other; that is, in the subduplicate ratio of SQ to SP, or as SQ to; and, because of the equal angles SPQ, SQ*r*, and the equal areas PSQ, QS*r*, the arc PQ is to the arc Q*r* as SQ to SP. Take the differences of the proportional consequents, and the arc PQ will be to the arc R*r* as SQ to SP -, or ½VQ. For the points P and Q coinciding, the ultimate ratio of SP - to ½VQ is the ratio of equality. Because the decrement of the arc PQ arising from the resistance, or its double R*r*, is as the resistance and the square of the time conjunctly, the resistance will be as. But PQ was to R*r* as SQ to ½VQ, and thence becomes as, or as. For the points P and Q coinciding, SP and SQ coincide also, and the angle PVQ becomes a right one; and, because of the similar triangles PVQ, PSO, PQ becomes to ½VQ as OP to ½OS. Therefore is as the resistance, that is, in the ratio of the density of the medium in P and the duplicate ratio of the velocity conjunctly. Subduct the duplicate ratio of the velocity, namely, the ratio, and there will remain the density of the medium in P, as. Let the spiral be given, and, because of the given ratio of OS to OP, the density of the medium in P will be as. Therefore in a medium whose density is reciprocally as SP the distance from the centre, a body will revolve in this spiral. Q.E.D.

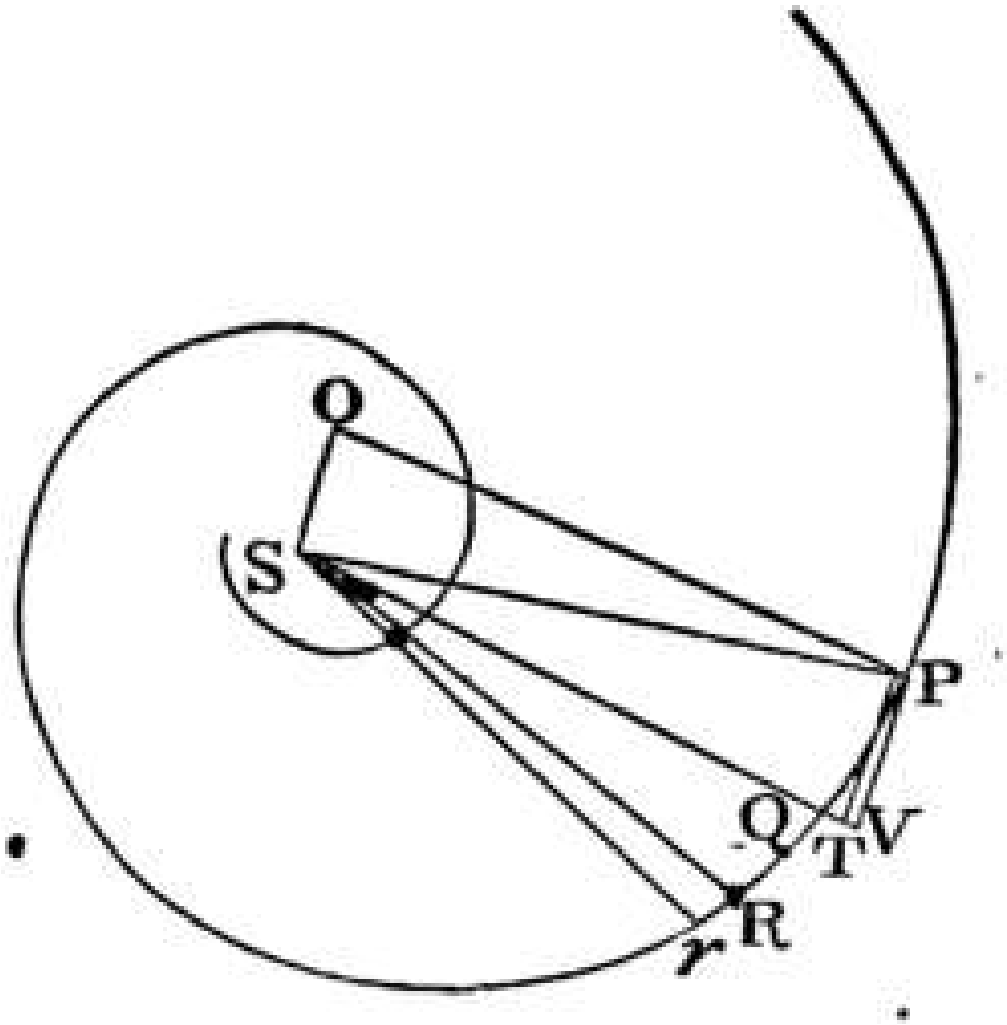
Cor. 1. The velocity in any place P, is always the same wherewith a body in a non-resisting medium with the same centripetal force would revolve in a circle, at the same distance SP from the centre.

Cor. 2. The density of the medium, if the distance SP be given, is as, but if that distance is not given, as. And thence a spiral may be fitted to any

density of the medium.

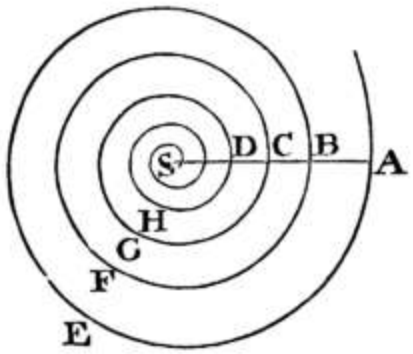
Cor. 3. The force of the resistance in any place P is to the centripetal force in the same place as ½OS to OP. For those forces are to each other as ½R*r* and TQ, or as and, that is, as ½VQ and PQ, or ½OS and OP. The spiral therefore being given, there is given the proportion of the resistance to the centripetal force; and, vice versa, from that proportion given the spiral is given.

Cor. 4. Therefore the body cannot revolve in this spiral, except where the force of resistance is less than half the centripetal force. Let the resistance be made equal to half the centripetal force, and the spiral will coincide with the right line PS, and in that right line the body will descend to the centre with a velocity that is to the velocity, with which it was proved before, in the case of the parabola (Theor. X, Book I), the descent would be made in a non-resisting medium, in the subduplicate ratio of unity to the number two. And the times of the descent will be here reciprocally as the velocities, and therefore given.



Cor. 5. And because at equal distances from the centre the velocity is the same in the spiral PQR as it is in the right line SP, and the length of the spiral is to the length of the right line PS in a given ratio, namely, in the ratio of OP to OS; the time of the descent in the spiral will be to the time of the descent in the right line SP in the same given ratio, and therefore given.

Cor. 6. If from the centre S, with any two given intervals, two circles are described; and these circles remaining, the angle which the spiral makes with the radius PS be any how changed; the number of revolutions which the body can complete in the space between the circumferences of those circles, going round in the spiral from one circumference to another, will be as, or as the tangent of the angle which the spiral makes with the radius PS; and the time of the same revolutions will be as, that is, as the secant of the same angle, or reciprocally as the density of the medium.



Cor. 7. If a body, in a medium whose density is reciprocally as the distances of places from the centre, revolves in any curve AEB about that centre, and cuts the first radius AS in the same angle in B as it did before in A, and that with a velocity that shall be to its first velocity in A reciprocally in a subduplicate ratio of the distances from the centre (that is, as AS to a mean proportional between AS and BS) that body will continue to describe innumerable similar revolutions BFC, CGD, &c., and by its intersections will distinguish the radius AS into parts AS, BS, CS, DS, &c., that are continually proportional. But the times of the revolutions will be as the perimeters of the orbits AEB, BFC, CGD, &c., directly, and the velocities at the beginnings A, B, C of those orbits inversely; that is as, ,. And the whole time in which the body will arrive at the centre, will be to the time of the first revolution as the sum of all the continued proportionals, , , going on *ad infinitum*, to the first term; that is, as the first term to the difference of the two first, or as ⅔AS to AB very nearly. Whence the whole time may be easily found.

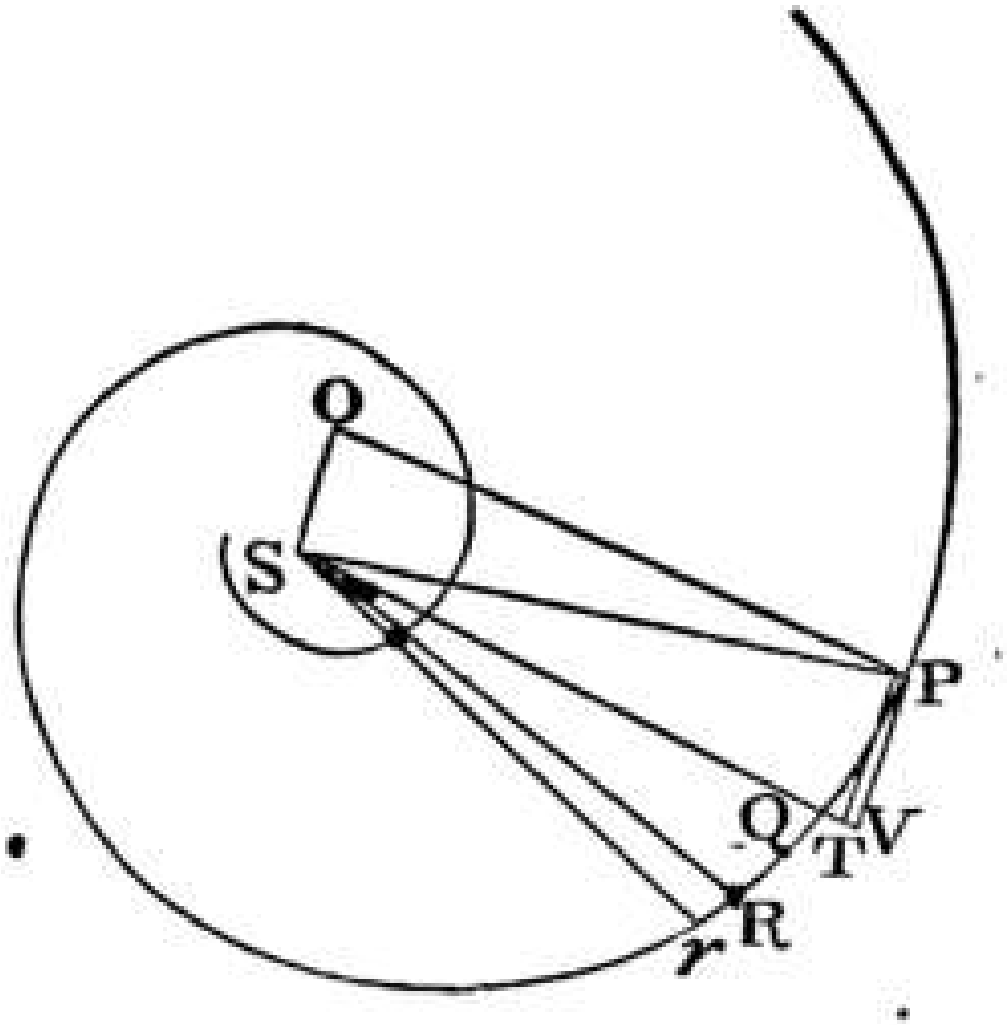
Cor. 8. From hence also may be deduced, near enough, the motions of bodies in mediums whose density is either uniform, or observes any other assigned law. From the centre S, with intervals SA, SB, SC, &c., continually proportional, describe as many circles; and suppose the time of the revolutions between the perimeters of any two of those circles, in the medium whereof we treated, to be to the time of the revolutions between the same in the medium proposed as the mean density of the proposed medium between those circles to the mean density of the medium whereof we treated, between the same circles, nearly: and that the secant of the angle in which the spiral above determined, in the medium whereof we treated, cuts the radius AS, is in the same ratio to the secant of the angle in which the

new spiral, in the proposed medium, cuts the same radius: and also that the number of all the revolutions between the same two circles is nearly as the tangents of those angles. If this be done every where between every two circles, the motion will be continued through all the circles. And by this means one may without difficulty conceive at what rate and in what time bodies ought to revolve in any regular medium.

Cor. 9. And although these motions becoming eccentrical should be performed in spirals approaching to an oval figure, yet, conceiving the several revolutions of those spirals to be at the same distances from each other, and to approach to the centre by the same degrees as the spiral above described, we may also understand how the motions of bodies may be performed in spirals of that kind.

PROPOSITION XVI. THEOREM XIII.

If the density of the medium in each of the places be reciprocally as the distance of the places from the immoveable centre, and the centripetal force be reciprocally as any power of the same distance, I say, that the body may revolve in a spiral intersecting all the radii drawn from that centre in a given angle.



This is demonstrated in the same manner as the foregoing Proposition. For if the centripetal force in P be reciprocally as any power SP^{n+1} of the distance SP whose index is $n + 1$; it will be collected, as above, that the time in which the body describes any arc PQ, will be as PQ, $PS^{\frac{1}{2}n}$; and the resistance in P as, or as, and therefore as, that is (because is a given quantity), reciprocally as SP^{n+1}. And therefore, since the velocity is reciprocally as $SP^{\frac{1}{2}n}$, the density in P will be reciprocally as SP.

Cor. 1. The resistance is to the centripetal force as to OP.

Cor. 2. If the centripetal force be reciprocally as SP^3, $1 - \frac{1}{2}n$ will be = 0; and therefore the resistance and density of the medium will be nothing, as in Prop. IX, Book I.

Cor. 3. If the centripetal force be reciprocally as any power of the radius SP, whose index is greater than the number 3, the affirmative resistance will

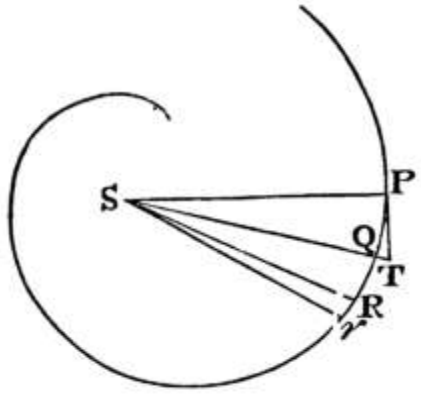
be changed into a negative.

SCHOLIUM.

This Proposition and the former, which relate to mediums of unequal density, are to be understood of the motion of bodies that are so small, that the greater density of the medium on one side of the body above that on the other is not to be considered. I suppose also the resistance, *caeteris paribus*, to be proportional to its density. Whence, in mediums whose force of resistance is not as the density, the density must be so much augmented or diminished, that either the excess of the resistance may be taken away, or the defect supplied.

PROPOSITION XVII. PROBLEM IV.

To find the centripetal force and the resisting force of the medium, by which a body, the law of the velocity being given, shall revolve in a given spiral.



Let that spiral be PQR. From the velocity, with which the body goes over the very small arc PQ, the time will be given; and from the altitude TQ, which is as the centripetal force, and the square of the time, that force will be given. Then from the difference RS*r* of the areas PSQ and QSR described in equal particles of time, the retardation of the body will be given; and from the retardation will be found the resisting force and density of the medium.

PROPOSITION XVIII. PROBLEM V.

The law of centripetal force being given, to find the density of the medium in each of the places thereof, by which a body may describe a given spiral.

From the centripetal force the velocity in each place must be found; then from the retardation of the velocity the density of the medium is found, as in the foregoing Proposition.

But I have explained the method of managing these Problems in the tenth Proposition and second Lemma of this Book; and will no longer detain the reader in these perplexed disquisitions. I shall now add some things relating to the forces of progressive bodies, and to the density and resistance of those mediums in which the motions hitherto treated of, and those akin to them, are performed.

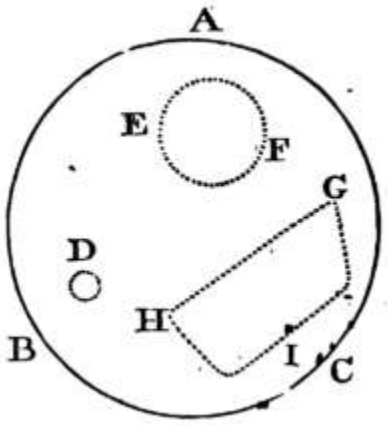
Section V: Of the density and compression of fluids; and of hydrostatics

THE DEFINITION OF A FLUID.

A fluid is any body whose parts yield to any force impressed on it, by yielding, are easily moved among themselves.

PROPOSITION XIX. THEOREM XIV

All the parts of a homogeneous and unmoved fluid included in any unmoved vessel, and compressed on every side (setting aside the consideration of condensation, gravity, and all centripetal forces), will be equally pressed on every side, and remain in their places without any motion arising from that pressure.



Case 1. Let a fluid be included in the spherical vessel ABC, arid uniformly compressed on every side: I say, that no part of it will be moved by that pressure. For if any part, as D, be moved, all such parts at the same distance from the centre on every side must necessarily be moved at the same time by a like motion; because the pressure of them all is similar and equal; and all other motion is excluded that does not arise from that pressure. But if these parts come all of them nearer to the centre, the fluid must be condensed towards the centre, contrary to the supposition. If they recede from it, the fluid must be condensed towards the circumference;

which is also contrary to the supposition. Neither can they move in any one direction retaining their distance from the centre, because for the same reason, they may move in a contrary direction; but the same part cannot be moved contrary ways at the same time. Therefore no part of the fluid will be moved from its place. Q.E.D.

Case 2. I say now, that all the spherical parts of this fluid are equally pressed on every side. For let EF be a spherical part of the fluid; if this be not pressed equally on every side, augment the lesser pressure till it be pressed equally on every side; and its parts (by Case 1) will remain in their places. But before the increase of the pressure, they would remain in their places (by Case 1); and by the addition of a new pressure they will be moved, by the definition of a fluid, from those places. Now these two conclusions contradict each other. Therefore it was false to say that the sphere EF was not pressed equally on every side. Q.E.D.

Case 3. I say besides, that different spherical parts have equal pressures. For the contiguous spherical parts press each other mutually and equally in the point of contact (by Law III). But (by Case 2) they are pressed on every side with the same force. Therefore any two spherical parts not contiguous, since an intermediate spherical part can touch both, will be pressed with the same force. Q.E.D.

Case 4. I say now, that all the parts of the fluid are every where pressed equally. For any two parts may be touched by spherical parts in any points whatever; and there they will equally press those spherical parts (by Case 3), and are reciprocally equally pressed by them (by Law III). Q.E.D.

Case 5. Since, therefore, any part GHI of the fluid is inclosed by the rest of the fluid as in a vessel, and is equally pressed on every side; and also its parts equally press one another, and are at rest among themselves; it is manifest that all the parts of any fluid as GHI, which is pressed equally on every side, do press each other mutually and equally, and are at rest among themselves. Q.E.D.

Case 6. Therefore if that fluid be included in a vessel of a yielding substance, or that is not rigid, and be not equally pressed on every side, the same will give way to a stronger pressure, by the Definition of fluidity.

Case 7. And therefore, in an inflexible or rigid vessel, a fluid will not sustain a stronger pressure on one side than on the other, but will give way to it, and that in a moment of time; because the rigid side of the vessel does

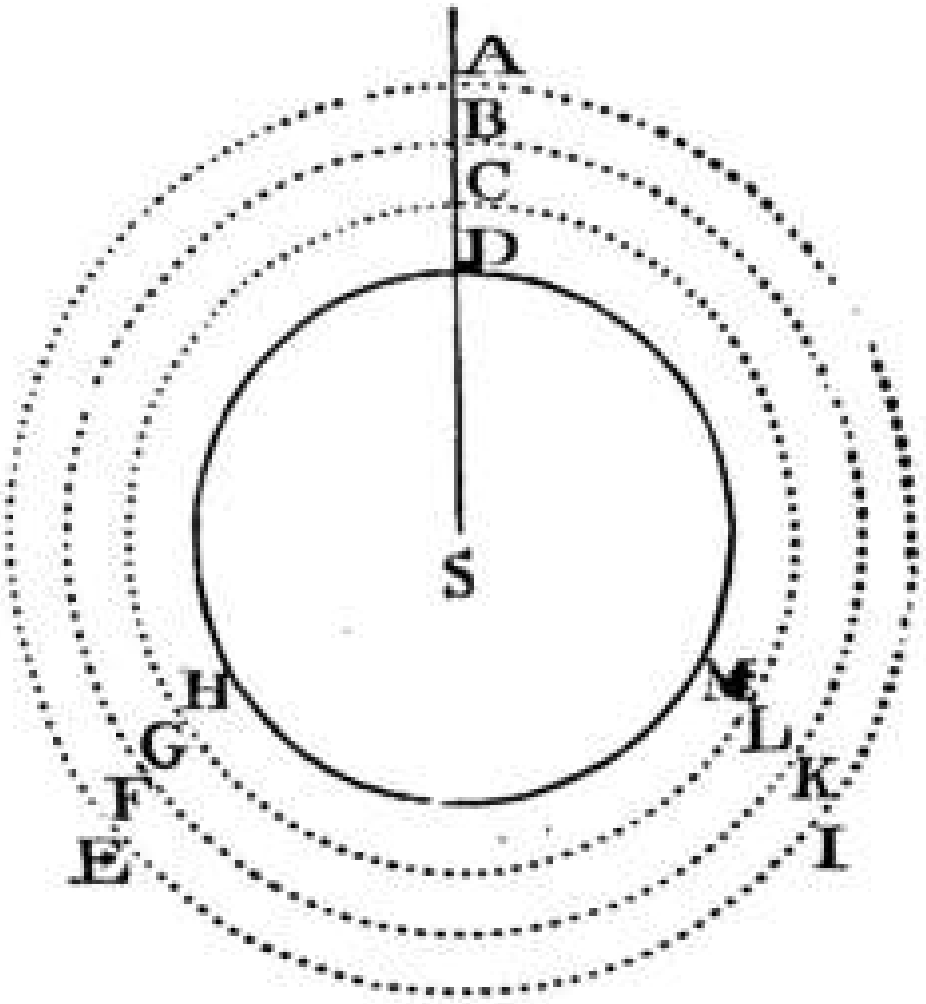
not follow the yielding liquor. But the fluid, by thus yielding, will press against the opposite side, and so the pressure will tend on every side to equality. And because the fluid, as soon as it endeavours to recede from the part that is most pressed, is withstood by the resistance of the vessel on the opposite side, the pressure will on every side be reduced to equality, in a moment of time, without any local motion: and from thence the parts of the fluid (by Case 5) will press each other mutually and equally, and be at rest among themselves. Q.E.D.

Cor. Whence neither will a motion of the parts of the fluid among themselves be changed by a pressure communicated to the external superficies, except so far as either the figure of the superficies may be somewhere altered, or that all the parts of the fluid, by pressing one another more in tensely or remissly, may slide with more or less difficulty among them selves.

PROPOSITION XX. THEOREM XV.

If all the parts of a spherical fluid, homogeneous at equal distances from the centre, lying on a spherical concentric bottom, gravitate towards the centre of the whole, the bottom will sustain the weight of a cylinder, whose base is equal to the superficies of the bottom, and whose altitude is the same with that of the incumbent fluid.

Let DHM be the superficies of the bottom, and AEI the upper superficies of the fluid. Let the fluid be distinguished into concentric orbs of equal thickness, by the innumerable spherical superficies BFK, CGL: and



conceive the force of gravity to act only in the upper superficies of every orb, and the actions to be equal on the equal parts of all the superficies. Therefore the upper superficies AE is pressed by the single force of its own gravity, by which all the parts of the upper orb, and the second superficies BFK, will (by Prop. XIX), according to its measure, be equally pressed. The second superficies BFK is pressed likewise by the force of its own gravity, which, added to the former force, makes the pressure double. The third superficies GGL is, according to its measure, acted on by this pressure and the force of its own gravity besides, which makes its pressure triple. And in like manner the fourth superficies receives a quadruple pressure, the fifth superficies a quintuple, and so on. Therefore the pressure acting on every superficies is not as the solid quantity of the incumbent fluid, but as the number of the orbs reaching to the upper surface of the fluid; and is equal to the gravity of

the lowest orb multiplied by the number of orbs: that is, to the gravity of a solid whose ultimate ratio to the cylinder above-mentioned (when the number of the orbs is increased and their thickness diminished, *ad infinitum*, so that the action of gravity from the lowest superficies to the uppermost may become continued) is the ratio of equality. Therefore the lowest superficies sustains the weight of the cylinder above determined. Q.E.D. And by a like reasoning the Proposition will be evident, where the gravity of the fluid decreases in any assigned ratio of the distance from the centre, and also where the fluid is more rare above and denser below. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore the bottom is not pressed by the whole weight of the incumbent fluid, but only sustains that part of it which is described in the Proposition; the rest of the weight being sustained archwise by the spherical figure of the fluid.

Cor. 2. The quantity of the pressure is the same always at equal distances from the centre, whether the superficies pressed be parallel to the horizon, or perpendicular, or oblique; or whether the fluid, continued upwards from the compressed superficies, rises perpendicularly in a rectilinear direction, or creeps obliquely through crooked cavities and canals, whether those passages be regular or irregular, wide or narrow. That the pressure is not altered by any of these circumstances, may be collected by applying the demonstration of this Theorem to the several cases of fluids.

Cor. 3. From the same demonstration it may also be collected (by Prop. XIX), that the parts of a heavy fluid acquire no motion among themselves by the pressure of the incumbent weight, except that motion which arises from condensation.

Cor. 4. And therefore if another body of the same specific gravity, incapable of condensation, be immersed in this fluid, it will acquire no motion by the pressure of the incumbent weight: it will neither descend nor ascend, nor change its figure. If it be spherical, it will remain so, notwithstanding the pressure; if it be square, it will remain square; and that, whether it be soft or fluid; whether it swims freely in the fluid, or lies at the bottom. For any internal part of a fluid is in the same state with the submersed body; and the case of all submersed bodies that have the same magnitude, figure, and specific gravity, is alike. If a submersed body, retaining its weight, should dissolve and put on the form of a fluid, this

body, if before it would have ascended, descended, or from any pressure assume a new figure, would now likewise ascend, descend, or put on a new figure; and that, because its gravity and the other causes of its motion remain. But (by Case 5, Prop. XIX) it would now be at rest, and retain its figure. Therefore also in the former case.

Cor. 5. Therefore a body that is specifically heavier than a fluid contiguous to it will sink; and that which is specifically lighter will ascend, and attain so much motion and change of figure as that excess or defect of gravity is able to produce. For that excess or defect is the same thing as an impulse, by which a body, otherwise *in equilibrio* with the parts of the fluid, is acted on; and may be compared with the excess or defect of a weight in one of the scales of a balance.

Cor. 6. Therefore bodies placed in fluids have a twofold gravity the one true and absolute, the other apparent, vulgar, and comparative. Absolute gravity is the whole force with which the body tends downwards; relative and vulgar gravity is the excess of gravity with which the body tends downwards more than the ambient fluid. By the first kind of gravity the parts of all fluids and bodies gravitate in their proper places; and therefore their weights taken together compose the weight of the whole. For the whole taken together is heavy, as may be experienced in vessels full of liquor; and the weight of the whole is equal to the weights of all the parts, and is therefore composed of them. By the other kind of gravity bodies do not gravitate in their places; that is, compared with one another, they do not preponderate, but, hindering one another's endeavours to descend, remain in their proper places, as if they were not heavy. Those things which are in the air, and do not preponderate, are commonly looked on as not heavy. Those which do preponderate are commonly reckoned heavy, in as much as they are not sustained by the weight of the air. The common weights are nothing else but the excess of the true weights above the weight of the air. Hence also, vulgarly, those things are called light which are less heavy, and, by yielding to the preponderating air, mount upwards. But these are only comparatively light, and not truly so, because they descend *in vacuo*. Thus, in water, bodies which, by their greater or less gravity, descend or ascend, are comparatively and apparently heavy or light; and their comparative and apparent gravity or levity is the excess or defect by which their true gravity either exceeds the gravity of the water or is exceeded by it. But those things

which neither by preponderating descend, nor, by yielding to the preponderating fluid, ascend, although by their true weight they do increase the weight of the whole, yet comparatively, and in the sense of the vulgar, they do not gravitate in the water. For these cases are alike demonstrated.

Cor. 7. These things which have been demonstrated concerning gravity take place in any other centripetal forces.

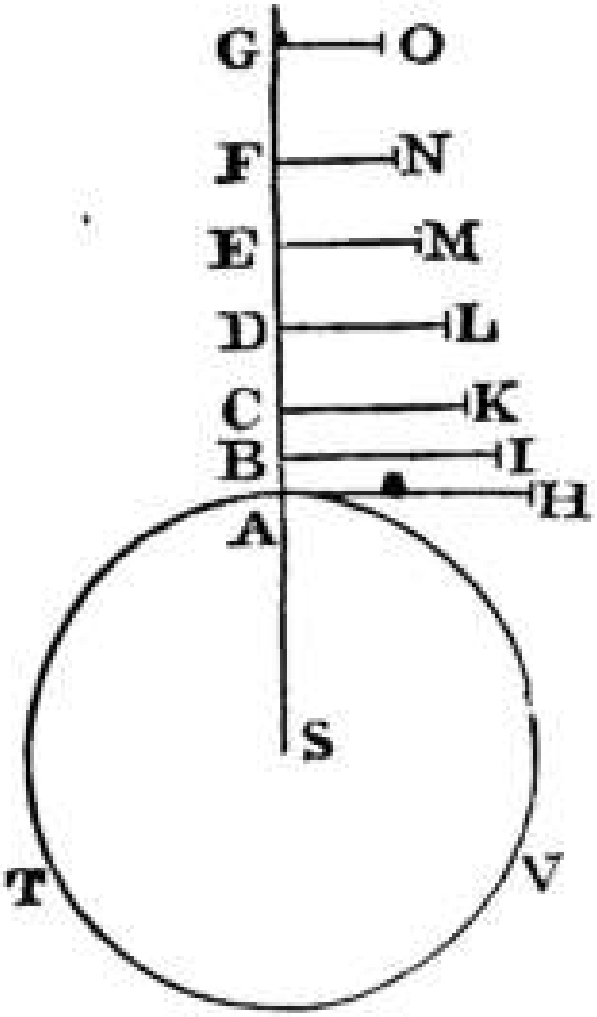
Cor. 8. Therefore if the medium in which any body moves be acted on either by its own gravity, or by any other centripetal force, and the body be urged more powerfully by the same force; the difference of the forces is that very motive force, which, in the foregoing Propositions, I have considered as a centripetal force. But if the body be more lightly urged by that force, the difference of the forces becomes a centrifugal force, and is to be considered as such.

Cor. 9. But since fluids by pressing the included bodies do not change their external figures, it appears also (by Cor. Prop. XIX) that they will not change the situation of their internal parts in relation to one another; and therefore if animals were immersed therein, and that all sensation did arise from the motion of their parts, the fluid will neither hurt the immersed bodies, nor excite any sensation, unless so far as those bodies may be condensed by the compression. And the case is the same of any system of bodies encompassed with a compressing fluid. All the parts of the system will be agitated with the same motions as if they were placed in a vacuum, and would only retain their comparative gravity; unless so far as the fluid may somewhat resist their motions, or be requisite to conglutinate them by compression.

PROPOSITION XXI. THEOREM XVI.

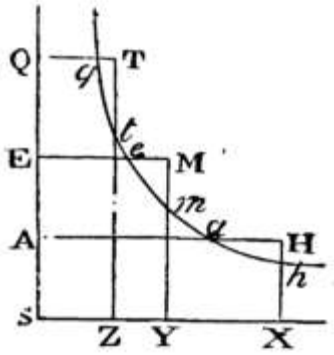
Let the density of any fluid be proportional to the compression, and its parts be attracted downwards by a centripetal force reciprocally proportional to the distances from the centre: I say, that, if those distances be taken continually proportional, the densities of the fluid at the same distances will be also continually proportional.

Let ATV denote the spherical bottom of the fluid, S the centre, SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c., distances continually proportional. Erect the perpendiculars AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c., which shall be as the densities of the medium in the places A, B, C, D, E, F; and the specific gravities in those places will be, , , &c., or, which is all one, as, , , &c. Suppose, first, these gravities to be uniformly continued from A to B, from B to C, from C to D, &c., the decrements in the points



B, C, D, &c., being taken by steps. And these gravities drawn into the altitudes AB, BC, CD, &c., will give the pressures AH, BI, CK, &c., by which the bottom ATV is acted on (by Theor. XV). Therefore the particle A sustains all the pressures AH, BI, CK, DL, &c., proceeding *in infinitum*; and the particle B sustains the pressures of all but the first AH; and the particle C all but the two first AH, BI; and so on: and therefore the density AH of the first particle A is to the density BI of the

second particle B as the sum of all AH + BI + CK + DL, *in infinitum*, to the sum of all BI + CK + DL, &c. And BI the density of the second particle B is to CK the density of the third C, as the sum of all BI + CK + DL, &c., to the sum of all CK + DL, &c. Therefore these sums are proportional to their differences AH, BI, CK, &c., and therefore continually proportional (by Lem. 1 of this Book); and therefore the differences AH, BI, CK, &c., proportional to the sums, are also continually proportional. Wherefore since the densities in the places A, B, C, &c., are as AH, BI, CK, &c., they will also be continually proportional. Proceed intermissively, and, *ex aequo*, at the distances SA, SC, SE, continually proportional, the densities AH, CK, EM will be continually proportional. And by the same reasoning, at any distances SA, SD, SG, continually proportional, the densities AH, DL, GO, will be continually proportional. Let now the points A, B, C, D, E, &c., coincide, so that the progression of the specific gravities from the bottom A to the top of the fluid may be made continual; and at any distances SA, SD, SG, continually proportional, the densities AH, DL, GO, being all along continually proportional, will still remain continually proportional. Q.E.D.

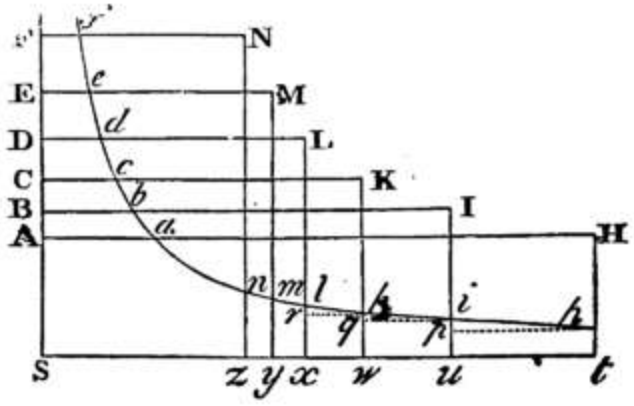


Cor. Hence if the density of the fluid in two places, as A and E, be given, its density in any other place Q may be collected. With the centre S, and the rectangular asymptotes SQ, SX, describe an hyperbola cutting the perpendiculars AH, EM, QT in *a, e,* and *q*, as also the perpendiculars HX, MY, TZ, let fall upon the asymptote SX, in *h, m*, and *t*. Make the area Y*mt*Z to the given area Y*mh*X as the given area E*eq*Q to the given area E*ea*A; and the line Z*t* produced will cut off the line QT proportional to the density. For if the lines SA, SE, SQ are continually proportional, the areas E*eq*Q, E*ea*A will be equal, and thence the areas Y*mt*Z, X*hm*Y, proportional to them, will be also equal; and the lines SX, SY, SZ, that is, AH, EM, QT continually

proportional, as they ought to be. And if the lines SA, SE, SQ, obtain any other order in the series of continued proportionals, the lines AH, EM, QT, because of the proportional hyperbolic areas, will obtain the same order in another series of quantities continually proportional.

PROPOSITION XXII. THEOREM XVII.

Let the density of any fluid be proportional to the compression, and its parts be attracted downwards by a gravitation reciprocally proportional to the squares of the distances from the centre: I say, that if the distances be taken in harmonic progression, the densities of the fluid at those distances will be in a geometrical progression.



Let S denote the centre, and SA, SB, SC, SD, SE, the distances in geometrical progression. Erect the perpendiculars AH, BI, CK, &c., which shall be as the densities of the fluid in the places A, B, C, D, E, &c., and the specific gravities thereof in those places will be as, , , &c. Suppose these gravities to be uniformly continued, the first from A to B, the second from B to C, the third from C to D, &c. And these drawn into the altitudes AB, BC, CD, DE, &c., or, which is the same thing, into the distances SA, SB, SC, &c., proportional to those altitudes, will give, , , &c., the exponents of the pressures. Therefore since the densities are as the sums of those pressures, the differences AH - BI, BI - CK, &c., of the densities will be as the differences of those sums, , , &c. With the centre S, and the asymptotes SA, S*x*, describe any hyperbola, cutting the perpendiculars AH, BI, CK, &c., in *a, b, c,* &c., and the perpendiculars H*t*, I*n*, K*w*, let fall upon the asymptote

S*x*, in *h, i, k*; and the differences of the densities *tu, uw,* &c., will be as, , &c. And the rectangles *tu th, uw ui*, &c., or *tp, uq,* &c., as, , &c., that is, as A*a*, B*b*, &c. For, by the nature of the hyperbola, SA is to AH or S*t* as *th* to A*c*, and therefore is equal to A*a*. And, by a like reasoning, is equal to B*b*, &c. But A*a*, B*b*, C*c*, &c., are continually proportional, and therefore proportional to their differences A*a* - B*b*, B*b* - C*c*, &c., therefore the rectangles *tp, uq,* &c., are proportional to those differences; as also the sums of the rectangles *tp* + *uq*, or *tp* + *uq* + *wr* to the sums of the differences A*a* - C*c* or A*a* - D*d*. Suppose several of these terms, and the sum of all the differences, as A*a* - F*f*, will be proportional to the sum of all the rectangles, as *zthn*. Increase the number of terms, and diminish the distances of the points A, B, C, &c., *in infinitum*, and those rectangles will become equal to the hyperbolic area *zthn*, and therefore the difference A*a* - F*f* is proportional to this area. Take now any distances, as SA, SD, SF, in harmonic progression, and the differences A*a* - D*d*, D*d* - F*f* will be equal; and therefore the areas *thlx, xluz*, proportional to those differences will be equal among themselves, and the densities S*t*, S*x*, S*z*, that is, AH, DL, FN, continually proportional. Q.E.D.

Cor. Hence if any two densities of the fluid, as AH and BI, be given, the area *thiu*, answering to their difference *tu*, will be given; and thence the density FN will be found at any height SF, by taking the area *thnz* to that given area *thiu* as the difference A*a* - F*f* to the difference A*a* - B*b*.

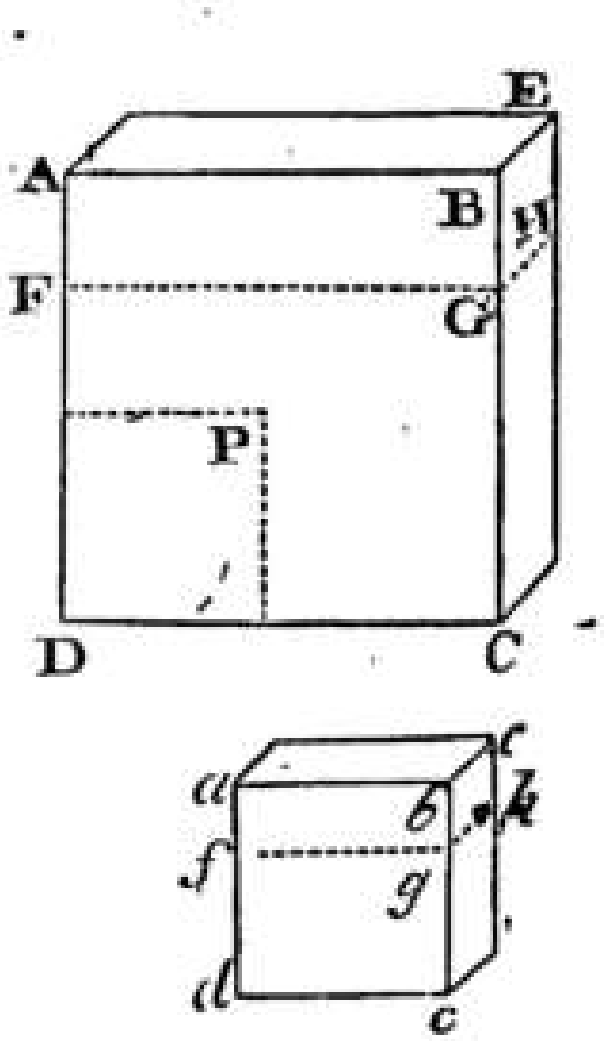
SCHOLIUM.

By a like reasoning it may be proved, that if the gravity of the particles of a fluid be diminished in a triplicate ratio of the distances from the centre; and the reciprocals of the squares of the distances SA, SB, SC, &c., (namely, , ,) be taken in an arithmetical progression, the densities AH, BI, CK, &c., will be in a geometrical progression. And if the gravity be diminished in a quadruplicate ratio of the distances, and the reciprocals of the cubes of the distances (as, , , &c.,) be taken in arithmetical progression, the densities AH, BI, CK, &c., will be in geometrical progression. And so *in infinitum*. Again; if the gravity of the particles of the fluid be the same at all distances,

and the distances be in arithmetical progression, the densities will be in a geometrical progression as Dr. *Halley* has found. If the gravity be as the distance, and the squares of the distances be in arithmetical progression, the densities will be in geometrical progression. And so *in infinitum*. These things will be so, when the density of the fluid condensed by compression is as the force of compression; or, which is the same thing, when the space possessed by the fluid is reciprocally as this force. Other laws of condensation may be supposed, as that the cube of the compressing force may be as the biquadrate of the density; or the triplicate ratio of the force the same with the quadruplicate ratio of the density: in which case, if the gravity he reciprocally as the square of the distance from the centre; the density will be reciprocally as the cube of the distance. Suppose that the cube of the compressing force be as the quadratocube of the density; and if the gravity be reciprocally as the square of the distance, the density will be reciprocally in a sesquiplicate ratio of the distance. Suppose the compressing force to be in a duplicate ratio of the density, and the gravity reciprocally in a duplicate ratio of the distance, and the density will be reciprocally as the distance. To run over all the cases that might be offered would be tedious. But as to our own air, this is certain from experiment, that its density is either accurately, or very nearly at least, as the compressing force; and therefore the density of the air in the atmosphere of the earth is as the weight of the whole incumbent air, that is, as the height of the mercury in the barometer.

PROPOSITION XXIII. THEOREM XVIII.

If a fluid be composed of particles mutually flying each other, and the density be as the compression, the centrifugal forces of the particles will be reciprocally proportional to the distances of their centres. And, vice versa*, particles flying each other, with forces that are reciprocally proportional to the distances of their centres, compose an elastic fluid, whose density is as the compression.*



Let the fluid be supposed to be included in a cubic space ACE, and then to be reduced by compression into a lesser cubic space *ace*; and the distances of the particles retaining a like situation with respect to each other in both the spaces, will be as the sides AB, *ab* of the cubes; and the densities of the mediums will be reciprocally as the containing spaces AB^3, ab^3. In the plane side of the greater cube ABCD take the square DP equal to the plane side *db* of the lesser cube: and, by the supposition, the pressure with which the square DP urges the inclosed fluid will be to the pressure with which that square *db* urges the inclosed fluid as the densities of the mediums are to each other, that is, as ab^3 to AB^3. But the pressure with which the square DB urges the included fluid is to the pressure with which the square DP urges the same fluid as the square DB to the square DP, that is, as AB^2 to ab^2. Therefore, *ex aequo*, the pressure with which the square

DB urges the fluid is to the pressure with which the square *db* urges the fluid as *ab* to AB. Let the planes FGH, *fgh*, be drawn through the middles of the two cubes, and divide the fluid into two parts. These parts will press each other mutually with the same forces with which they are themselves pressed by the planes AC, *ac*, that is, in the proportion of *ab* to AB: and therefore the centrifugal forces by which these pressures are sustained are in the same ratio. The number of the particles being equal, and the situation alike, in both cubes, the forces which all the particles exert, according to the planes FGH, *fgh*, upon all, are as the forces which each exerts on each. Therefore the forces which each exerts on each, according to the plane FGH in the greater cube, are to the forces which each exerts on each, according to the plane *fgh* in the lesser cube, as *ab* to AB, that is, reciprocally as the distances of the particles from each other. Q.E.D.

And, *vice versa*, if the forces of the single particles are reciprocally as the distances, that is, reciprocally as the sides of the cubes AB, *ab*; the sums of the forces will be in the same ratio, and the pressures of the sides DB, *db* as the sums of the forces; and the pressure of the square DP to the pressure of the side DB as ab^2 to AB^2 . And, *ex aequo*, the pressure of the square DP to the pressure of the side *db* as ab^3 to AB^3; that is, the force of compression in the one to the force of compression in the other as the density in the former to the density in the latter. Q.E.D.

SCHOLIUM.

By a like reasoning, if the centrifugal forces of the particles are reciprocally in the duplicate ratio of the distances between the centres, the cubes of the compressing forces will be as the biquadrates of the densities. If the centrifugal forces be reciprocally in the triplicate or quadruplicate ratio of the distances, the cubes of the compressing forces will be as the quadratocubes, or cubo-cubes of the densities. And universally, if D be put for the distance, and E for the density of the compressed fluid, and the centrifugal forces be reciprocally as any power D^n of the distance, whose index is the number *n*, the compressing forces will be as the cube roots of the power E^{n+2}, whose index is the number $n + 2$; and the contrary. All these

things are to be understood of particles whose centrifugal forces terminate in those particles that are next them, or are diffused not much further. We have an example of this in magnetical bodies. Their attractive virtue is terminated nearly in bodies of their own kind that are next them. The virtue of the magnet is contracted by the interposition of an iron plate, and is almost terminated at it: for bodies further off are not attracted by the magnet so much as by the iron plate. If in this manner particles repel others of their own kind that lie next them, but do not exert their virtue on the more remote, particles of this kind will compose such fluids as are treated of in this Proposition. If the virtue of any particle diffuse itself every way *in infinitum*, there will be required a greater force to produce an equal condensation of a greater quantity of the *fluid*. But whether elastic fluids do really consist of particles so repelling each other, is a physical question. We have here demonstrated mathematically the property of fluids consisting of particles of this kind, that hence philosophers may take occasion to discuss that question.

Section VI: Of the motion and resistance of funependulous bodies

PROPOSITION XXIV. THEOREM XIX.

The quantities of matter in funependulous bodies, whose centres of oscillation are equally distant from the centre of suspension, are in a ratio compounded of the ratio of the weights and the duplicate ratio of the times of the oscillations in vacuo.

For the velocity which a given force can generate in a given matter in a given time is as the force and the time directly, and the matter inversely. The greater the force or the time is, or the less the matter, the greater velocity will be generated. This is manifest from the second Law of Motion. Now if pendulums are of the same length, the motive forces in places equally distant from the perpendicular are as the weights: and therefore if two bodies by oscillating describe equal arcs, and those arcs are divided into equal parts; since the times in which the bodies describe each of the correspondent parts of the arcs are as the times of the whole oscillations, the velocities in the correspondent parts of the oscillations will be to each other as the motive forces and the whole times of the oscillations directly, and the quantities of matter reciprocally: and therefore the quantities of matter are as the forces and the times of the oscillations directly and the velocities reciprocally. But the velocities reciprocally are as the times, and therefore the times directly and the velocities reciprocally are as the squares of the times; and therefore the quantities of matter are as the motive forces and the squares of the times, that is, as the weights and the squares of the times. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore if the times are equal, the quantities of matter in each of the bodies are as the weights.

Cor. 2. If the weights are equal, the quantities of matter will be as the squares of the times.

Cor. 3. If the quantities of matter are equal, the weights will be reciprocally as the squares of the times.

Cor. 4. Whence since the squares of the times, *caeteris paribus*, are as the lengths of the pendulums, therefore if both the times and quantities of matter are equal, the weights will be as the lengths of the pendulums.

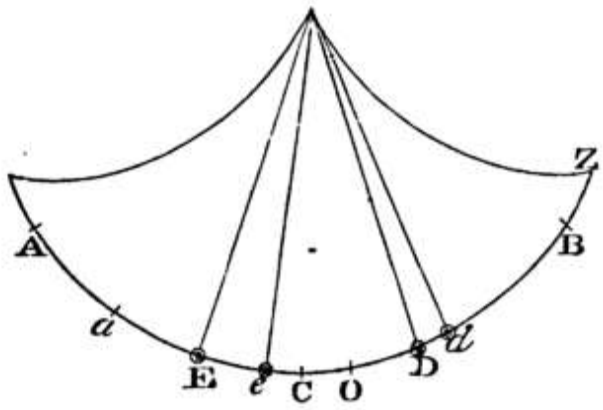
Cor. 5. And universally, the quantity of matter in the pendulous body is as the weight and the square of the time directly, and the length of the pendulum inversely.

Cor. 6. But in a non-resisting medium, the quantity of matter in the pendulous body is as the comparative weight and the square of the time directly, and the length of the pendulum inversely. For the comparative weight is the motive force of the body in any heavy medium, as was shewn above; and therefore does the same thing in such a non-resisting medium as the absolute weight does in a vacuum.

Cor. 7. And hence appears a method both of comparing bodies one among another, as to the quantity of matter in each; and of comparing the weights of the same body in different places, to know the variation of its gravity. And by experiments made with the greatest accuracy, I have always found the quantity of matter in bodies to be proportional to their weight.

PROPOSITION XXV. THEOREM XX.

Funependulous bodies that are, in any medium, resisted in the ratio of the moments of time, and funependulous bodies that move in a non-resisting medium of the same specific gravity, perform their oscillations in a cycloid in the same time, and describe proportional parts of arcs together.



Let AB be an arc of a cycloid, which a body D, by vibrating in a non-resisting medium, shall describe in any time. Bisect that arc in C, so that C may be the lowest point thereof; and the accelerative force with which the body is urged in any place D, or *d* or E, will be as the length of the arc CD, or C*d*, or CE. Let that force be expressed by that same arc; and since the resistance is as the moment of the time, and therefore given, let it be expressed by the given part CO of the cycloidal arc, and take the arc O*d* in the same ratio to the arc CD that the arc OB has to the arc CB: and the force with which the body in *d* is urged in a resisting medium, being the excess of the force C*d* above the resistance CO, will be expressed by the arc O*d*, and will therefore be to the force with which the body D is urged in a non-resisting medium in the place D, as the arc O*d* to the arc CD; and therefore also in the place B, as the arc OB to the arc CB. Therefore if two bodies D, *d* go from the place Bc and are urged by these forces; since the forces at the beginning are as the arc CB and OB, the first velocities and arcs first described will be in the same ratio. Let those arcs be BD and B*d*, and the remaining arcs CD, O*d*, will be in the same ratio. Therefore the forces, being proportional to those arcs CD, O*d*, will remain in the same ratio as at the beginning, and therefore the bodies will continue describing together arcs in the same ratio. Therefore the forces and velocities and the remaining arcs CD, O*d*, will be always as the whole arcs CB, OB, and therefore those remaining arcs will be described together. Therefore the two bodies D and *d* will arrive together at the places C and O; that which moves in the non-resisting medium, at the place C, and the other, in the resisting medium, at the place O. Now since the velocities in C and O are as the arcs CB, OB, the arcs which the bodies describe when they go farther will be in the same ratio. Let those arcs be CE and O*e*. The force with which the body D in a non-resisting medium is retarded in E is as CE, and the force with which the body *d* in the resisting medium is retarded in *e*, is as the sum of the force C*e* and the resistance CO, that is, as O*e*; and therefore the forces with which the bodies are retarded are as the arcs CB, OB, proportional to the arcs CE, O*e*; and therefore the velocities, retarded in that given ratio, remain in the same given ratio. Therefore the velocities and the arcs described with those velocities are always to each other in that given ratio of the arcs CB and OB; and therefore if the entire arcs AB, *a*B are taken in the same ratio, the bodies D and *d* will describe those arcs together, and in the places A and *a*

will lose all their motion together. Therefore the whole oscillations are isochronal, or are performed in equal times; and any parts of the arcs, as BD, B*d*, or BE, B*e*, that are described together, are proportional to the whole arcs BA, B*a*. Q.E.D.

Cor. Therefore the swiftest motion in a resisting medium does not fall upon the lowest point C, but is found in that point O, in which the whole arc described B*a* is bisected. And the body, proceeding from thence to *a*, is retarded at the same rate with which it was accelerated before in its descent from B to O.

PROPOSITION XXVI. THEOREM XXI.

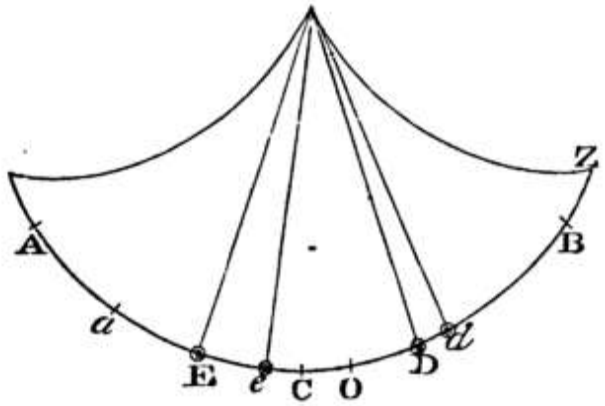
Funependulous bodies, that are resisted in the ratio of the velocity, have their oscillations in a cycloid isochronal.

For if two bodies, equally distant from their centres of suspension, describe, in oscillating, unequal arcs, and the velocities in the correspondent parts of the arcs be to each other as the whole arcs; the resistances, proportional to the velocities, will be also to each other as the same arcs. Therefore if these resistances be subducted from or added to the motive forces arising from gravity which are as the same arcs, the differences or sums will be to each other in the same ratio of the arcs; and since the increments and decrements of the velocities are as these differences or sums, the velocities will be always as the whole arcs; therefore if the velocities are in any one case as the whole arcs, they will remain always in the same ratio. But at the beginning of the motion, when the bodies begin to descend and describe those arcs, the forces, which at that time are proportional to the arcs, will generate velocities proportional to the arcs. Therefore the velocities will be always as the whole arcs to be described, and therefore those arcs will be described in the same time. Q.E.D.

PROPOSITION XXVII. THEOREM XXII.

If funependulous bodies are resisted in the duplicate ratio of their velocities, the differences between the times of the oscillations in a resisting medium,

and the times of the oscillations in a non-resisting medium of the same, specific gravity, will be proportional to the arcs described in oscillating nearly.



For let equal pendulums in a resisting medium describe the unequal arcs A, B; and the resistance of the body in the arc A will be to the resistance of the body in the correspondent part of the arc B in the duplicate ratio of the velocities, that is, as AA to BB nearly. If the resistance in the arc B were to the resistance in the arc A as AB to AA, the times in the arcs A and B would be equal (by the last Prop.) Therefore the resistance AA in the arc A, or AB in the arc B, causes the excess of the time in the arc A above the time in a non-resisting medium; and the resistance BB causes the excess of the time in the arc B above the time in a non-resisting medium. But those excesses are as the efficient forces AB and BB nearly, that is, as the arcs A and B. Q.E.D.

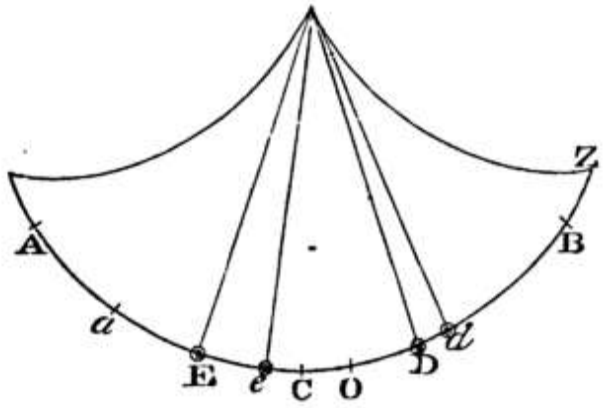
Cor. 1. Hence from the times of the oscillations in unequal arcs in a resisting medium, may be known the times of the oscillations in a non-resisting medium of the same specific gravity. For the difference of the times will be to the excess of the time in the lesser arc above the time in a non-resisting medium as the difference of the arcs to the lesser arc.

Cor. 2. The shorter oscillations are more isochronal, and very short ones are performed nearly in the same times as in a non-resisting medium. But the times of those which are performed in greater arcs are a little greater, because the resistance in the descent of the body, by which the time is prolonged, is greater, in proportion to the length described in the descent than the resistance in the subsequent ascent, by which the time is contracted. But the time of the oscillations, both short and long, seems to be

prolonged in some measure by the motion of the medium. For retarded bodies are resisted somewhat less in proportion to the velocity, and accelerated bodies somewhat more than those that proceed uniformly forwards; because the medium, by the motion it has received from the bodies, going forwards the same way with them, is more agitated in the former case, and less in the latter; and so conspires more or less with the bodies moved. Therefore it resists the pendulums in their descent more, and in their ascent less, than in proportion to the velocity; and these two causes concurring prolong the time.

PROPOSITION XXVIII. THEOREM XXIII.

If a funependulous body, oscillating in a cycloid, be resisted in the ratio of the moments of the time, its resistance will be to the force of gravity as the excess of the arc described in the whole descent above the arc described in the subsequent ascent to twice the length of the pendulum.



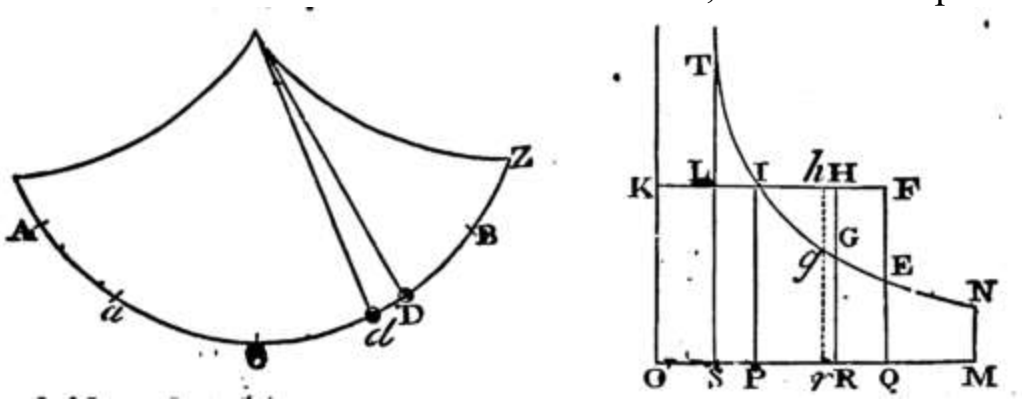
Let BC represent the arc described in the descent, C*a* the arc described in the ascent, and A*a* the difference of the arcs: and things remaining as they were constructed and demonstrated in Prop. XXV, the force with which the oscillating body is urged in any place D will be to the force of resistance as the arc CD to the arc CO, which is half of that difference A*a*. Therefore the force with which the oscillating body is urged at the beginning or the highest point of the cycloid, that is, the force of gravity, will be to the resistance as the arc of the cycloid, between that highest point and lowest

point C, is to the arc CO; that is (doubling those arcs), as the whole cycloidal arc, or twice the length of the pendulum, to the arc A*a*. Q.E.D.

PROPOSITION XXIX. PROBLEM VI.

Supposing that a body oscillating in a cycloid is resisted in a duplicate ratio of the velocity: to find the resistance in each place.

Let B*a* be an arc described in one entire oscillation, C the lowest point



of the cycloid, and CZ half the whole cycloidal arc, equal to the length of the pendulum; and let it be required to find the resistance of the body in any place D. Cut the indefinite right line OQ in the points O, S, P, Q, so that (erecting the perpendiculars OK, ST, PI, QE, and with the centre O, and the aysmptotes OK, OQ, describing the hyperbola TIGE cutting the perpendiculars ST, PI, QE in T, I, and E, and through the point I drawing KF, parallel to the asymptote OQ, meeting the asymptote OK in K, and the perpendiculars ST and QE in L and F) the hyperbolic area PIEQ may be to the hyperbolic area PITS as the arc BC, described in the descent of the body, to the arc C*a* described in the ascent; and that the area IEF may be to the area ILT as OQ to OS. Then with the perpendicular MN cut off the hyperbolic area PINM, and let that area be to the hyperbolic area PIEQ as the arc CZ to the arc BC described in the descent. And if the perpendicular RG cut off the hyperbolic area PIGR, which shall be to the area PIEQ as any arc CD to the arc BC described in the whole descent, the resistance in any place D will be to the force of gravity as the area IEF - IGH to the area PINM.

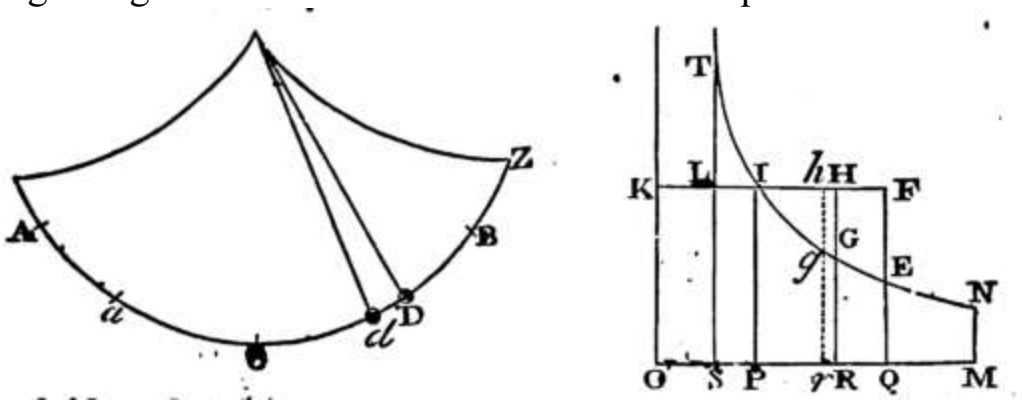
For since the forces arising from gravity with which the body is urged in the places Z, B, D, *a*, are as the arcs CZ, CB, CD, C*a* and those arcs are as the areas PINM, PIEQ, PIGR, PITS; let those areas be the exponents both of the arcs and of the forces respectively. Let D*d* be a very small space described by the body in its descent: and let it be expressed by the very small area RG*gr* comprehended between the parallels RG, *rg*; and produce *rg* to *h*, so that GH*hg* and RG*gr* may be the contemporaneous decrements of the areas IGH, PIGR. And the increment GH*hg* - IEF, or R*r* HG - IEF, of the area IEF - IGH will be to the decrement RG*gr*, or R*r* RG, of the area PIGR, as HG - to RG; and therefore as OR HG - IEF to OR GR or OP PI, that is (because of the equal quantities OR HG, OR HR - OR GR, ORHK - OPIK, PIHR and PIGR + IGH), as PIGR + IGH - IEF to OPIK. Therefore if the area IEF - IGH be called Y, and RG*gr* the decrement of the area PIGR be given, the increment of the area Y will be as PIGR - Y.

Then if V represent the force arising from the gravity, proportional to the arc CD to be described, by which the body is acted upon in D, and R be put for the resistance, V - R will be the whole force with which the body is urged in D. Therefore the increment of the velocity is as V - R and the particle of time in which it is generated conjunctly. But the velocity itself is as the contemporaneous increment of the space described directly and the same particle of time inversely. Therefore, since the resistance is, by the supposition, as the square of the velocity, the increment of the resistance will (by Lem. II) be as the velocity and the increment of the velocity conjunctly, that is, as the moment of the space and V - R conjunctly; and, therefore, if the moment of the space be given, as V - R; that is, if for the force V we put its exponent PIGR, and the resistance R be expressed by any other area Z, as PIGR - Z.

Therefore the area PIGR uniformly decreasing by the subduction of given moments, the area Y increases in proportion of PIGR - Y, and the area Z in proportion of PIGR - Z. And therefore if the areas Y and Z begin together, and at the beginning are equal, these, by the addition of equal moments, will continue to be equal and in like manner decreasing by equal moments, will vanish together. And, *vice versa*, if they together begin and vanish, they will have equal moments and be always equal; and that, because if the resistance Z be augmented, the velocity together with the arc C*a*, described in the ascent of the body, will be diminished; and the point in

which all the motion together with the resistance ceases coming nearer to the point C, the resistance vanishes sooner than the area Y. And the contrary will happen when the resistance is diminished.

Now the area Z begins and ends where the resistance is nothing, that is, at the beginning of the motion where the arc CD is equal to the arc CB,



and the right line RG falls upon the right line QE; and at the end of the motion where the arc CD is equal to the arc C*a*, and RG falls upon the right line ST. And the area Y or IEF - IGH begins and ends also where the resistance is nothing, and therefore where IEF and IGH are equal; that is (by the construction), where the right line RG falls successively upon the right lines QE and ST. Therefore those areas begin and vanish together, and are therefore always equal. Therefore the area IEF - IGH is equal to the area Z, by which the resistance is expressed, and therefore is to the area PINM, by which the gravity is expressed, as the resistance to the gravity. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore the resistance in the lowest place C is to the force of gravity as the area IEF to the area PINM.

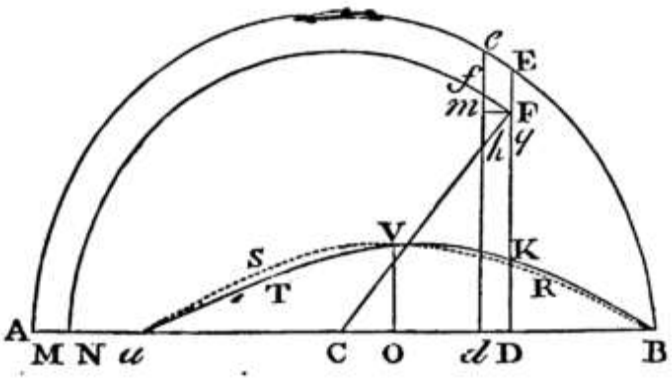
Cor. 2. But it becomes greatest where the area PIHR is to the area IEF as OR to OQ. For in that case its moment (that is, PIGR - Y) becomes nothing.

Cor. 3. Hence also may be known the velocity in each place, as being in the subduplicate ratio of the resistance, and at the beginning of the motion equal to the velocity of the body oscillating in the same cycloid without any resistance.

However, by reason of the difficulty of the calculation by which the resistance and the velocity are found by this Proposition, we have thought fit to subjoin the Proposition following.

PROPOSITION XXX. THEOREM XXIV.

If a right line aB *be equal to the arc of a cycloid which an oscillating body describes, and at each of its points* D *the perpendiculars* DK *be erected, which shall be to the length of the pendulum as the resistance of the body in the corresponding points of the arc to the force of gravity; I say, that the difference between the arc described in the whole descent and the arc described in the whole subsequent ascent drawn into half the sum of the same arcs will be equal to the area* BKa *which all those perpendiculars take up.*



Let the arc of the cycloid, described in one entire oscillation, be expressed by the right line *a*B, equal to it, and the arc which would have been described *in vacuo* by the length AB. Bisect AB in C, and the point C will represent B the lowest point of the cycloid, and CD will be as the force arising from gravity, with which the body in D is urged in the direction of the tangent of the cycloid, and will have the same ratio to the length of the pendulum as the force in D has to the force of gravity. Let that force, therefore, be expressed by that length CD, and the force of gravity by the length of the pendulum; and if in DE you take DK in the same ratio to the length of the pendulum as the resistance has to the gravity, DK will be the exponent of the resistance. From the centre C with the interval CA or CB describe a semi-circle BE*e*A. Let the body describe, in the least time, the space D*d*; and, erecting the perpendiculars DE, *de*, meeting the circumference in E and *e*, they will be as the velocities which the body descending *in vacuo* from the point B would acquire in the places D and *d*. This appears by Prop LII, Book I. Let therefore, these velocities be

expressed by those perpendiculars DE, *de*; and let DF be the velocity which it acquires in D by falling from B in the resisting medium. And if from the centre C with the interval CF we describe the circle F*f*M meeting the right lines *de* and AB in *f* and M, then M will be the place to which it would thenceforward, without farther resistance, ascend, and *df* the velocity it would acquire in *d*. Whence, also, if F*g* represent the moment of the velocity which the body D, in describing the least space D*d*, loses by the resistance of the medium; and CN be taken equal to C*g*; then will N be the place to which the body, if it met no farther resistance, would thenceforward ascend, and MN will be the decrement of the ascent arising from the loss of that velocity. Draw F*m* perpendicular to *df*, and the decrement F*g* of the velocity DF generated by the resistance DK will be to the increment *fm* of the same velocity, generated by the force CD, as the generating force DK to the generating force CD. But because of the similar triangles F*mf*, F*hg*, FDC, *fm* is to F*m* or D*d* as CD to DF; and, *ex aequo*, F*g* to D*d* as DK to DF. Also F*h* is to F*g* as DF to CF; and, *ex aequo perturbatè*, F*h* or MN to D*d* as DK to CF or CM; and therefore the sum of all the MN CM will be equal to the sum of all the D*d* DK. At the moveable point M suppose always a rectangular ordinate erected equal to the indeterminate CM, which by a continual motion is drawn into the whole length A*a*; and the trapezium described by that motion, or its equal, the rectangle A*a* ½*a*B, will be equal to the sum of all the MN CM, and therefore to the sum of all the D*d* DK, that is, to the area BKVT*a*. Q.E.D.

Cor. Hence from the law of resistance, and the difference A*a* of the arcs C*a*, CB, may be collected the proportion of the resistance to the gravity nearly.

For if the resistance DK be uniform, the figure BKT*a* will be a rectangle under B*a* and DK; and thence the rectangle under ½B*a* and A*a* will be equal to the rectangle under B*a* and DK, and DK will be equal to ½A*a*. Wherefore since DK is the exponent of the resistance, and the length of the pendulum the exponent of the gravity, the resistance will be to the gravity as ½A*a* to the length of the pendulum; altogether as in Prop. XXVIII is demonstrated.

If the resistance be as the velocity, the figure BKT*a* will be nearly an ellipsis. For if a body, in a non-resisting medium, by one entire oscillation, should describe the length BA, the velocity in any place D would be as the ordinate DE of the circle described on the diameter AB. Therefore since B*a*

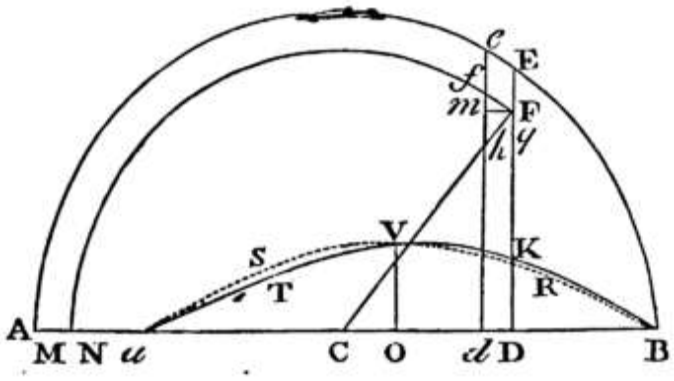
in the resisting medium, and BA in the non-resisting one, are described nearly in the same times; and therefore the velocities in each of the points of B*a* are to the velocities in the correspondent points of the length BA nearly as B*a* is to BA, the velocity in the point D in the resisting medium will be as the ordinate of the circle or ellipsis described upon the diameter B*a*; and therefore the figure BKVT*a* will be nearly an ellipsis. Since the resistance is supposed proportional to the velocity, let OV be the exponent of the resistance in the middle point O; and an ellipsis BRVS*a* described with the centre O, and the semi-axes OB, OV, will be nearly equal to the figure BKVT*a*, and to its equal the rectangle A*a* BO. Therefore A*a* BO is to OV BO as the area of this ellipsis to OV BO; that is, A*a* is to OV as the area of the semi-circle to the square of the radius, or as 11 to 7 nearly; and, therefore, A*a* is to the length of the pendulum as the resistance of the oscillating body in O to its gravity.

Now if the resistance DK be in the duplicate ratio of the velocity, the figure BKVT*a* will be almost a parabola having V for its vertex and OV for its axis, and therefore will be nearly equal to the rectangle under B*a* and OV. Therefore the rectangle under ½B*a* and A*a* is equal to the rectangle ⅔B*a* OV, and therefore OV is equal to ¾A*a*; and therefore the resistance in O made to the oscillating body is to its gravity as ¾Aa to the length of the pendulum.

And I take these conclusions to be accurate enough for practical uses. For since an ellipsis or parabola BRVS*a* falls in with the figure BKVT*a* in the middle point V, that figure, if greater towards the part BRV or VS*a* than the other, is less towards the contrary part, and is therefore nearly equal to it.

PROPOSITION XXXI. THEOREM XXV.

If the resistance made to an oscillating body in each of the proportional parts of the arcs described be augmented or diminished in a given ratio, the difference between the arc described in the descent and the arc described in the subsequent ascent will be augmented or diminished in the same ratio.



For that difference arises from the retardation of the pendulum by the resistance of the medium, and therefore is as the whole retardation and the retarding resistance proportional thereto. In the foregoing Proposition the rectangle under the right line ½*a*B and the difference A*a* of the arcs CB, C*a*, was equal to the area BKT*a*. And that area, if the length *a*B remains, is augmented or diminished in the ratio of the ordinates DK; that is, in the ratio of the resistance and is therefore as the length *a*B and the resistance conjunctly. And therefore the rectangle under A*a* and ½*a*B is as *a*B and the resistance conjunctly, and therefore A*a* is as the resistance. Q.E.D.

Cor. 1. Hence if the resistance be as the velocity, the difference of the arcs in the same medium will be as the whole arc described: and the contrary.

Cor. 2. If the resistance be in the duplicate ratio of the velocity, that difference will be in the duplicate ratio of the whole arc: and the contrary.

Cor. 3. And universally, if the resistance be in the triplicate or any other ratio of the velocity, the difference will be in the same ratio of the whole arc: and the contrary.

Cor. 4. If the resistance be partly in the simple ratio of the velocity, and partly in the duplicate ratio of the same, the difference will be partly in the ratio of the whole arc, and partly in the duplicate ratio of it: and the contrary. So that the law and ratio of the resistance will be the same for the velocity as the law and ratio of that difference for the length of the arc.

Cor. 5. And therefore if a pendulum describe successively unequal arcs, and we can find the ratio of the increment or decrement of this difference for the length of the arc described, there will be had also the ratio of the increment or decrement of the resistance for a greater or less velocity.

GENERAL SCHOLIUM.

From these propositions we may find the resistance of mediums by pendulums oscillating therein. I found the resistance of the air by the following experiments. I suspended a wooden globe or ball weighing 57 ounces troy, its diameter 6 *London* inches, by a fine thread on a firm hook, so that the distance between the hook and the centre of oscillation of the globe was 10½ feet. I marked on the thread a point 10 feet and 1 inch distant from the centre of suspension; and even with that point I placed a ruler divided into inches, by the help whereof I observed the lengths of the arcs described by the pendulum. Then I numbered the oscillations in which the globe would lose part of its motion. If the pendulum was drawn aside from the perpendicular to the distance of 2 inches, and thence let go, so that in its whole descent it described an arc of 2 inches, and in the first whole oscillation, compounded of the descent and subsequent ascent, an arc of almost 4 inches, the same in 164 oscillations lost part of its motion, so as in its last ascent to describe an arc of 1¾ inches. If in the first descent it described an arc of 4 inches, it lost part of its motion in 121 oscillations, so as in its last ascent to describe an arc of 3½ inches. If in the first descent it described an arc of 8, 16, 32, or 64 inches, it lost part of its motion in 69, 35½, 18½, 9⅔ oscillations, respectively. Therefore the difference between the arcs described in the first descent and the last ascent was in the 1st, 2d, 3d, 4th, 5th, 6th cases, ¼, ½, 1, 2, 4, 8 inches respectively. Divide those differences by the number of oscillations in each case, and in one mean oscillation, wherein an arc of 3¾, 7½, 15, 30, 60, 120 inches was described, the difference of the arcs described in the descent and subsequent ascent will be, , , , , parts of an inch, respectively. But these differences in the greater oscillations are in the duplicate ratio of the arcs described nearly, but in lesser oscillations something greater than in that ratio; and therefore (by Cor. 2, Prop. XXXI of this Book) the resistance of the globe, when it moves very swift, is in the duplicate ratio of the velocity, nearly; and when it moves slowly, somewhat greater than in that ratio.

Now let V represent the greatest velocity in any oscillation, and let A, B, and C be given quantities, and let us suppose the difference of the arcs to be $AV + + CV^2$. Since the greatest velocities are in the cycloid as ½ the arcs described in oscillating, and in the circle as ½ the chords of those arcs; and

therefore in equal arcs are greater in the cycloid than in the circle in the ratio of ½ the arcs to their chords; but the times in the circle are greater than in the cycloid, in a reciprocal ratio of the velocity; it is plain that the differences of the arcs (which are as the resistance and the square of the time conjunctly) are nearly the same in both curves: for in the cycloid those differences must be on the one hand augmented, with the resistance, in about the duplicate ratio of the arc to the chord, because of the velocity augmented in the simple ratio of the same; and on the other hand diminished, with the square of the time, in the same duplicate ratio. Therefore to reduce these observations to the cycloid, we must take the same differences of the arcs as were observed in the circle, and suppose the greatest velocities analogous to the half, or the whole arcs, that is, to the numbers ½, 1, 2, 4, 8, 16. Therefore in the 2d, 4th, and 6th cases, put 1, 4, and 16 for V; and the difference of the arcs in the 2d case will become = A + B + C; in the 4th case = 4A + 8B + 16C; in the 6th = 16A + 64B + 256C. These equations reduced give A = 0,0000916, B = 0,0010847, and C = 0,0029558. Therefore the difference of the arcs is as 0,0000916V + + 0,0029558V^2: and therefore since (by Cor. Prop. XXX, applied to this case) the resistance of the globe in the middle of the arc described in oscillating, where the velocity is V, is to its weight as AV + + ¾CV^2 to the length of the pendulum, if for A, B, and C you put the numbers found, the resistance of the globe will be to its weight as 0,0000583V + + 0,0022169V^2 to the length of the pendulum between the centre of suspension and the ruler, that is, to 121 inches. Therefore since V in the second case represents 1, in the 4th case 4, and in the 6th case 16, the resistance will be to the weight of the globe, in the 2d case, as 0,0030345 to 121; in the 4th, as 0,041748 to 121; in the 6th, as 0,61705 to 121.

The arc, which the point marked in the thread described in the 6th case, was of 120 -, or 119 inches. And therefore since the radius was 121 inches, and the length of the pendulum between the point of suspension and the centre of the globe was 126 inches, the arc which the centre of the globe described was 124 inches. Because the greatest velocity of the oscillating body, by reason of the resistance of the air, does not fall on the lowest point of the arc described, but near the middle place of the whole arc, this velocity will be nearly the same as if the globe in its whole descent in a non-resisting medium should describe 62 inches, the half of that arc, and

that in a cycloid, to which we have above reduced the motion of the pendulum; and therefore that velocity will be equal to that which the globe would acquire by falling perpendicularly from a height equal to the versed sine of that arc. But that versed sine in the cycloid is to that arc 62 as the same arc to twice the length of the pendulum 252, and therefore equal to 15,278 inches. Therefore the velocity of the pendulum is the same which a body would acquire by falling, and in its fall describing a space of 15,278 inches. Therefore with such a velocity the globe meets with a resistance which is to its weight as 0,61705 to 121, or (if we take that part only of the resistance which is in the duplicate ratio of the velocity) as 0,56752 to 121.

I found, by an hydrostatical experiment, that the weight of this wooden globe was to the weight of a globe of water of the same magnitude as 55 to 97: and therefore since 121 is to 213,4 in the same ratio, the resistance made to this globe of water, moving forwards with the above-mentioned velocity, will be to its weight as 0,56752 to 213,4, that is, as 1 to 376. Whence since the weight of a globe of water, in the time in which the globe with a velocity uniformly continued describes a length of 30,556 inches, will generate all that velocity in the falling globe, it is manifest that the force of resistance uniformly continued in the same time will take away a velocity, which will be less than the other in the ratio of 1 to 376, that is, the part of the whole velocity. And therefore in the time that the globe, with the same velocity uniformly continued, would describe the length of its semi-diameter, or 3 inches, it would lose the part of its motion.

I also counted the oscillations in which the pendulum lost ¼ part of its motion. In the following table the upper numbers denote the length of the arc described in the first descent, expressed in inches and parts of an inch; the middle numbers denote the length of the arc described in the last ascent; and in the lowest place are the numbers of the oscillations. I give an account of this experiment, as being more accurate than that in which only part of the motion was lost. I leave the calculation to such as are disposed to make it.

First descent

2

4

8

16

64

Last ascent
1½
3
6
12
24

48

Numb. of oscill.
374

272

162½

83⅓
41⅔
22⅔

I afterward suspended a leaden globe of 2 inches in diameter, weighing 26¼ ounces troy by the same thread, so that between the centre of the globe and the point of suspension there was an interval of 10½ feet, and I counted the oscillations in which a given part of the motion was lost. The first of the following tables exhibits the number of oscillations in which part of the whole motion was lost; the second the number of oscillations in which there was lost part of the same.

First descent

1
2
4
8
16
32

64

Last ascent

3½
7
14
28

56

Numb, of oscill.
226
228
193

140

90½

53

30

First descent
1
2
4
8
16
32

64

Last ascent
¾
1½
3
6
12
24

48

Numb. of oscill.
510
518
420
318
204
121

Selecting in the first table the 3d, 5th, and 7th observations, and expressing the greatest velocities in these observations particularly by the numbers 1, 4, 16 respectively, and generally by the quantity V as above, there will come out in the 3d observation = A + B + C, in the 5th observation = 4A + 8B + 16C, in the 7th observation = 16A + 64B + 256C. These equations reduced give A = 0,001414, B = 0,000297, C = 0,000879. And thence the resistance of the globe moving with the velocity V will be to its weight 26¼ ounces in the same ratio as 0,0009V + + 0,000659V² to 121 inches, the length of the pendulum. And if we regard that part only of the resistance which is in the duplicate ratio of the velocity, it will be to the weight of the globe as 0,000659V² to 121 inches. But this part of the resistance in the first experiment was to the weight of the wooden globe of 57 ounces as 0,002217V² to 121; and thence the resistance of the wooden globe is to the resistance of the leaden one (their velocities being equal) as 57 into 0,002217 to 26¼ into 0,000659, that is, as 7⅓ to 1. The diameters of the two globes were 6 and 2 inches, and the squares of these are to each other as 47¼ and 4, or 11 and 1, nearly. Therefore the resistances of these equally swift globes were in less than a duplicate ratio of the diameters. But we have not yet considered the resistance of the thread, which was certainly very considerable, and ought to be subducted from the resistance of the pendulums here found. I could not determine this accurately, but I found it greater than a third part of the whole resistance of the lesser pendulum; and thence I gathered that the resistances of the globes, when the resistance of the thread is subducted, are nearly in the duplicate ratio of their diameters. For the ratio of 7⅓ - ⅓ to 1 - ⅓, or 10½ to 1 is not very different from the duplicate ratio of the diameters 11 to 1.

Since the resistance of the thread is of less moment in greater globes, I tried the experiment also with a globe whose diameter was 18¾ inches. The length of the pendulum between the point of suspension and the centre of oscillation was 122½ inches, and between the point of suspension and the knot in the thread 109½ inches. The arc described by the knot at the first descent of the pendulum was 32 inches. The arc described by the same knot

in the last ascent after five oscillations was 28 inches. The sum of the arcs, or the whole arc described in one mean oscillation, was 60 inches. The difference of the arcs 4 inches. The part of this, or the difference between the descent and ascent in one mean oscillation, is of an inch. Then as the radius 109½ to the radius 122½, so is the whole arc of 60 inches described by the knot in one mean oscillation to the whole arc of 67 inches described by the centre of the globe in one mean oscillation; and so is the difference to a new difference 0,4475. If the length of the arc described were to remain, and the length of the pendulum should be augmented in the ratio of 126 to 122½, the time of the oscillation would be augmented, and the velocity of the pendulum would be diminished in the subduplicate of that ratio; so that the difference 0,4475 of the arcs described in the descent and subsequent ascent would remain. Then if the arc described be augmented in the ratio of 124 to 67, that difference 0.4475 would be augmented in the duplicate of that ratio, and so would become 1,5295. These things would be so upon the supposition that the resistance of the pendulum were in the duplicate ratio of the velocity. Therefore if the pendulum describe the whole arc of 124 inches, and its length between the point of suspension and the centre of oscillation be 126 inches, the difference of the arcs described in the descent and subsequent ascent would be 1,5295 inches. And this difference multiplied into the weight of the pendulous globe, which was 208 ounces, produces 318,136. Again; in the pendulum above-mentioned, made of a wooden globe, when its centre of oscillation, being 126 inches from the point of suspension, described the whole arc of 124inches, the difference of the arcs described in the descent and ascent was into. This multiplied into the weight of the globe, which was 57 ounces, produces 49,396. But I multiply these differences into the weights of the globes, in order to find their resistances. For the differences arise from the resistances, and are as the resistances directly and the weights inversely. Therefore the resistances are as the numbers 318,136 and 49,396. But that part of the resistance of the lesser globe, which is in the duplicate ratio of the velocity, was to the whole resistance as 0,56752 tor 0,61675, that is, as 45,453 to 49,396; whereas that part of the resistance of the greater globe is almost equal to its whole resistance; and so those parts are nearly as 318,136 and 45,453, that is, as 7 and 1. But the diameters of the globes are 18¾ and 6; and their squares 351 and 47 are as 7,438 and 1, that is, as the resistances of the globes 7 and 1,

nearly. The difference of these ratios is scarce greater than may arise from the resistance of the thread. Therefore those parts of the resistances which are, when the globes are equal, as the squares of the velocities, are also, when the velocities are equal, as the squares of the diameters of the globes.

But the greatest of the globes I used in these experiments was not perfectly spherical, and therefore in this calculation I have, for brevity's sake, neglected some little niceties; being not very solicitous for an accurate calculus in an experiment that was not very accurate. So that I could wish that these experiments were tried again with other globes, of a larger size, more in number, and more accurately formed; since the demonstration of a vacuum depends thereon. If the globes be taken in a geometrical proportion, as suppose whose diameters are 4, 8, 16, 32 inches; one may collect from the progression observed in the experiments what would happen if the globes were still larger.

In order to compare the resistances of different fluids with each other, I made the following trials. I procured a wooden vessel 4 feet long, 1 foot broad, and 1 foot high. This vessel, being uncovered, I filled with spring water, and, having immersed pendulums therein, I made them oscillate in the water. And I found that a leaden globe weighing 166 ounces, and in diameter 3 inches, moved therein as it is set down in the following table; the length of the pendulum from the point of suspension to a certain point marked in the thread being 126 inches, and to the centre of oscillation 134 inches.

The arc described in the first descent, by a point marked in the thread was inches.

64

32

16

8

4

2

1

.

½

.

¼

The arc described in the last ascent was inches.

48

24

12

6

3

.

1½

.

¾

.

.

The difference of the arcs, proportional to the motion lost, was inches.

16

8

4

2

1

.

½

.

¼

.

.

The number of the oscillations in water.

.

1

3

.

11¼

.

12⅔

.

13⅓

The number of the oscillations in air.

85½

.

287

535

In the experiments of the 4th column there were equal motions lost in 535 oscillations made in the air, and 1 in water. The oscillations in the air were indeed a little swifter than those in the water. But if the oscillations in the water were accelerated in such a ratio that the motions of the pendulums might be equally swift in both mediums, there would be still the same number 1 of oscillations in the water, and by these the same quantity of motion would be lost as before; because the resistance it increased, and the square of the time diminished in the same duplicate ratio. The pendulums, therefore, being of equal velocities, there were equal motions lost in 535 oscillations in the air, and 1 in the water; and therefore the resistance of the pendulum in the water is to its resistance in the air as 535 to 1. This is the proportion of the whole resistances in the case of the 4th column.

Now let $AV + CV^2$ represent the difference of the arcs described in the descent and subsequent ascent by the globe moving in air with the greatest velocity V; and since the greatest velocity is in the case of the 4th column to the greatest velocity in the case of the 1st column as 1 to 8; and that difference of the arcs in the case of the 4th column to the difference in the case of the 1st column as to, or as 85½ to 4280; put in these cases 1 and 8

for the velocities, and 85½ and 4280 for the differences of the arcs, and A + C will be = 85½, and 8A + 64C = 4280 or A + 8C = 535; and then by reducing these equations, there will come out 7C = 449½ and C = 64 and A = 21; and therefore the resistance, which is as AV + ¾CV², will become as 13V + 48V². Therefore in the case of the 4th column, where the velocity was 1, the whole resistance is to its part proportional to the square of the velocity as 13 + 48 or 61 to 48; and therefore the resistance of the pendulum in water is to that part of the resistance in air, which is proportional to the square of the velocity, and which in swift motions is the only part that deserves consideration, as 61 to 48 and 535 to 1 conjunctly, that is, as 571 to 1. If the whole thread of the pendulum oscillating in the water had been immersed, its resistance would have been still greater; so that the resistance of the pendulum oscillating in the water, that is, that part which is proportional to the square of the velocity, and which only needs to be considered in swift bodies, is to the resistance of the same whole pendulum, oscillating in air with the same velocity, as about 850 to 1, that is as, the density of water to the density of air, nearly.

In this calculation we ought also to have taken in that part of the resistance of the pendulum in the water which was as the square of the velocity; but I found (which will perhaps seem strange) that the resistance in the water was augmented in more than a duplicate ratio of the velocity. In searching after the cause, I thought upon this, that the vessel was too narrow for the magnitude of the pendulous globe, and by its narrowness obstructed the motion of the water as it yielded to the oscillating globe. For when I immersed a pendulous globe, whose diameter was one inch only, the resistance was augmented nearly in a duplicate ratio of the velocity, I tried this by making a pendulum of two globes, of which the lesser and lower oscillated in the water, and the greater and higher was fastened to the thread just above the water, and, by oscillating in the air, assisted the motion of the pendulum, and continued it longer. The experiments made by this contrivance proved according to the following table.

Arc descr. in first descent

16

.

8

4

2

1

.
½
.
¼

Arc descr. in last ascent

12

.

6

3

.
1½
.
¾
.

.

Diff. of arcs, proport. to motion lost

4

2

1

.
½
.
¼
.

.

Number of oscillations

3

.
6½
.

12

.

21

.

34

.

53

In comparing the resistances of the mediums with each other, I also caused iron pendulums to oscillate in quicksilver. The length of the iron wire was about 3 feet, and the diameter of the pendulous globe about ⅓ of an inch. To the wire, just above the quicksilver, there was fixed another leaden globe of a bigness sufficient to continue the motion of the pendulum for some time. Then a vessel, that would hold about 3 pounds of quicksilver, was filled by turns with quicksilver and common water, that, by making the pendulum oscillate successively in these two different fluids, I might find the proportion of their resistances; and the resistance of the quicksilver proved to be to the resistance of water as about 13 or 14 to 1; that is, as the density of quicksilver to the density of water. When I made use of a pendulous globe something bigger, as of one whose diameter was about ½ or ⅔ of an inch, the resistance of the quicksilver proved to be to the resistance of the water as about 12 or 10 to 1. But the former experiment is more to be relied on, because in the latter the vessel was too narrow in proportion to the magnitude of the immersed globe; for the vessel ought to have been enlarged together with the globe. I intended to have repeated these experiments with larger vessels, and in melted metals, and other liquors both cold and hot; but I had not leisure to try all: and besides, from what is already described, it appears sufficiently that the resistance of bodies moving swiftly is nearly proportional to the densities of the fluids in which they move. I do not say accurately; for more tenacious fluids, of equal density, will undoubtedly resist more than those that are more liquid; as cold oil more than warm, warm oil more than rain water, and water more than spirit of wine. But in liquors, which are sensibly fluid enough, as in air, in salt and fresh water, in spirit of wine, of turpentine, and salts, in oil cleared of its faeces by distillation and warmed, in oil of vitriol, and in mercury, and melted metals, and any other such like, that are fluid enough to retail for some time the motion impressed upon them by the agitation of the vessel, and which being poured out are easily resolved into drops, I doubt not but the rule already laid down may be accurate enough, especially

if the experiments be made with larger pendulous bodies and more swiftly moved.

Lastly, since it is the opinion of some that there is a certain aethereal medium extremely rare and subtile, which freely pervades the pores of all bodies; and from such a medium, so pervading the pores of bodies, some resistance must needs arise; in order to try whether the resistance, which we experience in bodies in motion, be made upon their outward superficies only, or whether their internal parts meet with any considerable resistance upon their superficies, I thought of the following experiment. I suspended a round deal box by a thread 11 feet long, on a steel hook, by means of a ring of the same metal, so as to make a pendulum of the aforesaid length. The hook had a sharp hollow edge on its upper part, so that the upper arc of the ring pressing on the edge might move the more freely; and the thread was fastened to the lower arc of the ring. The pendulum being thus prepared, I drew it aside from the perpendicular to the distance of about 6 feet, and that in a plane perpendicular to the edge of the hook, lest the ring, while the pendulum oscillated, should slide to and fro on the edge of the hook: for the point of suspension, in which the ring touches the hook, ought to remain immovable. I therefore accurately noted the place to which the pendulum was brought, and letting it go, I marked three other places, to which it returned at the end of the 1st, 2d, and 3d oscillation. This I often repeated, that I might find those places as accurately as possible. Then I filled the box with lead and other heavy metals that were near at hand. But, first, I weighed the box when empty, and that part of the thread that went round it, and half the remaining part, extended between the hook and the suspended box; for the thread so extended always acts upon the pendulum, when drawn aside from the perpendicular, with half its weight. To this weight I added the weight of the air contained in the box. And this whole weight was about of the weight of the box when filled with the metals. Then because the box when full of the metals, by extending the thread with its weight, increased the length of the pendulum, I shortened the thread so as to make the length of the pendulum, when oscillating, the same as before. Then drawing aside the pendulum to the place first marked, and letting it go, I reckoned about 77 oscillations before the box returned to the second mark, and as many afterwards before it came to the third mark, and as many after that before it came to the fourth mark. From whence I conclude that the

whole resistance of the box, when full, had not a greater proportion to the resistance of the box, when empty, than 78 to 77. For if their resistances were equal, the box, when full, by reason of its *vis insita*, which was 78 times greater than the *vis insita* of the same when empty, ought to have continued its oscillating motion so much the longer, and therefore to have returned to those marks at the end of 78 oscillations. But it returned to them at the end of 77 oscillations.

Let, therefore, A represent the resistance of the box upon its external superficies, and B the resistance of the empty box on its internal superficies; and if the resistances to the internal parts of bodies equally swift be as the matter, or the number of particles that are resisted, then 78B will be the resistance made to the internal parts of the box, when full; and therefore the whole resistance A + B of the empty box will be to the whole resistance A + 78B of the full box as 77 to 78, and, by division, A + B to 77B as 77 to 1; and thence A + B to B as 77 77 to 1, and, by division again, A to B as 5928 to 1. Therefore the resistance of the empty box in its internal parts will be above 5000 times less than the resistance on its external superficies. This reasoning depends upon the supposition that the greater resistance of the full box arises not from any other latent cause, but only from the action of some subtile fluid upon the included metal.

This experiment is related by memory, the paper being lost in which I had described it; so that I have been obliged to omit some fractional parts, which are slipt out of my memory; and I have no leisure to try it again. The first time I made it, the hook being weak, the full box was retarded sooner. The cause I found to be, that the hook was not strong enough to bear the weight of the box; so that, as it oscillated to and fro, the hook was bent sometimes this and sometimes that way. I therefore procured a hook of sufficient strength, so that the point of suspension might remain unmoved, and then all things happened as is above described.

Section VII: Of the motion of fluids and the resistance made to projected bodies

PROPOSITION XXXII. THEOREM XXVI.

Suppose two similar systems of bodies consisting of an equal number of particles, and let the correspondent particles be similar and proportional, each in one system to each in the other, and have a like situation among themselves, and the same given ratio of density to each other; and let them begin to move among themselves in proportional times, and with like motions (that is, those in one system among one another, and those in the other among one another). And if the particles that are in the same system do not touch one another, except it the moments of reflexion; nor attract, nor repel each other, except with accelerative forces that are as the diameters of the correspondent particles inversely, and the squares of the velocities directly; I say, that the particles of those systems will continue to move among themselves with like motions and in proportional times.

Like bodies in like situations are said to be moved among themselves with like motions and in proportional times, when their situations at the end of those times are always found alike in respect of each other; as suppose we compare the particles in one system with the correspondent particles in the other. Hence the times will be proportional, in which similar and proportional parts of similar figures will be described by correspondent particles. Therefore if we suppose two systems of this kind, the correspondent particles, by reason of the similitude of the motions at their beginning, will continue to be moved with like motions, so long as they move without meeting one another; for if they are acted on by no forces,they will go on uniformly in right lines, by the 1st Law. But if they do agitate one another with some certain forces, and those forces are as the diameters of the correspondent particles inversely and the squares of the velocities directly, then, because the particles are in like situations, and their forces are proportional, the whole forces with which correspondent particles are agitated, and which are compounded of each of the agitating forces (by

Corol. 2 of the Laws), will have like directions, and have the same effect as if they respected centres placed alike among the particles; and those whole forces will be to each other as the several forces which compose them, that is, as the diameters of the correspondent particles inversely, and the squares of the velocities directly: and therefore will cause correspondent particles to continue to describe like figures. These things will be so (by Cor. 1 and 8, Prop. IV., Book 1), if those centres are at rest but if they are moved, yet by reason of the similitude of the translations, their situations among the particles of the system will remain similar, so that the changes introduced into the figures described by the particles will still be similar. So that the motions of correspondent and similar particles will continue similar till their first meeting with each other; and thence will arise similar collisions, and similar reflexions; which will again beget similar motions of the particles among themselves (by what was just now shown), till they mutually fall upon one another again, and so on *ad infinitum*.

Cor. 1. Hence if any two bodies, which are similar and in like situations to the correspondent particles of the systems, begin to move amongst them in like manner and in proportional times, and their magnitudes and densities be to each other as the magnitudes and densities of the corresponding particles, these bodies will continue to be moved in like manner and in proportional times: for the case of the greater parts of both systems and of the particles is the very same.

Cor. 2. And if all the similar and similarly situated parts of both systems be at rest among themselves; and two of them, which are greater than the rest, and mutually correspondent in both systems, begin to move in lines alike posited, with any similar motion whatsoever, they will excite similar motions in the rest of the parts of the systems, and will continue to move among those parts in like manner and in proportional times; and will therefore describe spaces proportional to their diameters.

PROPOSITION XXXIII. THEOREM XXVII.

The same things faring supposed, I say, that the greater parts of the systems are resisted in a ratio compounded of the duplicate ratio of their velocities,

and the duplicate ratio of their diameters, and the simple ratio of the density of the parts of the systems.

For the resistance arises partly from the centripetal or centrifugal forces with which the particles of the system mutually act on each other, partly from the collisions and reflexions of the particles and the greater parts. The resistances of the first kind are to each other as the whole motive forces from which they arise, that is, as the whole accelerative forces and the quantities of matter in corresponding parts; that is (by the supposition), as the squares of the velocities directly, and the distances of the corresponding particles inversely, and the quantities of matter in the correspondent parts directly: and therefore since the distances of the particles in one system are to the correspondent distances of the particles of the other as the diameter of one particle or part in the former system to the diameter of the correspondent particle or part in the other, and since the quantities of matter are as the densities of the parts and the cubes of the diameters; the resistances are to each other as the squares of the velocities and the squares of the diameters and the densities of the parts of the systems. Q.E.D. The resistances of the latter sort are as the number of correspondent reflexions and the forces of those reflexions conjunctly; but the number of the reflexions are to each other as the velocities of the corresponding parts directly and the spaces between their reflexions inversely. And the forces of the reflexions are as the velocities and the magnitudes and the densities of the corresponding parts conjunctly; that is, as the velocities and the cubes of the diameters and the densities of the parts. And, joining all these ratios, the resistances of the corresponding parts are to each other as the squares of the velocities and the squares of the diameters and the densities of the parts conjunctly. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore if those systems are two elastic fluids, like our air, and their parts are at rest among themselves; and two similar bodies proportional in magnitude and density to the parts of the fluids, and similarly situated among those parts, be any how projected in the direction of lines similarly posited; and the accelerative forces with which the particles of the fluids mutually act upon each other are as the diameters of the bodies projected inversely and the squares of their velocities directly; those bodies will excite similar motions in the fluids in proportional times, and will describe similar spaces and proportional to their diameters.

Cor. 2. Therefore in the same fluid a projected body that moves swiftly meets with a resistance that is, in the duplicate ratio of its velocity, nearly. For if the forces with which distant particles act mutually upon one another should be augmented in the duplicate ratio of the velocity, the projected body would be resisted in the same duplicate ratio accurately; and therefore in a medium, whose parts when at a distance do not act mutually with any force on one another, the resistance is in the duplicate ratio of the velocity accurately. Let there be, therefore, three mediums A, B, C, consisting of similar and equal parts regularly disposed at equal distances. Let the parts of the mediums A and B recede from each other with forces that are among themselves as T and V; and let the parts of the medium C be entirely destitute of any such forces. And if four equal bodies D, E, F, G, move in these mediums, the two first D and E in the two first A and B, and the other two F and G in the third C; and if the velocity of the body D be to the velocity of the body E, and the velocity of the body F to the velocity of the body G, in the subduplicate ratio of the force T to the force V; the resistance of the body D to the resistance of the body E, and the resistance of the body F to the resistance of the body G, will be in the duplicate ratio of the velocities; and therefore the resistance of the body D will be to the resistance of the body F as the resistance of the body E to the resistance of the body G. Let the bodies D and F be equally swift, as also the bodies E and G; and, augmenting the velocities of the bodies D and F in any ratio, and diminishing the forces of the particles of the medium B in the duplicate of the same ratio, the medium B will approach to the form and condition of the medium C at pleasure; and therefore the resistances of the equal and equally swift bodies E and G in these mediums will perpetually approach to equality so that their difference will at last become less than any given. Therefore since the resistances of the bodies D and F are to each other as the resistances of the bodies E and G, those will also in like manner approach to the ratio of equality. Therefore the bodies D and F, when they move with very great swiftness, meet with resistances very nearly equal; and therefore since the resistance of the body F is in a duplicate ratio of the velocity, the resistance of the body D will be nearly in the same ratio.

Cor. 3. The resistance of a body moving very swift in an elastic fluid is almost the same as if the parts of the fluid were destitute of their centrifugal forces, and did not fly from each other; if so be that the elasticity of the fluid

arise from the centrifugal forces of the particles, and the velocity be so great as not to allow the particles time enough to act.

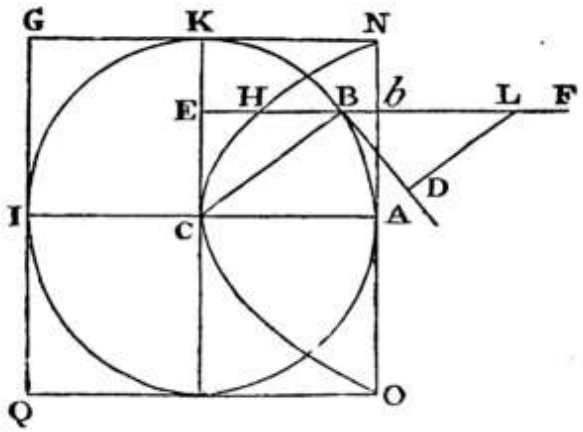
Cor. 4. Therefore, since the resistances of similar and equally swift bodies, in a medium whose distant parts do not fly from each other, are as the squares of the diameters, the resistances made to bodies moving with very great and equal velocities in an elastic fluid will be as the squares of the diameters, nearly.

Cor. 5. And since similar, equal, and equally swift bodies, moving through mediums of the same density, whose particles do not fly from each other mutually, will strike against an equal quantity of matter in equal times, whether the particles of which the medium consists be more and smaller, or fewer and greater, and therefore impress on that matter an equal quantity of motion, and in return (by the 3d Law of Motion) suffer an equal reaction from the same, that is, are equally resisted; it is manifest, also, that in elastic fluids of the same density, when the bodies move with extreme swiftness, their resistances are nearly equal, whether the fluids consist of gross parts, or of parts ever so subtile. For the resistance of projectiles moving with exceedingly great celerities is not much diminished by the subtilty of the medium.

Cor. 6. All these things are so in fluids whose elastic force takes its rise from the centrifugal forces of the particles. But if that force arise from some other cause, as from the expansion of the particles after the manner of wool, or the boughs of trees, or any other cause, by which the particles are hindered from moving freely among themselves, the resistance, by reason of the lesser fluidity of the medium, will be greater than in the Corollaries above.

PROPOSITION XXXIV. THEOREM XXVIII.

If in a rare medium, consisting of equal particles freely disposed at equal distances front each other, a globe and a cylinder described on equal diameters move with equal velocities in the direction of the axis of the cylinder, the resistance of the globe will be but half so great as that of the cylinder.

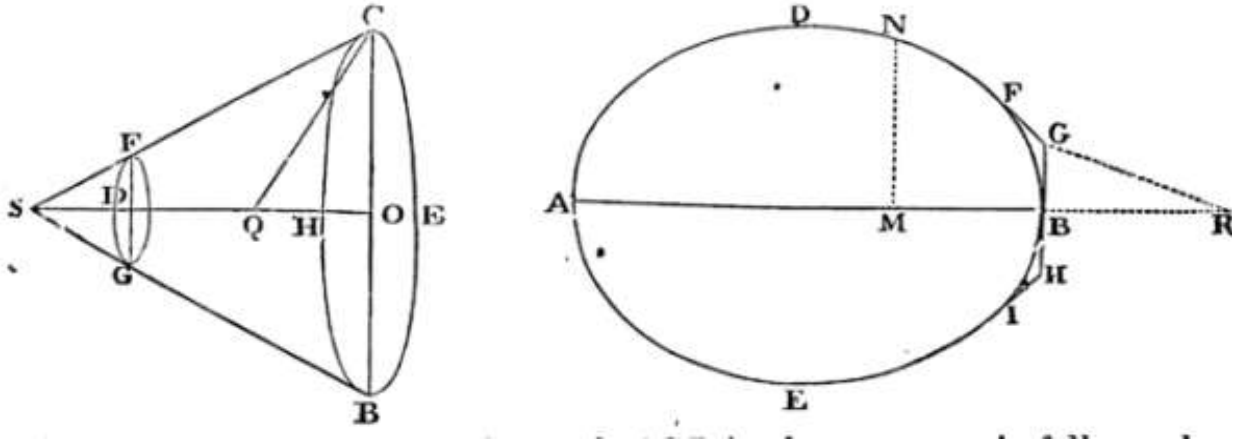


For since the action of the medium upon the body is the same (by Cor. 5 of the Laws) whether the body move in a quiescent medium, or whether the particles of the medium impinge with the same velocity upon the quiescent body, let us consider the body as if it were quiescent, and see with what force it would be impelled by the moving medium. Let, therefore, ABKI represent a spherical body described from the centre O with the semidiameter CA, and let the particles of the medium impinge with a given velocity upon that spherical body in the directions of right lines parallel to AC; and let FB be one of those right lines. In FB take LB equal to the semidiameter CB, and draw BD touching the sphere in B. Upon KC and BD let fall the perpendiculars BE, LD; and the force with which a particle of the medium, impinging on the globe obliquely in the direction FB, would strike the globe in B, will be to the force with which the same particle, meeting the cylinder ONGQ, described about the globe with the axis ACI, would strike it perpendicularly in *b*, as LD to LB, or BE to BC. Again; the efficacy of this force to move the globe, according to the direction of its incidence FB or AC, is to the efficacy of the same to move the globe, according to the direction of its determination, that is, in the direction of the right line BC in which it impels the globe directly, as BE to BC. And, joining these ratios, the efficacy of a particle, falling upon the globe obliquely in the direction of the right line FB to move the globe in the direction of its incidence, is to the efficacy of the same particle falling in the same line perpendicularly on the cylinder, to move it in the same direction, as BE^2 to BC^2. Therefore if in *b*E, which is perpendicular to the circular base of the cylinder NAO, and equal to the radius AC, we take *b*H equal to; then *b*H will be to *b*E as the effect of the particle upon the globe to the effect of the particle upon the cylinder. And

therefore the solid which is formed by all the right lines *b*H will be to the solid formed by all the right lines *b*E as the effect of all the particles upon the globe to the effect of all the particles upon the cylinder. But the former of these solids is a paraboloid whose vertex is C, its axis CA, and latus rectum CA, and the latter solid is a cylinder circumscribing the paraboloid; and it is known that a paraboloid is half its circumscribed cylinder. Therefore the whole force of the medium upon the globe is half of the entire force of the same upon the cylinder. And therefore if the particles of the medium are at rest, and the cylinder and globe move with equal velocities, the resistance of the globe will be half the resistance of the cylinder. Q.E.D.

SCHOLIUM.

By the same method other figures may be compared together as to their resistance; and those may be found which are most apt to continue their motions in resisting mediums. As if upon the circular base CEBH from the centre O, with the radius OC, and the altitude OD, one would construct a frustum CBGF of a cone, which should meet with less resistance than any other frustum constructed with the same base and altitude, and going forwards towards D in the direction of its axis: bisect the altitude OD in Q, and produce OQ to S, so that QS may be equal to QC, and S will be the vertex of the cone whose frustum is sought.



Whence, by the bye, since the angle CSB is always acute, it follows, that, if the solid ADBE be generated by the convolution of an elliptical or oval figure ADBE about its axis AB, and the generating figure be touched by

three right lines FG, GH, HI, in the points P, B, and I, so that GH shall be perpendicular to the axis in the point of contact B, and FG, HI may be inclined to GH in the angles FGB, BHI of 135 degrees: the solid arising from the convolution of the figure ADFGHIE about the same axis AB will be less resisted than the former solid; if so be that both move forward in the direction of their axis AB, and that the extremity B of each go foremost. Which Proposition I conceive may be of use in the building of ships.

If the figure DNFG be such a curve, that if, from any point thereof, as N, the perpendicular NM be let fall on the axis AB, and from the given point G there be drawn the right line GR parallel to a right line touching the figure in N, and cutting the axis produced in R, MN becomes to GR as GR^3 to $4BR\ GB^2$; the solid described by the revolution of tins figure about its axis AB, moving in the before-mentioned rare medium from A towards B, will be less resisted than any other circular solid whatsoever, described of the same length and breadth.

PROPOSITION XXXV. PROBLEM VII.

If a rare medium consist of very small quiescent particles of equal magnitudes, and freely disposed at equal distances from one another: to find the resistance of a globe moving uniformly forward in this medium.

Case 1. Let a cylinder described with the same diameter and altitude be conceived to go forward with the same velocity in the direction of its axis through the same medium; and let us suppose that the particles of the medium, on which the globe or cylinder falls, fly back with as great a force of reflexion as possible. Then since the resistance of the globe (by the last Proposition) is but half the resistance of the cylinder, and since the globe is to the cylinder as 2 to 3, and since the cylinder by falling perpendicularly on the particles, and reflecting them with the utmost force, communicates to them a velocity double to its own; it follows that the cylinder, in moving forward uniformly half the length of its axis, will communicate a motion to the particles which is to the whole motion of the cylinder as the density of the medium to the density of the cylinder; and that the globe, in the time it describes one length of its diameter in moving uniformly forward, will

communicate the same motion to the particles; and in the time that it describes two thirds of its diameter, will communicate a motion to the particles which is to the whole motion of the globe as the density of the medium to the density of the globe. And therefore the globe meets with a resistance, which is to the force by which its whole motion may be either taken away or generated in the time in which it describes two thirds of its diameter moving uniformly forward, as the density of the medium to the density of the globe.

Case 2. Let us suppose that the particles of the medium incident on the globe or cylinder are not reflected; and then the cylinder falling perpendicularly on the particles will communicate its own simple velocity to them, and therefore meets a resistance but half so great as in the former case, and the globe also meets with a resistance but half so great.

Case 3. Let us suppose the particles of the medium to fly back from the globe with a force which is neither the greatest, nor yet none at all, but with a certain mean force; then the resistance of the globe will be in the same mean ratio between the resistance in the first case and the resistance in the second. Q.E.I.

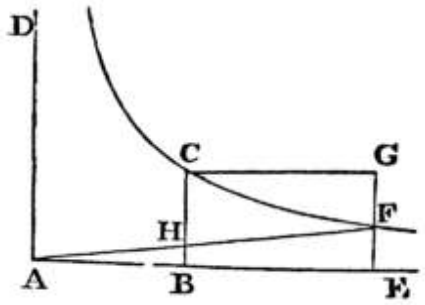
Cor. 1. Hence if the globe and the particles are infinitely hard, and destitute of all elastic force, and therefore of all force of reflexion; the resistance of the globe will be to the force by which its whole motion may be destroyed or generated, in the time that the globe describes four third parts of its diameter, as the density of the medium to the density of the globe.

Cor. 2. The resistance of the globe, *caeteris paribus*, is in the duplicate ratio of the velocity.

Cor. 3. The resistance of the globe, *caeteris paribus*, is in the duplicate ratio of the diameter.

Cor. 4. The resistance of the globe is, *caeteris paribus*, as the density of the medium.

Cor. 5. The resistance of the globe is in a ratio compounded of the duplicate ratio of the velocity, and the duplicate ratio of the diameter, and the ratio of the density of the medium.



Cor. 6. The motion of the globe and its resistance may be thus expounded. Let AB be the time in which the globe may, by its resistance uniformly continued, lose its whole motion. Erect AD, BC perpendicular to AB. Let BC be that whole motion, and through the point C, the asymptotes being AD, AB, describe the hyperbola CF. Produce AB to any point E. Erect the perpendicular EF meeting the hyperbola in F. Complete the parallelogram CBEG, and draw AF meeting BC in H. Then if the globe in any time BE, with its first motion BC uniformly continued, describes in a non-resisting medium the space CBEG expounded by the area of the parallelogram, the same in a resisting medium will describe the space CBEF expounded by the area of the hyperbola; and its motion at the end of that time will be expounded by EF, the ordinate of the hyperbola, there being lost of its motion the part FG. And its resistance at the end of the same time will be expounded by the length BH, there being lost of its resistance the part CH. All these things appear by Cor. 1 and 3, Prop. V., Book II.

Cor. 7. Hence if the globe in the time T by the resistance R uniformly continued lose its whole motion M, the same globe in the time *t* in a resisting medium, wherein the resistance R decreases in a duplicate ratio of the velocity, will lose out of its motion M the part, the part remaining; and will describe a space which is to the space described in the same time *t*, with the uniform motion M, as the logarithm of the number multiplied by the number 2,302585092994 is to the number, because the hyperbolic area BCFE is to the rectangle BCGE in that proportion.

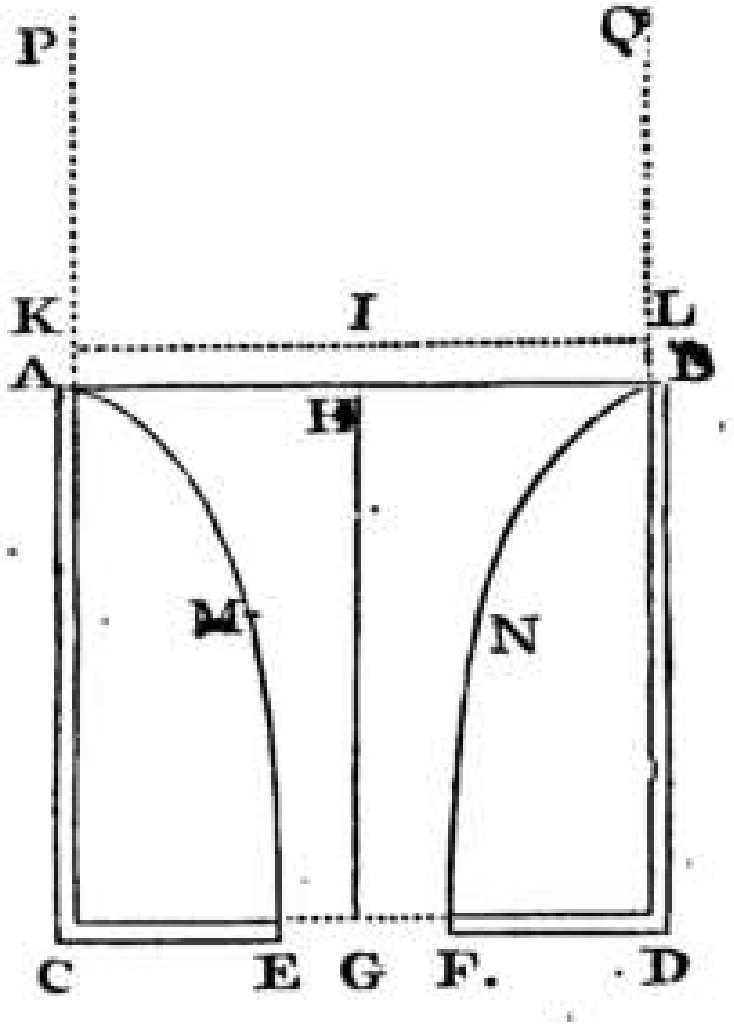
SCHOLIUM.

I have exhibited in this Proposition the resistance and retardation of spherical projectiles in mediums that are not continued, and shewn that this resistance is to the force by which the whole motion of the globe may be destroyed or

produced in the time in which the globe can describe two thirds of its diameter; with a velocity uniformly continued, as the density of the medium to the density of the globe, if so be the globe and the particles of the medium be perfectly elastic, and are endued with the utmost force of reflexion; and that this force, where the globe and particles of the medium are infinitely hard and void of any reflecting force, is diminished one half. But in continued mediums, as water, hot oil, and quicksilver, the globe as it passes through them does not immediately strike against all the particles of the fluid that generate the resistance made to it, but presses only the particles that lie next to it, which press the particles beyond, which press other particles, and so on; and in these mediums the resistance is diminished one other half. A globe in these extremely fluid mediums meets with a resistance that is to the force by which its whole motion may be destroyed or generated in the time wherein it can describe, with that motion uniformly continued, eight third parts of its diameter, as the density of the medium to the density of the globe. This I shall endeavour to shew in what follows.

PROPOSITION XXXVI. PROBLEM VIII.

To define the motion of water running out of a cylindrical vessel through a hole made at the bottom.



Let ACDB be a cylindrical vessel, AB the mouth of it, CD the bottom parallel to the horizon, EF a circular hole in the middle of the bottom, G the centre of the hole, and GH the axis of the cylinder perpendicular to the horizon. And suppose a cylinder of ice APQB to be of the same breadth with the cavity of the vessel, and to have the same axis, and to descend perpetually with an uniform motion, and that its parts, as soon as they touch the superficies AB, dissolve into water, and flow down by their weight into the vessel, and in their fall compose the cataract or column of water ABNFEM, passing through the hole EF, and filling up the same exactly. Let the uniform velocity of the descending ice and of the contiguous water in the circle AB be that which the water would acquire by falling through the space IH; and let IH and HG lie in the same right line; and through the point I let there be drawn the right line KL parallel to the horizon and meeting the ice

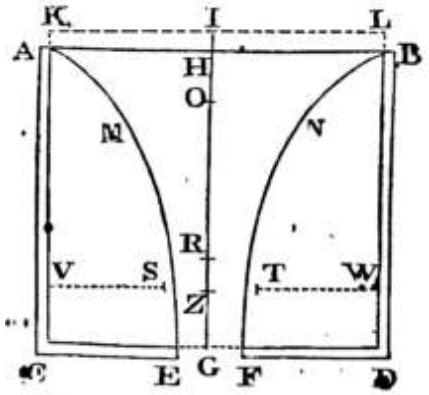
on both the sides thereof in K and L. Then the velocity of the water running out at the hole EF will be the same that it would acquire by falling from I through the space IG. Therefore, by *Galileo's* Theorems, IG will be to IH in the duplicate ratio of the velocity of the water that runs out at the hole to the velocity of the water in the circle AB, that is, in the duplicate ratio of the circle AB to the circle EF; those circles being reciprocally as the velocities of the water which in the same time and in equal quantities passes severally through each of them, and completely fills them both. We are now considering the velocity with which the water tends to the plane of the horizon. But the motion parallel to the same, by which the parts of the falling water approach to each other, is not here taken notice of; since it is neither produced by gravity, nor at all changes the motion perpendicular to the horizon which the gravity produces. We suppose, indeed, that the parts of the water cohere a little, that by their cohesion they may in falling approach to each other with motions parallel to the horizon in order to form one single cataract, and to prevent their being divided into several: but the motion parallel to the horizon arising from this cohesion does not come under our present consideration.

Case 1. Conceive now the whole cavity in the vessel, which encompasses the falling water ABNFEM, to be full of ice, so that the water may pass through the ice as through a funnel. Then if the water pass very near to the ice only, without touching it; or, which is the same thing, if by reason of the perfect smoothness of the surface of the ice, the water, though touching it, glides over it with the utmost freedom, and without the least resistance; the water will run through the hole EF with the same velocity as before, and the whole weight of the column of water ABNFEM will be all taken up as before in forcing out the water, and the bottom of the vessel will sustain the weight of the ice encompassing that column.

Let now the ice in the vessel dissolve into water; yet will the efflux of the water remain, as to its velocity, the same as before. It will not be less, because the ice now dissolved will endeavour to descend; it will not be greater, because the ice, now become water, cannot descend without hindering the descent of other water equal to its own descent. The same force ought always to generate the same velocity in the effluent water.

But the hole at the bottom of the vessel, by reason of the oblique motions of the particles of the effluent water, must be a little greater than before. For

now the particles of the water do not all of them pass through the hole perpendicularly, but, flowing down on all parts from the sides of the vessel, and converging towards the hole, pass through it with oblique motions; and in tending downwards meet in a stream whose diameter is a little smaller below the hole than at the hole itself; its diameter being to the diameter of the hole as 5 to 6, or as 5½ to 6½, very nearly, if I took the measures of those diameters right. I procured a very thin flat plate, having a hole pierced in the middle, the diameter of the circular hole being parts of an inch. And that the stream of running waters might not be accelerated in falling, and by that acceleration become narrower, I fixed this plate not to the bottom, but to the side of the vessel, so as to make the water go out in the direction of a line parallel to the horizon. Then, when the vessel was full of water, I opened the hole to let it run out; and the diameter of the stream, measured with great accuracy at the distance of about half an inch from the hole, was of an inch. Therefore the diameter of this circular hole was to the diameter of the stream very nearly as 25 to 21. So that the water in passing through the hole converges on all sides, and, after it has run out of the vessel, becomes smaller by converging in that manner, and by becoming smaller is accelerated till it comes to the distance of half an inch from the hole, and at that distance flows in a smaller stream and with greater celerity than in the hole itself, and this in the ratio of 25 25 to 21 21, or 17 to 12, very nearly; that is, in about the subduplicate ratio of 2 to 1. Now it is certain from experiments, that the quantity of water running out in a given time through a circular hole made in the bottom of a vessel is equal to the quantity, which, flowing with the aforesaid velocity, would run out in the same time through another circular hole, whose diameter is to the diameter of the former as 21 to 25. And therefore that running water in passing through the hole itself has a velocity downwards equal to that which a heavy body would acquire in falling through half the height of the stagnant water in the vessel, nearly. But, then, after it has run out, it is still accelerated by converging, till it arrives at a distance from the hole that is nearly equal to its diameter, and acquires a velocity greater than the other in about the subduplicate ratio of 2 to 1; which velocity a heavy body would nearly acquire by falling through the whole height of the stagnant water in the vessel.



Therefore in what follows let the diameter of the stream be represented by that lesser hole which we called EF. And imagine another plane VW above the hole EF, and parallel to the plane there of, to be placed at a distance equal to the diameter of the same hole, and to be pierced through with a greater hole ST, of such a magnitude that a stream which will exactly fill the lower hole EF may pass through it; the diameter of which hole will therefore be to the diameter of the lower hole as 25 to 21, nearly. By this means the water will run perpendicularly out at the lower hole; and the quantity of the water running out will be, according to the magnitude of this last hole, the same, very nearly, which the solution of the Problem requires. The space included between the two planes and the falling stream may be considered as the bottom of the vessel. But, to make the solution more simple and mathematical, it is better to take the lower plane alone for the bottom of the vessel, and to suppose that the water which flowed through the ice as through a funnel, and ran out of the vessel through the hole EF made in the lower plane, preserves its motion continually, and that the ice continues at rest. Therefore in what follows let ST be the diamter of a circular hole described from the centre Z, and let the stream run out of the vessel through that hole, when the water in the vessel is all fluid. And let EF be the diameter of the hole, which the stream, in falling through, exactly fills up, whether the water runs out of the vessel by that upper hole ST, or flows through the middle of the ice in the vessel, as through a funnel. And let the diameter of the upper hole ST be to the diameter of the lower EF as about 25 to 21, and let the perpendicular distance between the planes of the holes be equal to the diameter of the lesser hole EF. Then the velocity of the water downwards, in running out of the vessel through the hole ST, will be in that hole the same that a body may acquire by falling from half the height IZ; and the velocity

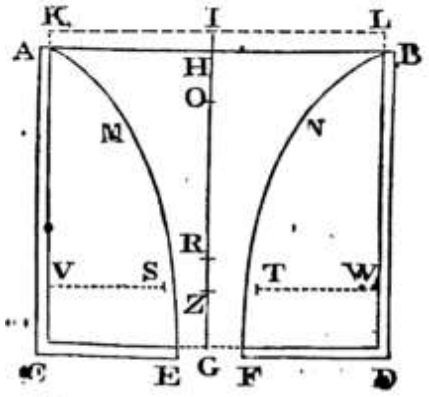
of both the falling streams will be in the hole EF, the same which a body would acquire by falling from the whole height IG.

Case 2. If the hole EF be not in the middle of the bottom of the vessel, but in some other part thereof, the water will still run out with the same velocity as before, if the magnitude of the hole be the same. For though an heavy body takes a longer time in descending to the same depth, by an oblique line, than by a perpendicular line, yet in both cases it acquires in its descent the same velocity; as *Galileo* has demonstrated.

Case 3. The velocity of the water is the same when it runs out through a hole in the side of the vessel. For if the hole be small, so that the interval between the superficies AB and KL may vanish as to sense, and the stream of water horizontally issuing out may form a parabolic figure: from the latus rectum of this parabola may be collected, that the velocity of the effluent water is that which a body may acquire by falling the height IG or HG of the stagnant water in the vessel. For, by making an experiment, I found that if the height of the stagnant water above the hole were 20 inches, and the height of the hole above a plane parallel to the horizon were also 20 inches, a stream of water springing out from thence would fall upon the plane, at the distance of 37 inches, very nearly, from a perpendicular let fall upon that plane from the hole. For without resistance the stream would have fallen upon the plane at the distance of 40 inches, the latus rectum of the parabolic stream being 80 inches.

Case 4. If the effluent water tend upward, it will still issue forth with the same velocity. For the small stream of water springing upward; ascends with a perpendicular motion to GH or GI, the height of the stagnant water in the vessel; excepting in so far as its ascent is hindered a little by the resistance of the air; and therefore it springs out with the same velocity that it would acquire in falling from that height. Every particle of the stagnant water is equally pressed on all sides (by Prop. XIX., Book II), and, yielding to the pressure, tends always with an equal force, whether it descends through the hole in the bottom of the vessel, or gushes out in an horizontal direction through a hole in the side, or passes into a canal, and springs up from thence through a little hole made in the upper part of the canal. And it may not only be collected from reasoning, but is manifest also from the well-known experiments just mentioned, that the velocity with which the water runs out is the very same that is assigned in this Proposition.

Case 5. The velocity of the effluent water is the same, whether the figure of the hole be circular, or square, or triangular, or any other figure equal to the circular; for the velocity of the effluent water does not depend upon the figure of the hole, but arises from its depth below the plane KL.



Case 6. If the lower part of the vessel ABDC be immersed into stagnant water, and the height of the stagnant water above the bottom of the vessel be GR, the velocity with which the water that is in the vessel will run out at the hole EF into the stagnant water will be the same which the water would acquire by falling from the height IR; for the weight of all the water in the vessel that is below the superficies of the stagnant water will be sustained in equilibrio by the weight of the stagnant water, and therefore does riot at all accelerate the motion of the descending water in the vessel. This case will also appear by experiments, measuring the times in which the water will run out.

Cor. 1. Hence if CA the depth of the water be produced to K, so that AK may be to CK in the duplicate ratio of the area of a hole made in any part of the bottom to the area of the circle AB, the velocity of the effluent water will be equal to the velocity which the water would acquire by falling from the height KC.

Cor. 2. And the force with which the whole motion of the effluent water may be generated is equal to the weight of a cylindric column of water, whose base is the hole EF, and its altitude 2GI or 2CK. For the effluent water, in the time it becomes equal to this column, may acquire, by falling by its own weight from the height GI, a velocity equal to that with which it runs out.

Cor. 3. The weight of all the water in the vessel ABDC is to that part of the weight which is employed in forcing out the water as the sum of the

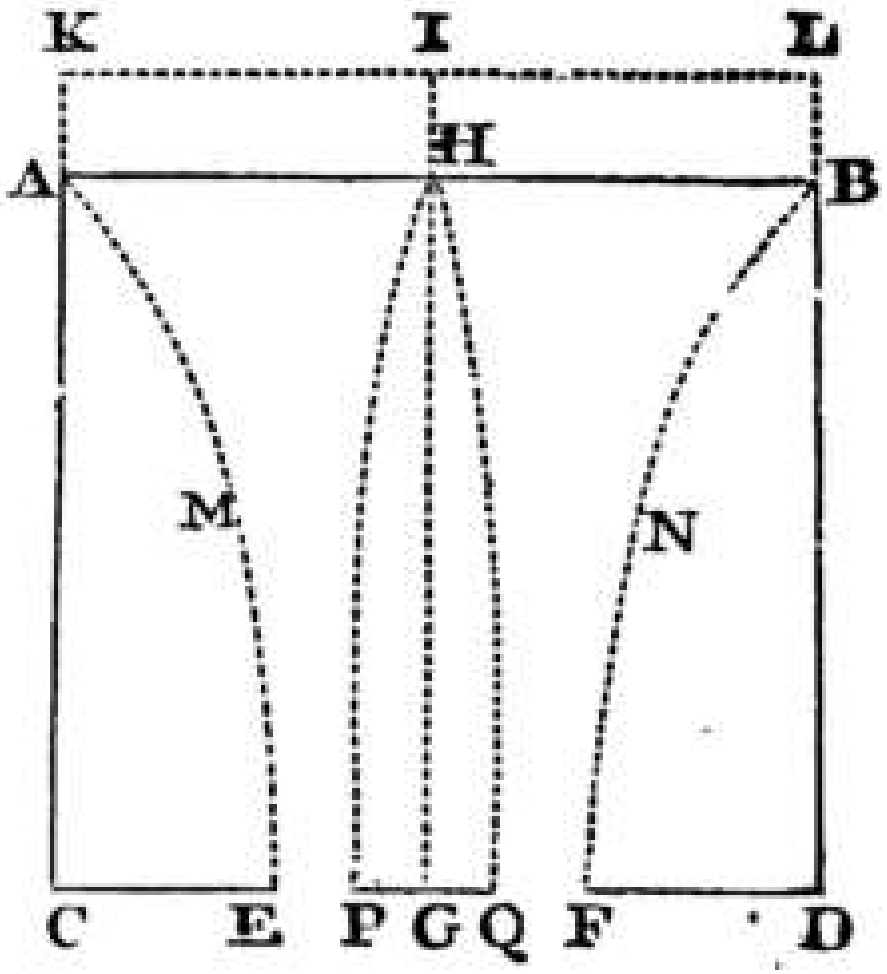
circles AB and EF to twice the circle EF. For let IO be a mean proportional between IH and IG, and the water running out at the hole EF will, in the time that a drop falling from I would describe the altitude IG, become equal to a cylinder whose base is the circle EF and its altitude 2IG, that is, to a cylinder whose base is the circle AB, and whose altitude is 2IO. For the circle EF is to the circle AB in the subduplicate ratio of the altitude IH to the altitude IG; that is, in the simple ratio of the mean proportional IO to the altitude IG. Moreover, in the time that a drop falling from I can describe the altitude IH, the water that runs out will hare become equal to a cylinder whose base is the circle AB, and its altitude 2IH; and in the time that a drop falling from I through H to G describes HG, the difference of the altitudes, the effluent water, that is, the water contained within the solid ABNFEM, will be equal to the difference of the cylinders, that is, to a cylinder whose base is AB, and its altitude 2HO. And therefore all the water contained in the vessel ABDC is to the whole falling water contained in the said solid ABNFEM as HG to 2HO, that is, as HO + OG to 2HO, or IH + IO to 2IH. But the weight of all the water in the solid ABNFEM is employed in forcing out the water: and therefore the weight of all the water in the vessel is to that part of the weight that is employed in forcing out the water as IH + IO to 2IH, and therefore as the sum of the circles EF and AB to twice the circle EF.

Cor. 4. And hence the weight of all the water in the vessel ABDC is to the other part of the weight which is sustained by the bottom of the vessel as the sum of the circles AB and EF to the difference of the same circles.

Cor. 5. And that part of the weight which the bottom of the vessel sustains is to the other part of the weight employed in forcing out the water as the difference of the circles AB and EF to twice the lesser circle EF, or as the area of the bottom to twice the hole.

Cor. 6. That part of the weight which presses upon the bottom is to the whole weight of the water perpendicularly incumbent thereon as the circle AB to the sum of the circles AB and EF, or as the circle AB to the excess of twice the circle AB above the area of the bottom. For that part of the weight which presses upon the bottom is to the weight of the whole water in the vessel as the difference of the circles AB and EF to the sum of the same circles (by Cor. 4); and the weight of the whole water in the vessel is to the weight of the whole water perpendicularly incumbent on the bottom as the circle AB to the difference of the circles AB and EF. Therefore, *ex aequo*

perturbatè, that part of the weight which presses upon the bottom is to the weight of the whole water perpendicularly incumbent thereon as the circle AB to the sum of the circles AB and EF, or the excess of twice the circle AB above the bottom.



Cor. 7. If in the middle of the hole EF there be placed the little circle PQ described about the centre G, and parallel to the horizon, the weight of water which that little circle sustains is greater than the weight of a third part of a cylinder of water whose base is that little circle and its height GH. For let ABNFEM be the cataract or column of falling water whose axis is GH, as above, and let all the water, whose fluidity is not requisite for the ready and quick descent of the water, be supposed to A be congealed, as well round about the cataract, as above the little circle. And let PHQ be the column of water congealed above the little circle, whose vertex is H, and its altitude GH. And suppose this cataract to fall with its whole weight downwards, and

not in the least to lie against or to press PHQ, but to glide freely by it without any friction, unless, perhaps, just at the very vertex of the ice, where the cataract at the beginning of its fall may tend to a concave figure. And as the congealed water AMEC, BNFD, lying round the cataract, is convex in its internal superficies AME, BNF, towards the falling cataract, so this column PHQ will be convex towards the cataract also, and will therefore be greater than a cone whose base is that little circle PQ and its altitude GH; that is, greater than a third part of a cylinder described with the same base and altitude. Now that little circle sustains the weight of this column, that is, a weight greater than the weight of the cone, or a third part of the cylinder.

Cor. 8. The weight of water which the circle PQ, when very small, sustains, seems to be less than the weight of two thirds of a cylinder of water whose base is that little circle, and its altitude HG. For, things standing as above supposed, imagine the half of a spheroid described whose base is that little circle, and its semi-axis or altitude HG. This figure will be equal to two thirds of that cylinder, and will comprehend within it the column of congealed water PHQ, the weight of which is sustained by that little circle. For though the motion of the water tends directly downwards, the external superficies of that column must yet meet the base PQ in an angle somewhat acute, because the water in its fall is perpetually accelerated, and by reason of that acceleration become narrower. Therefore, since that angle is less than a right one, this column in the lower parts thereof will lie within the hemi-spheroid. In the upper parts also it will be acute or pointed; because to make it otherwise, the horizontal motion of the water must be at the vertex infinitely more swift than its motion towards the horizon. And the less this circle PQ is, the more acute will the vertex of this column be; and the circle being diminished *in infinitum* the angle PHQ will be diminished *in infinitum*, and therefore the column will lie within the hemi-spheroid. Therefore that column is less than that hemi-spheroid, or than two-third parts of the cylinder whose base is that little circle, and its altitude GH. Now the little circle sustains a force of water equal to the weight of this column, the weight of the ambient water being employed in causing its efflux out at the hole.

Cor. 9. The weight of water which the little circle PQ sustains, when it is very small, is very nearly equal to the weight of a cylinder of water whose base is that little circle, and its altitude ½GH; for this weight is an arithmetical mean between the weights of the cone and the hemi-spheroid

above mentioned. But if that little circle be not very small, but on the contrary increased till it be equal to the hole EF, it will sustain the weight of all the water lying perpendicularly above it, that is, the weight of a cylinder of water whose base is that little circle, and its altitude GH.

Cor. 10. And (as far as I can judge) the weight which this little circle sustains is always to the weight of a cylinder of water whose base is that little circle, and its altitude ½GH, as EF^2 to $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, or as the circle EF to the excess of this circle above half the little circle PQ, very nearly.

LEMMA IV.

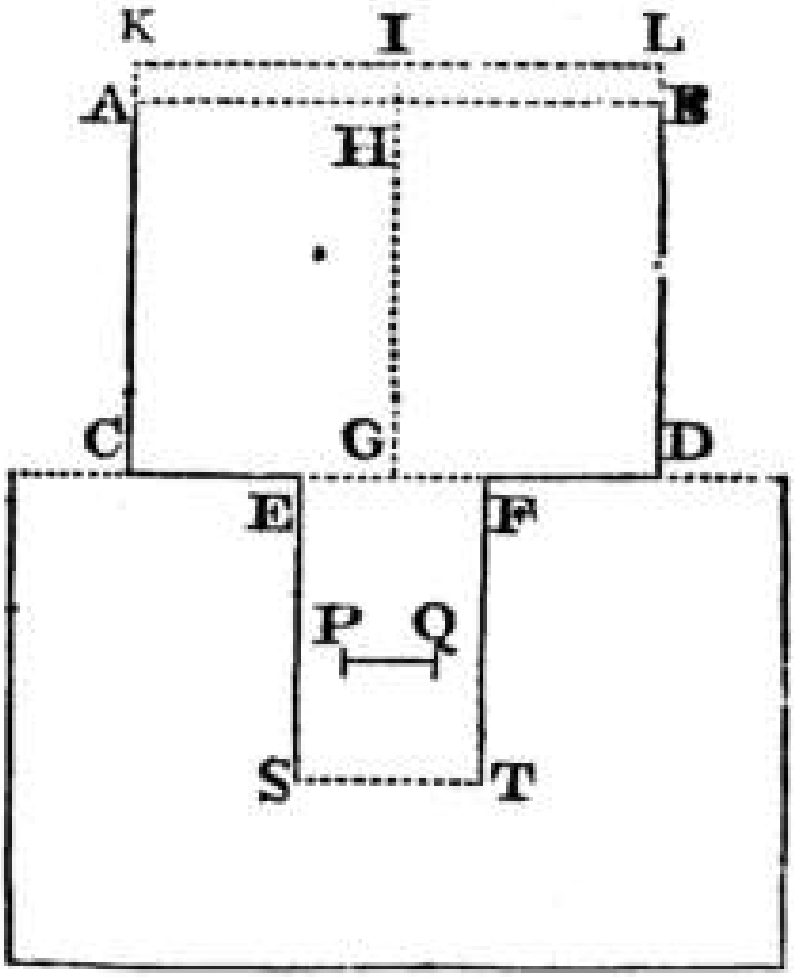
If a cylinder move uniformly forward in the direction of its length, the resistance made thereto is not at all changed by augmenting or diminishing that length; and is therefore the same with the resistance of a circle, described with the same diameter, and moving forward with the same velocity in the direction, of a right line perpendicular to its plane.

For the sides are not at all opposed to the motion; and a cylinder becomes a circle when its length is diminished *in infinitum*.

PROPOSITION XXXVII. THEOREM XXIX.

If a cylinder move uninformly forward in a compressed, infinite, and non-elastic fluid, in the direction of its length, the resistance arising from the magnitude of its transverse section is to the force by which its whole motion may be destroyed or generated, in the time that it moves four times its length, as the density of the medium to the density of the cylinder, nearly.

For let the vessel ABDC touch the surface of stagnant water with its bottom CD, and let the water run out of this vessel into the stagnant water through the cylindric canal EFTS perpendicular co the horizon; and let the little circle PQ be placed parallel to the horizon any where in the



middle of the canal; and produce CA to K, so that AK may be to CK in the duplicate of the ratio, which the excess of the orifice of the canal EF above the little circle PQ bears to the circle AB. Then it is manifest (by Case 5, Case 6, and Cor. 1, Prop. XXXVI) that the velocity of the water passing through the annular space between the little circle and the sides of the vessel will be the very same which the water would acquire by falling, and in its fall describing the altitude KC or IG.

And (by Cor. 10, Prop. XXXVI) if the breadth of the vessel be infinite, so that the lineola HI may vanish, and the altitudes IG, HG become equal; the force of the water that flows down and presses upon the circle will be to the

weight of a cylinder whose base is that little circle, and the altitude ½IG, as EF^2 to $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, very nearly. For the force of the water flowing downward uniformly through the whole canal will be the same upon the little circle PQ in whatsoever part of the canal it be placed.

Let now the orifices of the canal EF, ST be closed, and let the little circle ascend in the fluid compressed on every side, and by its ascent let it oblige the water that lies above it to descend through the annular space between the little circle and the sides of the canal. Then will the velocity of the ascending little circle be to the velocity of the descending water as the difference of the circles EF and PQ, is to the circle PQ; and the velocity of the ascending little circle will be to the sum of the velocities, that is, to the relative velocity of the descending water with which it passes by the little circle in its ascent, as the difference of the circles EF and PQ to the circle EF, or as $EF^2 - PQ^2$ to EF^2. Let that relative velocity be equal to the velocity with which it was shewn above that the water would pass through the annular space, if the circle were to remain unmoved, that is, to the velocity which the water would acquire by falling, and in its fall describing the altitude IG; and the force of the water upon the ascending circle will be the same as before (by Cor. 5, of the Laws of Motion); that is, the resistance of the ascending little circle will be to the weight of a cylinder of water whose base is that little circle, and its altitude ½IG, as EF^2 to $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, nearly. But the velocity of the little circle will be to the velocity which the water acquires by falling, and in its fall describing the altitude IG, as $EF^2 - PQ^2$ to EF^2 .

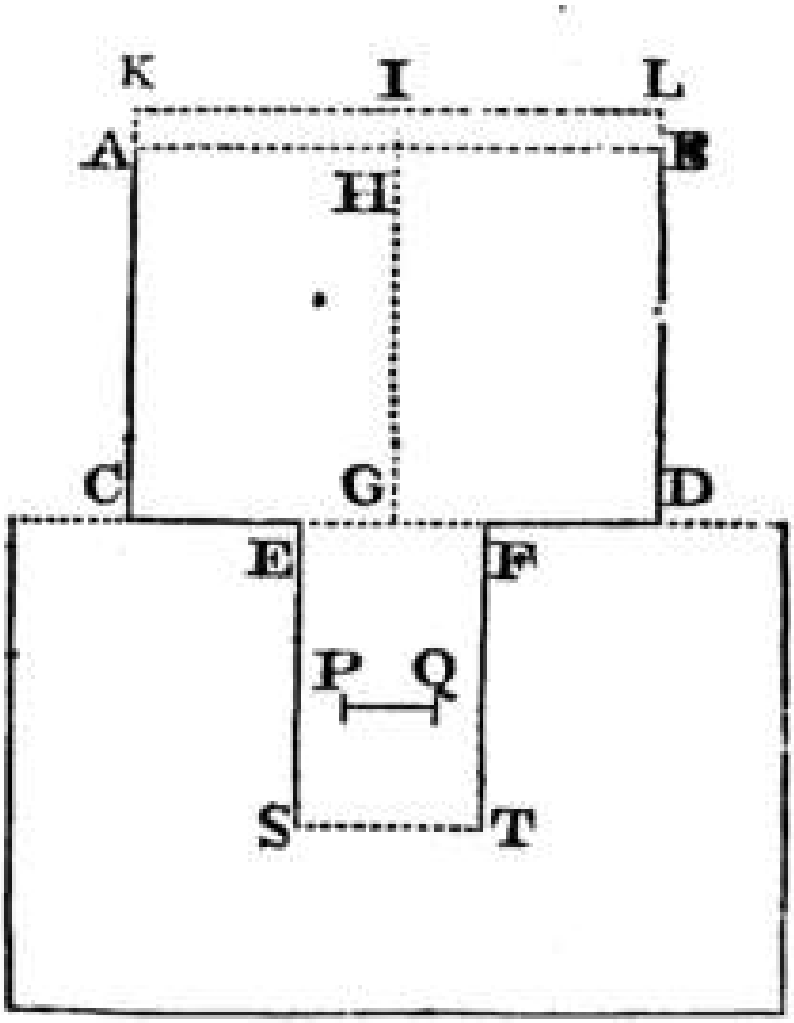
Let the breadth of the canal be increased *in infinitum*; and the ratios between $EF^2 - PQ^2$ and EF^2, and between EF^2 and $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, will become at last ratios of equality. And therefore the velocity of the little circle will now be the same which the water would acquire in falling, and in its fall describing the altitude IG: and the resistance will become equal to the weight of a cylinder whose base is that little circle, and its altitude half the altitude IG, from which the cylinder must fall to acquire the velocity of the ascending circle; and with this velocity the cylinder in the time of its fall will describe four times its length. But the resistance of the cylinder moving forward with this velocity in the direction of its length is the same with the resistance of the little circle (by Lem. IV), and is therefore nearly equal to the force by which its motion may be generated while it describes four times its length.

If the length of the cylinder be augmented or diminished, its motion, and the time in which it describes four times its length, will be augmented or diminished in the same ratio, and therefore the force by which the motion so increased or diminished, may be destroyed or generated, will continue the same; because the time is increased or diminished in the same proportion; and therefore that force remains still equal to the resistance of the cylinder, because (by Lem. IV) that resistance will also remain the same.

If the density of the cylinder be augmented or diminished, its motion, and the force by which its motion may be generated or destroyed in the same time, will be augmented or diminished in the same ratio. Therefore the resistance of any cylinder whatsoever will be to the force by which its whole motion may be generated or destroyed, in the time during which it moves four times its length, as the density of the medium to the density of the cylinder, nearly. Q.E.D.

A fluid must be compressed to become continued; it must be continued and non-elastic, that all the pressure arising from its compression may be propagated in an instant; and so, acting equally upon all parts of the body moved, may produce no change of the resistance. The pressure arising from the motion of the body is spent in generating a motion in the parts of the fluid, and this creates the resistance. But the pressure arising from the compression of the fluid, be it ever so forcible, if it be propagated in an instant, generates no motion in the parts of a continued fluid, produces no change at all of motion therein; and therefore neither augments nor lessens the resistance. This is certain, that the action of the fluid arising from the compression cannot be stronger on the hinder parts of the body moved than on its fore parts, and therefore cannot lessen the resistance described in this proposition. And if its propagation be infinitely swifter than the motion of the body pressed, it will not be stronger on the fore parts than on the hinder parts. But that action will be infinitely swifter, and propagated in an instant, if the fluid be continued and non-elastic.

Cor. 1. The resistances, made to cylinders going uniformly forward in the direction of their lengths through continued infinite mediums are in a ratio compounded of the duplicate ratio of the velocities and the duplicate ratio of the diameters, and the ratio of the density of the mediums.



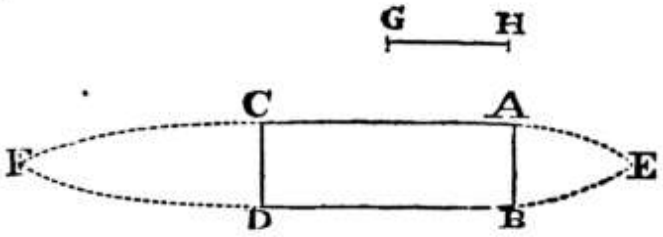
Cor. 2. If the breadth of the canal be not infinitely increased but the cylinder go forward in the direction of its length through an included quiescent medium, its axis all the while coinciding with the axis of the canal, its resistance will be to the force by which its whole motion, in the time in which it describes four times its length, may be generated or destroyed, in a ratio compounded of the ratio of EF^2 to $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ once, and the ratio of EF^2 to $EF^2 - PQ^2$ twice, and the ratio of the density of the medium to the density of the cylinder.

Cor. 3. The same thing supposed, and that a length L is to the quadruple of the length of the cylinder in a ratio compounded of the ratio $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ to EF^2 once, and the ratio of $EF^2 - PQ^2$ to EF^2 twice; the resistance of the cylinder will be to the force by which its whole motion, in the time during

which it describes the length L, may be destroyed or generated, as the density of the medium to the density of the cylinder.

SCHOLIUM.

In this proposition we have investigated that resistance alone which arises from the magnitude of the transverse section of the cylinder, neglecting that part of the same which may arise from the obliquity of the motions. For as, in Case 1, of Prop. XXXVI., the obliquity of the motions with which the parts of the water in the vessel converged on every side to the hole EF hindered the efflux of the water through the hole, so, in this Proposition, the obliquity of the motions, with which the parts of the water, pressed by the antecedent extremity of the cylinder, yield to the pressure, and diverge on all sides, retards their passage through the places that lie round that antecedent extremity, toward the hinder parts of the cylinder, and causes the fluid to be moved to a greater distance; which increases the resistance, and that in the same ratio almost in which it diminished the efflux of the water out of the vessel, that is, in the duplicate ratio of 25 to 21, nearly. And as, in Case 1, of that Proposition, we made the parts of the water pass through the hole EF perpendicularly and in the greatest plenty, by supposing all the water in the vessel lying round the cataract to be frozen, and that part of the water whose motion was oblique, and useless to remain without motion, so in this Proposition, that the obliquity of the motions may be taken away, and the parts of the water may give the freest passage to the cylinder, by yielding to it with the most direct and quick motion possible, so that only so much resistance may remain as arises from the magnitude of the transverse section, and which is incapable of diminution, unless by diminishing the diameter of the cylinder; we must conceive those parts of the fluid whose motions are oblique and useless, and produce resistance, to be at rest among themselves at both extremities of the cylinder, and there to cohere, and be joined to the cylinder.



Let ABCD be a rectangle, and let AE and BE be two parabolic arcs, described with the axis AB, and with a latus rectum that is to the space HG, which must be described by the cylinder in falling, in order to acquire the velocity with which it moves, as HG to ½AB. Let CF and DF be two other parabolic arcs described with the axis CD, and a latus rectum quadruple of the former; and

by the convolution of the figure about the axis EF let there be generated a solid, whose middle part ABDC is the cylinder we are here speaking of, and whose extreme parts ABE and CDF contain the parts of the fluid at rest among themselves, and concreted into two hard bodies, adhering to the cylinder at each end like a head and tail. Then if this solid EACFDB move in the direction of the length of its axis FE toward the parts beyond E, the resistance will be the same which we have here determined in this Proposition, nearly; that is, it will have the same ratio to the force with which the whole motion of the cylinder may be destroyed or generated, in the time that it is describing the length 4AC with that motion uniformly continued, as the density of the fluid has to the density of the cylinder, nearly. And (by Cor. 7, Prop. XXXVI) the resistance must be to this force in the ratio of 2 to 3, at the least.

LEMMA V.

If a cylinder, a sphere, and a spheroid, of equal breadths be placed successively in the middle of a cylindric canal, so that their axes may coincide with the axis of the canal, these bodies will equally hinder the passage of the water through the canal.

For the spaces lying between the sides of the canal, and the cylinder, sphere, and spheroid, through which the water passes, are equal; and the water will pass equally through equal spaces.

This is true, upon the supposition that all the water above the cylinder, sphere, or spheroid, whose fluidity is not necessary to make the passage of the water the quickest possible, is congealed, as was explained above in Cor. 7, Prop. XXXVI.

LEMMA VI.

The same supposition remaining, the fore-mentioned bodies are equally acted on by the water flowing through the canal.

This appears by Lem. V and the third Law. For the water and the bodies act upon each other mutually and equally.

LEMMA VII.

If the water be at rest in the canal, and these bodies move with equal velocity and the contrary way through the canal, their resistances will be equal among themselves.

This appears from the last Lemma, for the relative motions remain the same among themselves.

SCHOLIUM.

The case is the same of all convex and round bodies, whose axes coincide with the axis of the canal. Some difference may arise from a greater or less friction; but in these *Lemmata* we suppose the bodies to be perfectly smooth, and the medium to be void of all tenacity and friction; and that those parts of the fluid which by their oblique and superfluous motions may disturb, hinder, and retard the flux of the water through the canal, are at rest among themselves; being fixed like water by frost, and adhering to the fore and hinder parts of the bodies in the manner explained in the Scholium of the last Proposition; for in what follows we consider the very least resistance that round bodies described with the greatest given transverse sections can possibly meet with.

Bodies swimming upon fluids, when they move straight forward, cause the fluid to ascend at their fore parts and subside at their hinder parts, especially if they are of an obtuse figure; and thence they meet with a little more resistance than if they were acute at the head and tail. And bodies moving in elastic fluids, if they are obtuse behind and before, condense the fluid a little more at their fore parts, and relax the same at their hinder parts; and therefore meet also with a little more resistance than if they were acute at the head and tail. But in these Lemmas and Propositions we are not treating of elastic but non-elastic fluids; not of bodies floating on the surface of the fluid, but deeply immersed therein. And when the resistance of bodies in non-elastic fluids is once known, we may then augment this resistance a little

in elastic fluids, as our air; and in the surfaces of stagnating fluids, as lakes and seas.

PROPOSITION XXXVIII. THEOREM XXX.

If a globe move uniformly forward in a compressed, infinite, and non-elastic fluid, its resistance is to the force by which its whole motion may be destroyed or generated, in the time that it describes eight third parts of its diameter, as the density of the fluid to the density of the globe, very nearly. For the globe is to its circumscribed cylinder as two to three; and therefore the force which can destroy all the motion of the cylinder, while the same cylinder is describing the length of four of its diameters, will destroy all the motion of the globe, while the globe is describing two thirds of this length, that is, eight third parts of its own diameter. Now the resistance of the cylinder is to this force very nearly as the density of the fluid to the density of the cylinder or globe (by Prop. XXXVII), and the resistance of the globe is equal to the resistance of the cylinder (by Lem. V, VI, and VII). Q.E.D.

Cor. 1. The resistances of globes in infinite compressed mediums are in a ratio compounded of the duplicate ratio of the velocity, and the duplicate ratio of the diameter, and the ratio of the density of the mediums.

Cor. 2. The greatest velocity, with which a globe can descend by its comparative weight through a resisting fluid, is the same which it may acquire by falling with the same weight, and without any resistance, and in its fall describing a space that is, to four third parts of its diameter as the density of the globe to the density of the fluid. For the globe in the time of its fall, moving with the velocity acquired in falling, will describe a space that will be to eight third parts of its diameter as the density of the globe to the density of the fluid; and the force of its weight which generates this motion will be to the force that can generate the same motion, in the time that the globe describes eight third parts of its diameter, with the same velocity as the density of the fluid to the density of the globe; and therefore (by this Proposition) the force of weight will be equal to the force of resistance, and therefore cannot accelerate the globe.

Cor. 3. If there be given both the density of the globe and its velocity at the beginning of the motion, and the density of the compressed quiescent

fluid in which the globe moves, there is given at any time both the velocity of the globe and its resistance, and the space described by it (by Cor. 7, Prop. XXXV).

Cor. 4. A globe moving in a compressed quiescent fluid of the same density with itself will lose half its motion before it can describe the length of two of its diameters (by the same Cor. 7).

PROPOSITION XXXIX. THEOREM XXXI.

If a globe move uniformly forward through a fluid inclosed and compressed in a cylindric canal, its resistance is to the force by which its whole motion may be generated or destroyed, in the time in which it describes eight third parts of its diameter, in a ratio compounded of the ratio of the orifice of the canal to the excess of that orifice above half the greatest circle of the globe; and the duplicate ratio of the orifice of the canal, to the excess of that orifice above the greatest circle of the globe; and the ratio of the density of the fluid to the density of the globe, nearly. This appears by Cor. 2, Prop. XXXVII, and the demonstration proceeds in the same manner as in the foregoing Proposition.

SCHOLIUM.

In the last two Propositions we suppose (as was done before in Lem. V) that all the water which precedes the globe, and whose fluidity increases the resistance of the same, is congealed. Now if that water becomes fluid, it will somewhat increase the resistance. But in these Propositions that increase is so small, that it may be neglected, because the convex superficies of the globe produces the very same effect almost as the congelation of the water.

PROPOSITION XL. PROBLEM IX.

To find by phenomena the resistance of a globe moving through a perfectly fluid compressed medium.

Let A be the weight of the globe *in vacuo*, B its weight in the resisting medium, D the diameter of the globe. F a space which is to D as the density

of the globe to the density of the medium, that is, as A to A - B, G the time in which the globe falling with the weight B without resistance describes the space F, and H the velocity which the body acquires by that fall. Then H will be the greatest velocity with which the globe can possibly descend with the weight B in the resisting medium, by Cor. 2, Prop XXXVIII; and the resistance which the globe meets with, when descending with that velocity, will be equal to its weight B; and the resistance it meets with in any other velocity will be to the weight B in the duplicate ratio of that velocity to the greatest velocity H, by Cor. 1, Prop. XXXVIII.
This is the resistance that arises from the inactivity of the matter of the fluid. That resistance which arises from the elasticity, tenacity, and friction of its parts, may be thus investigated.

Let the globe be let fall so that it may descend in the fluid by the weight B; and let P be the time of falling, and let that time be expressed in seconds, if the time G be given in seconds. Find the absolute number N agreeing to the logarithm 0,4342944819, and let L be the logarithm of the number; and the velocity acquired in falling will be H, and the height described will be - 1,3862943611F + 4,605170186LF. If the fluid be of a sufficient depth, we may neglect the term 4,605170186LF; and - 1,3862943611F will be the altitude described, nearly. These things appear by Prop. IX, Book II, and its Corollaries, and are true upon this supposition, that the globe meets with no other resistance but that which arises from the inactivity of matter. Now if it really meet with any resistance of another kind, the descent will be slower, and from the quantity of that retardation will be known the quantity of this new resistance.

That the velocity and descent of a body falling in a fluid might more easily be known, I have composed the following table; the first column of which denotes the times of descent; the second shews the velocities acquired in falling, the greatest velocity being 100000000: the third exhibits the spaces described by falling in those times, 2F being the space which the body describes in the time G with the greatest velocity; and the fourth gives the spaces described with the greatest velocity in the same times. The numbers in the fourth column are, and by subducting the number 1,3862944 - 4,6051702L, are found the numbers in the third column; and these numbers must be multiplied by the space F to obtain the spaces described in falling. A fifth column is added to all these, containing the spaces described in the

same times by a body falling *in vacuo* with the force of B its comparative weight.

The Times P.	Velocities of the body falling in the fluid.	The spaces described in falling in the fluid.	The spaces described with the greatest motion.	The spaces described by falling *in vacuo*.
0,001G				
0,01G				
0,1G				
0,2G				
0,3G				
0,4G				
0,5G				
0,6G				
0,7G				
0,8G				
0,9G				
1G				
2G				

3G
4G
5G
6G
7G
8G
9G
10G

99999

999967

9966799

19737532

29131261

37994896

46211716

53704957

60436778

66403677

71629787

76159416

96402758

99505475

99932930

99990920

99998771

99999834

99999980

99999997

99999999

0,000001F
0,0001F
0,0099834F
0,0397361F
0,0886815F
0,1559070F
0,2402290F
0,3402706F
0,4545405F
0,5815071F
0,7196609F
0,8675617F
2,6500055F
4,6186570F
6,6143765F
8,6137964F
10,6137179F
12,6137073F
14,6137059F
16,6137057F
18,6137056F

0,002F
0,02F
0,2F
0,4F
0,6F
0,8F
1,0F
1,2F
1,4F
1,6F

1,8F
2F
4F
6F
8F
10F
12F
14F
16F
18F
20F

0,000001F
0,0001F
0,01F
0,04F
0,09F
0,16F
0,25F
0,36F
0,49F
0,64F
0,81F
1F
4F
9F
16F
25F
36F
49F
64F
81F
100F

SCHOLIUM.

In order to investigate the resistances of fluids from experiments, I procured a square wooden vessel, whose length and breadth on the inside was 9 inches *English* measure, and its depth 9 feet ½; this I filled with rainwater: and having provided globes made up of wax, and lead included therein, I noted the times of the descents of these globes, the height through which they descended being 112 inches. A solid cubic foot of *English* measure contains 76 pounds troy weight of rainwater; and a solid inch contains ounces troy weight, or 253⅓ grains; and a globe of water of one inch in diameter contains 132,645 grains in air, or 132,8 grains *in vacuo*; and any other globe will be as the excess of its weight *in vacuo* above its weight in water.

Exper. 1. A globe whose weight was 156¼ grains in air, and 77 grains in water, described the whole height of 112 inches in 4 seconds. And, upon repeating the experiment, the globe spent again the very same time of 4 seconds in falling.

The weight of this globe *in vacuo* is 156 grains; and the excess of this weight above the weight of the globe in water is 79 grains. Hence the diameter of the globe appears to be 0,84224 parts of an inch. Then it will be, as that excess to the weight of the globe *in vacuo*, so is the density of the water to the density of the globe; and so is parts of the diameter of the globe (viz. 2,24597 inches) to the space 2F, which will be therefore 4,4256 inches. Now a globe falling *in vacuo* with its whole weight of 156 grains in one second of time will describe 193⅓ inches; and falling in water in the same time with the weight of 77 grains without resistance, will describe 95,219 inches; and in the time G, which is to one second of time in the subduplicate ratio of the space F, or of 2,2128 inches to 95,219 inches, will describe 2,2128 inches, and will acquire the greatest velocity H with which it is capable of descending in water. Therefore the time G is 0”.15244. And in this time G, with that greatest velocity H, the globe will describe the space 2F, which is 4,4256 inches; and therefore in 4 seconds will describe a space of 116,1245 inches. Subduct the space 1,3862944F, or 3,0676 inches, and there will remain a space of 113,0569 inches, which the globe falling through water in a very wide vessel will describe in 4 seconds. But this space, by reason of the narrowness of the wooden vessel before mentioned,

ought to be diminished in a ratio compounded of the subduplicate ratio of the orifice of the vessel to the excess of this orifice above half a great circle of the globe, and of the simple ratio of the same orifice to its excess above a great circle of the globe, that is, in a ratio of 1 to 0,9914. This done, we have a space of 112,08 inches, which a globe falling through the water in this wooden vessel in 4 seconds of time ought nearly to describe by this theory; but it described 112 inches by the experiment.

Exper. 2. Three equal globes, whose weights were severally 76⅓ grains in air, and 5 grains in water, were let fall successively; and every one fell through the water in 15 seconds of time, describing in its fall a height of 112 inches.

By computation, the weight of each globe *in vacuo* is 76 grains; the excess of this weight above the weight in water is 71 grains; the diameter of the globe 0,81296 of an inch; parts of this diameter 2,16789 inches; the space 2F is 2,3217 inches; the space which a globe of 5 grains in weight would describe in one second without resistance, 12,808 inches, and the time G0”,301056. Therefore the globe, with the greatest velocity it is capable of receiving from a weight of 5 grains in its descent through water, will describe in the time 0”,301056 the space of 2,3217 inches; and in 15 seconds the space 115,678 inches. Subduct the space 1,3862944F, or 1,609 indies, and there remains the space 114.069 inches, which therefore the falling globe ought to describe in the same time, if the vessel were very wide. But because our vessel was narrow, the space ought to be diminished by about 0,895 of an inch. And so the space will remain 113,174 inches, which a globe falling in this vessel ought nearly to de scribe in 15 seconds, by the theory. But by the experiment it described 112 inches. The difference is not sensible.

Exper. 3. Three equal globes, whose weights were severally 121 grains in air, and 1 grain in water, were successively let fall; and they fell through the water in the times 46”, 47”, and 50”, describing a height of 112 inches.

By the theory, these globes ought to have fallen in about 40”. Now whether their falling more slowly were occasioned from hence, that in slow motions the resistance arising from the force of inactivity does really bear a less proportion to the resistance arising from other causes; or whether it is to be attributed to little bubbles that might chance to stick to the globes, or to the rarefaction of the wax by the warmth of the weather, or of the hand

that let them fall; or, lastly, whether it proceeded from some insensible errors in weighing the globes in the water, I am not certain. Therefore the weight of the globe in water should be of several grains, that the experiment may be certain, and to be depended on.

Exper. 4. I began the foregoing experiments to investigate the resistances of fluids, before I was acquainted with the theory laid down in the Propositions immediately preceding. Afterward, in order to examine the theory after it was discovered, I procured a wooden vessel, whose breadth on the inside was 8⅔ inches, and its depth 15 feet and ⅓. Then I made four globes of wax, with lead included, each of which weighed 139¼ grains in air, and 7 grains in water. These I let fall, measuring the times of their falling in the water with a pendulum oscillating to half seconds. The globes were cold, and had remained so some time, both when they were weighed and when they were let fall; because warmth rarefies the wax, and by rarefying it diminishes the weight of the globe in the water; and wax, when rarefied, is not instantly reduced by cold to its former density. Before they were let fall, they were totally immersed under water, lest, by the weight of any part of them that might chance to be above the water, their descent should be accelerated in its beginning. Then, when after their immersion they were perfectly at rest, they were let go with the greatest care, that they might not receive any impulse from the hand that let them down. And they fell successively in the times of 47½, 48½, 50, and 51 oscillations, describing a height of 15 feet and 2 inches. But the weather was now a little colder than when the globes were weighed, and therefore I repeated the experiment another day; and then the globes fell in the times of 49; 49½, 50. and 53; and at a third trial in the times of 49½, 50, 51, and 53 oscillations. And by making the experiment several times over, I found that the globes fell mostly in the times of 49½ and 50 oscillations. When they fell slower, I suspect them to have been retarded by striking against the sides of the vessel.

Now, computing from the theory, the weight of the globe *in vacuo* is 139 grains; the excess of this weight above the weight of the globe in water 132 grains; the diameter of the globe 0,99868 of an inch; parts of the diameter 2,66315 inches; the space 2F 2,8066 inches; the space which a globe weighing 7 grains falling without resistance describes in a second of time 9,88164 inches; and the time GO”,376843. Therefore the globe with the

greatest velocity with which it is capable of descending through the water by the force of a weight of 7 grains, will in the time 0”,376843 describe a space of 2,8066 inches, and in one second of time a space of 7,44766 inches, and in the time 25”, or in 50 oscillations, the space 186,1915 inches. Subduct the space 1,386294F, or 1,9454 inches, and there will remain the space 184,2461 inches which the globe will describe in that time in a very wide vessel. Because our vessel was narrow, let this space be diminished in a ratio compounded of the subduplicate ratio of the orifice of the vessel to the excess of this orifice above half a great circle of the globe, and of the simple ratio of the same orifice to its excess above a great circle of the globe; and we shall have the space of 181,86 inches, which the globe ought by the theory to describe in this vessel in the time of 50 oscillations, nearly. But it described the space of 182 inches, by experiment, in 49½ or 50 oscillations.

Exper. 5. Four globes weighing 154 grains in air, and 21½ grains in water, being let fall several times, fell in the times of 28½, 29, 29½, and 30, and sometimes of 31, 32, and 33 oscillations, describing a height of 15 feet and 2 inches.

They ought by the theory to have fallen in the time of 29 oscillations, nearly.

Exper. 6. Five globes, weighing 212 grains in air, and 79½ in water, being several times let fall, fell in the times of 15, 15½, 16, 17, and 18 oscillations, describing a height of 15 feet and 2 inches.

By the theory they ought to have fallen in the time of 15 oscillations, nearly.

Exper. 7. Four globes, weighing 293 grains in air, and 35 grains in water, being let fall several times, fell in the times of 29½, 30, 30½, 31, 32, and 33 oscillations, describing a height of 15 feet and 1 inch and ½.

By the theory they ought to have fallen in the time of 28 oscillations, nearly.

In searching for the cause that occasioned these globes of the same weight and magnitude to fall, some swifter and some slower, I hit upon this; that the globes, when they were first let go and began to fall, oscillated about their centres; that side which chanced to be the heavier descending first, and producing an oscillating motion. Now by oscillating thus, the globe communicates a greater motion to the water than if it descended

without any oscillations; and by this communication loses part of its own motion with which it should descend; and therefore as this oscillation is greater or less, it will be more or less retarded. Besides, the globe always recedes from that side of itself which is descending in the oscillation, and by so receding comes nearer to the sides of the vessel, so as even to strike against them sometimes. And the heavier the globes are, the stronger this oscillation is; and the greater they are, the more is the water agitated by it. Therefore to diminish this oscillation of the globes, I made new ones of lead and wax, sticking the lead in one side of the globe very near its surface; and I let fall the globe in such a manner, that, as near as possible, the heavier side might be lowest at the beginning of the descent. By this means the oscillations became much less than before, and the times in which the globes fell were not so unequal: as in the following experiments.

Exper. 8. Four globes weighing 139 grains in air, and 6½ in water, were let fall several times, and fell mostly in the time of 51 oscillations, never in more than 52, or in fewer than 50, describing a height of 182 inches.

By the theory they ought to fall in about the time of 52 oscillations

Exper. 9. Four globes weighing 273¼ grains in air, and 140¾ in water, being several times let fall, fell in never fewer than 12, and never more than 13 oscillations, describing a height of 182 inches.

These globes by the theory ought to have fallen in the time of 11⅓ oscillations, nearly.

Exper. 10. Four globes, weighing 384 grains in air, and 119½ in water, being let fall several times, fell in the times of 17¾ 18, 18½, and 19 oscillations, describing a height of 181½ inches. And when they fell in the time of 19 oscillations, I sometimes heard them hit against the sides of the vessel before they reached the bottom.

By the theory they ought to have fallen in the time of 15 oscillations, nearly.

Exper. 11. Three equal globes, weighing 48 grains in the air, and 3 in water, being several times let fall, fell in the times of 43½, 44, 44½, 45, and 46 oscillations, and mostly in 44 and 45, describing a height of 182½ inches, nearly.

By the theory they ought to have fallen in the time of 46 oscillations and, nearly.

Exper. 12. Three equal globes, weighing 141 grains in air, and 4 in water, being let fall several times, fell in the times of 61, 62, 63, 64, and 65 oscillations, describing a space of 182 inches.

And by the theory they ought to have fallen in 64½ oscillations nearly.

From these experiments it is manifest, that when the globes fell slowly, as in the second, fourth, fifth, eighth, eleventh, and twelfth experiments, the times of falling are rightly exhibited by the theory; but when the globes fell more swiftly, as in the sixth, ninth, and tenth experiments, the resistance was somewhat greater than in the duplicate ratio of the velocity. For the globes in falling oscillate a little; and this oscillation, in those globes that are light and fall slowly, soon ceases by the weakness of the motion; but in greater and heavier globes, the motion being strong, it continues longer, and is not to be checked by the ambient water till after several oscillations. Besides, the more swiftly the globes move, the less are they pressed by the fluid at their hinder parts; and if the velocity be perpetually increased, they will at last leave an empty space behind them, unless the compression of the fluid be increased at the same time. For the compression of the fluid ought to be increased (by Prop. XXXII and XXXIII) in the duplicate ratio of the velocity, in order to preserve the resistance in the same duplicate ratio. But because this is not done, the globes that move swiftly are not so much pressed at their hinder parts as the others; and by the defect of this pressure it comes to pass that their resistance is a little greater than in a duplicate ratio of their velocity.

So that the theory agrees with the phaenomena of bodies falling in water. It remains that we examine the phaenomena of bodies falling in air.

Exper. 13. From the top of St. *Paul's* Church in *London*, in *June* 1710, there were let fall together two glass globes, one full of quicksilver, the other of air; and in their fall they described a height of 220 *English* feet. A wooden table was suspended upon iron hinges on one side, and the other side of the same was supported by a wooden pin. The two globes lying upon this table were let fall together by pulling out the pin by means of an iron wire reaching from thence quite down to the ground; so that, the pin being removed, the table, which had then no support but the iron hinges, fell downward, and turning round upon the hinges, gave leave to the globes to drop off from it. At the same instant, with the same pull of the iron wire that took out the pin, a pendulum oscillating to seconds was let go, and began to

oscillate. The diameters and weights of the globes, and their times of falling, are exhibited in the following table.

The globes filled with mercury.

The globes full of air.

Weights.	Diameters.	Times in falling.	Weights.	Diameters.	Times in falling.
908 grains	0,8 of an inch	4”			
983 grains	0,8 of an inch				
866 grains	0,8 of an inch				
747 grains	0,75 of an inch	4-			
808 grains	0,75 of an inch				
784 grains	0,75 of an inch				

4

4+

4

4+

510 grains
642 grains
599 grains
515 grains
483 grains
641 grains

5,1 inches
5,2 inches
5,1 inches
5,0 inches
5,0 inches
5,2 inches

8”½

8

8
8¼
8½
8

But the times observed must be corrected; for the globes of mercury (by *Galileo's* theory), in 4 seconds of time, will describe 257 *English* feet, and 220 feet in only 3”42”’. So that the wooden table, when the pin was taken out, did not turn upon its hinges so quickly as it ought to have done; and the slowness of that revolution hindered the descent of the globes at the beginning. For the globes lay about the middle of the table, and indeed were rather nearer to the axis upon which it turned than to the pin. And hence the times of falling were prolonged about 18”’; and therefore ought to be corrected by subducting that excess, especially in the larger globes, which, by reason of the largeness of their diameters, lay longer upon the revolving table than the others. This being done, the times in which the six larger globes fell will come forth 8” 12”’, 7” 42”’, 7” 42”’, 7” 57”’, 8” 12” and 7” 42”’.

Therefore the fifth in order among the globes that were full of air being 5 inches in diameter, and 483 grains in weight, fell in 8” 12”’, describing a space of 220 feet. The weight of a bulk of water equal to this globe is 16600 grains; and the weight of an equal bulk of air is grains, or 19 grains; and therefore the weight of the globe *in vacua* is 502 grains; and this weight is to the weight of a bulk of air equal to the globe as 502 to 19; and so is 2F to of the diameter of the globe, that is, to 13⅓ inches. Whence 2F becomes 28 feet 11 inches. A globe, falling *in vacua* with its whole weight of 502 grains, will in one second of time describe 193⅓ inches as above; and with the weight of 483 grains will describe 185,905 inches; and with that weight 483 grains *in vacua* will describe the space F, or 14 feet 5½ inches, in the time of 57”’ 58”“, and acquire the greatest velocity it is capable of descending with in the air. With this velocity the globe in 8” 12”’ of time will describe

245 feet and 5⅓ inches. Subduct 1,3863F, or 20 feet and ½ an inch, and there remain 225 feet 5 inches. This space, therefore, the falling globe ought by the theory to describe in 8” 12”’. But by the experiment it described a space of 220 feet. The difference is insensible.

By like calculations applied to the other globes full of air, I composed the following table.

The weights or the globe.

The diameters.

The times falling from a height of 220 feet.

The spaces which they would describe by the theory.

The excesses.

510 grains
642 grains
599 grains
515 grains
483 grains
641 grains

5,1 inches
5,2 inches
5,1 inches
5 inches
5 inches
5,2 inches

8” 12”’
7” 42”’
7” 42”’
7” 57”’
8” 12”’
7” 42”’

226 feet 11 inch.
230 feet 9 inch.

227 feet 10 inch.
224 feet 5 inch.
225 feet 5 inch
230 feet 7 inch.

6 feet 11 inch
10 feet 9 inch
7 feet 0 inch
4 feet 5 inch
5 feet 5 inch
10 feet 7 inch

Exper. 14. *Anno* 1719, in the month of *July*, Dr. *Desaguliers* made some experiments of this kind again, by forming hogs' bladders into spherical orbs; which was done by means of a concave wooden sphere, which the bladders, being wetted well first, were put into. After that being blown full of air, they were obliged to fill up the spherical cavity that contained them; and then, when dry, were taken out. These were let fall from the lantern on the top of the cupola of the same church, namely, from a height of 272 feet; and at the same moment of time there was let fall a leaden globe, whose weight was about 2 pounds *troy* weight. And in the mean time some persons standing in the upper part of the church where the globes were let fall observed the whole times of falling; and others standing on the ground observed the differences of the times between the fall of the leaden weight and the fall of the bladder. The times were measured by pendulums oscillating to half seconds. And one of those that stood upon the ground had a machine vibrating four times in one second; and another had another machine accurately made with a pendulum vibrating four times in a second also. One of those also who stood at the top of the church had a like machine; and these instruments were so contrived, that their motions could be stopped or renewed at pleasure. Now the leaden globe fell in about four seconds and ¼ of time; and from the addition of this time to the difference of time above spoken of, was collected the whole time in which the bladder was falling. The times which the five bladders spent in falling, after the

leaden globe had reached the ground, were, the first time, 14¾”, 12¾”, 14”, 17¾”, and 16”; and the second time, 14½”, 14¼”, 14”, 19”, and 16¾”. Add to these 4¼”, the time in which the leaden globe was falling, and the whole times in which the five bladders fell were, the first time, 19”, 17”, 18”, 22”, and 21”; and the second time, 18¾”, 18½”, 18¼”, 23¼”, and 21”. The times observed at the top of the church were, the first time, 19”, 17¼”, 18f¾” 22”, and 21”; and the second time, 19”, 18”, 18”, 24”, and 21¼”. But the bladders did not always fall directly down, but sometimes fluttered a little in the air, and waved to and fro, as they were descending. And by these motions the times of their falling were prolonged, and increased by half a second sometimes, and sometimes by a whole second. The second and fourth bladder fell most directly the first time, and the first and third the second time. The fifth bladder was wrinkled, and by its wrinkles was a little retarded. I found their diameters by their circumferences measured with a very fine thread wound about them twice. In the following table I have compared the experiments with the theory; making the density of air to be to the density of rainwater as 1 to 860, and computing the spaces which by the theory the globes ought to describe in falling.

The weight of the bladders.

The diameters.

The times of falling from a heigth of 272 feet.

The spaces which by the theory ought to habe been described in those times.

The difference between the theory and the experiments.

128 grains
156 grains
137½ grains
97½ grains
99 grains

5,28 inches
5,19 inches
5,3 inches

5,26 inches
5 inches

19”
17”
18”
22”
21”

271 feet 11 in.
272 feet 0½ in.
272 feet 7 in.
277 feet 4 in.
282 feet 0 in.

- 0 ft 1 in.
+ 0 ft 0½ in.
+ 0 ft 7 in.
+ 5 ft 4 in.
+ 10 ft 0 in.

Our theory, therefore, exhibits rightly, within a very little, all the resistance that globes moving either in air or in water meet with; which appears to be proportional to the densities of the fluids in globes of equal velocities and magnitudes.

In the Scholium subjoined to the sixth Section, we shewed, by experiments of pendulums, that the resistances of equal and equally swift globes moving in air, water, and quicksilver, are as the densities of the fluids. We here prove the same more accurately by experiments of bodies falling in air and water. For pendulums at each oscillation excite a motion in the fluid always contrary to the motion of the pendulum in its return; and the resistance arising from this motion, as also the resistance of the thread by which the pendulum is suspended, makes the whole resistance of a pendulum greater than the resistance deduced from the experiments of

falling bodies. For by the experiments of pendulums described in that Scholium, a globe of the same density as water in describing the length of its semidiameter in air would lose the part of its motion. But by the theory delivered in this seventh Section, and confirmed by experiments of falling bodies, the same globe in describing the same length would lose only a part of its motion equal to, supposing the density of water to be to the density of air as 860 to 1. Therefore the resistances were found greater by the experiments of pendulums (for the reasons just mentioned) than by the experiments of falling globes; and that in the ratio of about 4 to 3. Bat yet since the resistances of pendulums oscillating in air, water, and quicksilver, are alike increased by like causes, the proportion of the resistances in these mediums will be rightly enough exhibited by the experiments of pendulums, as well as by the experiments of falling bodies. And from all this it may be concluded, that the resistances of bodies, moving in any fluids whatsoever, though of the most extreme fluidity, are, *caeteris paribus*, as the densities of the fluids.

These things being thus established, we may now determine what part of its motion any globe projected in any fluid whatsoever would nearly lose in a given time. Let D be the diameter of the globe, and V its velocity at the beginning of its motion, and T the time in which a globe with the velocity V can describe *in vacuo* a space that is, to the space D as the density of the globe to the density of the fluid; and the globe projected in that fluid will, in any other time *t* lose the part, the part remaining; and will describe a space, which will be to that described in the same time *in vacuo* with the uniform velocity V, as the logarithm of the number multiplied by the number 2,302585093 is to the number, by Cor. 7, Prop. XXXV. In slow motions the resistance may be a little less, because the figure of a globe is more adapted to motion than the figure of a cylinder described with the same diameter. In swift motions the resistance may be a little greater, because the elasticity and compression of the fluid do not increase in the duplicate ratio of the velocity. But these little niceties I take no notice of.

And though air, water, quicksilver, and the like fluids, by the division of their parts *in infinitum*, should be subtilized, and become mediums infinitely fluid, nevertheless, the resistance they would make to projected globes would be the same. For the resistance considered in the preceding Propositions arises from the inactivity of the matter; and the inactivity of

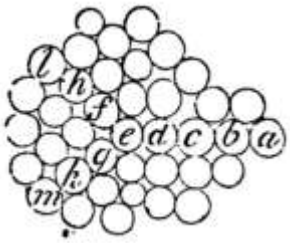
matter is essential to bodies, and always proportional to the quantity of matter. By the division of the parts of the fluid the resistance arising from the tenacity and friction of the parts may be indeed diminished; but the quantity of matter will not be at all diminished by this division; and if the quantity of matter be the same, its force of inactivity will be the same; and therefore the resistance here spoken of will be the same, as being always proportional to that force. To diminish this resistance, the quantity of matter in the spaces through which the bodies move must be diminished; and therefore the celestial spaces, through which the globes of the planets and comets are perpetually passing towards all parts, with the utmost freedom, and without the least sensible diminution of their motion, must be utterly void of any corporeal fluid, excepting, perhaps, some extremely rare vapours and the rays of light.

Projectiles excite a motion in fluids as they pass through them, and this motion arises from the excess of the pressure of the fluid at the fore parts of the projectile above the pressure of the same at the hinder parts; and cannot be less in mediums infinitely fluid than it is in air, water, and quicksilver, in proportion to the density of matter in each. Now this excess of pressure does, in proportion to its quantity, not only excite a motion in the fluid, but also acts upon the projectile so as to retard its motion; and therefore the resistance in every fluid is as the motion excited by the projectile in the fluid; and cannot be less in the most subtile aether in proportion to the density of that aether, than it is in air, water, and quicksilver, in proportion to the densities of those fluids.

Section VIII: Of motion propagated through fluids

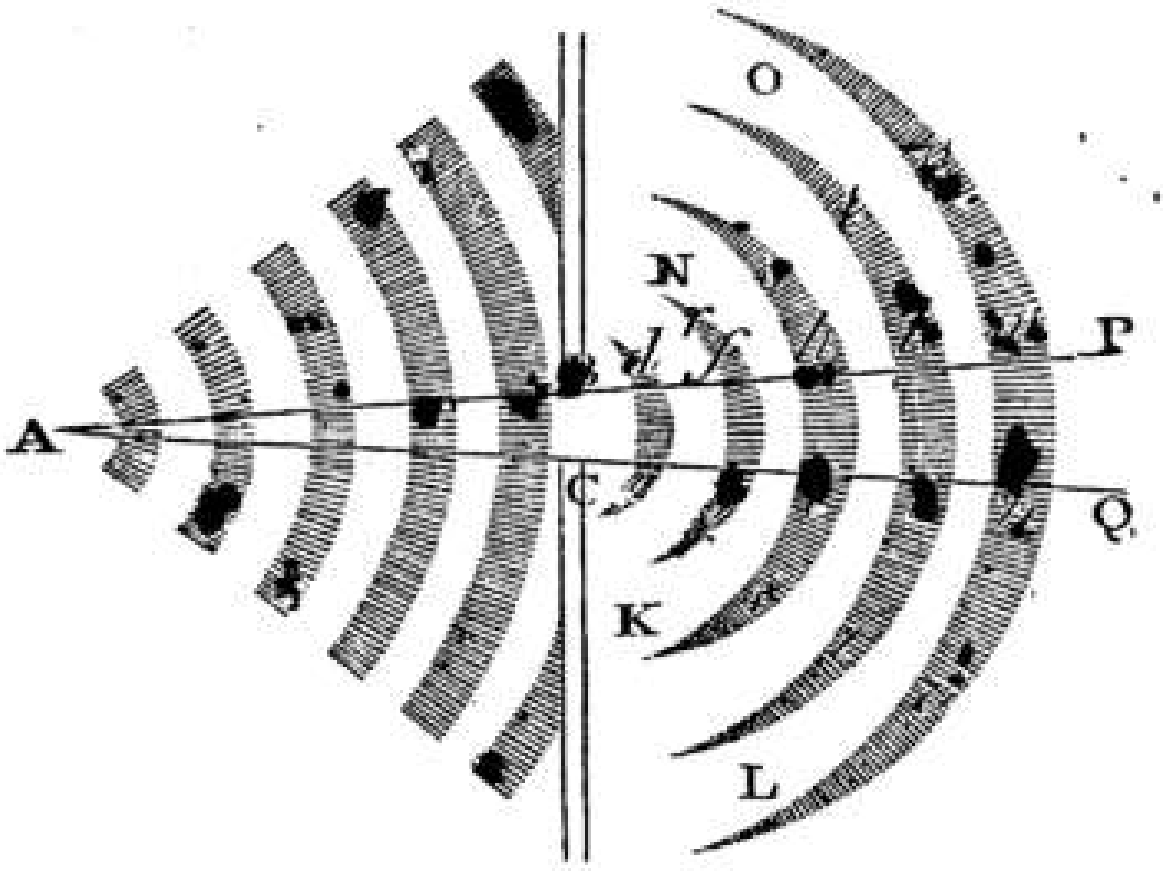
PROPOSITION XLI. THEOREM XXXII.

A pressure is not propagated through a fluid in rectilinear directions unless where the particles of the fluid lie in a right line.



If the particles *a, b, c, d, e,* lie in a right line, the pressure may be indeed directly propagated from *a* to *e*; but then the particle *e* will urge the obliquely posited particles *f* and *g* obliquely, and those particles *f* and *g* will not sustain this pressure, unless they be supported by the particles *h* and *k* lying beyond them; but the particles that support them are also pressed by them; and those particles cannot sustain that pressure, without being supported by, and pressing upon, those particles that lie still farther, as *l* and *m*, and so on *in infinitum*. Therefore the pressure, as soon as it is propagated to particles that lie out of right lines, begins to deflect towards one hand and the other, and will be propagated obliquely *in infinitum*; and after it has begun to be propagated obliquely, if it reaches more distant particles lying out of the right line, it will deflect again on each hand and this it will do as often as it lights on particles that do not lie exactly in a right line. Q.E.D.

Cor. If any part of a pressure, propagated through a fluid from a given point, be intercepted by any obstacle, the remaining part, which is not intercepted, will deflect into the spaces behind the obstacle. This may be demonstrated also after the following manner. Let a pressure be propagated from the point A towards any part, and, if it be possible, in rectilinear

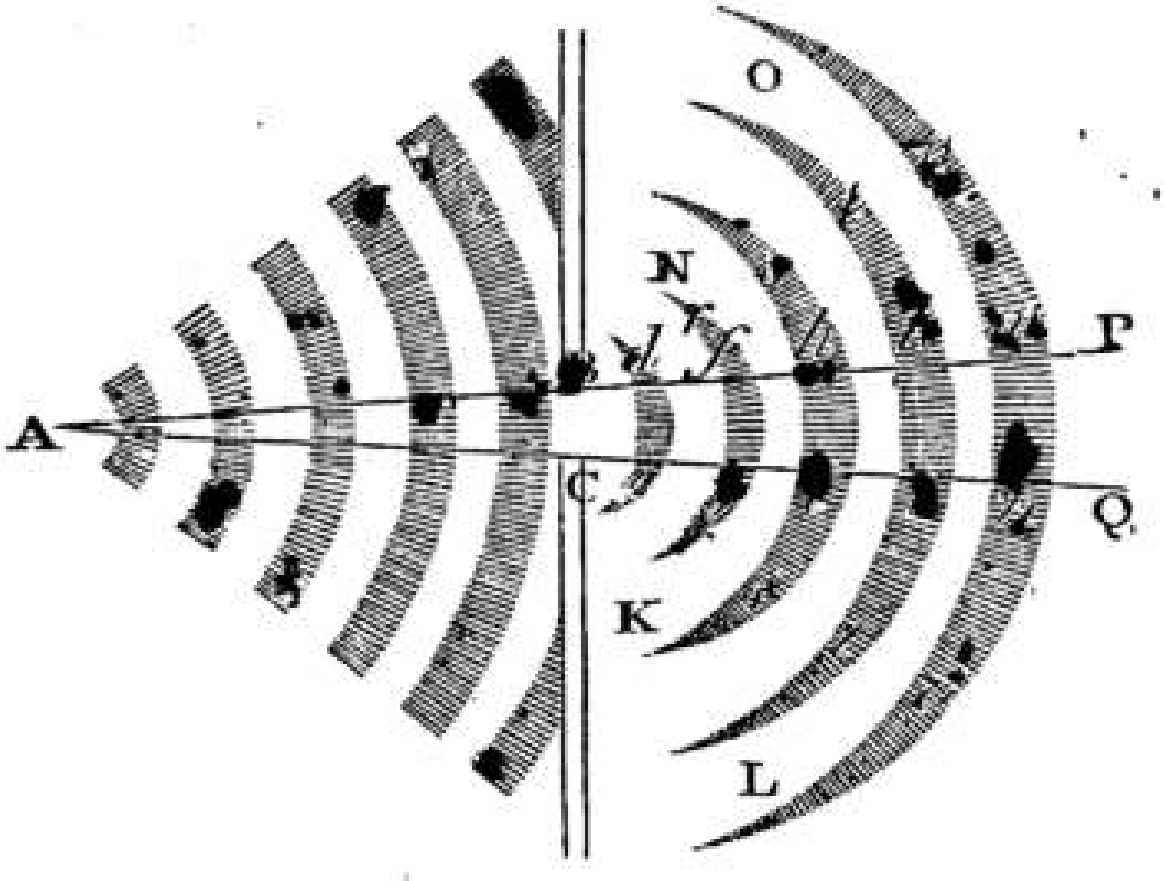


directions; and the obstacle NBCK being perforated in BC, let all the pressure be intercepted but the coniform part APQ passing through the circular hole BC. Let the cone APQ be divided into frustums by the transverse plants, *de, fg, hi*. Then while the cone ABC, propagating the pressure, urges the conic frustum *degf* beyond it on the superficies *de*, and this frustum urges the next frustum *fgih* on the superficies *fg*, and that frustum urges a third frustum, and so *in infinitum*; it is manifest (by the third Law) that the first frustum *defg* is, by the reaction of the second frustum *fghi*, as much urged and pressed on the superficies *fg*, as it urges and presses that second frustum. Therefore the frustum *degf* is compressed on both sides, that is, between the cone A*de* and the frustum *fhig*; and therefore (by Case 6, Prop. XIX) cannot preserve its figure, unless it be compressed with the same force on all sides. Therefore with the same force with which it is pressed on the superficies *de, fg*, it will endeavour to break forth at the sides *df, eg*; and there (being not in the least tenacious or hard, but perfectly fluid) it will run out, expanding itself, unless there be an

ambient fluid opposing that endeavour. Therefore, by the effort it makes to run out, it will press the ambient fluid, at its sides *df, eg*, with the same force that it does the frustum *fghi*; and therefore, the pressure will be propagated as much from the sides *df, eg*, into the spaces NO, KL this way and that way, as it is propagated from the superficies *fg* towards PQ. Q.E.D.

PROPOSITION XLII. THEOREM XXXIII.

All motion propagated through a fluid diverges from a rectilinear progress into the unmoved spaces.



Case 1. Let a motion be propagated from the point A through the hole BC, and, if it be possible, let it proceed in the conic space BCQP according to right lines diverging from the point A. And let us first suppose this motion to be that of waves in the surface of standing water; and let *de, fg, hi, kl,*

&c., be the tops of the several waves, divided from each other by as many intermediate valleys or hollows. Then, because the water in the ridges of the waves is higher than in the unmoved parts of the fluid KL, NO, it will run down from off the tops of those ridges, *e, g, i, l,* &c., *d, f, h, k,* &c., this way and that way towards KL and NO; and because the water is more depressed in the hollows of the waves than in the unmoved parts of the fluid KL, NO, it will run down into those hollows out of those unmoved parts. By the first deflux the ridges of the waves will dilate themselves this way and that way, and be propagated towards KL and NO. And because the motion of the waves from A towards PQ is carried on by a continual deflux from the ridges of the waves into the hollows next to them, and therefore cannot be swifter than in proportion to the celerity of the descent; and the descent of the water on each side towards KL and NO must be performed with the same velocity; it follows that the dilatation of the waves on each side towards KL and NO will be propagated with the same velocity as the waves themselves go forward with directly from A to PQ. And therefore the whole space this way and that way towards KL and NO will be filled by the dilated waves *rfgr, shis, tklt, vmnv,* &c. Q.E.D. That these things are so, any one may find by making the experiment in still water.

Case 2. Let us suppose that *de, fg, hi, kl, mn,* represent pulses successively propagated from the point A through an elastic medium. Conceive the pulses to be propagated by successive condensations and rarefactions of the medium, so that the densest part of every pulse may occupy a spherical superficies described about the centre A, and that equal intervals intervene between the successive pulses. Let the lines *de, fg, hi, kl,* &c., represent the densest parts of the pulses, propagated through the hole BC; and because the medium is denser there than in the spaces on either side towards KL and NO, it will dilate itself as well towards those spaces KL, NO, on each hand, as towards the rare intervals between the pulses; and thence the medium, becoming always more rare next the intervals, and more dense next the pulses, will partake of their motion. And because the progressive motion of the pulses arises from the perpetual relaxation of the denser parts towards the antecedent rare intervals; and since the pulses will relax themselves on each hand towards the quiescent parts of the medium KL, NO, with very near the same celerity; therefore the pulses will dilate themselves on all sides into the unmoved parts KL, NO, with almost the

same celerity with which they are propagated directly from the centre A; and therefore will fill up the whole space KLON. Q.E.D. And we find the same by experience also in sounds which are heard through a mountain interposed; and, if they come into a chamber through the window, dilate themselves into all the parts of the room, and are heard in every corner; and not as reflected from the opposite walls, but directly propagated from the window, as far as our sense can judge.

Case 3 Let us suppose, lastly, that a motion of any kind is propagated from A through the hole BC. Then since the cause of this propagation is that the parts of the medium that are near the centre A disturb and agitate those which lie farther from it; and since the parts which are urged are fluid, and therefore recede every way towards those spaces where they are less pressed, they will by consequence recede towards all the parts of the quiescent medium; as well to the parts on each hand, as KL and NO, as to those right before, as PQ; and by this means all the motion, as soon as it has passed through the hole BC, will begin to dilate itself, and from thence, as from its principle and centre, will be propagated directly every way. Q.E.D.

PROPOSITION XLIII. THEOREM XXXIV.

Every tremulous body in an elastic medium propagates the motion of the pulses on every side right forward; but in a non-elastic medium excites a circular motion.

Case. 1. The parts of the tremulous body, alternately going and returning, do in going urge and drive before them those parts of the medium that lie nearest, and by that impulse compress and condense them; and in returning suffer those compressed parts to recede again, and expand themselves. Therefore the parts of the medium that lie nearest to the tremulous body move to and fro by turns, in like manner as the parts of the tremulous body itself do; and for the same cause that the parts of this body agitate these parts of the medium, these parts, being agitated by like tremors, will in their turn agitate others next to themselves; and these others, agitated in like manner, will agitate those that lie beyond them, and so on *in infinitum*. And in the same manner as the first parts of the medium were condensed in

going, and relaxed in returning, so will the other parts be condensed every time they go, and expand themselves every time they re turn. And therefore they will not be all going and all returning at the same instant (for in that case they would always preserve determined distances from each other, and there could be no alternate condensation and rarefaction); but since, in the places where they are condensed, they approach to, and, in the places where they are rarefied, recede from each other, therefore some of them will be going while others are returning; and so on *in infinitum*. The parts so going, and in their going condensed, are pulses, by reason of the progressive motion with which they strike obstacles in their way; and therefore the successive pulses produced by a tremulous body will be propagated in rectilinear directions; and that at nearly equal distances from each other, because of the equal intervals of time in which the body, by its several tremors produces the several pulses. And though the parts of the tremulous body go and return in some certain and determinate direction, yet the pulses propagated from thence through the medium will dilate themselves towards the sides, by the foregoing Proposition; and will be propagated on all sides from that tremulous body, as from a common centre, in superficies nearly spherical and concentrical. An example of this we have in waves excited by shaking a finger in water, which proceed not only forward and backward agreeably to the motion of the finger, but spread themselves in the manner of concentrical circles all round the finger, and are propagated on every side. For the gravity of the water supplies the place of elastic force.

Case 2. If the medium be not elastic, then, because its parts cannot be condensed by the pressure arising from the vibrating parts of the tremulous body, the motion will be propagated in an instant towards the parts where the medium yields most easily, that is, to the parts which the tremulous body would otherwise leave vacuous behind it. The case is the same with that of a body projected in any medium whatever. A medium yielding to projectiles does not recede *in infinitum*, but with a circular motion comes round to the spaces which the body leaves behind it. Therefore as often as a tremulous body tends to any part, the medium yielding to it comes round in a circle to the parts which the body leaves; and as often as the body returns to the first place, the medium will be driven from the place it came round to, and return to its original place. And though the tremulous body be not firm and hard, but every way flexible, yet if it continue of a given

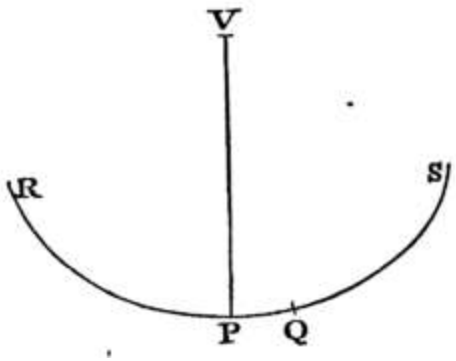
magnitude, since it cannot impel the medium by its tremors any where without yielding to it somewhere else, the medium receding from the parts of the body where it is pressed will always come round in a circle to the parts that yield to it. Q.E.D.

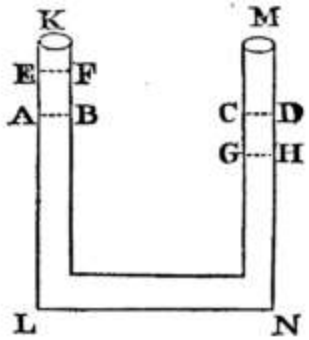
Cor. It is a mistake, therefore, to think, as some have done, that the agitation of the parts of flame conduces to the propagation of a pressure in rectilinear directions through an ambient medium. A pressure of that kind must be derived not from the agitation only of the parts of flame, but from the dilatation of the whole.

PROPOSITION XLIV. THEOREM XXXV.

If water ascend and descend alternately in the erected legs KL, MN, *of a canal or pipe; and a pendulum be constructed whose length between the point of suspension and the centre of oscillation is equal to half the length of the water in the canal; I say, that the water will ascend and descend in the same times in which the pendulum oscillates.*

I measure the length of the water along the axes of the canal and its legs, and make it equal to the sum of those axes; and take no notice of the resistance of the water arising from its attrition by the sides of the canal. Let, therefore, AB, CD, represent the mean height of the water in both legs; and when the water in the leg KL ascends to the height EF, the water will descend in the leg MN to the height GH. Let P be a pendulous body, VP the thread, V the point of suspension, RPQS the cycloid which





the pendulum describes, P its lowest point, PQ an arc equal to the height AE. The force with which the motion of the water is accelerated and

retarded alternately is the excess of the weight of the water in one leg above the weight in the other; and, therefore, when the water in the leg KL ascends to EF, and in the other leg descends to GH, that force is double the weight of the water EABF, and therefore is to the weight of the whole water as AE or PQ to VP or PR. The force also with which the body P is accelerated or retarded in any place, as Q, of a cycloid, is (by Cor. Prop. LI) to its whole weight as its distance PQ from the lowest place P to the length PR of the cycloid. Therefore the motive forces of the water and pendulum, describing the equal spaces AE, PQ, are as the weights to be moved; and therefore if the water and pendulum are quiescent at first, those forces will move them in equal times, and will cause them to go and return together with a reciprocal motion. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore the reciprocations of the water in ascending and descending are all performed in equal times, whether the motion be more or less intense or remiss.

Cor. 2. If the length of the whole water in the canal be of 6 feet of *French* measure, the water will descend in one second of time, and will ascend in another second, and so on by turns *in infinitum*; for a pendulum of 3 such feet in length will oscillate in one second of time.

Cor. 3. But if the length of the water be increased or diminished, the time of the reciprocation will be increased or diminished in the subduplicate ratio of the length.

PROPOSITION XLV. THEOREM XXXVI.

The velocity of waves is in the subduplicate ratio of the breadths.

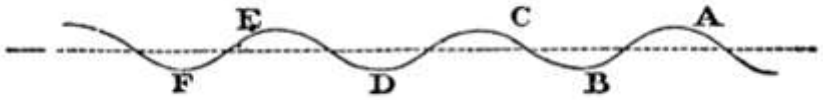
This follows from the construction of the following Proposition.

PROPOSITION XLVI. PROBLEM X.

To find the velocity of waves.

Let a pendulum be constructed, whose length between the point of suspension and the centre of oscillation is equal to the breadth of the waves

and in the time that the pendulum will perform one single oscillation the waves will advance forward nearly a space equal to their breadth.



That which I call the breadth of the waves is the transverse measure lying between the deepest part of the hollows, or the tops of the ridges. Let ABCDEF represent the surface of stagnant water ascending and descending in successive waves; and let A, C, E, &c., be the tops of the waves; and let B, D, F, &c., be the intermediate hollows. Because the motion of the waves is carried on by the successive ascent and descent of the water, so that the parts thereof, as A, C, E, &c., which are highest at one time become lowest immediately after; and because the motive force, by which the highest parts descend and the lowest ascend, is the weight of the elevated water, that alternate ascent and descent will be analogous to the reciprocal motion of the water in the canal, and observe the same laws as to the times of its ascent and descent; and therefore (by Prop. XLIV) if the distances between the highest places of the waves A, C, E, and the lowest B, D, F, be equal to twice the length of any pendulum, the highest parts A, C, E, will become the lowest in the time of one oscillation, and in the time of another oscillation will ascend again. Therefore between the passage of each wave, the time of two oscillations will intervene; that is, the wave will describe its breadth in the time that pendulum will oscillate twice; but a pendulum of four times that length, and which therefore is equal to the breadth of the waves, will just oscillate once in that time. Q.E.I.

Cor. 1. Therefore waves, whose breadth is equal to 3 *French* feet, will advance through a space equal to their breadth in one second of time; and therefore in one minute will go over a space of 183⅓ feet; and in an hour a space of 11000 feet, nearly.

Cor. 2. And the velocity of greater or less waves will be augmented or diminished in the subduplicate ratio of their breadth.

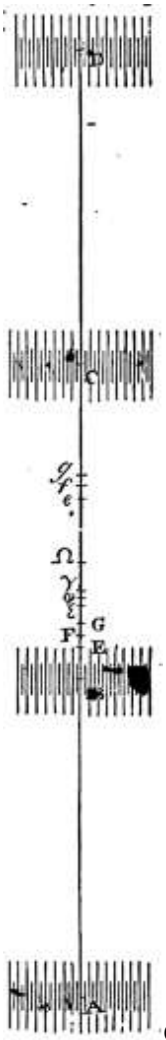
These things are true upon the supposition that the parts of water ascend or descend in a right line; but, in truth, that ascent and descent is rather

performed in a circle; and therefore I propose the time defined by this Proposition as only near the truth.

PROPOSITION XLVII. THEOREM XXXVII.

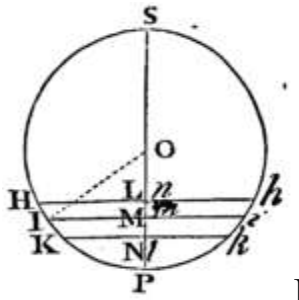
If pulses are propagated through a fluid, the several particles of the fluid, going and returning with the shortest reciprocal motion, are always accelerated or retarded according to the law of the oscillating pendulum.

Let AB, BC, CD, &c., represent equal distances of successive pulses, ABC the line of direction of the motion of the successive pulses propagated from A to B; E, F, G three physical points of the quiescent medium situate in the



right line AC at equal distances from each other; E*e*, F*f*, G*g*, equal spaces of extreme shortness, through which those points go and return with

a reciprocal motion in each vibration; *ε, Φ, γ,* any intermediate places of the same points; EF, FG physical lineolae, or linear parts of the medium lying between those points, and successively transferred into the places *εΦ, Φγ,* and *ef, fg*. Let there be drawn the right line PS equal to the right line E*e*. Bisect the same in O, and from the centre O, with the interval OP, describe the circle SIP*i*. Let the whole time of one vibration; with its proportional parts, be expounded by the whole circumference of this circle and its parts, in such sort, that, when any time PH or PHS*h* is completed, if there be let



fall to PS the perpendicular HL or *hl*, and there be taken E*ε* equal to PL or P*l*, the physical point E may be found in *ε*. A point, as E, moving according to this law with a reciprocal motion, in its going from E through *ε* to *e*, and returning again through *ε* to E, will perform its several vibrations with the same degrees of acceleration and retardation with those of an oscillating pendulum. We are now to prove that the several physical points of the medium will be agitated with such a kind of motion. Let us suppose, then, that a medium hath such a motion excited in it from any cause whatsoever, and consider what will follow from thence.

In the circumference PHS*h* let there be taken the equal arcs, HI, IK, or *hi, ik*, having the same ratio to the whole circumference as the equal right lines EF, FG have to BC, the whole interval of the pulses. Let fall the perpendiculars IM, KN, or *im, kn*; then because the points E, F, G are successively agitated with like motions, and perform their entire vibrations composed of their going and return, while the pulse is transferred from B to C; if PH or PHS*h* be the time elapsed since the beginning of the motion of the point E, then will PI or PHS*i* be the time elapsed since the beginning of the motion of the point F, and PK or PHS*k* the time elapsed since the beginning of the motion of the point G; and therefore E*ε*, F*Φ*, G*γ*, will be respectively equal to PL, PM, PN, while the points are going, and to P*l*, P*m*, P*n*, when the points are returning. Therefore *εγ* or EG + G*γ* - E*ε* will, when the points are going, be equal to EG - LN and in their return equal to EG +

ln. But *εγ* is the breadth or expansion of the part EG of the medium in the place *εγ*; and therefore the expansion of that part in its going is to its mean expansion as EG - LN to EG; and in its return, as EG + *ln* or EG + LN to EG. Therefore since LN is to KH as IM to the radius OP, and KH to EG as the circumference PHS*h*P to BC; that is, if we put V for the radius of a circle whose circumference is equal to BC the interval of the pulses, as OP to V; and, *ex aequo*, LN to EG as IM to V; the expansion of the part EG, or of the physical point F in the place *εγ*, to the mean expansion of the same part in its first place EG, will be as V - IM to V in going, and as V + *im* to V in its return. Hence the elastic force of the point P in the place *εγ* to its mean elastic force in the place EG is as to in its going, and to in its return. And by the same reasoning the elastic forces of the physical points E and G in going are as and to; and the difference of the forces to the mean elastic force of the medium as to; that is, as to, or as HL - KN to V; if we suppose (by reason of the very short extent of the vibrations) HL and KN to be indefinitely less than the quantity V. Therefore since the quantity V is given, the difference of the forces is as HL - KN; that is (because HL - KN is proportional to HK, and OM to OI or OP; and because HK and OP are given) as OM; that is, if F*f* be bisected in Ω, as Ω*Φ*. And for the same reason the difference of the elastic forces of the physical points *ε* and *γ*, in the return of the physical lineola *εγ*, is as Ω*Φ*. But that difference (that is, the excess of the elastic force of the point *ε* above the elastic force of the point γ) is the very force by which the intervening physical lineola *εγ* of the medium is accelerated in going, and retarded in returning; and therefore the accelerative force of the physical lineola *εγ* is as its distance from Ω, the middle place of the vibration. Therefore (by Prop. XXXVIII, Book I) the time is rightly expounded by the arc PI; and the linear part of the medium *εγ* is moved according to the law abovementioned, that is, according to the law of a pendulum oscillating; and the case is the same of all the linear parts of which the whole medium is compounded. Q.E.D.

Cor. Hence it appears that the number of the pulses propagated is the same with the number of the vibrations of the tremulous body, and is not multiplied in their progress. For the physical lineola *εγ* as soon as it returns to its first place is at rest; neither will it move again, unless it receives a new motion either from the impulse of the tremulous body, or of the pulses propagated from that body. As soon, therefore, as the pulses cease to be

propagated from the tremulous body, it will return to a state of rest, and move no more.

PROPOSITION XLVIII. THEOREM XXXVIII.

The velocities of pulses propagated in an elastic fluid are in a ratio compounded of the subduplicate ratio of the elastic force directly, and the subduplicate ratio of the density inversely; supposing the elastic force of the fluid to be proportional to its condensation.

Case 1. If the mediums be homogeneous, and the distances of the pulses in those mediums be equal amongst themselves, but the motion in one medium is more intense than in the other, the contractions and dilatations of the correspondent parts will be as those motions; not that this proportion is perfectly accurate. However, if the contractions and dilatations are not exceedingly intense, the error will not be sensible; and therefore this proportion may be considered as physically exact. Now the motive elastic forces are as the contractions and dilatations; and the velocities generated in the same time in equal parts are as the forces. Therefore equal and corresponding parts of corresponding pulses will go and return together, through spaces proportional to their contractions and dilatations, with velocities that are as those spaces; and therefore the pulses, which in the time of one going and returning advance forward a space equal to their breadth, and are always succeeding into the places of the pulses that immediately go before them, will, by reason of the equality of the distances, go forward in both mediums with equal velocity.

Case 2. If the distances of the pulses or their lengths are greater in one medium than in another, let us suppose that the correspondent parts describe spaces, in going and returning, each time proportional to the breadths of the pulses; then will their contractions and dilatations be equal: and therefore if the mediums are homogeneous, the motive elastic forces, which agitate them with a reciprocal motion, will be equal also. Now the matter to be moved by these forces is as the breadth of the pulses; and the space through which they move every time they go and return is in the same ratio. And, moreover, the time of one going and returning is in a ratio compounded of

the subduplicate ratio of the matter, and the subduplicate ratio of the space; and therefore is as the space. But the pulses advance a space equal to their breadths in the times of going once and returning once; that is, they go over spaces proportional to the times, and therefore are equally swift.

Case 3. And therefore in mediums of equal density and elastic force, all the pulses are equally swift. Now if the density or the elastic force of the medium were augmented, then, because the motive force is increased in the ratio of the elastic force, and the matter to be moved is increased in the ratio of the density, the time which is necessary for producing the same motion as before will be increased in the subduplicate ratio of the density, and will be diminished in the subduplicate ratio of the elastic force. And therefore the velocity of the pulses will be in a ratio compounded of the subduplicate ratio of the density of the medium inversely, and the subduplicate ratio of the elastic force directly. Q.E.D.

This Proposition will be made more clear from the construction of the following Problem.

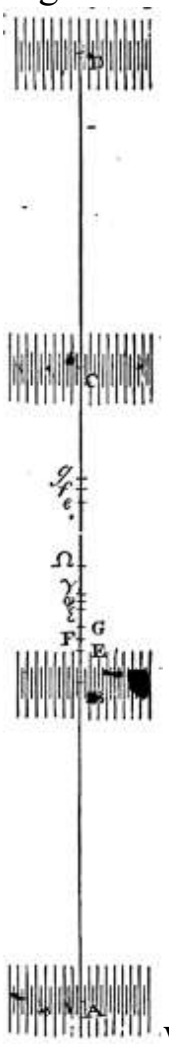
PROPOSITION XLIX. PROBLEM XI.

The density and elastic force of a medium being given, to find the velocity of the pulses.

Suppose the medium to be pressed by an incumbent weight after the manner of our air; and let A be the height of a homogeneous medium, whose weight is equal to the incumbent weight, and whose density is the same with the density of the compressed medium in which the pulses are propagated. Suppose a pendulum to be constructed whose length between the point of suspension and the centre of oscillation is A: and in the time in which that pendulum will perform one entire oscillation composed of its going and returning, the pulse will be propagated right onwards through a space equal to the circumference of a circle described with the radius A.

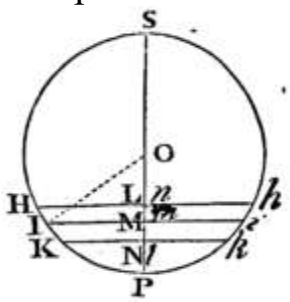
For, letting those things stand which were constructed in Prop. XLVII, if any physical line, as EF, describing the space PS in each vibration, be acted on in the extremities P and S of every going and return that it makes by an elastic force that is equal to its weight, it will perform its several vibrations

in the time in which the same might oscillate in a cycloid whose whole perimeter is equal to the length PS; and that because equal forces will impel equal corpuscles through equal spaces in the same or equal times. Therefore since the times of the oscillations are in the subduplicate ratio of the lengths of the pendulums, and the length of the pendulum is equal to half the arc of the whole cycloid, the time of one vibration would be to the time of the oscillation of a pendulum whose length is A in the subduplicate ratio of the length ½PS or PO to the length A. But the elastic force with which the physical lineola EG is urged, when it is found in its extreme places P, S, was (in the demonstration of Prop. XLVII) to its whole elastic force as HL - KN to V, that is (since the point K now falls upon P), as HK to V: and all that force, or which is the same thing, the incumbent weight by which the lineola EG is compressed, is to the weight of the lineola as the altitude A of the incumbent weight to EG the length of the lineola; and therefore, *ex*



aequo, the force with which the lineola EG is urged in the places

P and S is to the weight of that lineola as HK A to V EG; or as PO A to VV; because HK was to EG as PO to V. Therefore since the times in which equal bodies are impelled through equal spaces are reciprocally in the subduplicate ratio of the forces, the time of one vibration, produced by the action of that elastic force, will be to the time of a vibration, produced by the impulse of the weight in a subduplicate ratio of VV to PO A, and therefore to the time of the oscillation of a pendulum whose length is A in the subduplicate ratio of VV to PO A, and the subduplicate ratio of PO to A conjunctly; that is, in the entire ratio of V to A.



But in the time of one vibration composed of the going and returning of the pendulum, the pulse will be propagated right onward through a space equal to its breadth BC. Therefore the time in which a pulse runs over the space BC is to the time of one oscillation composed of the going and returning of the pendulum as V to A, that is, as BC to the circumference of a circle whose radius is A. But the time in which the pulse will run over the space BC is to the time in which it will run over a length equal to that circumference in the same ratio; and therefore in the time of such an oscillation the pulse will run over a length equal to that circumference. Q.E.D.

Cor. 1. The velocity of the pulses is equal to that which heavy bodies acquire by falling with an equally accelerated motion, and in their fall describing half the altitude A. For the pulse will, in the time of this fall, supposing it to move with the velocity acquired by that fall, run over a space that will be equal to the whole altitude A; and therefore in the time of one oscillation composed of one going and return, will go over a space equal to the circumference of a circle described with the radius A; for the time of the fall is to the time of oscillation as the radius of a circle to its circumference.

Cor. 2. Therefore since that altitude A is as the elastic force of the fluid directly, and the density of the same inversely, the velocity of the pulses will

be in a ratio compounded of the subduplicate ratio of the density inversely, and the subduplicate ratio of the elastic force directly.

PROPOSITION L. PROBLEM XII.

To find the distances of the pulses.

Let the number of the vibrations of the body, by whose tremor the pulses are produced, be found to any given time. By that number divide the space which a pulse can go over in the same time, and the part found will be the breadth of one pulse. Q.E.I.

SCHOLIUM.

The last Propositions respect the motions of light and sounds; for since light is propagated in right lines, it is certain that it cannot consist in action alone (by Prop. XLI and XLII). As to sounds, since they arise from tremulous bodies, they can be nothing else but pulses of the air propagated through it (by Prop. XLIII); and this is confirmed by the tremors which sounds, if they be loud and deep, excite in the bodies near them, as we experience in the sound of drums; for quick and short tremors are less easily excited. But it is well known that any sounds, falling upon strings in unison with the sonorous bodies, excite tremors in those strings. This is also confirmed from the velocity of sounds; for since the specific gravities of rain-water and quicksilver are to one another as about 1 to 13⅔, and when the mercury in the barometer is at the height of 30 inches of our measure, the specific gravities of the air and of rain-water are to one another as about 1 to 870, therefore the specific gravity of air and quicksilver are to each other as 1 to 11890. Therefore when the height of the quicksilver is at 30 inches, a height of uniform air, whose weight would be sufficient to compress our air to the density we find it to be of, must be equal to 356700 inches, or 29725 feet of our measure; and this is that very height of the medium, which I have called A in the construction of the foregoing Proposition. A circle whose radius is 29725 feet is 186768 feet in circumference. And since a pendulum 39 inches in length completes one oscillation, composed of its going and return, in two seconds of time, as is commonly known, it follows that a

pendulum 29725 feet, or 356700 inches in length will perform a like oscillation in 190¾ seconds. Therefore in that time a sound will go right onwards 186768 feet, and therefore in one second 979 feet.

But in this computation we have made no allowance for the crassitude of the solid particles of the air, by which the sound is propagated instantaneously. Because the weight of air is to the weight of water as 1 to 870, and because salts are almost twice as dense as water; if the particles of air are supposed to be of near the same density as those of water or salt, and the rarity of the air arises from the intervals of the particles; the diameter of one particle of air will be to the interval between the centres of the particles as 1 to about 9 or 10, and to the interval between the particles themselves as 1 to 8 or 9. Therefore to 979 feet, which, according to the above calculation, a sound will advance forward in one second of time, we may add, or about 109 feet, to compensate for the crassitude of the particles of the air: and then a sound will go forward about 1088 feet in one second of time.

Moreover, the vapours floating in the air being of another spring, and a different tone, will hardly, if at all, partake of the motion of the true air in which the sounds are propagated. Now if these vapours remain unmoved, that motion will be propagated the swifter through the true air alone, and that in the subduplicate ratio of the defect of the matter. So if the atmosphere consist of ten parts of true air and one part of vapours, the motion of sounds will be swifter in the subduplicate ratio of 11 to 10, or very nearly in the entire ratio of 21 to 20, than if it were propagated through eleven parts of true air: and therefore the motion of sounds above discovered must be increased in that ratio. By this means the sound will pass through 1142 feet in one second of time.

These things will be found true in spring and autumn, when the air is rarefied by the gentle warmth of those seasons, and by that means its elastic force becomes somewhat more intense. But in winter, when the air is condensed by the cold, and its elastic force is somewhat remitted, the motion of sounds will be slower in a subduplicate ratio of the density; and, on the other hand, swifter in the summer.

Now by experiments it actually appears that sounds do really advance in one second of time about 1142 feet of *English* measure, or 1070 feet of *French* measure.

The velocity of sounds being known, the intervals of the pulses are known also. For M. *Sauveur*, by some experiments that he made, found that an open pipe about five *Paris* feet in length gives a sound of the same tone with a viol-string that vibrates a hundred times in one second. Therefore there are near 100 pulses in a space of 1070 *Paris* feet, which a sound runs over in a second of time; and therefore one pulse fills up a space of about 10 *Paris* feet, that is, about twice the length of the pipe. From whence it is probable that the breadths of the pulses, in all sounds made in open pipes, are equal to twice the length of the pipes.

Moreover, from the Corollary of Prop. XLVII appears the reason why the sounds immediately cease with the motion of the sonorous body, and why they are heard no longer when we are at a great distance from the sonorous bodies than when we are very near them. And besides, from the foregoing principles, it plainly appears how it comes to pass that sounds are so mightily increased in speaking-trumpets; for all reciprocal motion uses to be increased by the generating cause at each return. And in tubes hindering the dilatation of the sounds, the motion decays more slowly, and recurs more forcibly; and therefore is the more increased by the new motion impressed at each return. And these are the principal phaenomena of sounds.

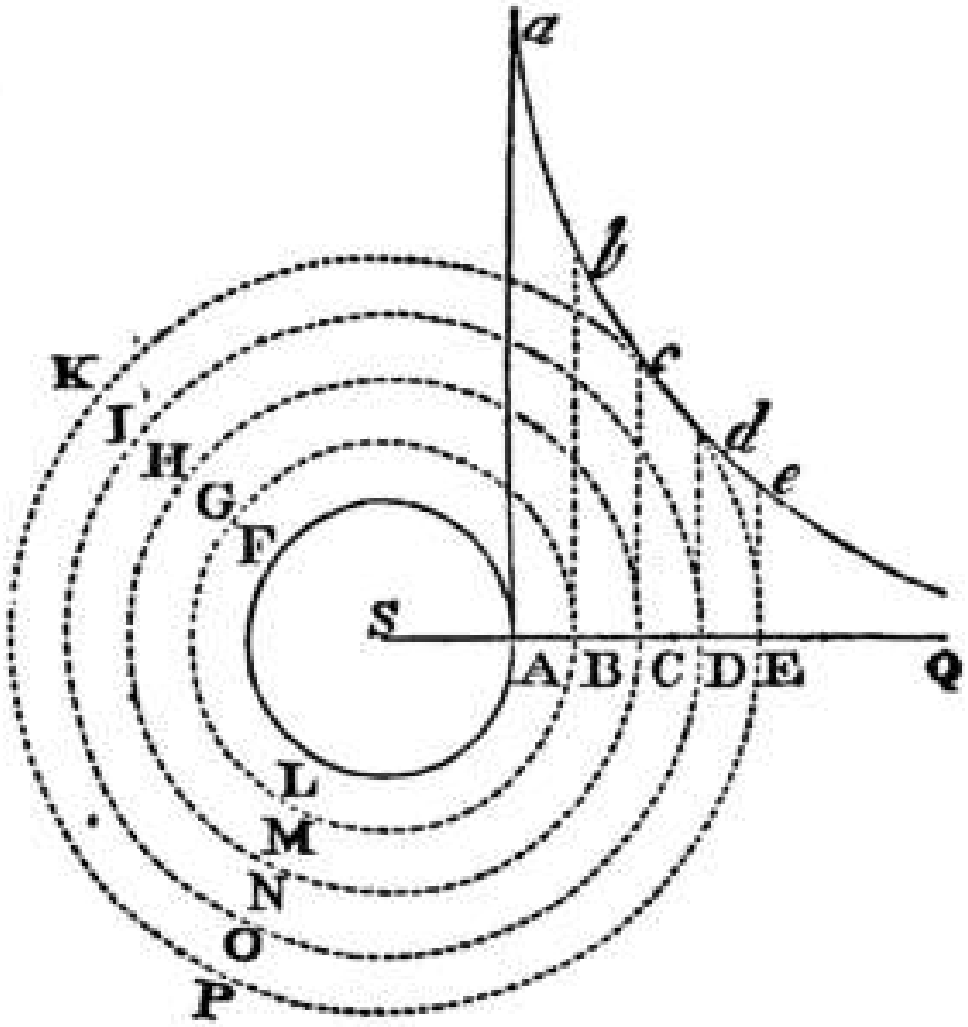
Section IX: Of the circular motion of fluids

HYPOTHESIS.

The resistance arising from the want of lubricity in the parts of a fluid, is, caeteris paribus*, proportional to the velocity with which the parts of the fluid are separated from each other.*

PROPOSITION LI. THEOREM XXXIX.

If a solid cylinder infinitely long, in an uniform and infinite fluid, revolve with an uniform motion about an axis given in position, and the fluid be forced round by only this impulse of the cylinder, and every part of the fluid persevere uniformly in its motion; I say, that the periodic times of the parts of the fluid are as their distances from the axis of the cylinder.



Let AFL be a cylinder turning uniformly about the axis S, and let the concentric circles BGM, CHN, DIO, EKP, &c., divide the fluid into innumerable concentric cylindric solid orbs of the same thickness. Then, because the fluid is homogeneous, the impressions which the contiguous orbs make upon each other mutually will be (by the Hypothesis) as their translations from each other, and as the contiguous superficies upon which the impressions are made. If the impression made upon any orb be greater or less on its concave than on its convex side, the stronger impression will prevail, and will either accelerate or retard the motion of the orb, according as it agrees with, or is contrary to, the motion of the same. Therefore, that every orb may persevere uniformly in its motion, the impressions made on both sides must be equal and their directions contrary. Therefore since the impressions are as the contiguous superficies, and as their translations from

one another, the translations will be inversely as the superficies, that is, inversely as the distances of the superficies from the axis. But the differences of the angular motions about the axis are as those translations applied to the distances, or as the translations directly and the distances inversely; that is, joining these ratios together, as the squares of the distances inversely. Therefore if there be erected the lines A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c., perpendicular to the several parts of he infinite right line SABCDEQ, and reciprocally proportional to the squares of SA, SB, SC, SD, SE, &c., and through the extremities of those perpendiculars there be supposed to pass an hyperbolic curve, the sums of the differences, that is, the whole angular motions, will be as the correspondent sums of the lines A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, that is (if to constitute a medium uniformly fluid the number of the orbs be increased and their breadth diminished *in infinitum*), as the hyperbolic areas A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, &c., analogous to the sums; and the times, reciprocally proportional to the angular motions, will be also reciprocally proportional to those areas. Therefore the periodic time of any particle as D, is reciprocally as the area D*d*Q, that is (as appears from the known methods of quadratures of curves), directly as the distance SD. Q.E.D.

Cor. 1. Hence the angular motions of the particles of the fluid are reciprocally as their distances from the axis of the cylinder, and the absolute velocities are equal.

Cor. 2. If a fluid be contained in a cylindric vessel of an infinite length, and contain another cylinder within, and both the cylinders revolve about one common axis, and the times of their revolutions be as their semi-diameters, and every part of the fluid perseveres in its motion, the periodic times of the several parts will be as the distances from the axis of the cylinders.

Cor. 3. If there be added or taken away any common quantity of angular motion from the cylinder and fluid moving in this manner; yet because this new motion will not alter the mutual attrition of the parts of the fluid, the motion of the parts among themselves will not be changed; for the translations of the parts from one another depend upon the attrition. Any part will persevere in that motion, which, by the attrition made on both sides with contrary directions, is no more accelerated than it is retarded.

Cor. 4. Therefore if there be taken away from this whole system of the cylinders and the fluid all the angular motion of the outward cylinder, we shall have the motion of the fluid in a quiescent cylinder.

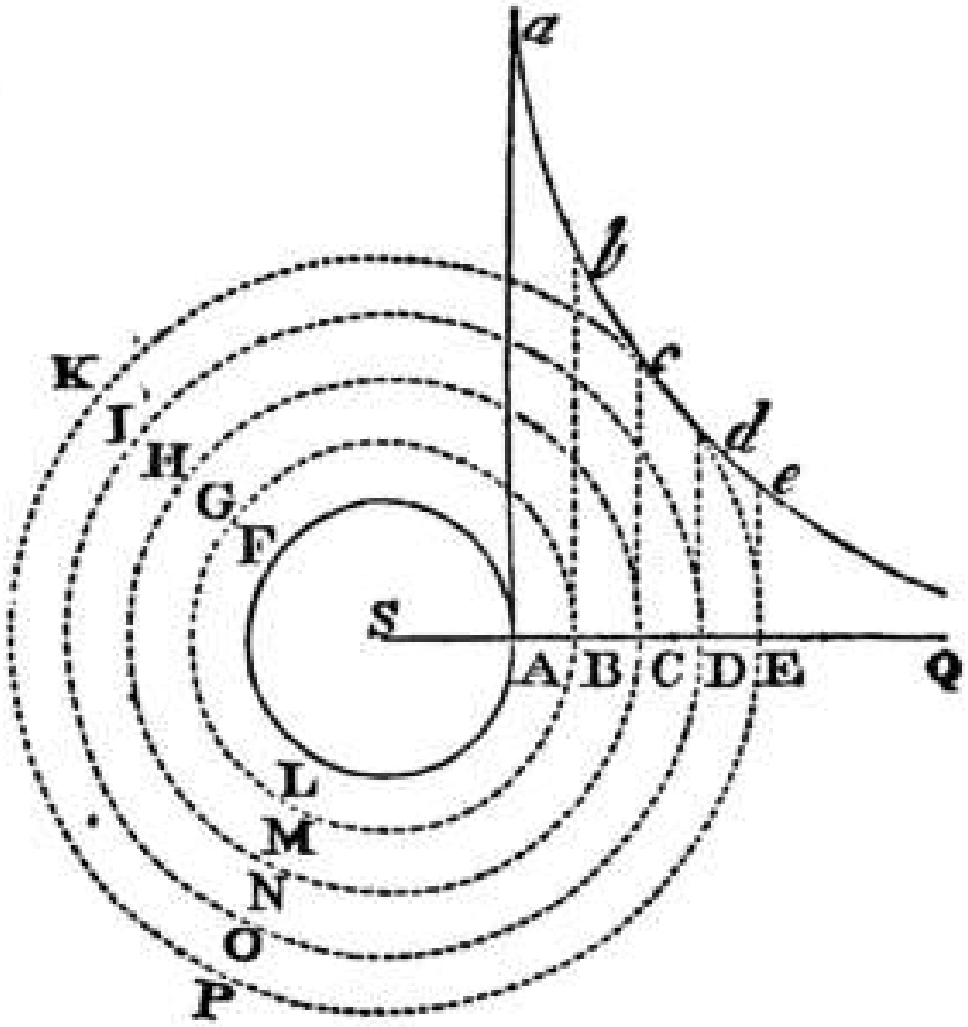
Cor. 5. Therefore if the fluid and outward cylinder are at rest, and the inward cylinder revolve uniformly, there will be communicated a circular motion to the fluid, which will be propagated by degrees through the whole fluid; and will go on continually increasing, till such time as the several parts of the fluid acquire the motion determined in Cor. 4.

Cor. 6. And because the fluid endeavours to propagate its motion still farther, its impulse will carry the outmost cylinder also about with it, unless the cylinder be violently detained; and accelerate its motion till the periodic times of both cylinders become equal among themselves. But if the outward cylinder be violently detained, it will make an effort to retard the motion of the fluid; and unless the inward cylinder preserve that motion by means of some external force impressed thereon, it will make it cease by degrees.

All these things will be found true by making the experiment in deep standing water.

PROPOSITION LII. THEOREM XL.

If a solid sphere, in an uniform and infinite fluid, revolves about an axis given in position, with an uniform motion, and the fluid be forced round by only this impulse of the sphere; and every part of the fluid perseveres uniformly in its motion; I say, that the periodic times of the parts of the fluid are as the squares of their distances from the centre of the sphere.



Case 1. Let AFL be a sphere turning uniformly about the axis S, and let the concentric circles BGM, CHN, DIO, EKP, &c., divide the fluid into innumerable concentric orbs of the same thickness. Suppose those orbs to be solid; and, because the fluid is homogeneous, the impressions which the contiguous orbs make one upon another will be (by the supposition) as their translations from one another, and the contiguous superficies upon which the impressions are made. If the impression upon any orb be greater or less upon its concave than upon its convex side, the more forcible impression will prevail, and will either accelerate or retard the velocity of the orb, according as it is directed with a conspiring or contrary motion to that of the orb. Therefore that every orb may persevere uniformly in its motion, it is necessary that the impressions made upon both sides of the orb should be equal, and have contrary directions. Therefore since the impressions are as

the contiguous superficies, and as their translations from one another, the translations will be inversely as the superficies, that is, inversely as the squares of the distances of the superficies from the centre. But the differences of the angular motions about the axis are as those translations applied to the distances, or as the translations directly and the distances inversely; that is, by compounding those ratios, as the cubes of the distances inversely. Therefore if upon the several parts of the infinite right line SABCDEQ there be erected the perpendiculars A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c., reciprocally proportional to the cubes of SA, SB, SC, SD, SE, &c., the sums of the differences, that is, the whole angular motions will be as the corresponding sums of the lines A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c., that is (if to constitute an uniformly fluid medium the number of the orbs be increased and their thickness diminished *in infinitum*), as the hyperbolic areas A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, &c., analogous to the sums; and the periodic times being reciprocally proportional to the angular motions, will be also reciprocally proportional to those areas. Therefore the periodic time of any orb DIO is reciprocally as the area D*d*Q, that is (by the known methods of quadratures), directly as the square of the distance SD. Which was first to be demonstrated.

Case 2. From the centre of the sphere let there be drawn a great number of indefinite right lines, making given angles with the axis, exceeding one another by equal differences; and, by these lines revolving about the axis, conceive the orbs to be cut into innumerable annuli; then will every annulus have four annuli contiguous to it, that is, one on its inside, one on its outside, and two on each hand. Now each of these annuli cannot be impelled equally and with contrary directions by the attrition of the interior and exterior annuli, unless the motion be communicated according to the law which we demonstrated in Case 1. This appears from that demonstration. And therefore any series of annuli, taken in any right line extending itself *in infinitum* from the globe, will move according to the law of Case 1, except we should imagine it hindered by the attrition of the annuli on each side of it. But now in a motion, according to this law, no such is, and therefore cannot be, any obstacle to the motions persevering according to that law. If annuli at equal distances from the centre revolve either more swiftly or more slowly near the poles than near the ecliptic, they will be accelerated if slow, and retarded if swift, by their mutual attrition;

and so the periodic times will continually approach to equality, according to the law of Case 1. Therefore this attrition will not at all hinder the motion from going on according to the law of Case 1, and therefore that law will take place; that is, the periodic times of the several annuli will be as the squares of their distances from the centre of the globe. Which was to be demonstrated in the second place.

Case 3. Let now every annulus be divided by transverse sections into innumerable particles constituting a substance absolutely and uniformly fluid; and because these sections do not at all respect the law of circular motion, but only serve to produce a fluid substance, the law of circular motion will continue the same as before. All the very small annuli will either not at all change their asperity and force of mutual attrition upon account of these sections, or else they will change the same equally. Therefore the proportion of the causes remaining the same, the proportion of the effects will remain the same also; that is, the proportion of the motions and the periodic times. Q.E.D. But now as the circular motion, and the centrifugal force thence arising, is greater at the ecliptic than at the poles, there must be some cause operating to retain the several particles in their circles; otherwise the matter that is at the ecliptic will always recede from the centre, and come round about to the poles by the outside of the vortex, and from thence return by the axis to the ecliptic with a perpetual circulation.

Cor. 1. Hence the angular motions of the parts of the fluid about the axis of the globe are reciprocally as the squares of the distances from the centre of the globe, and the absolute velocities are reciprocally as the same squares applied to the distances from the axis.

Cor. 2. If a globe revolve with a uniform motion about an axis of a given position in a similar and infinite quiescent fluid with an uniform motion, it will communicate a whirling motion to the fluid like that of a vortex, and that motion will by degrees be propagated onward *in infinitum*; and this motion will be increased, continually in every part of the fluid, till the periodical times of the several parts become as the squares of the distances from the centre of the globe.

Cor. 3. Because the inward parts of the vortex are by reason of their greater velocity continually pressing upon and driving forward the external parts, and by that action are perpetually communicating motion to them,

and at the same time those exterior parts communicate the same quantity of motion to those that lie still beyond them, and by this action preserve the quantity of their motion continually unchanged, it is plain that the motion is perpetually transferred from the centre to the circumference of the vortex, till it is quite swallowed up and lost in the boundless extent of that circumference. The matter between any two spherical superficies concentrical to the vortex will never be accelerated; because that matter will be always transferring the motion it receives from the matter nearer the centre to that matter which lies nearer the circumference.

Cor. 4. Therefore, in order to continue a vortex in the same state of motion, some active principle is required from which the globe may receive continually the same quantity of motion which it is always communicating to the matter of the vortex. Without such a principle it will undoubtedly come to pass that the globe and the inward parts of the vortex, being always propagating their motion to the outward parts, and not receiving any new motion, will gradually move slower and slower, and at last be carried round no longer.

Cor. 5. If another globe should be swimming in the same vortex at a certain distance from its centre, and in the mean time by some force revolve constantly about an axis of a given inclination, the motion of this globe will drive the fluid round after the manner of a vortex; and at first this new and small vortex will revolve with its globe about the centre of the other; and in the mean time its motion will creep on farther and farther, and by degrees be propagated *in infinitum*, after the manner of the first vortex. And for the same reason that the globe of the new vortex was carried about before by the motion of the other vortex, the globe of this other will be carried about by the motion of this new vortex, so that the two globes will revolve about some intermediate point, and by reason of that circular motion mutually fly from each other, unless some force restrains them. Afterward, if the constantly impressed forces, by which the globes persevere in their motions, should cease, and every thing be left to act according to the laws of mechanics, the motion of the globes will languish by degrees (for the reason assigned in Cor. 3 and 4), and the vortices at last will quite stand still.

Cor. 6. If several globes in given places should constantly revolve with determined velocities about axes given in position, there would arise from them as many vortices going on *in infinitum*. For upon the same account

that any one globe propagates its motion *in infinitum*, each globe apart will propagate its own motion *in infinitum* also; so that every part of the infinite fluid will be agitated with a motion resulting from the actions of all the globes. Therefore the vortices will not be confined by any certain limits, but by degrees run mutually into each other; and by the mutual actions of the vortices on each other, the globes will be perpetually moved from their places, as was shewn in the last Corollary; neither can they possibly keep any certain position among themselves, unless some force restrains them. But if those forces, which are constantly impressed upon the globes to continue these motions, should cease, the matter (for the reason assigned in Cor. 3 and 4) will gradually stop, and cease to move in vortices.

Cor. 7. If a similar fluid be inclosed in a spherical vessel, and, by the uniform rotation of a globe in its centre, is driven round in a vortex; and the globe and vessel revolve the same way about the same axis, and their periodical times be as the squares of the semi-diameters; the parts of the fluid will not go on in their motions without acceleration or retardation, till their periodical times are as the squares of their distances from the centre of the vortex. No constitution of a vortex can be permanent but this.

Cor. 8. If the vessel, the inclosed fluid, and the globe, retain this motion, and revolve besides with a common angular motion about any given axis, because the mutual attrition of the parts of the fluid is not changed by this motion, the motions of the parts among each other will not be changed; for the translations of the parts among themselves depend upon this attrition. Any part will persevere in that motion in which its attrition on one side retards it just as much as its attrition on the other side accelerates it.

Cor. 9. Therefore if the vessel be quiescent, and the motion of the globe be given, the motion of the fluid will be given. For conceive a plane to pass through the axis of the globe, and to revolve with a contrary motion; and suppose the sum of the time of this revolution and of the revolution of the globe to be to the time of the revolution of the globe as the square of the semi-diameter of the vessel to the square of the semi-diameter of the globe; and the periodic times of the parts of the fluid in respect of this plane will be as the squares of their distances from the centre of the globe.

Cor. 10. Therefore if the vessel move about the same axis with the globe, or with a given velocity about a different one, the motion of the fluid will be given. For if from the whole system we take away the angular motion of the

vessel, all the motions will remain the same among themselves as before, by Cor. 8, and those motions will be given by Cor. 9.

Cor. 11. If the vessel and the fluid are quiescent, and the globe revolves with an uniform motion, that motion will be propagated by degrees through the whole fluid to the vessel, and the vessel will be carried round by it, unless violently detained; and the fluid and the vessel will be continually accelerated till their periodic times become equal to the periodic times of the globe. If the vessel be either withheld by some force, or revolve with any constant and uniform motion, the medium will come by little and little to the state of motion defined in Cor. 8, 9, 10, nor will it ever persevere in any other state. But if then the forces, by which the globe and vessel revolve with certain motions, should cease, and the whole system be left to act according to the mechanical laws, the vessel and globe, by means of the intervening fluid, will act upon each other, and will continue to propagate their motions through the fluid to each other, till their periodic times become equal among themselves, and the whole system revolves together like one solid body.

SCHOLIUM.

In all these reasonings I suppose the fluid to consist of matter of uniform density and fluidity; I mean, that the fluid is such, that a globe placed any where therein may propagate with the same motion of its own, at distances from itself continually equal, similar and equal motions in the fluid in the same interval of time. The matter by its circular motion endeavours to recede from the axis of the vortex, and therefore presses all the matter that lies beyond. This pressure makes the attrition greater, and the separation of the parts more difficult; and by consequence diminishes the fluidity of the matter. Again; if the parts of the fluid are in any one place denser or larger than in the others, the fluidity will be less in that place, because there are fewer superficies where the parts can be separated from each other. In these cases I suppose the defect of the fluidity to be supplied by the smoothness or softness of the parts, or some other condition; otherwise the matter where it is less fluid will cohere more, and be more sluggish, and therefore will

receive the motion more slowly, and propagate it farther than agrees with the ratio above assigned. If the vessel be not spherical, the particles will move in lines not circular, but answering to the figure of the vessel; and the periodic times will be nearly as the squares of the mean distances from the centre. In the parts between the centre and the circumference the motions will be slower where the spaces are wide, and swifter where narrow; but yet the particles will not tend to the circumference at all the more for their greater swiftness; for they then describe arcs of less curvity, and the conatus of receding from the centre is as much diminished by the diminution of this curvature as it is augmented by the increase of the velocity. As they go out of narrow into wide spaces, they recede a little farther from the centre, but in doing so are retarded; and when they come out of wide into narrow spaces, they are again accelerated; and so each particle is retarded and accelerated by turns for ever. These things will come to pass in a rigid vessel; for the state of vortices in an infinite fluid is known by Cor. 6 of this Proposition.

I have endeavoured in this Proposition to investigate the properties of vortices, that I might find whether the celestial phenomena can be explained by them; for the phenomenon is this, that the periodic times of the planets revolving about Jupiter are in the sesquiplicate ratio of their distances from Jupiter's centre; and the same rule obtains also among the planets that revolve about the sun. And these rules obtain also with the greatest accuracy, as far as has been yet discovered by astronomical observation. Therefore if those planets are carried round in vortices revolving about Jupiter and the sun, the vortices must revolve according to that law. But here we found the periodic times of the parts of the vortex to be in the duplicate ratio of the distances from the centre of motion; and this ratio cannot be diminished and reduced to the sesquiplicate, unless either the matter of the vortex be more fluid the farther it is from the centre, or the resistance arising from the want of lubricity in the parts of the fluid should, as the velocity with which the parts of the fluid are separated goes on increasing, be augmented with it in a greater ratio than that in which the velocity increases. But neither of these suppositions seem reasonable. The more gross and less fluid parts will tend to the circumference, unless they are heavy towards the centre. And though, for the sake of demonstration, I proposed, at the beginning of this Section, an Hypothesis that the resistance

is proportional to the velocity, nevertheless, it is in truth probable that the resistance is in a less ratio than that of the velocity; which granted, the periodic times of the parts of the vortex will be in a greater than the duplicate ratio of the distances from its centre. If, as some think, the vortices move more swiftly near the centre, then slower to a certain limit, then again swifter near the circumference, certainty neither the sesquiplicate, nor any other certain and determinate ratio, can obtain in them. Let philosophers then see how that phenomenon of the sesquiplicate ratio can be accounted for by vortices.

PROPOSITION LIII. THEOREM XLI.

Bodies carried about in a vortex, and returning in the same orb, are of the same density with the vortex, and are moved according to the same law with the parts of the vortex, as to velocity and direction of motion.

For if any small part of the vortex, whose particles or physical points preserve a given situation among each other, be supposed to be congealed, this particle will move according to the same law as before, since no change is made either in its density, *vis insita*, or figure. And again; if a congealed or solid part of the vortex be of the same density with the rest of the vortex, and be resolved into a fluid, this will move according to the same law as before, except in so far as its particles, now become fluid, may be moved among themselves. Neglect, therefore, the motion of the particles among themselves as not at all concerning the progressive motion of the whole, and the motion of the whole will be the same as before. But this motion will be the same with the motion of other parts of the vortex at equal distances from the centre; because the solid, now resolved into a fluid, is become perfectly like to the other parts of the vortex. Therefore a solid, if it be of the same density with the matter of the vortex, will move with the same motion as the parts thereof, being relatively at rest in the matter that surrounds it. If it be more dense, it will endeavour more than before to recede from the centre; and therefore overcoming that force of the vortex, by which, being, as it were, kept in equilibrio, it was retained in its orbit, it will recede from the centre, and in its revolution describe a spiral, returning

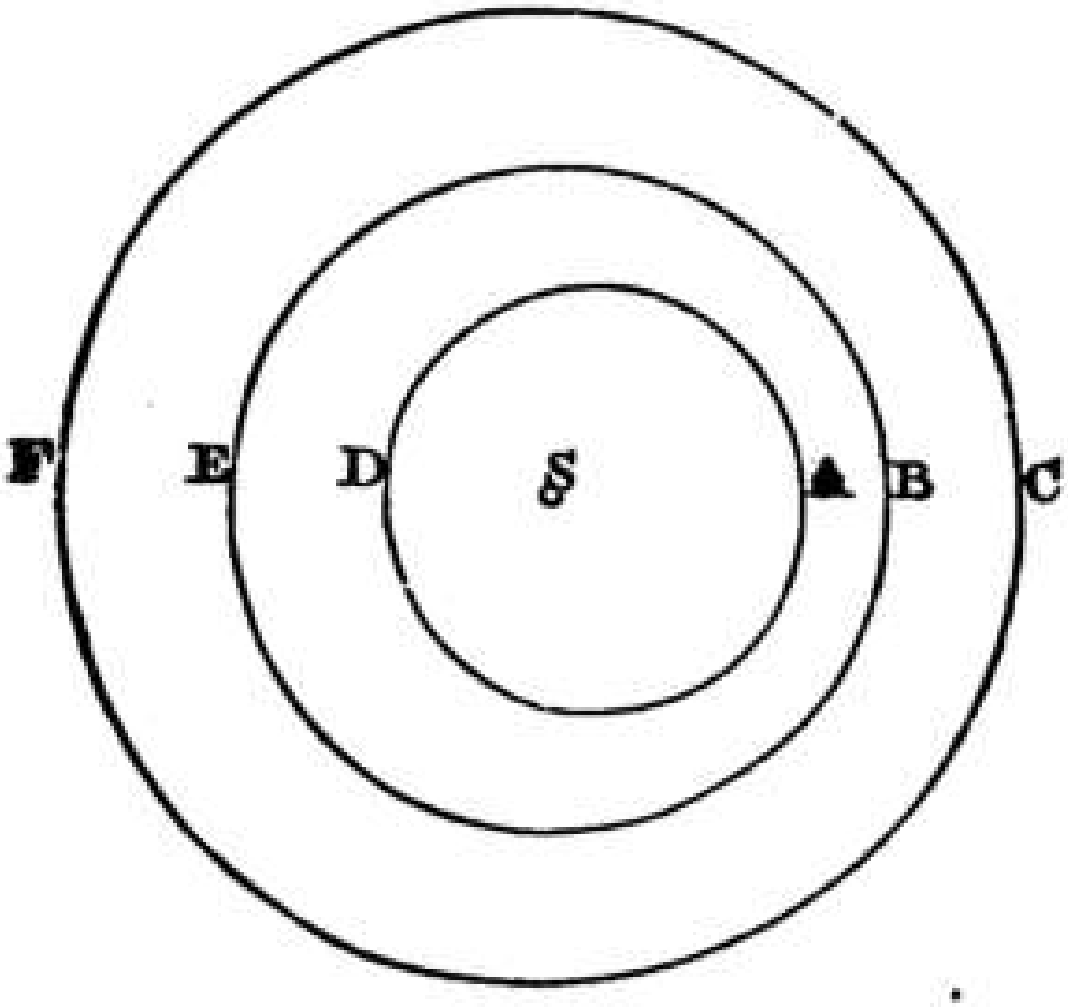
no longer into the same orbit. And, by the same argument, if it be more rare, it will approach to the centre. Therefore it can never continually go round in the same orbit, unless it be of the same density with the fluid. But we have shewn in that case that it would revolve according to the same law with those parts of the fluid that are at the same or equal distances from the centre of the vortex.

Cor. 1. Therefore a solid revolving in a vortex, and continually going round in the same orbit, is relatively quiescent in the fluid that carries it.

Cor. 2. And if the vortex be of an uniform density, the same body may revolve at any distance from the centre of the vortex.

SCHOLIUM.

Hence it is manifest that the planets are not carried round in corporeal vortices; for, according to the *Copernican* hypothesis, the planets going



round the sun revolve in ellipses, having the sun in their common focus; and by radii drawn to the sun describe areas proportional to the times. But now the parts of a vortex can never revolve with such a motion. Let AD, BE, CF, represent three orbits described about the sun S, of which let the utmost circle CF be concentric to the sun; and let the aphelia of the two innermost be A, B; and their perihelia D, E. Therefore a body revolving in the orb CF, describing, by a radius drawn to the sun, areas proportional to the times, will move with an uniform motion. And, according to the laws of astronomy, the body revolving in the orb BE will move slower in its aphelion B, and swifter in its perihelion E; whereas, according to the laws of mechanics, the matter of the vortex ought to move more swiftly in the narrow space between A and C than in the wide space between D and F; that is, more swiftly in the aphelion than in the perihelion. Now these two

conclusions contradict each other. So at the beginning of the sign of Virgo, where the aphelion of Mars is at present, the distance between the orbits of Mars and Venus is to the distance between the same orbits, at the beginning of the sign of Pisces, as about 3 to 2; and therefore the matter of the vortex between those orbits ought to be swifter at the beginning of Pisces than at the beginning of Virgo in the ratio of 3 to 2; for the narrower the space is through which the same quantity of matter passes in the same time of one revolution, the greater will be the velocity with which it passes through it. Therefore if the earth being relatively at rest in this celestial matter should be carried round by it, and revolve together with it about the sun, the velocity of the earth at the beginning of Pisces would be to its velocity at the beginning of Virgo in a sesquialteral ratio. Therefore the sun's apparent diurnal motion at the beginning of Virgo ought to be above 70 minutes, and at the beginning of Pisces less than 48 minutes; whereas, on the contrary, that apparent motion of the sun is really greater at the beginning of Pisces than at the beginning of Virgo, as experience testifies; and therefore the earth is swifter at the beginning of Virgo than at the beginning of Pisces; so that the hypothesis of vortices is utterly irreconcileable with astronomical phaenomena, and rather serves to perplex than explain the heavenly motions. How these motions are performed in free spaces without vortices, may be understood by the first Book; and I shall now more fully treat of it in the following Book.

Book III. Rules of Reasoning in Philosophy

RULE I.

We are to admit no more causes of natural things than such as are both time and sufficient to explain their appearances.

To this purpose the philosophers say that Nature does nothing in vain, and more is in vain when less will serve; for Nature is pleased with simplicity, and affects not the pomp of superfluous causes.

RULE II.

Therefore to the same natural effects we must, as far as possible, assign the same causes.

As to respiration in a man and in a beast; the descent of stones in *Europe* and in *America*; the light of our culinary fire and of the sun; the reflection of light in the earth, and in the planets.

RULE III.

The qualities of bodies, which admit neither intension nor remission of degrees, and which are found to belong to all bodies within the reach of our experiments, are to be esteemed the universal qualities of all bodies whatsoever.

For since the qualities of bodies are only known to us by experiments, we are to hold for universal all such as universally agree with experiments; and such as are not liable to diminution can never be quite taken away. We are certainly not to relinquish the evidence of experiments for the sake of dreams and vain fictions of our own devising; nor are we to recede from the analogy of Nature, which uses to be simple, and always consonant to itself. We no other way know the extension of bodies than by our senses, nor do these reach it in all bodies; but because we perceive extension in all that are

sensible, therefore we ascribe it universally to all others also. That abundance of bodies are hard, we learn by experience; and because the hardness of the whole arises from the hardness of the parts, we therefore justly infer the hardness of the undivided particles not only of the bodies we feel but of all others. That all bodies are impenetrable, we gather not from reason, but from sensation. The bodies which we handle we find impenetrable, and thence conclude impenetrability to be an universal property of all bodies whatsoever. That all bodies are moveable, and endowed with certain powers (which we call the *vires inertiae*) of persevering in their motion, or in their rest, we only infer from the like properties observed in the bodies which we have seen. The extension, hardness, impenetrability, mobility, and *vis inertiae* of the whole, result from the extension, hardness, impenetrability, mobility, and *vires inertiae* of the parts; and thence we conclude the least particles of all bodies to be also all extended, and hard and impenetrable, and moveable, and endowed with their proper *vires inertia*. And this is the foundation of all philosophy. Moreover, that the divided but contiguous particles of bodies may be separated from one another, is matter of observation; and, in the particles that remain undivided, our minds are able to distinguish yet lesser parts, as is mathematically demonstrated. But whether the parts so distinguished, and not yet divided, may, by the powers of Nature, be actually divided and separated from one an other, we cannot certainly determine. Yet, had we the proof of but one experiment that any undivided particle, in breaking a hard and solid body, suffered a division, we might by virtue of this rule conclude that the undivided as well as the divided particles may be divided and actually separated to infinity.

Lastly, if it universally appears, by experiments and astronomical observations, that all bodies about the earth gravitate towards the earth, and that in proportion to the quantity of matter which they severally contain; that the moon likewise, according to the quantity of its matter, gravitates towards the earth; that, on the other hand, our sea gravitates towards the moon; and all the planets mutually one towards another; and the comets in like manner towards the sun; we must, in consequence of this rule, universally allow that all bodies whatsoever are endowed with a principle of mutual gravitation. For the argument from the appearances concludes with more force for the universal gravitation of all bodies than for their

impenetrability; of which, among those in the celestial regions, we have no experiments, nor any manner of observation. Not that I affirm gravity to be essential to bodies: by their *vis insita* I mean nothing but their *vis inertiae*. This is immutable. Their gravity is diminished as they recede from the earth.

RULE IV.

In experimental philosophy we are to look upon propositions collected by general induction from phaenomena as accurately or very nearly true, notwithstanding any contrary hypotheses that may be imagined, till such time as other phaenomena occur, by which they may either be made more accurate, or liable to exceptions.

This rule we must follow, that the argument of induction may not be evaded by hypotheses.

Phaenomena, or Appearances

PHAENOMENON I.

That the circumjovial planets, by radii drawn to Jupiter's centre, describe areas proportional to the times of description; and that their periodic times, the fixed stars being at rest, are in the sesquiplicate proportion of their distances from, its centre.

This we know from astronomical observations. For the orbits of these planets differ but insensibly from circles concentric to Jupiter; and their motions in those circles are found to be uniform. And all astronomers agree that their periodic times are in the sesquiplicate proportion of the semi-diameters of their orbits; and so it manifestly appears from the following table.

The periodic times of the satellites of Jupiter.

$1^{d}.18^{h}.27'.34''$. $3^{d}.13^{h}.13'42''$. $7^{d}.3^{h}.42'36''$. $16^{d}.16^{h}.32'9''$.

The distances of the satellites from Jupiter's centre.

From the observations of

1

2

3

4

Borelli
Townly *by the Microm*.
Cassini *by the Telescope*
Cassini *by the eclip. of the satel.*

5⅔
5,52

5

5⅔

8⅔
8,78

8

9

14
13,47

13

14

24⅔
24,72

23

25

semi-diameter of Jupiter.

From the periodic times

5,667

9,017

14,384

25,299

Mr. *Pound* has determined, by the help of excellent micrometers, the diameters of Jupiter and the elongation of its satellites after the following manner. The greatest heliocentric elongation of the fourth satellite from Jupiter's centre was taken with a micrometer in a 15 feet telescope, and at the mean distance of Jupiter from the earth was found about 8' 16". The elongation of the third satellite was taken with a micrometer in a telescope of 123 feet, and at the same distance of Jupiter from the earth was found 4' 42". The greatest elongations of the other satellites, at the same distance of Jupiter from the earth, are found from the periodic times to be 2' 56" 47"', and 1' 51" 6'".

The diameter of Jupiter taken with the micrometer in a 123 feet telescope several times, and reduced to Jupiter's mean distance from the earth, proved always less than 40", never less than 38", generally 39". This diameter in shorter telescopes is 40", or 41"; for Jupiter's light is a little dilated by the unequal refrangibility of the rays, and this dilatation bears less ratio to the diameter of Jupiter in the longer and more perfect telescopes than in those which are shorter and less perfect. The times in which two satellites, the first and the third, passed over Jupiter's body, were observed, from the beginning of the ingress to the beginning of the egress, and from the complete ingress to the complete egress, with the long telescope. And from the transit of the first satellite, the diameter of Jupiter at its mean distance from the earth came forth 37". and from the transit of the third 37". There was observed also the time in which the shadow of the first satellite passed over Jupiter's body, and thence the diameter of Jupiter at its mean distance from the earth came out about 37". Let us suppose its diameter to be 37¼" very nearly, and then the greatest elongations of the first, second, third, and

fourth satellite will be respectively equal to 5,965, 9,494, 15,141, and 26,63 semi-diameters of Jupiter.

PHAENOMENON II.

That the circumsaturnal planets, by radii drawn to Saturn's centre, describe areas proportional to the times of description; and that their periodic times, the fixed stars being at rest, are in the sesquiplicate proportion of their distances from its centre.

For, as *Cassini* from his own observations has determined, their distances from Saturn's centre and their periodic times are as follow.

The periodic times of the satellites of Saturn.

$1^{d}.21^{h}.18'27''$. $2^{d}.17^{h}.41'22''$. $4^{d}.12h.25'12''$. $15^{d}.22^{h}.41'14''$. $79^{d}.7^{h}.48'00''$.

The distances of the satellites from Saturn's centre, in semi-diameters of its ring.

From observations
1.
2½.
3½.
8.
24.

From the periodic times
1,93.
2,47.
3,45.
8.
23,35.

The greatest elongation of the fourth satellite from Saturn's centre is commonly determined from the observations to be eight of those semi-diameters very nearly. But the greatest elongation of this satellite from Saturn's centre, when taken with an excellent micrometer in Mr. *Huygens'* telescope of 123 feet, appeared to be eight semi-diameters and of a semi-diameter. And from this observation and the periodic times the distances of the satellites from Saturn's centre in semi-diameters of the ring are 2.1. 2,69. 3,75. 8,7. and 25,35. The diameter of Saturn observed in the same telescope was found to be to the diameter of the ring as 3 to 7; and the diameter of the ring, *May* 28-29, 1719, was found to be 43"; and thence the diameter of the ring when Saturn is at its mean distance from the earth is 42", and the diameter of Saturn 18". These things appear so in very long and excellent telescopes, because in such telescopes the apparent magnitudes of the heavenly bodies bear a greater proportion to the dilatation of light in the extremities of those bodies than in shorter telescopes. If we, then, reject all the spurious light, the diameter of Saturn will not amount to more than 16".

PHAENOMENON III.

That the five primary planets, Mercury, Venus, Mars, Jupiter, and Saturn, with their several orbits, encompass the sun.

That Mercury and Venus revolve about the sun, is evident from their moon-like appearances. When they shine out with a full face, they are, in respect of us, beyond or above the sun; when they appear half full, they are about the same height on one side or other of the sun; when horned, they are below or between us and the sun; and they are sometimes, *when directly under*, seen like spots traversing the sun's disk. That Mars surrounds the sun, is as plain from its full face when near its conjunction with the sun, and from the gibbous figure which it shews in its quadratures. And the same thing is demonstrable of Jupiter and Saturn, from their appearing full in all situations; for the shadows of their satellites that appear sometimes upon

their disks make it plain that the light they shine with is not their own, but borrowed from the sun.

PHAENOMENON IV.

That the fixed stars being at rest, the periodic times of the five primary planets, and (whether of the sun, about the earth, or) of the earth about the sun, are in the sesquiplicate proportion of their mean distances from the sun.

This proportion, first observed by *Kepler*, is now received by all astronomers; for the periodic times are the same, and the dimensions of the orbits are the same, whether the sun revolves about the earth, or the earth about the sun. And as to the measures of the periodic times, all astronomers are agreed about them. But for the dimensions of the orbits, *Kepler* and *Bullialdus*, above all others, have determined them from observations with the greatest accuracy; and the mean distances corresponding to the periodic times differ but insensibly from those which they have assigned, and for the most part fall in between them; as we may see from the following table.

The periodic times with respect to the fixed stars, of the planets and earth revolving *about the sun, in days and decimal parts of a day.*

♄

♃

♂

♁

♀

☿

10759,275.

4332,514.

686,9785.

365,2565.

224,6176.

87,9692.

The mean distances of the planets and of the earth from the sun.

♄

♃

♂

According to *Kepler*

951000.

519650.

152350.

According to *Bullialdus*

954198.

522520.

152350.

According to the periodic times

954006.

520096.

152369

♁

♀

☿

According to *Kepler*

100000.

72400.

38806.

According to *Bullialdus*

100000.

72398.

38585.

According to the periodic times

100000.

72333.

38710

As to Mercury and Venus, there can be no doubt about their distances from the sun; for they are determined by the elongations of those planets from the sun; and for the distances of the superior planets, all dispute is cut off by the eclipses of the satellites of Jupiter. For by those eclipses the position of the shadow which Jupiter projects is determined; whence we have the heliocentric longitude of Jupiter. And from its heliocentric and geocentric longitudes compared together, we determine its distance.

PHAENOMENON V.

Then the primary planets, by radii drawn to the earth, describe areas no wise proportional to the times; but that the areas which they describe by radii drawn to the sun are proportional to the times of description.

For to the earth they appear sometimes direct, sometimes stationary, nay, and sometimes retrograde. But from the sun they are always seen direct, and to proceed with a motion nearly uniform, that is to say, a little swifter in the perihelion and a little slower in the aphelion distances, so as to maintain an equality in the description of the areas. This a noted proposition among astronomers, and particularly demonstrable in Jupiter, from the eclipses of his satellites; by the help of which eclipses, as we have said, the heliocentric longitudes of that planet, and its distances from the sun, are determined.

PHAENOMENON VI.

That the moon, by a radius drawn to the earth's centre, describes an area proportional to the time of description.

This we gather from the apparent motion of the moon, compared with its apparent diameter. It is true that the motion of the moon is a little disturbed by the action of the sun: but in laying down these Phenomena I neglect those small and inconsiderable errors.

Propositions I-IX (Force of gravity)

PROPOSITION I. THEOREM I.

That the forces by which the circumjovial planets are continually drawn off from rectilinear motions, and retained in their proper orbits, tend to Jupiter's centre; and are reciprocally as the squares of the distances of the places of those planets from that centre.

The former part of this Proposition appears from Phaen. I, and Prop. II or III, Book I; the latter from Phaen. I, and Cor. 6, Prop. IV, of the same Book.

The same thing we are to understand of the planets which encompass Saturn, by Phaen. II.

PROPOSITION II. THEOREM II.

That the forces by which the primary planets are continually drawn off from rectilinear motions, and retained in their proper orbits, tend to the sun; and are reciprocally as the squares of the distances of the places of those planets from the suits centre.

The former part of the Proposition is manifest from Phaen. V, and Prop. II, Book I; the latter from Phaen. IV, and *Cor*. 6, Prop. IV, of the same Book. But this part of the Proposition is, with great accuracy, demonstrable from the quiescence of the aphelion points; for a very small aberration from the *reciprocal* duplicate proportion would (by Cor. 1, Prop. XLV, Book I) produce a motion of the apsides sensible enough in every single revolution, and in many of them enormously great.

PROPOSITION III. THEOREM III.

That the force by which the moon is retained in its orbit tends to the earth; and is reciprocally as the square of the distance of its place from the earth's centre.

The former part of the Proposition is evident from Phaen. VI, and Prop. II or III, Book I; the latter from the very slow motion of the moon's apogee; which in every single revolution amounting but to 3° 3' *in consequentia*, may be neglected. For (by Cor. 1. Prop. XLV, Book I) it appears, that, if the distance of the moon from the earth's centre is to the semi-diameter of the earth as D to 1, the force, from which such a motion will result, is reciprocally as $D^{2\ 4/243}$, i. e., reciprocally as the power of D, whose exponent is $2\frac{4}{243}$; that is to say, in the proportion of the distance something greater than reciprocally duplicate, but which comes 59¾ times nearer to the duplicate than to the triplicate proportion. But in regard that this motion is owing to the action of the sun (as we shall afterwards shew), it is here to be neglected. The action of the sun, attracting the moon from the earth, is nearly as the moon's distance from the earth; and therefore (by what we have shewed in Cor. 2, Prop. XLV, Book I) is to the centripetal force of the moon as 2 to 357,45, or nearly so; that is, as 1 to $178\frac{29}{40}$. And if we neglect so inconsiderable a force of the sun, the remaining force, by which the moon is retained in its orb, will be reciprocally as D^2. This will yet more fully appear from comparing this force with the force of gravity, as is done in the next Proposition.

Cor. If we augment the mean centripetal force by which the moon is retained in its orb, first in the proportion of $177\frac{29}{40}$ to $178\frac{29}{40}$, and then in the duplicate proportion of the semi-diameter of the earth to the mean distance of the centres of the moon and earth, we shall have the centripetal force of the moon at the surface of the earth; supposing this force, in descending to the earth's surface, continually to increase in the reciprocal duplicate proportion of the height.

PROPOSITION IV. THEOREM IV.

That the moon gravitates towards the earth, and by the force of gravity is continually drawn off from a rectilinear motion, and retained in its orbit.

The mean distance of the moon from the earth in the syzygies in semi-diameters of the earth, is, according to *Ptolemy* and most astronomers, 59; according to *Vendelin* and *Huygens*, 60; to *Copernicus*, 60⅓; to *Street*, $60^{2}/_{5}$; and to *Tycho*, 56½. But *Tycho*, and all that follow his tables of refraction, making the refractions of the sun and moon (altogether against the nature of light) to exceed the refractions of the fixed stars, and that by four or five minutes *near the horizon*, did thereby increase the moon's *horizontal* parallax by a like number of minutes, that is, by a twelfth or fifteenth part of the whole parallax. Correct this error, and the distance will become about 60½ semi-diameters of the earth, near to what others have assigned. Let us assume the mean distance of 60 diameters in the syzygies; and suppose one revolution of the moon, in respect of the fixed stars, to be completed in $27^{d}.7^{h}.43'$, as astronomers have determined; and the circumference of the earth to amount to 123249600 *Paris* feet, as the French have found by mensuration. And now if we imagine the moon, deprived of all motion, to be let go, so as to descend towards the earth with the impulse of all that force by which (by Cor. Prop. III) it is retained in its orb, it will in the space of one minute of time, describe in its fall $15^{1}/_{12}$ *Paris* feet. This we gather by a calculus, founded either upon Prop. XXXVI, Book I, or (which comes to the same thing) upon Cor. 9, Prop. IV, of the same Book. For the versed sine of that arc, which the moon, in the space of one minute of time, would by its mean motion describe at the distance of 60 semi-diameters of the earth, is nearly $15^{1}/_{12}$ *Paris* feet, or more accurately 15 feet, 1 inch, and 1 line $^{4}/_{9}$. Where fore, since that force, in approaching to the earth, increases in the reciprocal duplicate proportion of the distance, and, upon that account, at the surface of the earth, is 60 60 times greater than at the moon, a body in our regions, falling with that force, ought in the space of one minute of time, to describe 60 60 $15^{1}/_{12}$ *Paris* feet; and, in the space of one second of time, to describe $15^{1}/_{12}$ of those feet; or more accurately 15 feet, 1 inch, and 1 line $^{4}/_{9}$. And with this very force we actually find that bodies here upon earth do really descend; for a pendulum

oscillating seconds in the latitude of Paris will be 3 Paris feet, and 8 lines ½ in length, as Mr. *Huygens* has observed. And the space which a heavy body describes by falling in one second of time is to half the length of this pendulum in the duplicate ratio of the circumference of a circle to its diameter (as Mr. *Huygens* has also shewn), and is therefore 15 *Paris* feet, 1 inch, 1 line $^{7}/_{9}$. And therefore the force by which the moon is retained in its orbit becomes, at the very surface of the earth, equal to the force of gravity which we observe in heavy bodies there. And therefore (by Rule I and II) the force by which the moon is retained in its orbit is that very same force which we commonly call gravity; for, were gravity another force different from that, then bodies descending to the earth with the joint impulse of both forces would fall with a double velocity, and in the space of one second of time would describe $30^{1}/_{6}$ *Paris* feet; altogether against experience.

This calculus is founded on the hypothesis of the earth's standing still; for if both earth and moon move about the sun, and at the same time about their common centre of gravity, the distance of the centres of the moon and earth from one another will be 60½ semi-diameters of the earth; as may be found by a computation from Prop. LX, Book I.

SCHOLIUM.

The demonstration of this Proposition may be more diffusely explained after the following manner. Suppose several moons to revolve about the earth, as in the system of Jupiter or Saturn: the periodic times of these moons (by the argument of induction) would observe the same law which *Kepler* found to obtain among the planets; and therefore their centripetal forces would be reciprocally as the squares of the distances from the centre of the earth, by Prop. I, of this Book. Now if the lowest of these were very small, and were so near the earth as almost to touch the tops of the highest mountains, the centripetal force thereof, retaining it in its orb, would be very nearly equal to the weights of any *terrestrial* bodies that should be found upon the tops of those mountains, as may be known by the foregoing computation. Therefore if the same little moon should be deserted by its centrifugal force that carries it through its orb; and so be disabled from

going onward therein, it would descend to the earth; and that with the same velocity as heavy bodies do actually fall with upon the tops of those very mountains; because of the equality of the forces that oblige them both to descend. And if the force by which that lowest moon would descend were different from gravity, and if that moon were to gravitate towards the earth, as we find terrestrial bodies do upon the tops of mountains, it would then descend with twice the velocity, as being impel led by both these forces conspiring together. Therefore since both these forces, that is, the gravity of heavy bodies, and the centripetal forces of the moons, respect the centre of the earth, and are similar and equal between themselves, they will (by Rule I and II) have one and the same cause. And therefore the force which retains the moon in its orbit is that very force which we commonly call gravity; because otherwise this little moon at the top of a mountain must either be without gravity, or fall twice as swiftly as heavy bodies are wont to do.

PROPOSITION V. THEOREM V.

That the circumjovial planets gravitate towards Jupiter; the circumsaturnal towards Saturn; the circumsolar towards the sun; and by the forces of their gravity are drawn off from rectilinear motions, and retained in curvilinear orbits.

For the revolutions of the circumjovial planets about Jupiter, of the circumsaturnal about Saturn, and of Mercury and Venus, and the other circumsolar planets, about the sun, are appearances of the same sort with the revolution of the moon about the earth; and therefore, by Rule II, must be owing to the same sort of causes; especially since it has been demonstrated, that the forces upon which those revolutions depend tend to the centres of Jupiter, of Saturn, and of the sun; and that those forces, in receding from Jupiter, from Saturn, and from the sun, decrease in the same proportion, and according to the same law, as the force of gravity does in receding from the earth.

Cor. 1. There is, therefore, a power of gravity tending to all the planets; for, doubtless, Venus, Mercury, and the rest, are bodies of the same sort with Jupiter and Saturn. And since all attraction (by Law III) is mutual, Jupiter

will therefore gravitate towards all his own satellites, Saturn towards his, the earth towards the moon, and the sun towards all the primary planets.

Cor. 2. The force of gravity which tends to any one planet is reciprocally as the square of the distance of places from that planet's centre.

Cor. 3. All the planets do mutually gravitate towards one another, by Cor. 1 and 2. And hence it is that Jupiter and Saturn, when near their conjunction; by their mutual attractions sensibly disturb each other's motions. So the sun disturbs the motions of the moon; and both sun and moon disturb our sea, as we shall hereafter explain.

SCHOLIUM.

The force which retains the celestial bodies in their orbits has been hitherto called centripetal force; but it being now made plain that it can be no other than a gravitating force, we shall hereafter call it gravity. For the cause of that centripetal force which retains the moon in its orbit will extend itself to all the planets, by Rule I, II, and IV.

PROPOSITION VI. THEOREM VI.

That all bodies gravitate towards every planet; and that the weights of bodies towards any the same planet, at equal distances from the centre of the planet, are proportional to the quantities of matter which they severally contain.

It has been, now of a long time, observed by others, that all sorts of heavy bodies (allowance being made for the inequality of retardation which they suffer from a small power of resistance in the air) descend to the earth *from equal heights* in equal times; and that equality of times we may distinguish to a great accuracy, by the help of pendulums. I tried the thing in gold, silver, lead, glass, sand, common salt, wood, water, and wheat. I provided two wooden boxes, round and equal: I filled the one with wood, and suspended an equal weight of gold (as exactly as I could) in the centre of oscillation of the other. The boxes hanging by equal threads of 11 feet made a couple of pendulums perfectly equal in weight and figure, and equally

receiving the resistance of the air. And, placing the one by the other, I observed them to play together forward and backward, for a long time, with equal vibrations. And therefore the quantity of matter in the gold (by Cor. 1 and 6, Prop. XXIV, Book II) was to the quantity of matter in the wood as the action of the motive force (or *vis motrix*) upon all the gold to the action of the same upon all the wood: that is, as the weight of the one to the weight of the other: and the like happened in the other bodies. By these experiments, in bodies of the same weight, I could manifestly have discovered a difference of matter less than the thousandth part of the whole, had any such been. But, without all doubt, the nature of gravity towards the planets is the same as towards the earth. For, should we imagine our terrestrial bodies removed to the orb of the moon, and there, together with the moon, deprived of all motion, to be let go, so as to fall together towards the earth, it is certain, from what we have demonstrated before, that, in equal times, they would describe equal spaces with the moon, and of consequence are to the moon, in quantity of matter, as their weights to its weight. Moreover, since the satellites of Jupiter perform their revolutions in times which observe the sesquiplicate proportion of their distances from Jupiter's centre, their accelerative gravities towards Jupiter will be reciprocally as the squares of their distances from Jupiter's centre; that is, equal, at equal distances. And, therefore, these satellites, if supposed to fall *towards Jupiter* from equal heights, would describe equal spaces in equal times, in like manner as heavy bodies do on our earth. And, by the same argument, if the circumsolar planets were supposed to be let fall at equal distances from the sun, they would, in their descent towards the sun, describe equal spaces in equal times. But forces which equally accelerate unequal bodies must be as those bodies: that is to say, the weights of the planets *towards the sun*, must be as their quantities of matter. Further, that the weights of Jupiter and of his satellites towards the sun are proportional to the several quantities of their matter, appears from the exceedingly regular motions of the satellites (by Cor. 3, Prop. LXV, Book 1). For if some of those bodies were more strongly attracted to the sun in proportion to their quantity of matter than others, the motions of the satellites would be disturbed by that inequality of attraction (by Cor. 2, Prop. LXV, Book I). If, at equal distances from the sun, any satellite, in proportion to the quantity of its matter, did gravitate towards the sun with a force greater than Jupiter in

proportion to his, according to any given proportion, suppose of *d* to *e*; then the distance between the centres of the sun and of the satellite's orbit would be always greater than the distance between the centres of the sun and of Jupiter nearly in the subduplicate of that proportion: as by some computations I have found. And if the satellite did gravitate towards the sun with a force, lesser in the proportion of *e* to *d*, the distance of the centre of the satellite's orb from the sun would be less than the distance of the centre of Jupiter from the sun in the subduplicate of the same proportion. Therefore if, at equal distances from the sun, the accelerative gravity of any satellite towards the sun were greater or less than the accelerative gravity of Jupiter towards the sun but by one $^{1}/_{1000}$ part of the whole gravity, the distance of the centre of the satellite's orbit from the sun would be greater or less than the distance of Jupiter from the sun by one $^{1}/_{2000}$ part of the whole distance; that is, by a fifth part of the distance of the utmost satellite from the centre of Jupiter; an eccentricity of the orbit which would be very sensible. But the orbits of the satellites are concentric to Jupiter, and therefore the accelerative gravities of Jupiter, and of all its satellites towards the sun, are equal among themselves. And by the same argument, the weights of Saturn and of his satellites towards the sun, at equal distances from the sun, are as their several quantities of matter; and the weights of the moon and of the earth towards the sun are either none, or accurately proportional to the masses of matter which they contain. But some they are, by Cor. 1 and 3, Prop. V.

But further; the weights of all the parts of every planet towards any other planet are one to another as the matter in the several parts; for if some parts did gravitate more, others less, than for the quantity of their matter, then the whole planet, according to the sort of parts with which it most abounds, would gravitate more or less than in proportion to the quantity of matter in the whole. Nor is it of any moment whether these parts are external or internal; for if, for example, we should imagine the terrestrial bodies with us to be raised up to the orb of the moon, to be there compared with its body: if the weights of such bodies were to the weights of the external parts of the moon as the quantities of matter in the one and in the other respectively; but to the weights of the internal parts in a greater or less proportion, then

likewise the weights of those bodies would be to the weight of the whole moon in a greater or less proportion; against what we have shewed above.

Cor. 1. Hence the weights of bodies do not depend upon their forms and textures; for if the weights could be altered with the forms, they would be greater or less, according to the variety of forms, in equal matter; altogether against experience.

Cor. 2. Universally, all bodies about the earth gravitate towards the earth; and the weights of all, at equal distances from the earth's centre, are as the quantities of matter which they severally contain. This is the quality of all bodies within the reach of our experiments; and therefore (by Rule III) to be affirmed of all bodies whatsoever. If the *aether*, or any other body, were either altogether void of gravity, or were to gravitate less in proportion to its quantity of matter, then, because (according to *Aristotle*, *Des Cartes*, and others) there is no diiference betwixt that and other bodies but in *mere* form of matter, by a successive change from form to form, it might be changed at last into a body of the same condition with those which gravitate most in proportion to their quantity of matter; and, on the other hand, the heaviest bodies, acquiring the first form of that body, might by degrees quite lose their gravity. And therefore the weights would depend upon the forms of bodies, and with those forms might be changed: contrary to what was proved in the preceding Corollary.

Cor. 3. All spaces are not equally full; for if all spaces were equally full, then the specific gravity of the fluid which fills the region of the air, on account of the extreme density of the matter, would fall nothing short of the specific gravity of quicksilver, or gold, or any other the most dense body; and, therefore, neither gold, nor any other body, could descend in air; for bodies do not descend in fluids, unless they are specifically heavier than the fluids. And if the quantity of matter in a given space can, by any rarefaction, be diminished, what should hinder a diminution to infinity?

Cor. 4. If all the solid particles of all bodies are of the same density, nor can be rarefied without pores, a void, space, or vacuum must be granted. By bodies of the same density, I mean those whose *vires inertiae*, are in the proportion of their bulks.

Cor. 5. The power of gravity is of a different nature from the power of magnetism; for the magnetic attraction is not as the matter attracted. Some bodies are attracted more by the magnet; others less; most bodies not at all.

The power of magnetism in one and the same body may be increased and diminished; and is sometimes far stronger, for the quantity of matter, than the power of gravity; and in receding from the magnet decreases not in the duplicate but almost in the triplicate proportion of the distance, as nearly as I could judge from some rude observations.

PROPOSITION VII. THEOREM VII.

That there is a power of gravity tending to all bodies, proportional to the several quantities of matter which they contain.

That all the planets mutually gravitate one towards another, we have proved before; as well as that the force of gravity towards every one of them, considered apart, is reciprocally as the square of the distance of places from the centre of the planet. And thence (by Prop. LXIX, Book I, and its Corollaries) it follows, that the gravity tending towards all the planets is proportional to the matter which they contain.

Moreover, since all the parts of any planet A gravitate towards any other planet B; and the gravity of every part is to the gravity of the whole as the matter of the part to the matter of the whole; and (by Law III) to every action corresponds an equal reaction; therefore the planet B will, on the other hand, gravitate towards all the parts of the planet A; and its gravity towards any one part will be to the gravity towards the whole as the matter of the part to the matter of the whole. Q.E.D.

Cor. 1. Therefore the force of gravity towards any whole planet arises from, and is compounded of, the forces of gravity towards all its parts. Magnetic and electric attractions afford us examples of this; for all attraction towards the whole arises from the attractions towards the several parts. The thing may be easily understood in gravity, if we consider a greater planet, as formed of a number of lesser planets, meeting together in one globe; for *hence it would appear that* the force of the whole must arise from the forces of the component parts. If it is objected, that, according to this law, all bodies with us must mutually gravitate one towards another, whereas no such gravitation any where appears, I answer, that since the gravitation towards these bodies is to the gravitation towards the whole

earth as these bodies are to the whole earth, the gravitation towards them must be far less than to fall under the observation of our senses.

Cor. 2. The force of gravity towards the several equal particles of any body is reciprocally as the square of the distance of places from the particles; as appears from Cor. 3, Prop. LXXIV, Book I.

PROPOSITION VIII. THEOREM VIII.

In two spheres mutually gravitating each towards the other, if the matter in places on all sides round about and equi-distant from the centres is similar, the weight of either sphere towards the other will be reciprocally as the square of the distance between their centres.

After I had found that the force of gravity towards a whole planet did arise from and was compounded of the forces of gravity towards all its parts, and towards every one part was in the reciprocal proportion of the squares of the distances from the part, I was yet in doubt whether that reciprocal duplicate proportion did accurately hold, or but nearly so, in the total force compounded of so many partial ones; for it might be that the proportion which accurately enough took place in greater distances should be wide of the truth near the surface of the planet, where the distances of the particles are unequal, and their situation dissimilar. But by the help of Prop. LXXV and LXXVI, Book I, and their Corollaries, I was at last satisfied of the truth of the Proposition, as it now lies before us.

Cor. 1. Hence we may find and compare together the weights of bodies towards different planets; for the weights of bodies revolving in circles about planets are (by Cor. 2, Prop. IV, Book I) as the diameters of the circles directly, and the squares of their periodic times reciprocally; and their weights at the surfaces of the planets, or at any other distances from their centres, are (by this Prop.) greater or less in the reciprocal duplicate proportion of the distances. Thus from the periodic times of Venus, revolving about the sun, in $224^{d}.16\frac{3}{4}^{h}$, of the utmost circumjovial satellite revolving about Jupiter, in $16^{d}.16\frac{8}{15}^{h}$.; of the Huygenian satellite about Saturn in $15^{d}.22\frac{2}{3}^{h}$.; and of the moon about the earth in $27^{d}.7^{h}.43'$; compared with the mean distance of Venus from the sun, and with the greatest heliocentric elongations of the outmost circumjovial satellite from

Jupiter's centre, 8' 16"; of the Huygenian satellite from the centre of Saturn, 3'4"; and of the moon from the earth, 10'33": by computation I found that the weight of equal bodies, at equal distances from the centres of the sun, of Jupiter, of Saturn, and of the earth, towards the sun, Jupiter, Saturn, and the earth, were one to another, as 1, $^1/_{1067}$, $^1/_{3021}$, and $^1/_{169282}$ respectively. Then because as the distances are increased or diminished, the weights are diminished or increased in a duplicate ratio, the weights of equal bodies towards the sun, Jupiter, Saturn, and the earth, at the distances 10000, 997, 791, and 109 from their centres, that is, at their very superficies, will be as 10000, 943, 529, and 435 respectively. How much the weights of bodies are at the superficies of the moon, will be shewn hereafter.

Cor. 2. Hence likewise we discover the quantity of matter in the several planets; for their quantities of matter are as the forces of gravity at equal distances from their centres; that is, in the sun, Jupiter, Saturn, and the earth, as 1, $^1/_{1067}$, $^1/_{3021}$ and $^1/_{169282}$ respectively. If the parallax of the sun be taken greater or less than 10" 30"', the quantity of matter in the earth must be augmented or diminished in the triplicate of that proportion.

Cor. 3. Hence also we find the densities of the planets; for (by Prop. LXXII, Book I) the weights of equal and similar bodies towards similar spheres are, at the surfaces of those spheres, as the diameters of the spheres and therefore the densities of dissimilar spheres are as those weights applied to the diameters of the spheres. But the true diameters of the Sun, Jupiter, Saturn, and the earth, were one to another as 10000, 997, 791, and 109; and the weights towards the same as 10000, 943, 529, and 435 respectively; and therefore their densities are as 100, 94½, 67, and 400. The density of the earth, which comes out by this computation, does not depend upon the parallax of the sun, but is determined by the parallax of the moon, and therefore is here truly defined. The sun, therefore, is a little denser than Jupiter, and Jupiter than Saturn, and the earth four times denser than the sun; for the sun, by its great heat, is kept in a sort of a rarefied state. The moon is denser than the earth, as shall appear afterward.

Cor. 4. The smaller the planets are, they are, *caeteris paribus*, of so much the greater density; for so the powers of gravity on their several surfaces come nearer to equality. They are likewise, *caeteris paribus*, of the greater density, as they are nearer to the sun. So Jupiter is more dense than Saturn,

and the earth than Jupiter; for the planets were to be placed at different distances from the sun, that, according to their degrees of density, they might enjoy a greater or less proportion to the sun's heat. Our water, if it were removed as far as the orb of Saturn, would be converted into ice, and in the orb of Mercury would quickly fly away in vapour; for the light of the sun, to which its heat is proportional, is seven times denser in the orb of Mercury than with us: and by the thermometer I have found that a sevenfold heat of our summer sun will make water boil. Nor are we to doubt that the matter of Mercury is adapted to its heat, and is therefore more dense than the matter of our earth; since, in a denser matter, the operations of Nature require a stronger heat.

PROPOSITION IX. THEOREM IX.

That the force of gravity, considered downward from the surface of the planets, decreases nearly in the proportion of the distances from their centres.

If the matter of the planet were of an uniform density, this Proposition would be accurately true (by Prop. LXXIII. Book I). The error, therefore, can be no greater than what may arise from the inequality of the density.

Propositions X-XXIV (Motions of celestial bodies and the sea)

PROPOSITION X. THEOREM X.

That the motions of the planets in the heavens may subsist an exceedingly long time.

In the Scholium of Prop. XL, Book II, I have shewed that a globe of water frozen into ice, and moving freely in our air, in the time that it would describe the length of its semi-diameter, would lose by the resistance of the air $^{1}/_{4586}$ part of its motion; and the same proportion holds nearly in all globes, how great soever, and moved with whatever velocity. But that our globe of earth is of greater density than it would be if the whole consisted of water only, I thus make out. If the whole consisted of water only, whatever was of less density than water, because of its less specific gravity, would emerge and float above. And upon this account, if a globe of terrestrial matter, covered on all sides with water, was less dense than water, it would emerge somewhere; and, the subsiding water falling back, would be gathered to the opposite side. And such is the condition of our earth, which in a great measure is covered with seas. The earth, if it was not for its greater density, would emerge from the seas, and, according to its degree of levity, would be raised more or less above their surface, the water of the seas flowing backward to the opposite side. By the same argument, the spots of the sun, which float upon the lucid matter thereof, are lighter than that matter; and, however the planets have been formed while they were yet in fluid masses, all the heavier matter subsided to the centre. Since, therefore, the common matter of our earth on the surface thereof is about twice as heavy as water, and a little lower, in mines, is found about three, or four, or even five times more heavy, it is probable that the quantity of the whole matter of the earth may be five or six times greater than if it consisted all of water; especially since I have before shewed that the earth is about four times more dense than Jupiter. If, therefore, Jupiter is a little more dense than water, in the space of thirty days, in which that planet

describes the length of 459 of its semi-diameters, it would, in a medium of the same density with our air, lose almost a tenth part of its motion. But since the resistance of mediums decreases in proportion to their weight or density, so that water, which is $13\frac{3}{5}$ times lighter than quicksilver, resists less in that proportion; and air, which is 860 times lighter than water, resists less in the same proportion; therefore in the heavens, where the weight of the medium in which the planets move is immensely diminished, the resistance will almost vanish.

It is shewn in the Scholium of Prop. XXII, Book II, that at the height of 200 miles above the earth the air is more rare than it is at the superficies of the earth in the ratio of 30 to 0,0000000000003998, or as 75000000000000 to 1 nearly. And hence the planet Jupiter, revolving in a medium of the same density with that superior air, would not lose by the resistance of the medium the 1000000th part of its motion in 1000000 years. In the spaces near the earth the resistance is produced only by the air, exhalations, and vapours. When these are carefully exhausted by the air-pump from under the receiver, heavy bodies fall within the receiver with perfect freedom, and without the least sensible resistance: gold itself, and the lightest down, let fall together, will descend with equal velocity; and though they fall through a space of four, six, and eight feet, they will come to the bottom at the same time; as appears from experiments. And therefore the celestial regions being perfectly void of air and exhalations, the planets and comets meeting no sensible resistance in those spaces will continue their motions through them for an immense tract of time.

HYPOTHESIS I.

That the centre of the system of the world is immovable.

This is acknowledged by all, while some contend that the earth, others that the sun, is fixed in that centre. Let us see what may from hence follow.

PROPOSITION XI. THEOREM XI.

That the common centre of gravity of the earth, the sun, and all the planets, is immovable.

For (by Cor. 4 of the Laws) that centre either is at rest, or moves uniformly forward in a right line; but if that centre moved, the centre of the world would move also, against the Hypothesis.

PROPOSITION XII. THEOREM XII.

That the sun is agitated by a perpetual motion, but never recedes far from the common centre of gravity of all the planets.

For since (by Cor. 2, Prop. VIII) the quantity of matter in the sun is to the quantity of matter in Jupiter as 1067 to 1; and the distance of Jupiter from the sun is to the semi-diameter of the sun in a proportion but a small matter greater, the common centre of gravity of Jupiter and the sun will fall upon a point a little without the surface of the sun. By the same argument, since the quantity of matter in the sun is to the quantity of matter in Saturn as 3021 to 1, and the distance of Saturn from the sun is to the semi-diameter of the sun in a proportion but a small matter less, the common centre of gravity of Saturn and the sun will fall upon a point a little within the surface of the sun. And, pursuing the principles of this computation, we should find that though the earth and all the planets were placed on one side of the sun, the distance of the common centre of gravity of all from the centre of the sun would scarcely amount to one diameter of the sun. In other cases, the distances of those centres are always less; and therefore, since that centre of gravity is in perpetual rest, the sun, according to the various positions of the planets, must perpetually be moved every way, but will never recede far from that centre.

Cor. Hence the common centre of gravity of the earth, the sun, and all the planets, is to be esteemed the centre of the world; for since the earth, the sun, and all the planets, mutually gravitate one towards another, and are therefore, according to their powers of gravity, in perpetual agitation, as the Laws of Motion require, it is plain that their moveable centres can not be taken for the immovable centre of the world. If that body were to be placed in the centre, towards which other bodies gravitate most (according to

common opinion), that privilege ought to be allowed to the sun; but since the sun itself is moved, a fixed point is to be chosen from which the centre of the sun recedes least, and from which it would recede yet less if the body of the sun were denser and greater, and therefore less apt to be moved.

PROPOSITION XIII. THEOREM XIII.

The planets move in ellipses which have their common focus in the centre of the sun; and, by radii drawn to that centre, they describe areas proportional to the times of description.

We have discoursed above of these motions from the Phaenomena. Now that we know the principles on which they depend, from those principles we deduce the motions of the heavens *à priori*. Because the weights of the planets towards the sun are reciprocally as the squares of their distances from the sun's centre, if the sun was at rest, and the other planets did not mutually act one upon another, their orbits would be ellipses, having the sun in their common focus; and they would describe areas proportional to the times of *description*, by Prop, I and XI, and Cor. 1, Prop. XIII, Book I. But the mutual actions of the planets one upon another are so very small, that they may be neglected; and by Prop. LXVI, Book I, they less disturb the motions of the planets around the sun in motion than if those motions were performed about the sun at rest.

It is true, that the action of Jupiter upon Saturn is not to be neglected; for the force of gravity towards Jupiter is to the force of gravity towards the sun (at equal distances, Cor. 2, Prop. VIII) as 1 to 1067; and therefore in the conjunction of Jupiter and Saturn, because the distance of Saturn from Jupiter is to the distance of Saturn from the sun almost as 4 to 9, the gravity of Saturn towards Jupiter will be to the gravity of Saturn towards the sun as 81 to 16 1067; or, as 1 to about 211. And hence arises a perturbation of the orb of Saturn in every conjunction of this planet with Jupiter, so sensible, that astronomers are puzzled with it. As the planet is differently situated in these conjunctions, its eccentricity is sometimes augmented, sometimes diminished; its aphelion is sometimes carried forward, sometimes backward, and its mean motion is by turns accelerated and retarded; yet the

whole error in its motion about the sun, though arising from so great a force, may be almost avoided (except in the mean motion) by placing the lower focus of its orbit in the common centre of gravity of Jupiter and the sun (according to Prop. LXVII, Book I), and therefore that error, when it is greatest, scarcely exceeds two minutes; and the greatest error in the mean motion scarcely exceeds two minutes yearly. But in the conjunction of Jupiter and Saturn, the accelerative forces of gravity of the sun towards Saturn, of Jupiter towards Saturn, and of Jupiter towards the sun, are almost as 16,81, and; or 156609: and therefore the difference of the forces of gravity of the sun towards Saturn, and of Jupiter towards Saturn, is to the force of gravity of Jupiter towards the sun as 65 to 156609, or as 1 to 2409. But the greatest power of Saturn to disturb the motion of Jupiter is proportional to this difference; and therefore the perturbation of the orbit of Jupiter is much less than that of Saturn's. The perturbations of the other orbits are yet far less, except that the orbit of the earth is sensibly disturbed by the moon. The common centre of gravity of the earth and moon moves in an ellipsis about the sun in the focus thereof, and, by a radius drawn to the sun, describes areas proportional to the times of description. But the earth in the mean time by a menstrual motion is revolved about this common centre.

PROPOSITION XIV. THEOREM XIV.

The aphelions and nodes of the orbits of the planets are fixed.

The aphelions are immovable by Prop. XI, Book I; and so are the planes of the orbits, by Prop. I of the same Book. And if the planes are fixed, the nodes must be so too. It is true, that some inequalities may arise from the mutual actions of the planets and comets in their revolutions; but these will be so small, that they may be here passed by.

Cor. 1. The fixed stars are immovable, seeing they keep the same position to the aphelions and nodes of the planets.

Cor. 2. And since these stars are liable to no sensible parallax from the annual motion of the earth, they can have no force, because of their immense distance, to produce any sensible effect in our system. Not to mention that the fixed stars, every where promiscuously dispersed in the

heavens, by their contrary attractions destroy their mutual actions, by Prop. LXX, Book I.

SCHOLIUM.

Since the planets near the sun (viz. Mercury, Venus, the Earth, and Mars) are so small that they can act with but little force upon each other, therefore their aphelions and nodes must be fixed, excepting in so far as they are disturbed by the actions of Jupiter and Saturn, and other higher bodies. And hence we may find, by the theory of gravity, that their aphelions move a little *in consequentia*, in respect of the fixed stars, and that in the sesquiplicate proportion of their several distances from the sun. So that if the aphelion of Mars, in the space of a hundred years, is carried 33’ 20” *in consequentia*, in respect of the fixed stars; the aphelions of the Earth, of Venus, and of Mercury, will in a hundred years be carried forwards 17’ 40”, 10’ 53”, and 4’ 16”, respectively. But these motions are so inconsiderable, that we have neglected them in this Proposition,

PROPOSITION XV. PROBLEM I.

To find the principal diameters of the orbits of the planets.

They are to be taken in the sub-sesquiplicate proportion of the periodic times, by Prop. XV, Book I, and then to be severally augmented in the proportion of the sum of the masses of matter in the sun and each planet to the first of two mean proportionals betwixt that sum and the quantity of matter in the sun, by Prop. LX, Book I.

PROPOSITION XVI. PROBLEM II.

To find the eccentricities and aphelions of the planets.

This Problem is resolved by Prop. XVIII, Book I.

PROPOSITION XVII. THEOREM XV.

That the diurnal motions of the planets are uniform, and that the libration of the moon arises from its diurnal motion.

The Proposition is proved from the first Law of Motion, and Cor. 22, Prop. LXVI, Book I. Jupiter, with respect to the fixed stars, revolves in 9^h.56'; Mars in 24^h.39'; Venus in about 23^h.; the Earth in 23^h.56'; the Sun in 25½ days, and the moon in 27 days, 7 hours, 43'. These things appear by the Phaenomena. The spots in the sun's body return to the same situation on the sun's disk, with respect to the earth, in 27½ days; and therefore with respect to the fixed stars the sun revolves in about 25½ days. But because the lunar day, arising from its uniform revolution about its axis, is menstrual, *that is, equal to the time of its periodic revolution in its orb*, therefore the same face of the moon will be always nearly turned to the upper focus of its orb; but, as the situation of that focus requires, will deviate a little to one side and to the other from the earth in the lower focus; and this is the libration in longitude; for the libration in latitude arises from the moon's latitude, and the inclination of its axis to the plane of the ecliptic. This theory of the libration of the moon, Mr. *N. Mercator* in his Astronomy, published at the beginning of the year 1676, explained more fully out of the letters I sent him. The utmost satellite of Saturn seems to revolve about its axis with a motion like this of the moon, respecting Saturn continually with the same face; for in its revolution round Saturn, as often as it comes to the eastern part of its orbit, it is scarcely visible, and generally quite disappears; which is like to be occasioned by some spots in that part of its body, which is then turned towards the earth, as M. *Cassini* has observed. So also the utmost satellite of Jupiter seems to revolve about its axis with a like motion, because in that part of its body which is turned from Jupiter it has a spot, which always appears as if it were in Jupiter's own body, whenever the satellite passes between Jupiter and our eye.

PROPOSITION XVIII. THEOREM XVI.

That the axes of the planets are less than the diameters drawn perpendicular to the axes.

The equal gravitation of the parts on all sides would give a spherical figure to the planets, if it was not for their diurnal revolution in a circle. By that circular motion it comes to pass that the parts receding from the axis endeavour to ascend about the equator; and therefore if the matter is in a fluid state, by its ascent towards the equator it will enlarge the diameters there, and by its descent towards the poles it will shorten the axis. So the diameter of Jupiter (by the concurring observations of astronomers) is found shorter betwixt pole and pole than from east to west. And, by the same argument, if our earth was not higher about the equator than at the poles, the seas would subside about the poles, and, rising towards the equator, would lay all things there under water.

PROPOSITION XIX. PROBLEM III.

To find the proportion of the axis of a planet to the diameter, perpendicular thereto.

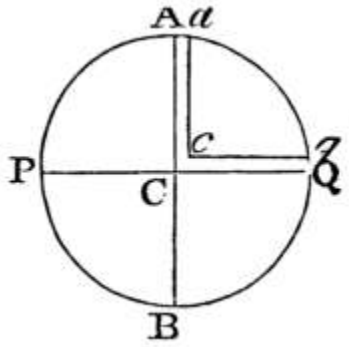
Our countryman, Mr. *Norwood*, measuring a distance of 905751 feet of *London* measure between *London* and *York*, in 1635, and observing the difference of latitudes to be 2° 28', determined the measure of one degree to be 367196 feet of *London* measure, that is 57300 *Paris* toises. M. *Picart*, measuring an arc of one degree, and 22' 55" of the meridian between *Amiens* and *Malvoisine*, found an arc of one degree to be 57060 *Paris* toises. M. *Cassini*, the father, measured the distance upon the meridian from the town of *Collioure* in *Roussillon* to the Observatory of *Paris*; and his son added the distance from the Observatory to the Citadel of *Dunkirk*. The whole distance was 486156½ toises and the difference of the latitudes of *Collioure* and *Dunkirk* was 8 degrees, and 31' $11\frac{5}{6}$". Hence an arc of one degree appears to be 57061 *Paris* toises. And from these measures we conclude that the circumference of the earth is 123249600, and its semi-diameter 19615800 *Paris* feet, upon the supposition that the earth is of a spherical figure.

In the latitude of *Paris* a heavy body falling in a second of time describes 15 *Paris* feet, 1 inch, $1\frac{7}{9}$ line, as above, that is, 2173 lines $\frac{7}{9}$. The weight of the body is diminished by the weight of the ambient air. Let us suppose

the weight lost thereby to be $^1/_{11000}$ part of the whole weight; then that heavy body falling *in vacua* will describe a height of 2174 lines in one second of time.

A body in every sidereal day of 23^h.56'4" uniformly revolving in a circle at the distance of 196158OO feet from the centre, in one second of time describes an arc of 1433,46 feet; the versed sine of which is 0,05236561 feet, or 7,54064 lines. And therefore the force with which bodies descend in the latitude of *Paris* is to the centrifugal force of bodies in the equator arising from the diurnal motion of the earth as 2174 to 7,54064.

The centrifugal force of bodies in the equator is to the centrifugal force with which bodies recede directly from the earth in the latitude of *Paris* 48° 50' 10" in the duplicate proportion of the radius to the cosine of the latitude, that is, as 7,54064 to 3,267. Add this force to the force with which bodies descend by their weight in the latitude of *Paris*, and a body, in the latitude of *Paris*, falling by its whole undiminished force of gravity, in the time of one second, will describe 2177,267 lines, or 15 *Paris* feet, 1 inch, and 5,267 lines. And the total force of gravity in that latitude will be to the centrifugal force of bodies in the equator of the earth as 2177,267 to 7,54064, or as 289 to 1.



Wherefore if APBQ represent the figure of the earth, now no longer spherical, but generated by the rotation of an ellipsis about its lesser axis PQ; and ACQ*qca* a canal full of water, reaching from the pole Q*q* to the centre C*c*, and thence rising to the equator A*a*; the weight of the water in the leg of the canal AC*ca* will be to the weight of water in the other leg QC*cq* as 289 to 288, because the centrifugal force arising from the circular motion sustains and takes off one of the 289 parts of the weight (in the one leg), and the weight of 288 in the other sustains the rest. But by computation (from Cor. 2, Prop. XCI, Book I) I find, that, if the matter of the earth was all

uniform, and without any motion, and its axis PQ were to the diameter AB as 100 to 101, the force of gravity in the place Q towards the earth would be to the force of gravity in the same place Q towards a sphere described about the centre C with the radius PC, or QC, as 126 to 125. And, by the same argument, the force of gravity in the place A towards the spheroid generated by the rotation of the ellipsis APBQ about the axis AB is to the force of gravity in the same place A, towards the sphere described about the centre C with the radius AC, as 125 to 126. But the force of gravity in the place A towards the earth is a mean proportional betwixt the forces of gravity towards the spheroid and this sphere; because the sphere, by having its diameter PQ diminished in the proportion of 101 to 100, is transformed into the figure of the earth; and this figure, by having a third diameter perpendicular to the two diameters AB and PQ diminished in the same proportion, is converted into the said spheroid; and the force of gravity in A, in either case, is diminished nearly in the same proportion. Therefore the force of gravity in A towards the sphere described about the centre C with the radius AC, is to the force of gravity in A towards the earth as 126 to 125½. And the force of gravity in the place Q towards the sphere described about the centre C with the radius QC, is to the force of gravity in the place A towards the sphere described about the centre C, with the radius AC, in the proportion of the diameters (by Prop. LXXII, Book I), that is, as 100 to 101. If, therefore, we compound those three proportions 126 to 125, 126 to 125½, and 100 to 101, into one, the force of gravity in the place Q towards the earth will be to the force of gravity in the place A towards the earth as 126 126 100 to 125 125½ 101; or as 501 to 500.

Now since (by Cor. 3, Prop. XCI, Book I) the force of gravity in either leg of the canal AC*ca*, or QC*cq*, is as the distance of the places from the centre of the earth, if those legs are conceived to be divided by transverse, parallel, and equidistant surfaces, into parts proportional to the wholes, the weights of any number of parts in the one leg AC*ca* will be to the weights of the same number of parts in the other leg as their magnitudes and the accelerative forces of their gravity conjunctly, that is, as 101 to 100, and 500 to 501, or as 505 to 501. And therefore if the centrifugal force of every part in the leg AC*c*a, arising from the diurnal motion, was to the weight of the same part as 4 to 505, so that from the weight of every part, conceived to be divided into 505 parts, the centrifugal force might take off four of

those parts, the weights would remain equal in each leg, and therefore the fluid would rest in an equilibrium. But the centrifugal force of every part is to the weight of the same part as 1 to 289; that is, the centrifugal force, which should be $^{4}/_{505}$ parts of the weight, is only $^{1}/_{289}$ part thereof. And, therefore, I say, by the rule of proportion, that if the centrifugal force $^{4}/_{505}$ make the height of the water in the leg AC*ca* to exceed the height of the water in the leg QC*cq* by one $^{1}/_{100}$ part of its whole height, the centrifugal force $^{1}/_{289}$ will make the excess of the height in the leg AC*ca* only $^{1}/_{289}$ part of the height of the water in the other leg QC*cq*; and therefore the diameter of the earth at the equator, is to its diameter from pole to pole as 230 to 229. And since the mean semi-diameter of the earth, according to *Picart's* mensuration, is 19615800 *Paris* feet, or 3923,16 miles (reckoning 5000 feet to a mile), the earth will be higher at the equator than at the poles by 85472 feet, or $17^{1}/_{10}$ miles. And its height at the equator will be about 19658600 feet, and at the poles 19573000 feet.

If, the density and periodic time of the diurnal revolution remaining the same, the planet was greater or less than the earth, the proportion of the centrifugal force to that of gravity, and therefore also of the diameter betwixt the poles to the diameter at the equator, would likewise remain the same. But if the diurnal motion was accelerated or retarded in any proportion, the centrifugal force would be augmented or diminished nearly in the same duplicate proportion; and therefore the difference of the diameters will be increased or diminished in the same duplicate ratio very nearly. And if the density of the planet was augmented or diminished in any proportion, the force of gravity tending towards it would also be augmented or diminished in the same proportion: and the difference of the diameters contrariwise would be diminished in proportion as the force of gravity is augmented, and augmented in proportion as the force of gravity is diminished. Wherefore, since the earth, in respect of the fixed stars, revolves in $23^{h}.56'$, but Jupiter in $9^{h}.56'$, and the squares of their periodic times are as 29 to 5, and their densities as 400 to 94½, the difference of the diameters of Jupiter will be to its lesser diameter as to 1, or as 1 to 9⅓, nearly. Therefore the diameter of Jupiter from east to west is to its diameter from pole to pole nearly as 10⅓ to 9⅓. Therefore since its greatest diameter

is 37”, its lesser diameter lying between the poles will be 33” 25’”. Add thereto about 3” for the irregular refraction of light, and the apparent diameters of this planet will become 40” and 36” 25’”; which are to each other as $11\frac{1}{6}$ to $10\frac{1}{6}$, very nearly. These things are so upon the supposition that the body of Jupiter is uniformly dense. But now if its body be denser towards the plane of the equator than towards the poles, its diameters may be to each other as 12 to 11, or 13 to 12, or perhaps as 14 to 13.

And *Cassini* observed in the year 1691, that the diameter of Jupiter reaching from east to west is greater by about a fifteenth part than the other diameter. Mr. *Pound* with his 123 feet telescope, and an excellent micrometer, measured the diameters of Jupiter in the year 1719, and found them as follow.

The Times.	Day.		
Greatest diam.	January	28	
Lesser diam.	March	6	
The diam. to each other.	March April	9	

9

Hours

6

7

7

9

Parts
13,40
13,12
13,12
12,32

Parts
12,28
12,20
12,08
11,48

As
As
As
As

12

13¾
12⅔
14½

to
to
to
to

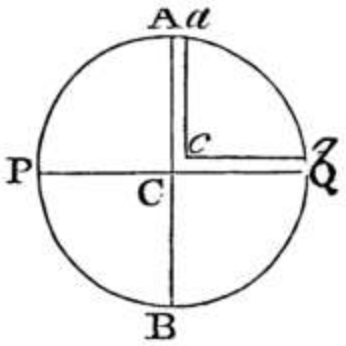
12¾
11⅔
13½

So that the theory agrees with the phaenomena; for the planets are more heated by the sun's rays towards their equators, and therefore are a little more condensed by that heat than towards their poles.

Moreover, that there is a diminution of gravity occasioned by the diurnal rotation of the earth, and therefore the earth rises higher there than it does at the poles (supposing that its matter is uniformly dense), will appear by the experiments of pendulums related under the following Proposition.

PROPOSITION XX. PROBLEM IV.

To find and compare together the weights of bodies in the different regions of our earth.



Because the weights of the unequal legs of the canal of water ACQ*qca* are equal; and the weights of the parts proportional to the whole legs, and alike situated in them, are one to another as the weights of the wholes, and therefore equal betwixt themselves; the weights of equal parts, and alike situated in the legs, will be reciprocally as the legs, that is, reciprocally as

230 to 229. And the case is the same in all homogeneous equal bodies alike situated in the legs of the canal. Their weights are reciprocally as the legs, that is, reciprocally as the distances of the bodies from the centre of the earth. Therefore if the bodies are situated in the uppermost parts of the canals, or on the surface of the earth, their weights will be one to another reciprocally as their distances from the centre. And, by the same argument, the weights in all other places round the whole surface of the earth are reciprocally as the distances of the places from the centre; and, therefore, in the hypothesis of the earth's being a spheroid are given in proportion.

Whence arises this Theorem, that the increase of weight in passing from the equator to the poles is nearly as the versed sine of double the latitude; or, which comes to the same thing, as the square of the right sine of the latitude; and the arcs of the degrees of latitude in the meridian increase nearly in the same proportion. And, therefore, since the latitude of *Paris* is 48° 50', that of places under the equator 00° 00', and that of places under the poles 90°; and the versed sines of double those arcs are 11334,00000 and 20000, the radius being 10000; and the force of gravity at the pole is to the force of gravity at the equator as 230 to 229; and the excess of the force of gravity at the pole to the force of gravity at the equator as 1 to 229; the excess of the force of gravity in the latitude of Paris will be to the force of gravity at the equator as 1 $^{11334}/_{20000}$ to 229, or as 5667 to 2290000. And therefore the whole forces of gravity in those places will be one to the other as 2295667 to 2290000. Wherefore since the lengths of pendulums vibrating in equal times are as the forces of gravity, and in the latitude of *Paris*, the length of a pendulum vibrating seconds is 3 *Paris* feet, and 8½ lines, or rather because of the weight of the air, $8^{5}/_{9}$ lines, the length of a pendulum vibrating in the same time under the equator will be shorter by 1,087 lines. And by a like calculus the following table is made.

Latitude of
the place.

Length of the
pendulum

Measure of one degree
in the meridian.

Deg.	Feet	Lines
0	3	7,468
5		
10		
15		
20		
25		
30		
35		
40		
1		
2		
3		
4		
45		
6		
7		
8		
9		
50		
55		
60		
65		
70		
75		
80		
85		
90		

3 . 7,482
3 . 7,526
3 . 7,596
3 . 7,692
3 . 7,812
3 . 7,948
3 . 8,099
3 . 8,261
3 . 8,294
3 . 8,327
3 . 8,361
3 . 8,394
3 . 8,428
3 . 8,461
3 . 8,494
3 . 8,528
3 . 8,561
3 . 8,594
3 . 8,756
3 . 8,907
3 . 9,044
3 . 9,162
3 . 9,258
3 . 9,329
3 . 9,372
3 . 9,387

Toises.
56637
56642
56659
56687
56724
56769
56823
56882

56945
56958
56971
56984
56997
57010
57022
57035
57048
57061
57074
57137
57196
57250
57295
57332
57360
57377
57382

By this table, therefore, it appears that the inequality of degrees is so small, that the figure of the earth, in geographical matters, may be considered as spherical; especially if the earth be a little denser towards the plane of the equator than towards the poles.

Now several astronomers, sent into remote countries to make astronomical observations, have found that pendulum clocks do accordingly move slower near the equator than in our climates. And, first of all, in the year 1672, M. *Richer* took notice of it in the island of *Cayenne*; for when, in the month of *August*, he was observing the transits of the fixed stars over the meridian, he found his clock to go slower than it ought in respect of the mean motion of the sun at the rate of 2’ 28” a day. Therefore, fitting up a simple pendulum to vibrate in seconds, which were measured by an excellent clock, he observed the length of that simple pendulum; and this he did over and over every week for ten months together. And upon his re turn

to *France*, comparing the length of that pendulum with the length of the pendulum at *Paris* (which was 3 *Paris* feet and $8\frac{3}{5}$ lines), he found it shorter by 1¼ line.

Afterwards, our friend Dr. *Halley*, about the year 1677, arriving at the island of St. *Helena*, found his pendulum clock to go slower there than at *London* without marking the difference. But he shortened the rod of his clock by more than the $\frac{1}{8}$ of an inch, or 1½ line; and to effect this, be cause the length of the screw at the lower end of the rod was not sufficient, he interposed a wooden ring betwixt the nut and the ball.

Then, in the year 1682, M. *Varin* and M. *des Hayes* found the length of a simple pendulum vibrating in seconds at the Royal Observatory of *Paris* to be 3 feet and $8\frac{5}{9}$ lines. And by the same method in the island of *Goree*, they found the length of an isochronal pendulum to be 3 feet and $6\frac{5}{9}$ lines, differing from the former by two lines. And in the same year, going to the islands of *Guadaloupe* and *Martinico*, they found that the length of an isochronal pendulum in those islands was 3 feet and 6½ lines.

After this, M. *Couplet*, the son, in the month of *July* 1697, at the Royal Observatory of *Paris*, so fitted his pendulum clock to the mean motion of the sun, that for a considerable time together the clock agreed with the motion of the sun. In *November* following, upon his arrival at *Lisbon*, he found his clock to go slower than before at the rate of 2’ 13” in 24 hours. And next *March* coming to *Paraiba*, he found his clock to go slower than at *Paris*, and at the rate 4’ 12” in 24 hours; and he affirms, that the pendulum vibrating in seconds was shorter at Lisbon by 2½ lines, and at *Paraiba*, by 3⅔ lines, than at *Paris*. He had done better to have reckoned those differences 1⅓ and $2\frac{5}{9}$: for these differences correspond to the differences of the times 2’ 13” and 4’ 12”. But this gentleman’s observations are so gross, that we cannot confide in them.

In the following years, 1699, and 1700, M. *des Hayes*, making another voyage to *America*, determined that in the island of *Cayenne* and *Granada* the length of the pendulum vibrating in seconds was a small matter less than 3 feet and 6½ lines; that in the island of St. *Christophers* it was 3 feet and 6¾ lines; and in the island of St. *Domingo* 3 feet and 7 lines.

And in the year 1704, P. *Feuillé*, at *Puerto Bello* in *America*, found that the length of the pendulum vibrating in seconds was 3 *Paris feet*, and only $5^{7}/_{12}$ lines, that is, almost 3 lines shorter than at *Paris*; but the observation was faulty. For afterward, going to the island of *Martinico*, he found the length of the isochronal pendulum there 3 *Paris* feet and $5^{10}/_{12}$ lines.

Now the latitude of *Paraiba* is 6° 38’ south; that of *Puerto Bello* 9° 33’ north; and the latitudes of the islands *Cayenne, Goree, Gaudaloupe, Martinico, Granada, St. Christophers, and St. Domingo,* are respectively 4° 55’, 14° 40”, 15° 00’, 14° 44’, 12° 06’, 17° 19’, and 19° 48’, north. And the excesses of the length of the pendulum at *Paris* above the lengths of the isochronal pendulums observed in those latitudes are a little greater than by the table of the lengths of the pendulum before computed. And therefore the earth is a little higher under the equator than by the preceding calculus, and a little denser at the centre than in mines near the su face, unless, perhaps, the heats of the torrid zone have a little extended the length of the pendulums.

For M. *Picart* has observed, that a rod of iron, which in frosty weather in the winter season was one foot long, when heated by lire, was lengthened into one foot and ¼ line. Afterward M. *de la Hire* found that a rod of iron, which in the like winter season was 6 feet long, when exposed to the heat of the summer sun, was extended into 6 feet and ⅔ line. In the former case the heat was greater than in the latter; but in the latter it was greater than the heat of the external parts of a human body; for metals exposed to the summer sun acquire a very considerable degree of heat. But the rod of a pendulum clock is never exposed to the heat of the summer sun, nor ever acquires a heat equal to that of the external parts of a human body; and, therefore, though the 3 feet rod of a pendulum clock will indeed be a little longer in the summer than in the winter season, yet the difference will scarcely amount to ¼ line. Therefore the total difference of the lengths of isochronal pendulums in different climates cannot be ascribed to the difference of heat; nor indeed to the mistakes of the *French* astronomers. For although there is not a perfect agreement betwixt their observations, yet the errors are so small that they may be neglected; and in this they all agree, that isochronal pendulums are shorter under the equator than at the Royal Observatory of *Paris*, by a difference not less than 1¼ line, nor greater than

2⅔ lines. By the observations of M. *Richer*, in the island of *Cayenne*, the difference was 1¼ line. That difference being corrected by those of M. *des Hayes*, becomes 1½ line or 1¾ line. By the less accurate observations of others, the same was made about two lines. And this dis agreement might arise partly from the errors of the observations, partly from the dissimilitude of the internal parts of the earth, and the height of mountains; partly from the different heats of the air.

I take an iron rod of 3 feet long to be shorter by a sixth part of one line in winter time with us here in *England* than in the summer. Because of the great heats under the equator, subduct this quantity from the difference of one line and a quarter observed by M. *Richer*, and there will remain one line $^{1}/_{12}$, which agrees very well with $1^{87}/_{1000}$ line collected, by the theory a little before. M. *Richer* repeated his observations, made in the island of *Cayenne*, every week for ten months together, and compared the lengths of the pendulum which he had there noted in the iron rods with the lengths thereof which he observed in *France*. This diligence and care seems to have been wanting to the other observers. If this gentleman's observations are to be depended on, the earth is higher under the equator than at the poles, and that by an excess of about 17 miles; as appeared above by the theory.

PROPOSITION XXI. THEOREM XVII.

That the equinoctial points go backward, and that the axis of the earth, by a nutation in every annual revolution, twice vibrates towards the ecliptic, and as often returns to its former position.

The proposition appears from Cor. 20, Prop. LXVI, Book I; but that motion of nutation must be very small, and, indeed, scarcely perceptible.

PROPOSITION XXII. THEOREM XVIII.

That all the motions of the moon, and all the inequalities of those motions, follow from the principles which we have laid down.

That the greater planets, while they are carried about the sun, may in the mean time carry other lesser planets, revolving about them; and that those lesser planets must move in ellipses which have their foci in the centres of the greater, appears from Prop. LXV, Book I. But then their motions will be several ways disturbed by the action of the sun, and they will suffer such inequalities as are observed in our moon. Thus our moon (by Cor. 2, 3, 4, and 5, Prop. LXVI, Book I) moves faster, and, by a radius drawn to the earth, describes an area greater for the time, and has its orbit less curved, and therefore approaches nearer to the earth in the syzygies than in the quadratures, excepting in so far as these effects are hindered by the motion of eccentricity; for (by Cor. 9, Prop. LXVI, Book I) the eccentricity is greatest when the apogeon of the moon is in the syzygies, and least when the same is in the quadratures; and upon this account the perigeon moon is swifter, and nearer to us, but the apogeon moon slower, and farther from us, in the syzygies than in the quadratures. Moreover, the apogee goes forward, and the nodes backward; and this is done not with a regular but an unequal motion. For (by Cor. 7 and 8, Prop. LXVI, Book I) the apogee goes more swiftly forward in its syzygies, more slowly backward in its quadratures; and, by the excess of its progress above its regress, advances yearly *in consequentia*. But, contrariwise, the nodes (by Cor. 11, Prop. LXVI, Book I) are quiescent in their syzygies, and go fastest back in their quadratures. Farther, the greatest latitude of the moon (by Cor. 10, Prop. LXVI, Book I) is greater in the quadratures of the moon than in its syzygies. And (by Cor. 6, Prop. LXVI, Book I) the mean motion of the moon is slower in the perihelion of the earth than in its aphelion. And these are the principal inequalities (of the moon) taken notice of by astronomers.

But there are yet other inequalities not observed by former astronomers, by which the motions of the moon are so disturbed, that to this day we have not been able to bring them under any certain rule. For the velocities or horary motions of the apogee and nodes of the moon, and their equations, as well as the difference betwixt the greatest eccentricity in the syzygies, and the least eccentricity in the quadratures, and that inequality which we call the variation, are (by Cor. 14, Prop. LXVI, Book I) in the course of the year augmented and diminished in the triplicate proportion of the sun's apparent diameter. And besides (by Cor. 1 and 2, Lem. 10, and Cor. 16, Prop. LXVI, Book I) the variation is augmented and diminished nearly in the duplicate

proportion of the time between the quadratures. But in astronomical calculations, this inequality is commonly thrown into and confounded with the equation of the moon's centre.

PROPOSITION XXIII. PROBLEM V.

To derive the unequal motions of the satellites of Jupiter and Saturn from the motions of our moon.

From the motions of our moon we deduce the corresponding motions of the moons or satellites of Jupiter in this manner, by Cor. 16, Prop. LXVI, Book I. The mean motion of the nodes of the outmost satellite of Jupiter is to the mean motion of the nodes of our moon in a proportion compounded of the duplicate proportion of the periodic times of the earth about the sun to the periodic times of Jupiter about the sun, and the simple proportion of the periodic time of the satellite about Jupiter to the periodic time of our moon about the earth; and, therefore, those nodes, in the space of a hundred years, are carried 8° 24' backward, or *in antecedentia*. The mean motions of the nodes of the inner satellites are to the mean motion of the nodes of the outmost as their periodic times to the periodic time of the former, by the same Corollary, and are thence given. And the motion of the apsis of every satellite *in consequentia* is to the motion of its nodes *in antecedentia* as the motion of the apogee of our moon to the motion of its nodes (by the same Corollary), and is thence given. But the motions of the apsides thus found must be diminished in the proportion of 5 to 9, or of about 1 to 2, on account of a cause which I cannot here descend to explain. The greatest equations of the nodes, and of the apsis of every satellite, are to the greatest equations of the nodes, and apogee of our moon respectively, as the motions of the nodes and apsides of the satellites, in the time of one revolution of the former equations, to the motions of the nodes and apogee of our moon, in the time of one revolution of the latter equations. The variation of a satellite seen from Jupiter is to the variation of our moon in the same proportion as the whole motions of their nodes respectively during the times in which the satellite and our moon (after parting from) are revolved (again) to the sun,

by the same Corollary; and therefore in the outmost satellite the variation does not exceed 5” 12”’.

PROPOSITION XXIV. THEOREM XIX.

That the flux and reflux of the sea arise from the actions of the sun and moon.

By Cor. 19 and 20, Prop. LXVI, Book I, it appears that the waters of the sea ought twice to rise and twice to fall every day, as well lunar as solar; and that the greatest height of the waters in the open and deep seas ought to follow the appulse of the luminaries to the meridian of the place by a less interval than 6 hours; as happens in all that eastern tract of the Atlantic and *AEthiopic* seas between *France* and the *Cape of Good Hope*; and on the coasts of *Chili* and *Peru*, in the *South Sea*; in all which shores the flood falls out about the second, third, or fourth hour, unless where the motion propagated from the deep ocean is by the shallowness of the channels, through which it passes to some particular places, retarded to the fifth, sixth, or seventh hour, and even later. The hours I reckon from the appulse of each luminary to the meridian of the place; as well under as above the horizon; and by the hours of the lunar day I understand the 24th parts of that time which the moon, by its apparent diurnal motion, employs to come about again to the meridian of the place which it left the day before. The force of the sun or moon in raising the sea is greatest in the appulse of the luminary to the meridian of the place; but the force impressed upon the sea at that time continues a little while after the impression, and is afterwards increased by a new though less force still acting upon it. This makes the sea rise higher and higher, till this new force becoming too weak to raise it any more, the sea rises to its greatest height. And this will come to pass, perhaps, in one or two hours, but more frequently near the shores in about three hours, or even more, where the sea is shallow.

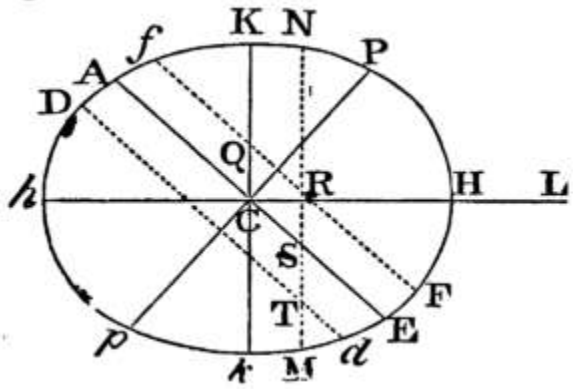
The two luminaries excite two motions, which will not appear distinctly, but between them will arise one mixed motion compounded out of both. In the conjunction or opposition of the luminaries their forces will be conjoined, and bring on the greatest flood and ebb. In the quadratures the sun will raise the waters which the moon depresses, and depress the waters which the

moon raises, and from the difference of their forces the smallest of all tides will follow. And because (as experience tells us) the force of the moon is greater than that of the sun, the greatest height of the waters will happen about the third lunar hour. Out of the syzygies and quadratures, the greatest tide, which by the single force of the moon ought to fall out at the third lunar hour, and by the single force of the sun at the third solar hour, by the compounded forces of both must fall out in an intermediate time that aproaches nearer to the third hour of the moon than to that of the sun. And, therefore, while the moon is passing from the syzygies to the quadratures, during which time the 3d hour of the sun precedes the 3d hour of the moon, the greatest height of the waters will also precede the 3d hour of the moon, and that, by the greatest interval, a little after the octants of the moon; and, by like intervals, the greatest tide will fol low the 3d lunar hour, while the moon is passing from the quadratures to the syzygies. Thus it happens in the open sea; for in the mouths of rivers the greater tides come later to their height.

But the effects of the luminaries depend upon their distances from the earth; for when they are less distant, their effects are greater, and when more distant, their effects are less, and that in the triplicate proportion of their apparent diameter. Therefore it is that the sun, in the winter time, being then in its perigee, has a greater effect, and makes the tides in the syzygies something greater, and those in the quadratures something less than in the summer season; and every month the moon, while in the perigee, raises greater tides than at the distance of 15 days before or after, when it is in its apogee. Whence it comes to pass that two highest tides do not follow one the other in two immediately succeeding syzygies.

The effect of either luminary doth likewise depend upon its declination or distance from the equator; for if the luminary was placed at the pole, it would constantly attract all the parts of the waters without any intension or remission of its action, and could cause no reciprocation of motion. And, therefore, as the luminaries decline from the equator towards either pole, they will, by degrees, lose their force, and on this account will excite lesser tides in the solstitial than in the equinoctial syzygies. But in the solstitial quadratures they will raise greater tides than in the quadratures about the equinoxes; because the force of the moon, then situated in the equator, most exceeds the force of the sun. Therefore the greatest tides fall out in those

syzygies, and the least in those quadratures, which happen about the time of both equinoxes: and the greatest tide in the syzygies is always succeeded by the least tide in the quadratures, as we find by experience. But, because the sun is less distant from the earth in winter than in summer, it comes to pass that the greatest and least tides more frequently appear before than after the vernal equinox, and more frequently after than before the autumnal.



Moreover, the effects of the luminaries depend upon the latitudes of places. Let A*p*EP represent the earth covered with deep waters; C its centre; P, *p* its poles; AE the equator; F any place without the equator; F*f* the parallel of the place; D*d* the correspondent parallel on the other side of the equator; L the place of the moon three Hours before; H the place of the earth directly under it; *h* the opposite place; K, *k* the places at 90 degrees distance; CH, C*h*, the greatest heights of the sea from the centre of the earth; and CK, C*k*, its least heights: and if with the axes H*h*, K*k*, an ellipsis is described, and by the revolution of that ellipsis about its longer axis H*h* a spheroid HPK*hpk* is formed, this spheroid will nearly represent the figure of the sea; and CF, C*f*, CD, C*d*, will represent the heights of the sea in the places F*f*, D*d*. But farther; in the said revolution of the ellipsis any point N describes the circle NM cutting the parallels F*f*, D*d*, in any places RT, and the equator AE in S; CN will represent the height of the sea in all those places R, S, T, situated in this circle. Wherefore, in the diurnal revolution of any place F, the greatest flood will be in F, at the third hour after the appulse of the moon to the meridian above the horizon; and afterwards the greatest ebb in Q, at the third hour after the setting of the moon; and then the greatest flood in *f*, at the third hour after the appulse of the moon to the meridian under the horizon; and, lastly, the greatest ebb in Q, at the third hour after the rising of the moon; and the latter flood in f will be less than

the preceding flood in F. For the whole sea is divided into two hemispherical floods, one in the hemisphere KH*k* on the north side, the other in the opposite hemisphere K*hk*, which we may therefore call the northern and the southern floods. These floods, being always opposite the one to the other, come by turns to the meridians of all places, after an interval of 12 lunar hours. And seeing the northern countries partake more of the northern flood, and the southern countries more of the southern flood, thence arise tides, alternately greater and less in all places without the equator, in which the luminaries rise and set. But the greatest tide will happen when the moon declines towards the vertex of the place, about the third hour after the appulse of the moon to the meridian above the horizon; and when the moon changes its declination *to the other side of the equator*, that which was the greater tide will be changed into a lesser. And the greatest difference of the floods will fall out about the times of the solstices; especially if the ascending node of the moon is about the first of Aries. So it is found by experience that the morning tides in winter exceed those of the evening, and the evening tides in summer exceed those of the morning; at *Plymouth* by the height of one foot, but at *Bristol* by the height of 15 inches, according to the observations of *Colepress* and *Sturmy*.

But the motions which we have been describing suffer some alteration from that force of reciprocation, which the waters, being once moved, retain a little while *by their vis insita*. Whence it comes to pass that the tides may continue for some time, though the actions of the luminaries should cease. This power of retaining the impressed motion lessens the difference of the alternate tides, and makes those tides which immediately succeed after the syzygies greater, and those which follow next after the quadratures less. And hence it is that the alternate tides at *Plymouth* and *Bristol* do not differ much more one from the other than by the height of a foot or 15 inches, and that the greatest tides of all at those ports are not the first but the third after the syzygies. And, besides, all the motions are retarded in their passage through shallow channels, so that the greatest tides of all, in some straits and mouths of rivers, are the fourth or even the fifth after the syzygies.

Farther, it may happen that the tide may be propagated from the ocean through different channels towards the same port, and may pass quicker through some channels than through others; in which case the same tide, divided into two or more succeeding one another, may compound new

motions of different kinds. Let us suppose two equal tides flowing towards the same port from different places, the one preceding the other by 6 hours; and suppose the first tide to happen at the third hour of the appulse of the moon to the meridian of the port. If the moon at the time of the appulse to the meridian was in the equator, every 6 hours alternately there would arise equal floods, which, meeting with as many equal ebbs, would so balance one the other, that for that day, the water would stagnate and remain quiet. If the moon then declined from the equator, the tides in the ocean would be alternately greater and less, as was said; and from thence two greater and two lesser tides would be alternately propagated towards that port. But the two greater floods would make the greatest height of the waters to fall out in the middle time betwixt both; and the greater and lesser floods would make the waters to rise to a mean height in the middle time between them, and in the middle time between the two lesser floods the waters would rise to their least height. Thus in the space of 24 hours the waters would come, not twice, as commonly, but once only to their great est, and once only to their least height; and their greatest height, if the moon declined towards the elevated pole, would happen at the 6th or 30th hour after the appulse of the moon to the meridian; and when the moon changed its declination, this flood would be changed into an ebb. An example of all which Dr. *Halley* has given us, from the observations of sea men in the port of *Batsham*, in the kingdom of *Tunquin*, in the latitude of 20° 50’ north. In that port, on the day which follows after the passage of the moon over the equator, the waters stagnate: when the moon declines to the north, they begin to flow and ebb, not twice, as in other ports, but once only every day: and the flood happens at the setting, and the greatest ebb at the rising of the moon. This tide increases with the declination of the moon till the 7th or 8th day; then for the 7 or 8 days following it decreases at the same rate as it had increased before, and ceases when the moon changes its declination, crossing over the equator to the south. After which the flood is immediately changed into an ebb; and thenceforth the ebb happens at the setting and the flood at the rising of the moon; till the moon, again passing the equator, changes its declination. There are two inlets to this port and the neighboring channels, one from the seas of *China*, between the continent and the island of *Leuconia*; the other from the *Indian* sea, between the continent and the island of *Borneo*. But whether there be really two tides propagated through

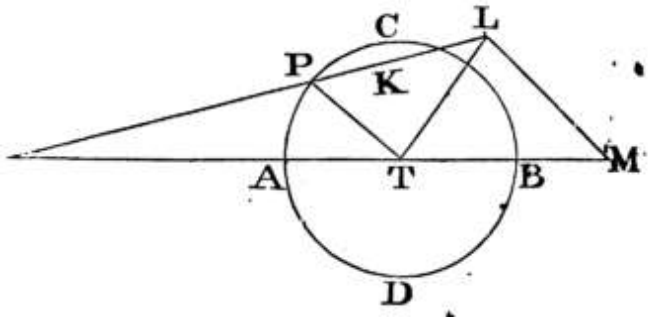
the said channels, one from the *Indian* sea in the space of 12 hours, and one from the sea of *China* in the space of 6 hours, which therefore happening at the 3d and 9th lunar hours, by being compounded together, produce those motions; or whether there be any other circumstances in the state of those seas. I leave to be determined by observations on the neighbouring shores.

Thus I have explained the causes of the motions of the moon and of the sea. Now it is fit to subjoin something concerning the quantity of those motions.

Propositions XXV-XXXIII (Quantity of lunar motions)

PROPOSITION XXV. PROBLEM VI.

To find the forces with which the sun disturbs the motions of the moon.

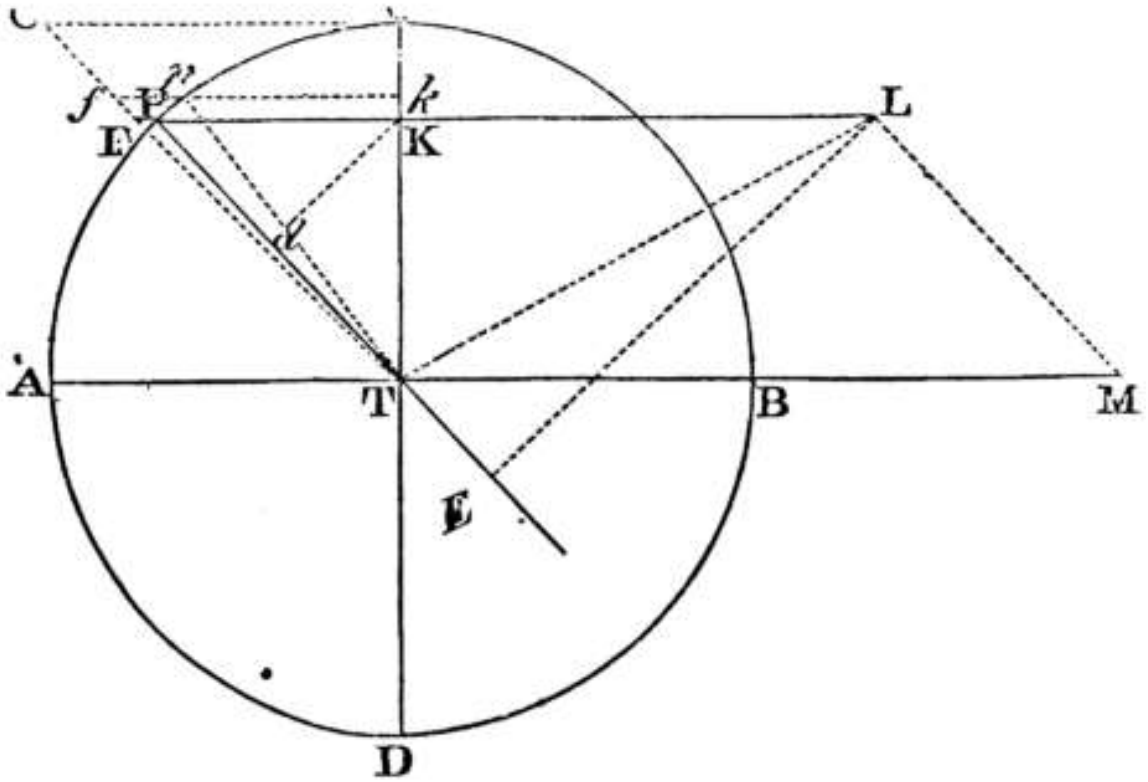


Let S represent the sun, T the earth, P the moon, CADB the moon's orbit. In SP take SK equal to ST; and let SL be to SK in the duplicate proportion of SK to SP: draw LM parallel to PT; and if ST or SK is supposed to represent the accelerated force of gravity of the earth towards the sun, SL will represent the accelerative force of gravity of the moon towards the sun. But that force is compounded of the parts SM and LM, of which the force LM, and that part of SM which is represented by TM, disturb the motion of the moon, as we have shewn in Prop. LXVI, Book I, and its Corollaries. Forasmuch as the earth and moon are revolved about their common centre of gravity, the motion of the earth about that centre will be also disturbed by the like forces; but we may consider the sums both of the forces and of the motions as in the moon, and represent the sum of the forces by the lines TM and ML, which are analogous to thorn both. The force ML (in its mean quantity) is to the centripetal force by which the moon may be retained in its orbit revolving about the earth at rest, at the distance PT, in the duplicate proportion of the periodic time of the moon about the earth to the periodic time of the earth about the sun (by Cor. 17, Prop. LXVI, Book I); that is, in the duplicate proportion of $27^{d}.7^{h}.43'$ to $365^{d}.6^{h}.9'$; or as 1000 to 178725; or as 1 to $178\frac{29}{40}$. But in the 4th Prop. of this Book we found, that, if both

earth and moon were revolved about their common centre of gravity, the mean distance of the one from the other would be nearly 60½ mean semi-diameters of the earth; and the force by which the moon may be kept revolving in its orbit about the earth in rest at the distance PT of 60½ semi-diameters of the earth, is to the force by which it may be revolved in the same time, at the distance of 60 semi-diameters, as 60½ to 60: and this force is to the force of gravity with us very nearly as 1 to 60 60. Therefore the mean force ML is to the force of gravity on the surface of our earth as 1 60½ to 60 60 60 $178^{29}/_{40}$, or as 1 to 638092,6; whence by the proportion of the lines TM, ML, the force TM is also given; and these are the forces with which the sun disturbs the motions of the moon. Q.E.I.

PROPOSITION XXVI. PROBLEM VII.

To find the horary increment of the area which the moon, by a radius drawn to the earth, describes in a circular orbit.



We have above shown that the area which the moon describes by a radius drawn to the earth is proportional to the time of description, excepting in so far as the moon's motion is disturbed by the action of the sun; and here we propose to investigate the inequality of the moment, or horary increment *of that area or motion so disturbed*. To render the calculus more easy, we shall suppose the orbit of the moon to be circular, and neglect all inequalities but that only which is now under consideration; and, because of the immense distance of the sun, we shall farther suppose that the lines SP and ST are parallel. By this means, the force LM will be always reduced to its mean quantity TP, as well as the force TM to its mean quantity 3PK. These forces (by Cor. 2 of the Laws of Motion) compose the force TL; and this force, by letting fall the perpendicular LE upon the radius TP, is resolved into the forces TE, EL; of which the force TE, acting constantly in the direction of the radius TP, neither accelerates nor retards the description of the area TPC made by that radius TP; but EL, *acting on the radius* TP in a perpendicular direction, accelerates or retards *the description of the area* in proportion as it accelerates or retards the moon. That acceleration of the moon, in its passage from the quadrature C to the conjunction A, is in every moment of time as the *generating* accelerative force EL, that is, as. Let the time be represented by the mean motion of the moon, or (which comes to the same thing) by the angle CTP, or even by the arc CP. At right angles upon CT erect CG equal to CT; and, supposing the quadrantal arc AC to be divided into an infinite number of equal parts P*p*, &c., these *parts* may represent the like *infinite* number of the equal parts of time. Let fall *pk* perpendicular on CT, and draw TG meeting with KP, *kp* produced in F and *f*; then will FK be equal to TK, and K*k* be to PK as P*p* to T*p*, that is, in a given proportion; and therefore FK K*k*, or the area FK*kf*, will be as, that is, as EL; and compounding, the whole area GCKF will be as the sum of all the forces EL impressed upon the moon in the whole time CP; and therefore also as the velocity generated by that sum, that is, as the acceleration of the description of the area CTP, or as the increment of the moment *thereof*. The force by which the moon may in its periodic time CADB of $27^{d}.7^{h}.43'$ be retained revolving about the earth in rest at the distance TP, would cause a body falling in the time CT to describe the length ½CT, and at the same time to acquire a velocity equal to that with which the moon is moved in its orbit.

This appears from Cor. 9, Prop, IV., Book I. But since K*d*, drawn perpendicular on TP, is *but* a third part of EL, and *equal* to the half of TP, or ML, in the octants, the force EL in the octants, where it is greatest, will exceed the force ML in the proportion of 3 to 2; and therefore will be to that force by which the moon in its periodic time may be retained revolving about the earth at rest as 100 to ⅔ 178721½, or 11915; and in the time CT will generate a velocity equal to $^{100}/_{11915}$ parts of the velocity of the moon; but in the time CPA will generate a greater velocity in the proportion of CA to CT or TP. Let the greatest force EL in the octants be represented by the area FK K*k*, or by the rectangle ½TP P*p*, which is equal thereto; and the velocity which that greatest force can generate in any time CP will be to the velocity which any other lesser force EL can generate in the same time as the rectangle ½TP CP to the area KCGF; but the velocities generated in the whole time CPA will be one to the other as the rectangle ½TP CA to the triangle TCG, or as the quadrantal arc CA to the radius TP; and therefore the latter velocity generated in the whole time will be $^{100}/_{11915}$ parts of the velocity of the moon. To this velocity of the moon, which is proportional to the mean moment of the area (supposing this mean moment to be represented by the number 11915), we add and subtract the half of the other velocity; the sum 11915 + 50, or 11965, will represent the greatest moment of the area in the syzygy A; and the difference 11915 - 50, or 11865, the least moment thereof in the quadratures. Therefore the areas which in equal times are described in the syzygies and quadratures are one to the other as 11965 to 11865. And if to the least moment 11865 we add a moment which shall be to 100, the difference of the two former moments, as the trapezium FKCG to the triangle TCG, or, which comes to the same thing, as the square of the sine PK to the square of the radius TP (that is, as P*d* to TP), the sum will represent the moment of the area when the moon is in any intermediate place P.

But these things take place only in the hypothesis that the sun and the earth are at rest, and that the synodical revolution of the moon is finished in $27^{d}.7^{h}.43'$. But since the moon's synodical period is really $29^{d}.12^{h}.41'$, the increments of the moments must be enlarged in the same proportion as the time is, that is, in the proportion of 1080853 to 1000000. Upon which account, the whole increment, which was $^{100}/_{11915}$ parts of the mean

moment, will now become $T^{100}/_{11023}$ parts thereof; and therefore the moment of the area in the quadrature of the moon will be to the moment thereof in the syzygy as 11023 - 50 to 11023 + 50; or as 10973 to 11073: and to the moment thereof, when the moon is in any intermediate place P, as 10973 to 10973 + P*d*; that is, supposing TP = 100.

The area, therefore, which the moon, by a radius drawn to the earth, describes in the several little equal parts of time, is nearly as the sum of the number 219,46, and the versed sine of the double distance of the moon from the nearest quadrature, considered in a circle which hath unity for its radius. Thus it is when the variation in the octants is in its mean quantity. But if the variation there is greater or less, that versed sine must be augmented or diminished in the same proportion.

PROPOSITION XXVII. PROBLEM VIII.

From the horary motion of the moon to find its distance from the earth.

The area which the moon, by a radius drawn to the earth, describes in every, moment of time, is as the horary motion of the moon and the square of the distance of the moon from the earth conjunctly. And therefore the distance of the moon from the earth is in a proportion compounded of the subduplicate proportion of the area directly, and the subduplicate proportion of the horary motion inversely. Q.E.I.

Cor. 1. Hence the apparent diameter of the moon is given; for it is reciprocally as the distance of the moon from the earth. Let astronomers try how accurately this rule agrees with the phaenomena.

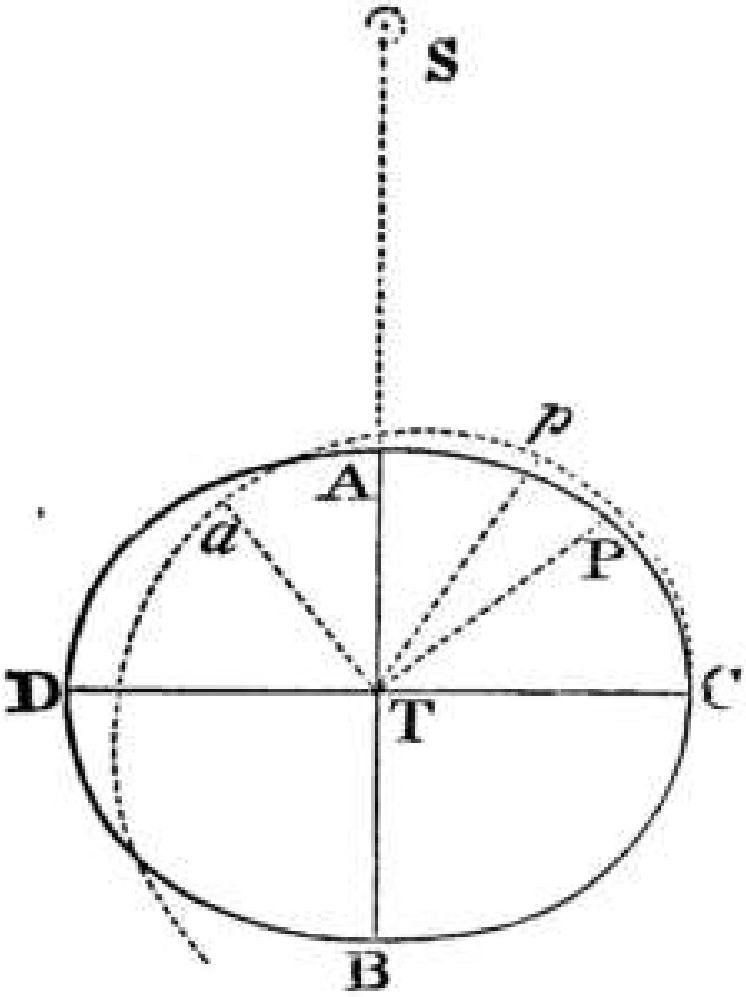
Cor. 2. Hence also the orbit of the moon may be more exactly defined from the phaenomena than hitherto could be done.

PROPOSITION XXVIII. PROBLEM IX.

To find the diameters of the orbit, in which, without eccentricity, the moon would move.

The curvature of the orbit which a body describes, if attracted in lines perpendicular to the orbit, is as the force of attraction directly, and the square of the velocity inversely. I estimate the curvatures of lines compared one with another according to the evanescent proportion of the sines or tangents of their angles of contact to equal radii, supposing those radii to be infinitely diminished. But the attraction of the moon towards the earth in the syzygies is the excess of its gravity towards the earth above the force of the sun 2PK (see Fig. Prop. XXV), by which force the accelerative gravity of the moon towards the sun exceeds the accelerative gravity of the earth towards the sun, or is exceeded by it. But in the quadratures that attraction is the sum of the gravity of the moon towards the earth, and the sun's force KT, by which the moon is attracted towards the earth. And these attractions, putting N for, are nearly as and, or as $178725N\ CT^2 - 2000AT^2\ CT$, and $178725N\ AT^2 + 1000CT^2\ AT$. For if the accelerative gravity of the moon towards the earth be represented by the number 178725, the mean force ML, which in the quadratures is PT or TK, and draws the moon towards the earth, will be 1000, and the mean force TM in the syzygies will be 3000; from which, if we subtract the mean force ML, there will remain 2000, the force by which the moon in the syzygies is drawn from the earth, and which we above called 2PK. But the velocity of the moon in the syzygies A and B is to its velocity in the quadratures C and D as CT to AT, and the moment of the area, which the moon by a radius drawn to the earth describes in the syzygies, to the moment of that area *described* in the quadratures conjunctly; that is, as 11073CT to 10973AT. Take this ratio twice inversely, and the former ratio once directly, and the curvature of the orb of the moon in the syzygies will be to the curvature thereof in the quadratures as $120406729\ 178725AT^2\ CT^2\ N - 120406729\ 2000AT^4\ CT$ to $122611329\ 178725AT^2\ CT^2\ N + 122611329\ 1000CT^4\ AT$, that is, as $2151969AT\ CT\ N - 24081AT^3$ to $2191371AT\ CT\ N + 12261CT^3$.

Because the figure of the moon's orbit is unknown, let us, in its stead, assume the ellipsis DBCA, in the centre of which we suppose the earth to be situated, and the greater axis DC to lie between the quadratures as the lesser AB between the syzygies. But since the plane of this ellipsis is revolved about the earth by an angular motion, and the orbit, whose curvature we now examine, should be described in a plane void of such



motion we are to consider the figure which the moon, while it is revolved in that ellipsis, describes in this plane, that is to say, the figure C*pa*, the several points *p* of which are found by assuming any point P in the ellipsis, which may represent the place of the moon, and drawing T*p* equal to TP in such manner that the angle PT*p* may be equal to the apparent motion of the sun from the time of the last quadrature in C; or (which comes to the same thing) that the angle CT*p* may be to the angle CTP as the time of the synodic revolution of the moon to the time of the periodic revolution thereof, or as $29^{d}.12^{h}.44'$ to $27^{d}.7^{h}.43'$. If, therefore, in this proportion we take the angle CT*a* to the right angle CTA, and make T*a* of equal length with TA, we shall have *a* the lower and C the upper apsis of this orbit C*pa*. But, by computation, I find that the difference betwixt the curvature of this orbit C*pa* at the vertex *a*, and the curvature of a circle described about the centre T with the interval

TA, is to the difference between the curvature of the ellipsis at the vertex A, and the curvature of the same circle, in the duplicate proportion of the angle CTP to the angle CT*p*; and that the curvature of the ellipsis in A is to the curvature of that circle in the duplicate proportion of TA to TC; and the curvature of that circle to the curvature of a circle described about the centre T with the interval TC as TC to TA; but that the curvature of this *last arch* is to the curvature of the ellipsis in C in the duplicate proportion of TA to TC; and that the difference betwixt the curvature of the ellipsis in the vertex C, and the curvature of this last circle, is to the difference betwixt the curvature of the figure C*pa*, at the vertex C, and the curvature of this same *last* circle, in the duplicate proportion of the angle CT*p* to the angle CTP; all which proportions are easily drawn from the sines of the angles of contact, and of the differences of those angles. But, by comparing those proportions together, we find the curvature of the figure C*pa* at *a* to be to its curvature at C as AT^3 - $^{16824}/_{100000}CT^2$ AT to CT^3 + $^{16824}/_{100000}AT^2$ CT; where the number $^{16824}/_{100000}$ represents the difference of the squares of the angles CTP and CT*p*, applied to the square of the lesser angle CTP; or (which is all one) the difference of the squares of the times $27^d.7^h.43'$, and $29^d.12^j.44'$, applied to the square of the time $27^d.7^h.43'$, and $27^d.7^h.43'$

Since, therefore, *a* represents the syzygy of the moon, and C its quadrature, the proportion now found must be the same with that proportion of the curvature of the moon's orb in the syzygies to the curvature thereof in the quadratures, which we found above. Therefore, in order to find the proportion of CT to AT, let us multiply the extremes and the means, and the terms which come out, applied to AT CT, become $2062{,}79CT^4$ - 2151969N CT^3 + 368676N AT CT^2 + $36342AT^2$ CT^2 - 362047N AT^2 CT + 2191371N AT^3 + $4051{,}4AT^4$ = 0. Now if for the half sum N of the terms AT and CT we put 1, and *x* for their half difference, then CT will be = 1 + *x*, and AT = 1 - *x*. And substituting those values in the equation, after resolving thereof, we shall find *x* = 0,00719; and from thence the semi-diameter CT = 1,00719, and the semi-diameter AT = 0,99281, which numbers are nearly as $70^1/_{24}$, and $69^1/_{24}$. Therefore the moon's distance from the earth in the syzygies is

to its distance in the quadratures (setting aside the consideration of eccentricity) as $69\frac{1}{24}$ to $70\frac{1}{24}$; or, in round numbers, as 69 to 70.

PROPOSITION XXIX. PROBLEM X.

To find the variation of the moon.

This inequality is owing partly to the elliptic figure of the moon's orbit, partly to the inequality of the moments of the area which the moon by a radius drawn to the earth describes. If the moon P revolved in the ellipsis DBCA about the earth quiescent in the centre of the ellipsis, and by the radius TP, drawn to the earth, described the area CTP, proportional to the time *of description*; and the greatest semi-diameter CT of the ellipsis was to the least TA as 70 to 69; the tangent of the angle CTP would be to the tangent of the angle of the mean motion, computed from the quadrature C, as the semi-diameter TA of the ellipsis to its semi-diameter TC, or as 69 to 70. But the description of the area CTP, as the moon advances from the quadrature to the syzygy, ought to be in such manner accelerated, that the moment of the area in the moon's syzygy may be to the moment thereof in its quadrature as 11073 to 10973; and that the excess of the moment in any intermediate place P above the moment in the quadrature may be as the square of the sine of the angle CTP; which we may effect with accuracy enough, if we diminish the tangent of the angle CTP in the subduplicate proportion of the number 10973 to the number 11073, that is, in proportion of the number 68,6877 to the number 69. Upon which account the tangent of the angle CTP will now be to the tangent of the mean motion as 68,6877 to 70; and the angle CTP in the octants, where the mean motion is 45°, will be found 44°27'28", which subtracted from 45°, the angle of the mean motion, leaves the greatest variation 32'32". Thus it would be, if the moon, in passing from the quadrature to the syzygy, described an angle CTA of 90 degrees only. But because of the motion of the earth, by which the sun is apparently transferred *in consequentia*, the moon, before it overtakes the sun, describes an angle CT, greater than a right angle, in the proportion of the time of the synodic revolution of the moon to the time of its periodic

revolution, that is, in the proportion of $29^{d}.12^{h}.44'$ to $27^{d}.7^{h}.43'$. Whence it comes to pass that all the angles about the centre T are dilated in the same proportion; and the greatest variation, which otherwise would be *but* 32' 32", now augmented in the said proportion, becomes 35' 10".

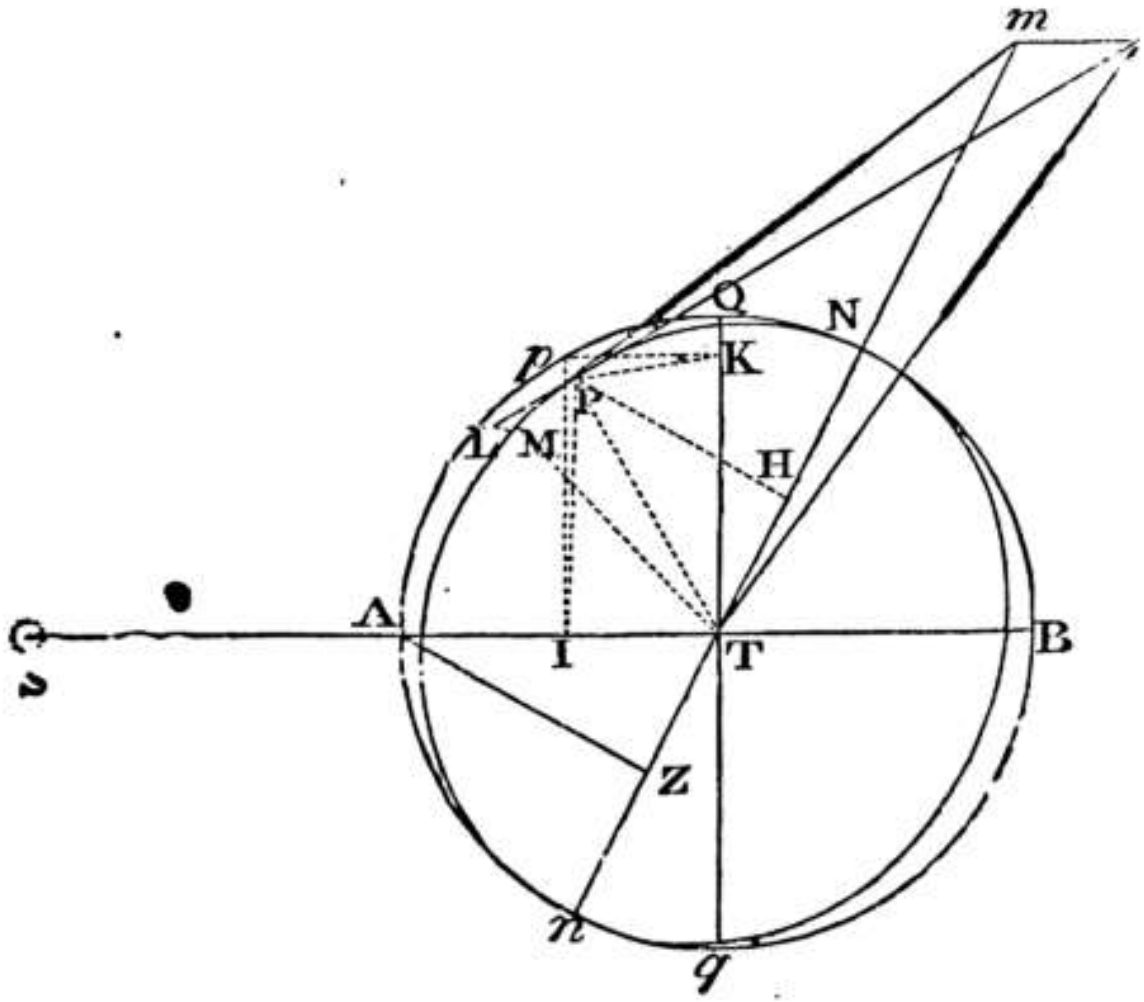
And this is its magnitude in the mean distance of the sun from the earth, neglecting the differences which may arise from the curvature of the *orbis magnus*, and the stronger action of the sun upon the moon when horned and new, than when gibbous and full. In other distances of the sun from the earth, the greatest variation is in a proportion compounded of the duplicate proportion of the time of the synodic revolution of the moon (the time of the year being given) directly, and the triplicate proportion of the distance of the sun from the earth inversely. And, therefore, in the apogee of the sun, the greatest variation is 33'14", and in its perigee 37'11", if the eccentricity of the sun is to the transverse semi-diameter of the *orbis magnus* as $16^{15}/_{16}$ to 1000.

Hitherto we have investigated the variation in an orb not eccentric, in which, to wit, the moon in its octants is always in its mean distance from the earth. If the moon, on account of its eccentricity, is more or less removed from the earth than if placed in this orb, the variation may be something greater, or something less, than according to this rule. But I leave the excess or defect to the determination of astronomers from the phenomena.

PROPOSITION XXX. PROBLEM XI.

To find the horary motion of the nodes of the moon, in a circular orbit.

Let S represent the sun, T the earth, P the moon, NP*n* the orbit of the moon, N*pn* the orthographic projection of the orbit upon the plane of the ecliptic: N, *n* the nodes, *n*TN*m* the line of the nodes produced indefinitely;



PI, PK perpendiculars upon the lines ST, Q*q*; P*p* a perpendicular upon the plane of the ecliptic; A, B the moon's syzygies in the plane of the ecliptic; AZ a perpendicular let fall upon N*n*, the line of the nodes; Q, *g* the quadratures of the moon in the plane of the ecliptic, and *p*K a perpendicular on the line Q*q* lying between the quadratures. The force of the sun to disturb the motion of the moon (by Prop. XXV) is twofold, one proportional to the line LM, the other to the line MT, in the scheme of that Proposition; and the moon by the former force is drawn towards the earth, by the latter towards the sun, in a direction parallel to the right line ST joining the earth and the sun. The former force LM acts in the direction of the plane of the moon's orbit, and therefore makes no change upon the situation thereof, and is upon that account to be neglected; the latter force MT, by which the plane of the moon's orbit is disturbed, is the same with the force 3PK or 3IT. And this force (by Prop. XXV) is to the force by which the moon may, in its periodic

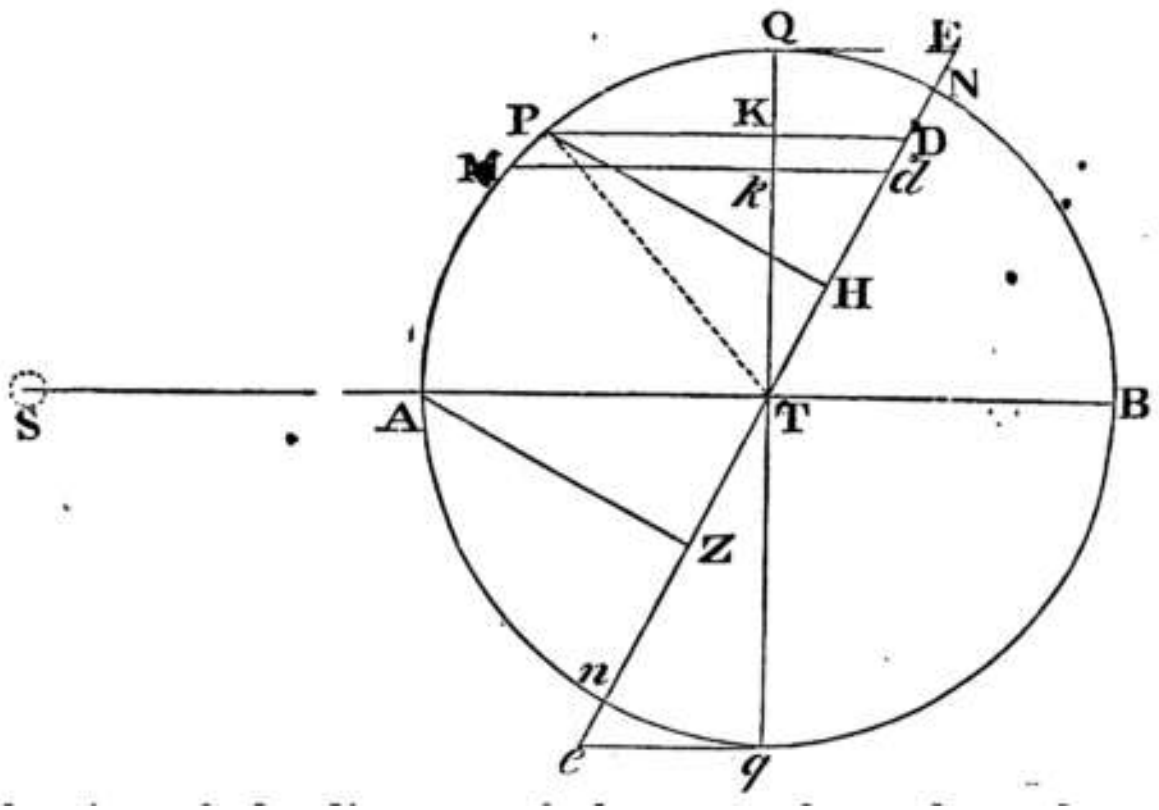
time, be uniformly revolved in a circle about the earth at rest, as 3IT to the radius of the circle multiplied by the number 178,725, or as IT to the radius there of multiplied by 59,575. But in this calculus, and all that follows, I consider all the lines drawn from the moon to the sun as parallel to the line which joins the earth and the sun; because what inclination there is almost as much diminishes all effects in some cases as it augments them in others; and we are now inquiring after the mean motions of the nodes, neglecting such niceties as are of no moment, and would only serve to render the calculus more perplexed.

Now suppose PM to represent an arc which the moon describes in the least moment of time, and ML a little line, the half of which the moon, by the impulse of the said force 3IT, would describe in the same time; and joining PL, MP, let them be produced to *m* and *l*, where they cut the plane of the ecliptic, and upon T*m* let fall the perpendicular PH. Now, since the right line ML is parallel to the plane of the ecliptic, and therefore can never meet with the right line *ml* which lies in that plane, and yet both those right lines lie in one common plane LMP*ml*, they will be parallel, and upon that account the triangles LMP, *lm*P will be similar. And seeing MP*m* lies in the plane of the orbit, in which the moon did move while in the place P, the point *m* will fall upon the line N*n*, which passes through the nodes N, *n*, of that orbit. And because the force by which the half of the little line LM is generated, if the whole had been together, and at once impressed in the point P, would have generated that whole line, and caused the moon to move in the arc whose chord is LP; that is to say, would have transferred the moon from the plane MP*m*T into the plane LP*l*T; therefore the angular motion of the nodes generated by that force will be equal to the angle *m*T*l*. But *ml* is to *m*P as ML to MP; and since MP, because of the time given, is also given, *ml* will be as the rectangle ML *m*P, that is, as the rectangle IT *m*P. And if T*ml* is a right angle, the angle *m*T*l* will be as and therefore as, that is (because T*m* and *m*P, TP and PH are proportional), as; and, therefore, because TP is given, as IT PH. But if the angle T*ml* or STN is oblique, the angle *m*T*l* will be yet less, in proportion of the sine of the angle STN to the radius, or AZ to AT. And therefore the velocity of the nodes is as IT PH AZ, or as the solid content of the sines of the three angles TPI, PTN, and STN.

If these are right angles, as happens when the nodes are in the quadratures, and the moon in the syzygy, the little line *ml* will be removed

to an infinite distance, and the angle *m*T*l* will become equal to the angle *m*P*l*. But in this case the angle *m*P*l* is to the angle PTM, which the moon in the same time by its apparent motion describes about the earth, as 1 to 59,575. For the angle *m*P*l* is equal to the angle LPM, that is, to the angle of the moon's deflexion from a rectilinear path; which angle, if the gravity of the moon should have then ceased, the said force of the sun 3IT would by itself have generated in that given time; and the angle PTM is equal to the angle of the moon's deflexion from a rectilinear path; which angle, if the force of the sun 3IT should have then ceased, the force alone by which the moon is retained in its orbit would have generated in the same time. And these forces (as we have above shewn) are the one to the other as 1 to 59,575. Since, therefore, the mean horary motion of the moon (in respect of the fixed stars) is 32' 56" 27"' $12\frac{1}{2}^{iv}$, the horary motion of the node in this case will be 33" 10"' $33^{iv}.12^{v}$. But in other cases the horary motion will be to 33" 10"' $33^{iv}.12^{v}$, as the solid content of the sines of the three angles TPI, PTN, and STN (or of the distances of the moon from the quadrature, of the moon from the node, and of the node from the sun) to the cube of the radius. And as often as the sine of any angle is changed from positive to negative, and from negative to positive, so often must the regressive be changed into a progressive, and the progressive into a regressive motion. Whence it comes to pass that the nodes are progressive as often as the moon happens to be placed between either quadrature, and the node nearest to that quadrature. In other cases they are regressive, and by the excess of the regress above the progress, they are monthly transferred *in antecedentia*.

Cor. 1. Hence if from P and M, the extreme points of a least arc PM, on the line Q*q* joining the quadratures we let fall the perpendiculars PK, M*k*, and produce the same till they cut the line of the nodes N*n* in D and *d*, the horary motion of the nodes will be as the area MPD*d*, and the square of the line AZ conjunctly. For let PK, PH, and AZ, be the three said sines, viz., PK the sine of the distance of the moon from the quadrature,



PH the sine of the distance of the moon from the node, and AZ the sine of the distance of the node from the sun; and the velocity of the node will be as the solid content of PK PH AZ. But PT is to PK as PM to K*k*; and, therefore, because PT and PM are given, K*k* will be as PK. Likewise AT is to PD as AZ to PH, and therefore PH is as the rectangle PD AZ; and, by compounding those proportions, PK PH is as the solid content K*k* PD AZ, and PK PH AZ as K*k* PD AZ^2; that is, as the area PD*d*M and AZ^2 conjunctly. Q.E.D.

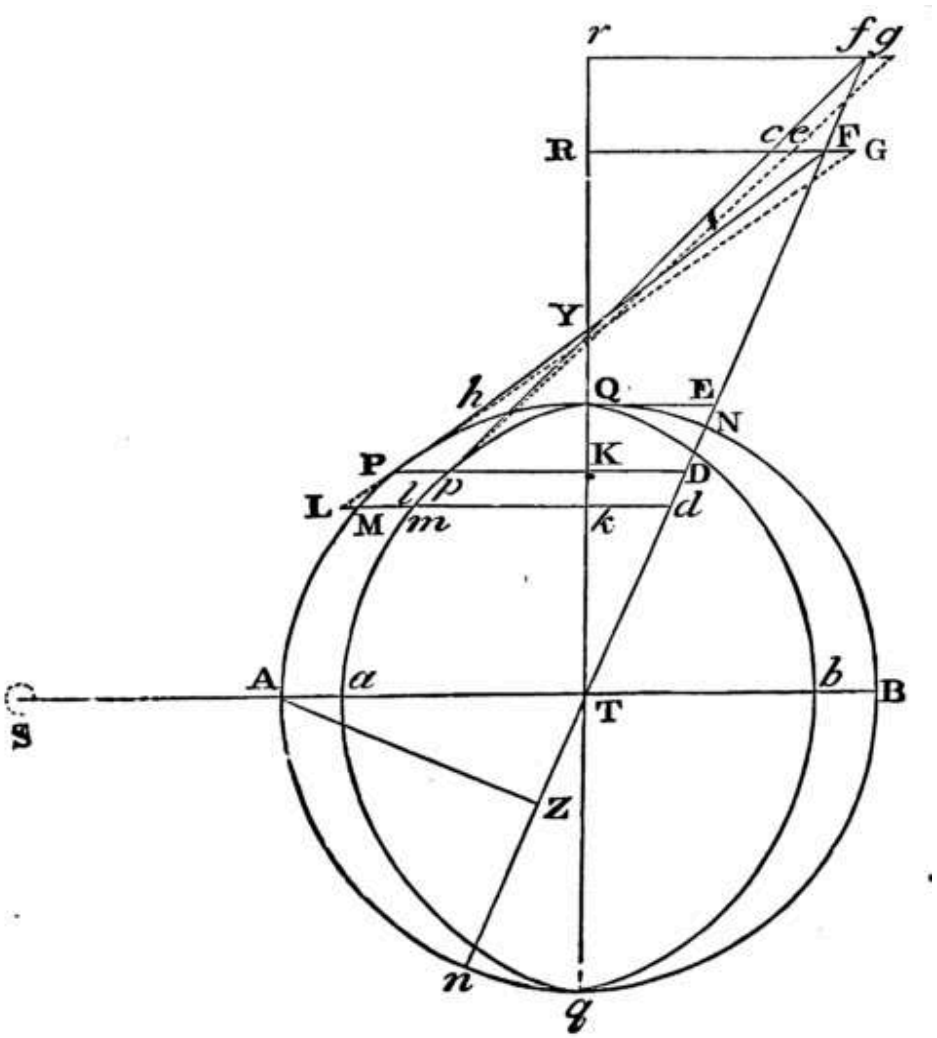
Cor. 2. In any given position of the nodes their mean horary motion is half their horary motion in the moon's syzygies; and therefore is to 16" 35"' $16^{iv}.36^{v}$. as the square of the sine of the distance of the nodes from the syzygies to the square of the radius, or as AZ^2 to AT^2. For if the moon, by an uniform motion, describes the semi-circle QA*q*, the sum of all the areas PD*d*M, during the time of the moon's passage from Q to M, will make up the area QM*d*E, terminating at the tangent QE of the circle; and by the time that the moon has arrived at the point *n*, that sum will make up the whole area EQA*n* described by the line PD: but when the moon proceeds from *n* to *q*, the line PD will fall without the circle, and describe the area *nqe*,

terminating at the tangent *qe* of the circle, which area, because the nodes were before regressive, but are now progressive, must be subducted from the former area, and, being itself equal to the area QEN, will leave the semi-circle NQA*n*. While, therefore, the moon describes a semi-circle, the sum of all the areas PD*d*M will be the area of that semi-circle; and while the moon describes a complete circle, the sum of those areas will be the area of the whole circle. But the area PD*d*M, when the moon is in the syzygies, is the rectangle of the arc PM into the radius PT; and the sum of all the areas, *every one* equal to this area, in the time that the moon describes a complete circle, is the rectangle of the whole circumference into the radius of the circle; and this rectangle, being double the area of the circle, will be double the quantity of the former sum. If, therefore, the nodes went on with that velocity uniformly continued which they acquire in the moon's syzygies, they would describe a space double of that which they describe in fact; and, therefore, the mean motion, by which, if uniformly continued, they would describe the same space with that which they do in fact describe by an unequal motion, is *but* one-half of that motion which they are possessed of in the moon's syzygies. Wherefore since their greatest horary motion, if the nodes are in the quadratures, is 33" 10'" $33^{iv}.^{v}$, their mean horary motion in this case will be 16" 35'" $16^{iv}.36^{v}$. And seeing the horary motion of the nodes is every where as AZ^2 and the area PD*d*M conjunctly, and, therefore, in the moon's syzygies, the horary motion of the nodes is as AZ^2 and the area PD*d*M conjunctly, that is (because the area PD*d*M described in the syzygies is given), as AZ^2, therefore the mean motion also will be as AZ^2; and, therefore, when the nodes are without the quadratures, this motion will be to 16" 35'" $16^{iv.}36^{v}$. as AZ^2 to AT^2. Q.E.D.

PROPOSITION XXXI. PROBLEM XII.

To find the horary motion of the nodes of the moon, in an, elliptic orbit.

Let Q*pmaq* represent an ellipsis described with the greater axis Q*q*, am the lesser axis *ab*; QA*q*B a circle circumscribed; T the earth in the common centre of both; S the sun; *p* the moon moving in this ellipsis; and



pm an arc which it describes in the least moment of time; N and *n* the nodes joined by the line N*n*; *p*K and *m*k perpendiculars upon the axis Q*q*, produced both ways till they meet the circle in P and M, and the line of the nodes in D and *d*. And if the moon, by a radius drawn to the earth, describes an area proportional to the time *of description*, the horary motion of the node in the ellipsis will be as the area *p*D*dm* and AZ² conjunctly.

For let PF touch the circle in P, and produced meet TN in F; and *pf* touch the ellipsis in *p*, and produced meet the same TN in *f*, and both tangents concur in the axis TQ at Y. And let ML represent the space which the moon, by the impulse of the abovementioned force 3IT or 3PK, would describe with a transverse motion, in the meantime while revolving in the circle it describes the arc PM; and *ml* denote the space which the moon revolving in the ellipsis would describe in the same time by the impulse of the same force 3IT or 3PK; and let LP and *lp* be produced till they meet the plane of

the ecliptic in G and *g*, and FG and *fg* be joined, of which FG produced may cut *pf, pg,* and TQ, in *c, e,* and R respectively; and *fg* produced may cut TQ in *r*. Because the force 3IT or 3PK in the circle is to the force 3IT or 3*p*K in the ellipsis as PK to *p*K, or as AT to *a*T, the space ML generated by the former force will be to the space *ml* generated by the latter as PK to *p*K; that is, because of the similar figures PYK*p* and FYR*c*, as FR to *c*R. But (because of the similar triangles PLM, PGF) ML is to FG as PL to PG, that is (on account of the parallels L*k*, PK, GR), as *pl* to *pe*, that is (because of the similar triangles *plm*, *cpe*) as *lm* to *ce*; and inversely as LM is to *lm*, or as FR is to *c*R, so is FG to *ce*. And therefore if *fg* was to *ce* as *fy* to *c*Y, that is, as *fr* to *c*R (that is, as *fr* to FR and FR to *c*R conjunctly, that is, as *f*T to FT, and FG to *ce* conjunctly), because the ratio of FG to *ce*, expunged on both sides, leaves the ratios *fg* to FG and *f*T to FT, *fg* would be to FG as *f*T to FT; and, therefore, the angles which FG and *fg* would subtend at the earth T would be equal to each other. But these angles (by what we have shewn in the preceding Proposition) are the motions of the nodes, while the moon describes in the circle the arc PM, in the ellipsis the arc *pm*; and therefore the motions of the nodes in the circle and in the ellipsis would be equal to each other. Thus, I say, it would be, if *fg* was to *ce* as *f*Y to *c*Y, that is, *fg* was equal to. But because of the similar triangles *fgp, cep, fg* is to *ce* as *fp* to *cp*; and therefore *fg* is equal to; and therefore the angle which *fg* subtends in fact is to the former angle which FG subtends, that is to say, the motion of the nodes in the ellipsis is to the motion of the same in the circle as this *fg* or to the fromer *fg* or, that is, as *fp c*Y to *f*Y *cp*, or as *fp* to *f*Y, and *c*Y to *cp*; that is, if *ph* parallel to TN meet FP in *h*, as F*h* to FY and FY to FP; that is, as F*h* to FP or D*p* to DP, and therefore as the area D*pmd* to the area DPM*d*. And, therefore, seeing (by Corol. 1, Prop. XXX) the latter area and AZ^2 conjunctly are proportional to the horary motion of the nodes in the circle, the former area and AZ^2 conjunctly will be proportional to the horary motion of the nodes in the ellipsis. Q.E.D.

Cor. Since, therefore, in any given position of the nodes, the sum of all the areas *p*D*dm*, in the time while the moon is carried from the quadrature to any place *m*, is the area *mp*QE*d* terminated at the tangent of the ellipsis QE; and the sum of all those areas, in one entire revolution, is the area of the whole ellipsis; the mean motion of the nodes in the ellipsis will be to the mean motion of the nodes in the circle as the ellipsis to the circle; that is, as

T*a* to TA, or 69 to 70. And, therefore, since (by Corol 2, Prop. XXX) the mean horary motion of the nodes in the circle is to 16” 35’” $16^{iv}.36^{v}$. as AZ^2 to AT^2, if we take the angle 16” 21’” $3^{iv}.30^{v}$. to the angle 16” 35’” $16^{iv}.36^{v}$. as 69 to 70, the mean horary motion of the nodes in the ellipsis will be to 16” 21’” $3^{iv}.30^{v}$. as AZ^2 to AT^2; that is, as the square of the sine of the distance of the node from the sun to the square of the radius.

But the moon, by a radius drawn to the earth, describes the area in the syzygies with a greater velocity than it does that in the quadratures, and upon that account the time is contracted in the syzygies, and prolonged in the quadratures; and together with the time the motion of the nodes is likewise augmented or diminished. But the moment of the area in the quadrature of the moon was to the moment thereof in the syzygies as 10973 to 11073; and therefore the mean moment in the octants is to the excess in the syzygies, and to the defect in the quadratures, as 11023, the half sum of those numbers, to their half difference 50. Wherefore since the time of the moon in the several little equal parts of its orbit is reciprocally as its velocity, the mean time in the octants will be to the excess of the time in the quadratures, and to the defect *of the time* in the syzygies arising from this cause, nearly as 11023 to 50. But, reckoning from the quadratures to the syzygies, I find that the excess of the moments of the area, in the several places above the least moment in the quadratures, is nearly as the square of the sine of the moon’s distance from the quadratures; and therefore the difference betwixt the moment in any place, and the mean moment in the octants, is as the difference betwixt the square of the sine of the moon’s distance from the quadratures, and the square of the sine of 45 degrees, or half the square of the radius; and the increment of the time in the several places between the octants and quadratures, and the decrement thereof between the octants and syzygies, is in the same proportion. But the motion of the nodes, while the moon describes the several little equal parts of its orbit, is accelerated or retarded in the duplicate proportion of the time; for that motion, while the moon describes PM, is (*caeteris paribus*] as ML, and ML is in the duplicate proportion of the time. Wherefore the motion of the nodes in the syzygies, in the time while the moon describes given little parts of its orbit, is diminished in the duplicate proportion of the number 11073 to the number 11023; and the decrement is to the remaining motion as 100 to

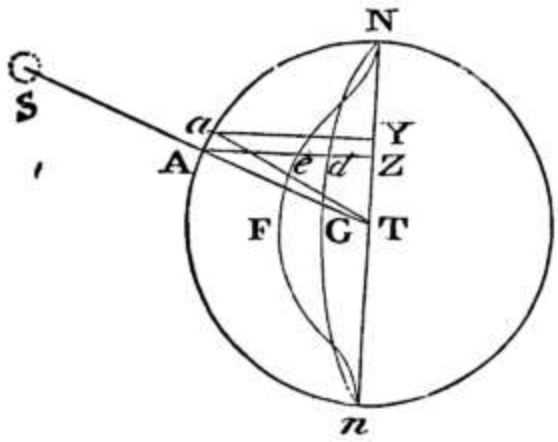
10973; but to the whole motion as 100 to 11073 nearly. But the decrement in the places between the octants and syzygies, and the increment in the places between the octants and quadratures, is to this decrement nearly as the whole motion in these places to the whole motion in the syzygies, and the difference betwixt the square of the sine of the moon's distance from the quadrature, and the half square of the radius, to the half square of the radius conjunctly. Wherefore, if the nodes are in the quadratures, and we take two places, one on one side, one on the other, equally distant from the octant and other two distant by the same interval, one from the syzygy, the other from the quadrature, and from the decrements of the motions in the two places between the syzygy and octant we subtract the increments of the motions in the two other places between the octant and the quadrature, the remaining decrement will be equal to the decrement in the syzygy, as will easily appear by computation; and therefore the mean decrement, which ought to be subducted from the mean motion of the nodes, is the fourth part of the decrement in the syzygy. The whole horary motion of the nodes in the syzygies (when the moon by a radius drawn to the earth was supposed to describe an area proportional to the time) was 32" 42"' 7^{iv}. And we have shewn that the decrement of the motion of the nodes, in the time while the moon, now moving with greater velocity, describes the same space, was to this motion as 100 to 11073; and therefore this decrement is 17"' $43^{iv}.11^{v}$. The fourth part of which 4"' $25^{iv}.48^{v}$. subtracted from the mean horary motion above found, 16" 21'" $3^{iv}.30^{v}$. leaves 16" 16"' $37^{iv}.42^{v}$. their correct mean horary motion.

If the nodes are without the quadratures, and two places are considered, one on one side, one on the other, equally distant from the syzygies, the sum of the motions of the nodes, when the moon is in those places, will be to the sum of their motions, when the moon is in the same places and the nodes in the quadratures, as AZ^2 to AT^2. And the decrements of the motions arising from the causes but now explained will be mutually as the motions themselves, and therefore the remaining motions will be mutually betwixt themselves as AZ^2 to AT^2; and the mean motions will be as the remaining motions. And, therefore, in any given position of the nodes, their correct mean horary motion is to 16" 16'" $37^{iv}.42^{v}$. as AZ^2 to AT^2; that is, as the

square of the sine of the distance of the nodes from the syzygies to the square of the radius.

PROPOSITION XXXII. PROBLEM XIII.

To find the mean motion of the nodes of the moon.



The yearly mean motion is the sum of all the mean horary motions throughout the course of the year. Suppose that the node is in N, and that, after every hour is elapsed, it is drawn back again to its former place; so that, notwithstanding its proper motion, it may constantly remain in the same situation with respect to the fixed stars; while in the mean time the sun S, by the motion of the earth, is seen to leave the node, and to proceed till it completes its apparent annual course by an uniform motion. Let A*a* represent a given least arc, which the right line TS always drawn to the sun, by its intersection with the circle NA*n*, describes in the least given moment of time; and the mean horary motion (from what we have above shewn) will be as AZ^2, that is (because AZ and ZY are proportional), as the rectangle of AZ into ZY, that is, as the area AZY*a*; and the sum of all the mean horary motions from the beginning will be as the sum of all the areas *a*YZA, that is, as the area NAZ. But the greatest AZY*a* is equal to the rectangle of the arc A*a* into the radius of the circle; and therefore the sum of all these rectangles in the whole circle will be to the like sum of all the greatest rectangles as the area of the whole circle to the rectangle of the whole circumference into the radius, that is, as 1 to 2. But the horary motion corresponding to that greatest rectangle was 16” 16’” $37^{iv}.42^{v}$. and this

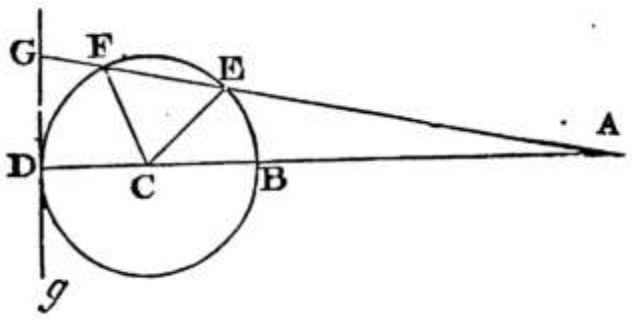
motion in the complete course of the sidereal year, $365^{d}.6^{h}.9'$, amounts to 39° 38’ 7” 50’”, and therefore the half thereof, 19° 49’ 3” 55”’, is the mean motion of the nodes corresponding to the whole circle. And the motion of the nodes, in the time while the sun is carried from N to A, is to 19° 49’ 3” 55’” as the area NAZ to the whole circle.

Thus it would be if the node was after every hour drawn back again to its former place, that so, after a complete revolution, the sun at the year’s end would be found again in the same node which it had left when the year begun. But, because of the motion of the node in the mean time, the sun must needs meet the node sooner; and now it remains that we compute the abbreviation of the time. Since, then, the sun, in the course of the year, travels 360 degrees, and the node in the same time by its greatest motion would be carried 39° 38’ 7” 50’”, or 39,6355 degrees; and the mean motion of the node in any place N is to its mean motion in its quadrature as AZ^2 to AT^2; the motion of the sun will be to the motion of the node in N as $360AT^2$ to $39{,}6355\ AZ^2$; that is, as $9{,}0827646AT^2$ to AZ^2. Wherefore if we suppose the circumference NA*n* of the whole circle to be divided into little equal parts, such as A*a*, the time in which the sun would describe the little arc A*a*, if the circle was quiescent, will be to the time of which it would describe the same arc, supposing the circle together with the nodes to be revolved about the centre T, reciprocally as $9{,}0827646AT^2$ to $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$; for the time is reciprocally as the velocity with which the little arc is described, and this velocity is the sum of the velocities of both sun and node. If, therefore, the sector NTA represent the time in which the sun by itself, without the motion of the node, would describe the arc NA, and the indefinitely small part AT*a* of the sector represent the little moment of the time in which it would describe the least arc A*a*; and (letting fall *a*Y perpendicular upon N*n*) if in AZ we take *d*Z of such length that the rectangle of *d*Z into ZY may be to the least part AT*a* of the sector as AZ^2 to $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, that is to say, that *d*Z may be to ½AZ as AT^2 to $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$; the rectangle of *d*Z into ZY will represent the decrement of the time arising from the motion of the node, while the arc A*a* is described; and if the curve N*d*G*n* is the locus where the point *d* is always found, the curvilinear area N*d*Z will be as the whole decrement of *time* while the whole arc NA is described; and, therefore, the excess of the sector NAT above the area N*d*Z will be as the

whole time. But because the motion of the node in a less time is less in proportion of the time, the area A*a*YZ must also be diminished in the same proportion; which may be done by taking in AZ the line *e*Z of such length, that it may be to the length of AZ as AZ^2 to $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$; for so the rectangle of *e*Z into ZY will be to the area AZY*a* as the decrement of the time in which the arc A*a* is described to the whole time in which it would have been described, if the node had been quiescent; and, therefore, that rectangle will be as the decrement of the motion of the node. And if the curve N*e*F*n* is the locus of the point *e*, the whole area N*e*Z, which is the sum of all the decrements *of that motion*, will be as the whole decrement *thereof* during the time in which the arc AN is described; and the remaining area NA*e* will be as the remaining motion, which is the true motion of the node, during the time in which the whole arc NA is described by the joint motions of both sun and node. Now the area of the semi-circle is to the area of the figure N*e*F*n* found by the method of infinite series nearly as 793 to 60. But the motion corresponding *or proportional* to the whole circle was 19° 49’ 3” 55’”; and therefore the motion corresponding to double the figure N*e*F*n* is 1° 29’ 58” 2’”, which taken from the former motion leaves 18° 19’ 5” 53’”, the whole motion of the node with respect to the fixed stars in the interval between two of its conjunctions with the sun; and this motion subducted from the annual motion of the sun 360°, leaves 341° 40’ 54” 7’”, the motion of the sun in the interval between the same conjunctions. But as this motion is to the annual motion 360°, so is the motion of the node but just now found 18° 19’ 5” 53’” to its annual motion, which will therefore be 19° 18’ 1” 23’”; and this is the mean motion of the nodes in the sidereal year. By astronomical tables, it is 19° 21’ 21” 50’” . The difference is less than $\frac{1}{300}$ part of the whole motion, and seems to arise from the eccentricity of the moon’s orbit, and its inclination to the plane of the ecliptic. By the eccentricity of this orbit the motion of the nodes is too much accelerated; and, on the other hand, by the inclination of the orbit, the motion of the nodes is something retarded, and reduced to its just velocity.

PROPOSITION XXXIII. PROBLEM XIV.

To find the true motion of the nodes of the moon.



In the time which is as the area NTA - N*d*Z (in the preceding Fig.) that motion is as the area NA*e*, and is thence given; but because the calculus is too difficult, it will be better to use the following construction of the Problem. About the centre C, with any interval CD, describe the circle BEFD; produce DC to A so as AB may be to AC as the mean motion to half the mean true motion when the nodes are in their quadratures (that is, as 19° 18’ 1” 23’” to 19° 49’ 3” 55’”; and therefore BC to AC as the difference of those motions 0° 31’ 2” 32’” to the latter motion 19° 49’ 3” 55’”, that is, as 1 to $38\frac{3}{10}$). Then through the point D draw the indefinite line Gg, touching the circle in D; and if we take the angle BCE, or BCF, equal to the double distance of the sun from the place of the node, as found by the mean motion, and drawing AE or AF cutting the perpendicular DG in G, we take another angle which shall be to the whole motion of the node in the interval between its syzygies (that is, to 9° 11’ 3”) as the tangent DG to the whole circumference of the circle BED, and add this *last* angle (for which the angle DAG may be used) to the mean motion of the nodes, while they are passing from the quadratures to the syzygies, and subtract it from their mean motion while they are passing from the syzygies to the quadratures, we shall have their true motion; for the true motion so found will nearly agree with the true motion which comes out from assuming the times as the area NTA - N*d*Z, and the motion of the node as the area NA*e*; as whoever will please to examine and make the computations will find: and this is the semi-menstrual equation of the motion of the nodes. But there is also a menstrual equation, but which is by no means necessary for finding of the moon’s latitude; for since the variation of the inclination of the moon’s orbit

to the plane of the ecliptic is liable to a twofold inequality, the one semi-menstrual, the other menstrual, the menstrual inequality *of this variation*, and the menstrual equation of the nodes, so moderate and correct each other, that in computing the latitude of the moon both may be neglected.

Cor. From this and the preceding Prop, it appears that the nodes are quiescent in their syzygies, but regressive in their quadratures, by an hourly motion of 16” 19’” 26^{iv}.; and that the equation of the motion of the nodes in the octants is 1° 30; all which exactly agree with the phaenomena of the heavens.

SCHOLIUM.

Mr. *Machin*, Astron., Prof. Gresh.. and Dr. *Henry Pemberton*, separately found out the motion of the nodes by a different method. Mention has been made of this method in another place. Their several papers, both of which I have seen, contained two Propositions, and exactly agreed with each other in both of them. Mr. *Machin’s* paper coming first to my hands, I shall here insert it.

OF THE MOTION OF THE MOON’S NODES.

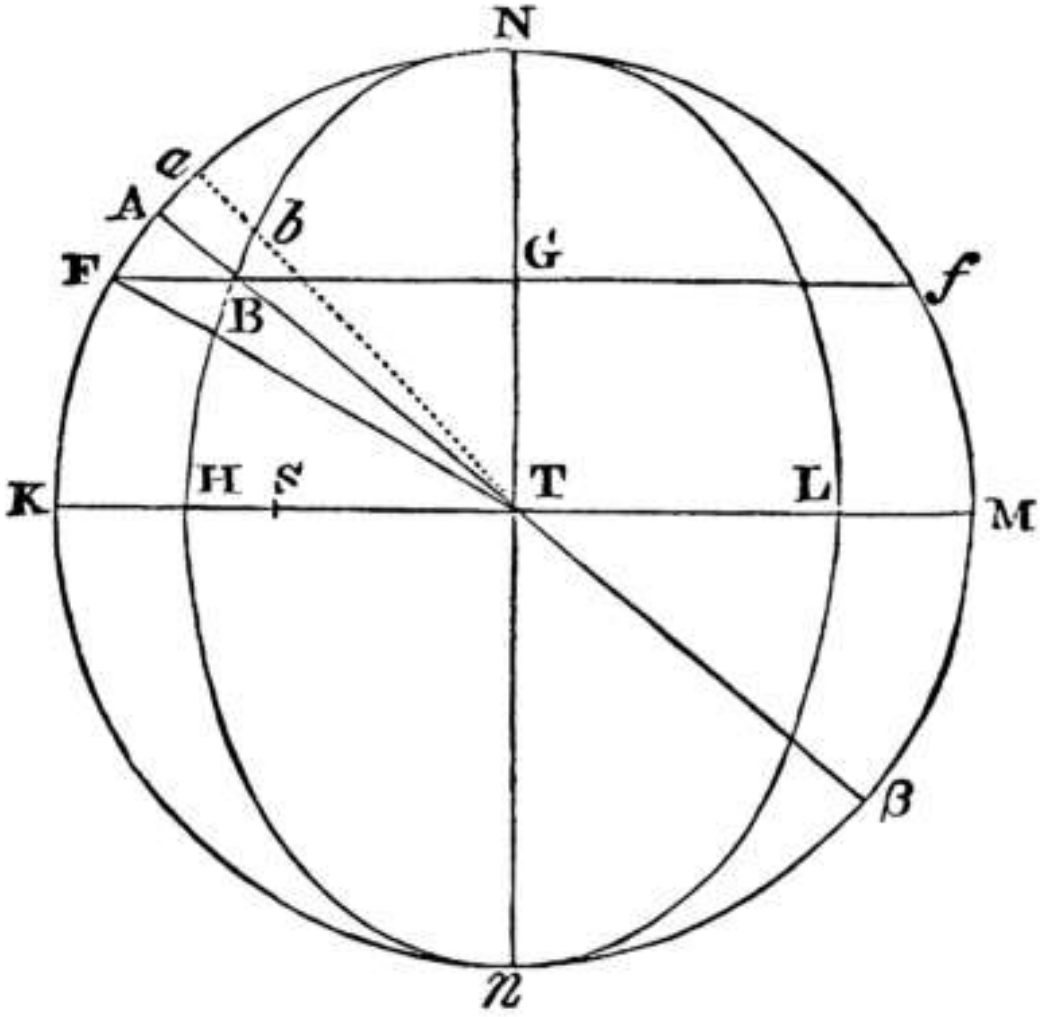
“PROPOSITION I.

“The mean motion of the sun from the node is defined by a geometric mean proportional between the mean motion of the sun and that mean motion with which the sun recedes with the greatest swiftness from the node in the quadratures.

“Let T be the earth’s place, N*n* the line of the moon’s nodes at any given time, KTM a perpendicular thereto, TA a right line revolving about the centre with the same angular velocity with which the sun and the node recede from one another, in such sort that the angle between the quiescent right line N*n* and the revolving line TA may be always equal to the distance of the places of the sun and node. Now if any right line TK be divided into parts TS and SK, and those parts be taken as the mean horary motion of the

sun to the mean horary motion of the node in the quadratures, and there be taken the right line TH, a mean proportional between the part TS and the whole TK, this right line will be proportional to the sun's mean motion from the node.

"For let there be described the circle NK*n*M from the centre T and with the radius TK, and about the same centre, with the semi-axis TH



and TN, let there be described an ellipsis NH*n*L; and in the time in which the sun recedes from the node through the arc N*a*, if there be drawn the right line T*ba*, the area of the sector NT*a* will be the exponent of the sum of the motions of the sun and node in the same time. Let, therefore, the extremely small arc *a*A be that which the right line T*ba*, revolving according to the aforesaid law, will uniformly describe in a given particle of time, and the extremely small sector TA*a* will be as the sum of the velocities with which the sun and node are carried two different ways in that

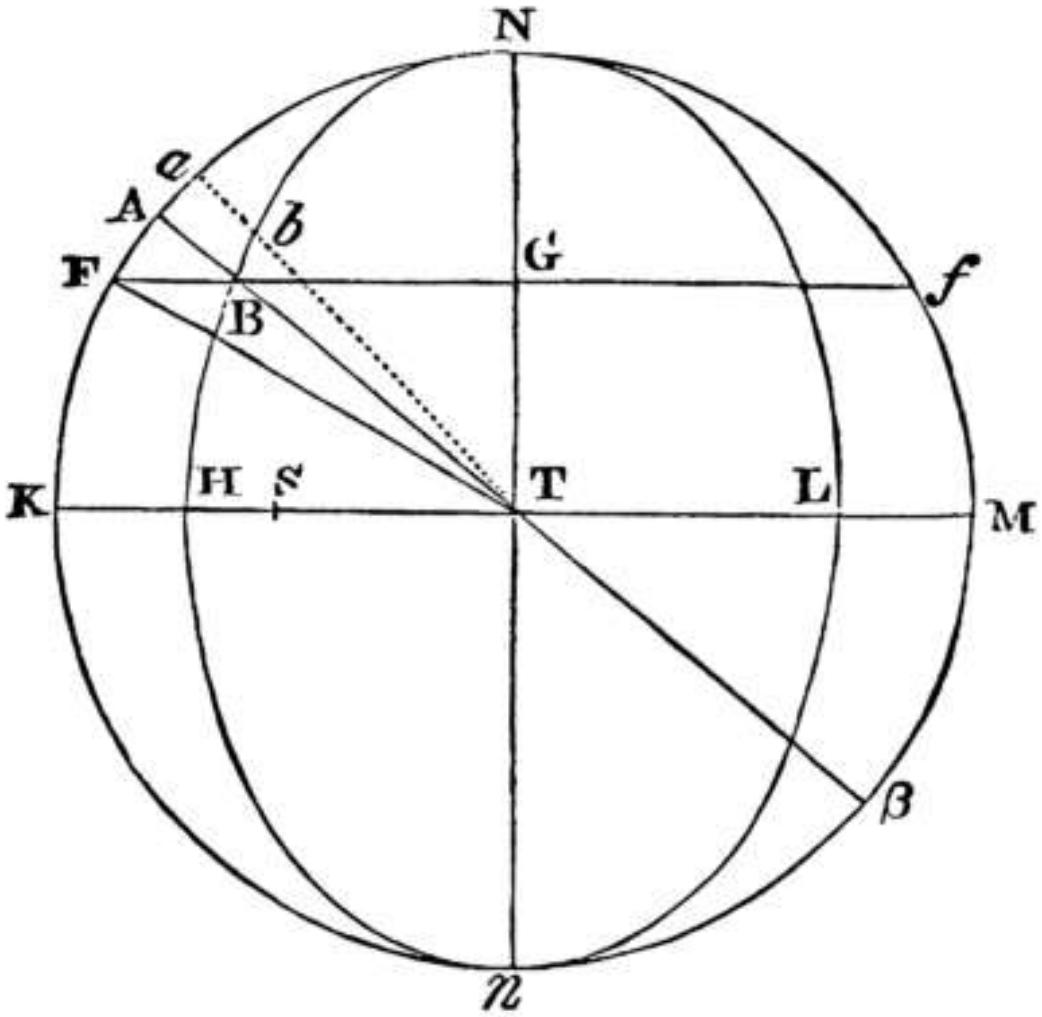
time. Now the sun's velocity is almost uniform, its inequality being so small as scarcely to produce the least inequality in the mean motion of the nodes. The other part of this sum, namely, the mean quantity of the velocity of the node, is increased in the recess from the syzygies in a duplicate ratio of the sine of its distance from the sun (by Cor. Prop. XXXI, of this Book), and, being greatest in its quadratures with the sun in K, is in the same ratio to the sun's velocity as SK to TS, that is, as (the difference of the squares of TK and TH, or) the rectangle KHM to TH². But the ellipsis NBH divides the sector AT*a*, the exponent of the sum of these two velocities, into two parts AB*ba* and BT*b*, proportional to the velocities. For produce BT to the circle in *β*, and from the point B let fall upon the greater axis the perpendicular BG, which being produced both ways may meet the circle in the points F and *f*; and because the space AB*ba* is to the sector TB*b* as the rectangle AB*β* to BT² (that rectangle being equal to the difference of the squares of TA and TB, because the right line A*β* is equally cut in T, and unequally in B), therefore when the space AB*ba* is the greatest of all in K, this ratio will be the same as the ratio of the rectangle KHM to HT². But the greatest mean velocity of the node was shewn above to be in that very ratio to the velocity of the sun; and therefore in the quadratures the sector AT*a* is divided into parts proportional to the velocities. And because the rectangle KHM is to HT² as FB*f* to BG², and the rectangle AB*β* is equal to the rectangle FB*f*, therefore the little area AB*ba*, where it is greatest, is to the remaining sector TB*b* as the rectangle AB*β* to BG². But the ratio of these little areas always was as the rectangle AB*β* to BT²; and therefore the little area AB*ba* in the place A is less than its correspondent little area in the quadratures in the duplicate ratio of BG to BT, that is, in the duplicate ratio of the sine of the sun's distance from the node. And therefore the sum of all the little areas AB*ba*, to wit, the space ABN, will be as the motion of the node in the time in which the sun hath been going over the arc NA since he left the node; and the remaining space, namely, the elliptic sector NTB, will be as the sun's mean motion in the same time. And because the mean annual motion of the node is that motion which it performs in the time that the sun completes one period of its course, the mean motion of the node from the sun will be to the mean motion of the sun itself as the area of the circle to the area of the ellipsis; that is, as the right line TK to the right line TH, which is a mean

proportional between TK and TS; or, which comes to the same as the mean proportional TH to the right line TS.

"PROPOSITION II.

"The mean motion of the moon's nodes being given, to find their true motion.

"Let the angle A be the distance of the sun from the mean place of the node, or the sun's mean motion from the node. Then if we take the angle B, whose tangent is to the tangent of the angle A as TH to TK, that is,



in the subduplicate ratio of the mean horary motion of the sun to the mean horary motion of the sun from the node, when the node is in the quadrature, that angle B will be the distance of the sun from the node's true

place. For join FT, and, by the demonstration of the last Proportion, the angle FTN will be the distance of the sun from the mean place of the node, and the angle ATN the distance from the true place, and the tangents of these angles are between themselves as TK to TH.

"Cor. Hence the angle FTA is the equation of the moon's nodes; and the sine of this angle, where it is greatest in the octants, is to the radius as KH to TK + TH. But the sine of this equation in any other place A is to the greatest sine as the sine of the sums of the angles FTN + ATN to the radius; that is, nearly as the sine of double the distance of the sun from the mean place of the node (namely, 2FTN) to the radius.

"SCHOLIUM.

"If the mean horary motion of the nodes in the quadratures be 16" 16'" $37^{iv}.42^{v}$. that is, in a whole sidereal year, 39° 38' 7" 50'", TH will be to TK in the subduplicate ratio of the number 9,0827646 to the number 10,0827646, that is, as 18,6524761 to 19,6524761. And, therefore, TH is to HK as 18,6524761 to 1; that is, as the motion of the sun in a sidereal year to the mean motion of the node 19° 18' 1" 23⅔'".

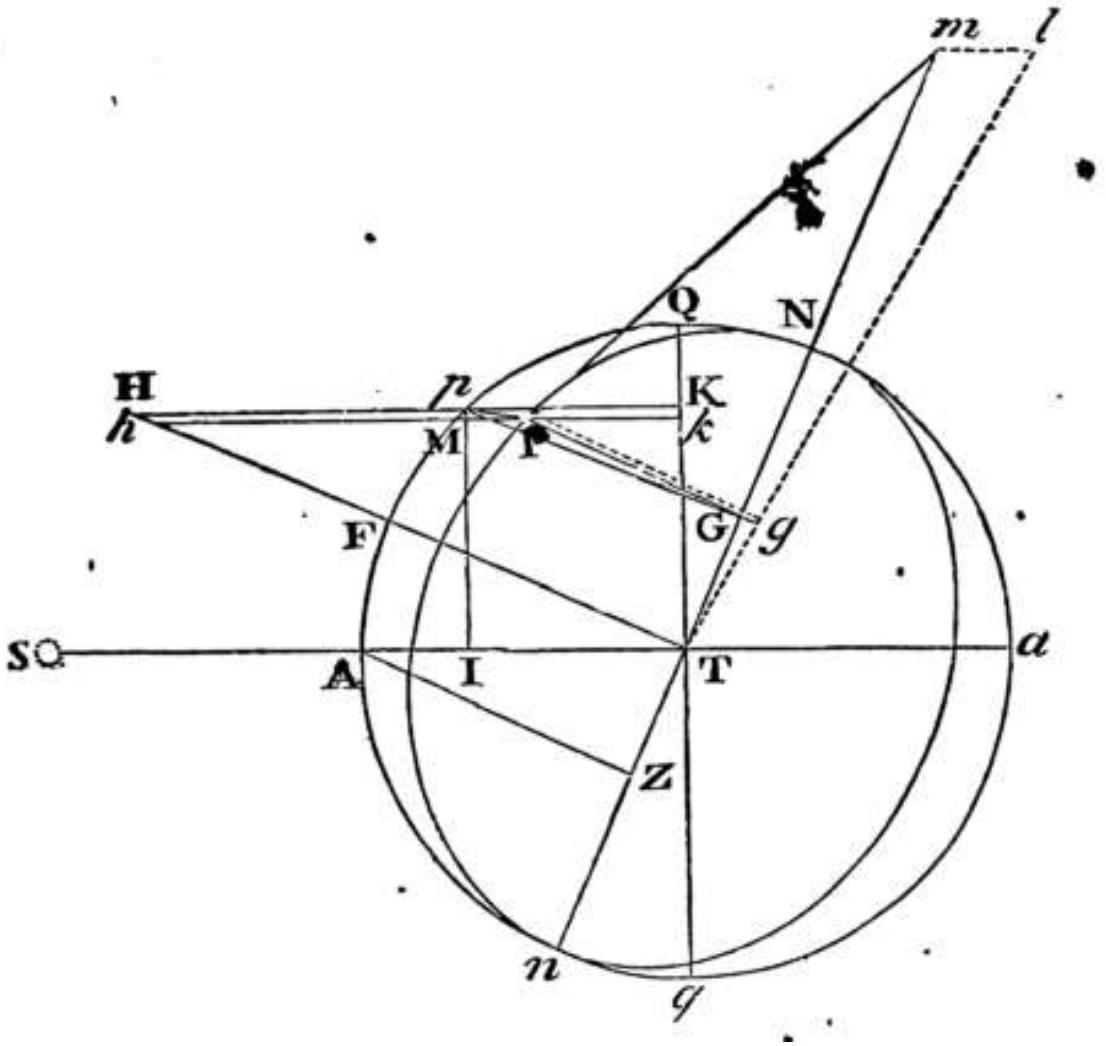
"But if the mean motion of the moon's nodes in 20 Julian years is 386° 50' 15", as is collected from the observations made use of in the theory of the moon, the mean motion of the nodes in one sidereal year will be 19° 20' 31" 58'". and TH will be to HK as 360° to 19° 20' 31" 58'"; that is, as 18,61214 to 1: and from hence the mean horary motion of the nodes in the quadratures will come out 16" 18'" 48^{iv}. And the greatest equation of the nodes in the octants will be 1° 29' 57"."

PROPOSITION XXXIV. PROBLEM XV.

To find the horary variation of the inclination, of the moon's orbit to the plane of the ecliptic.

Let A and *a* represent the syzygies; Q and *q* the quadratures; N and *n* the nodes; P the place of the moon in its orbit; *p* the orthographic projection of that place upon the plane of the ecliptic; and *m*T*l* the momentaneous motion

of the nodes as above. If upon T*m* we let fall the perpendicular PG, and joining *p*G we produce it till it meet T*l* in *g*, and join also P*g*, the angle PG*p* will be the inclination of the moon's orbit to the plane of the ecliptic when the moon is in P; and the angle P*gp* will be the inclination of the same after a small moment of time is elapsed; and therefore the angle GP*g* will be the momentaneous variation of the inclination. But this angle GP*g* is to the angle GT*g* as TG to PG and P*p* to PG conjunctly. And, therefore, if for the moment of time we assume



an hour, since the angle GT*g* (by Prop. XXX) is to the angle 33" 10"' 33^{iv}. as IT PG AZ to AT^3, the angle GP*g* (or the horary variation of the inclination) will be to the angle 33" 10"' 33^{iv}. as IT AZ TG to AT^3. Q.E.I.

And thus it would be if the moon was uniformly revolved in a circular orbit. But if the orbit is elliptical, the mean motion of the nodes will be

diminished in proportion of the lesser axis to the greater, as we have shewn above; and the variation of the inclination will be also diminished in the same proportion.

Cor. 1. Upon N*n* erect the perpendicular TF, and let *p*M be the horary motion of the moon in the plane of the ecliptic; upon QT let fall the perpendiculars *p*K, M*k*, and produce them till they meet TF in H and *h*; then IT will be to AT as K*k* to M*p*; and TG to H*p* as TZ to AT; and, therefore, IT TG will be equal to, that is, equal to the area H*p*M*h* multiplied into the ratio: and therefore the horary variation of the inclination will be to 33” 10’” 33^{iv}. as the area H*p*M*h* multiplied into to AT^3.

Cor. 2. And, therefore, if the earth and nodes were after every hour drawn back from their new and instantly restored to their old places, so as their situation might continue given for a whole periodic month together, the whole variation of the inclination during that month would be to 33” 10’” 33^{iv}. as the aggregate of all the areas H*p*M*h*, generated in the time of one revolution of the point *p* (with due regard in summing to their proper signs + -), multiplied into AZ TZ to M*p* AT^3; that is, as the whole circle QA*qa* multiplied into AZ TZ to M*p* AT^3, that is, as the circumference QA*qa* multiplied into AZ TZ to 2M*p* AT^2.

Cor. 3. And, therefore, in a given position of the nodes, the mean horary variation, from which, if uniformly continued through the whole month, that menstrual variation might be generated, is to 33” 10’” 33^{iv}. as AZ TZ to $2AT^2$, or as P*p* to PG 4AT; that is (because P*p* is to PG as the sine of the aforesaid inclination to the radius, and to 4AT as the sine of double the angle AT*n* to four times the radius), as the sine of the same inclination multiplied into the sine of double the distance of the nodes from the sun to four times the square of the radius.

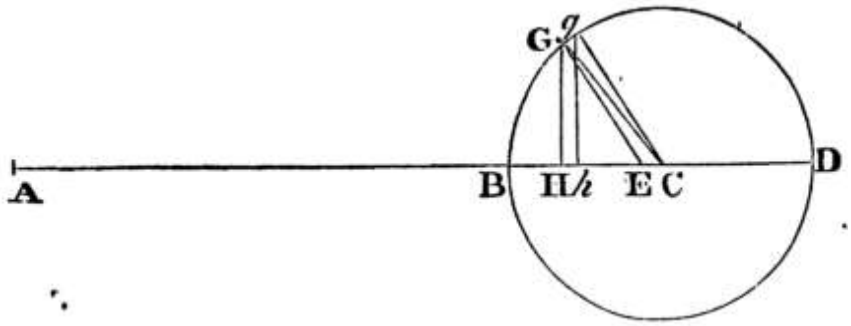
Cor. 4. Seeing the horary variation of the inclination, when the nodes are in the quadratures, is (by this Prop.) to the angle 33” 10’” 33^{iv}. as IT AZ TG to AT^3, that is, as to 2AT, that is, as the sine of double the distance of the moon from the quadratures multiplied into to twice the radius, the sum of all the horary variations during the time that the moon, in this situation of the nodes, passes from the quadrature to the syzygy (that is, in the space of $177\frac{1}{6}$ hours) will be to the sum of as many angles 33” 10’” 33^{iv}. or 5878”, as the sum of all the sines of double the distance of the moon from the

quadratures multiplied into to the sum of as many diameters; that is, as the diameter multiplied into to the circumference; that is, if the inclination be 5° 1', as 7 $^{874}/_{10000}$ to 22, or as 278 to 10000. And, therefore, the whole variation, composed out of the sum of all the horary variations in the aforesaid time, is 163", or 2' 43".

PROPOSITION XXXV. PROBLEM XVI.

To a given time to find the inclination of the moon's orbit to the plant of the ecliptic.

Let AD be the sine of the greatest inclination, and AB the sine of the least. Bisect BD in C; and round the centre C, with the interval BC, describe the circle BGD. In AC take CE in the same proportion to EB



as EB to twice BA. And if to the time given we set off the angle AEG equal to double the distance of the nodes from the quadratures, and upon AD let fall the perpendicular GH, AH will be the sine of the inclination required.

For GE^2 is equal to $GH^2 + HE^2 = BHD + HE^2 = HBD + HE^2 - BH^2 = HBD + BE^2 - 2BH\ BE = BE^2 + 2EC\ BH = 2EC\ AB + 2EC\ BH = 2EC\ AH$; wherefore since 2EC is given, GE^2 will be as AH. Now let AE*g* represent double the distance of the nodes from the quadratures, in a given moment of time after, and the arc G*g*, on account of the given angle GE*g*, will be as the distance GE. But H*h* is to G*g* as GH to GC, and, therefore, H*h* is as the rectangle GH G*g*, or GH GE, that is, as GE^2, or AH; that is, as AH and the sine of the angle AEG conjunctly. If, therefore, in any one case, AH be the sine of inclination, it will increase by the same increments as the sine of inclination doth, by Cor. 3 of the preceding Prop. and therefore will always

continue equal to that sine. But when the point G falls upon either point B or D, AH is equal to this sine, and therefore remains always equal thereto. Q.E.D.

In this demonstration I have supposed that the angle BEG, representing double the distance of the nodes from the quadratures, increaseth uniformly; for I cannot descend to every minute circumstance of inequality. Now suppose that BEG is a right angle, and that Gg is in this case the horary increment of double the distance of the nodes from the sun; then, by Cor. 3 of the last Prop. the horary variation of the inclination in the same case will be to 33” 10’” 33^{iv}. as the rectangle of AH, the sine of the inclination, into the sine of the right angle BEG, double the distance of the nodes from the sun, to four times the square of the radius; that is, as AH, the sine of the mean inclination, to four times the radius; that is, seeing the mean inclination is about 5° 8½, as its sine 896 to 40000, the quadruple of the radius, or as 224 to 10000. But the whole variation corresponding to BD, the difference of the sines, is to this horary variation as the diameter BD to the arc Gg, that is, conjunctly as the diameter BD to the semi-circumference BGD, and as the time of $2079^{7}/_{10}$ hours, in which the node proceeds from the quadratures to the syzygies, to one hour, that is as 7 to 11, and $2079^{7}/_{10}$ to 1. Wherefore, compounding all these proportions, we shall have the whole variation BD to 33” 10’” 33^{iv}. as 224 7 $2079^{7}/_{10}$ to 110000, that is, as 29645 to 1000; and from thence that variation BD will come out 16’ 23½”.

And this is the greatest variation of the inclination, abstracting from the situation of the moon in its orbit; for if the nodes are in the syzygies, the inclination suffers no change from the various positions of the moon. But if the nodes are in the quadratures, the inclination is less when the moon is in the syzygies than when it is in the quadratures by a difference of 2’ 43”, as we shewed in Cor. 4 of the preceding Prop.; and the whole mean variation BD, diminished by 1’ 21½”, the half of this excess, becomes 15’ 2”, when the moon is in the quadratures; and increased by the same, becomes 17’ 45” when the moon is in the syzygies. If, therefore, the moon be in the syzygies, the whole variation in the passage of the nodes from the quadratures to the syzygies will be 17’ 45”; and, therefore, if the inclination be 5° 17’ 20”, when the nodes are in the syzygies, it will be 4° 59’ 35” when the nodes are

in the quadratures and the moon in the syzygies. The truth of all which is confirmed by observations.

Now if the inclination of the orbit should be required when the moon is in the syzygies, and the nodes any where between them and the quadratures, let AB be to AD as the sine of 4° 59’ 35” to the sine of 5° 17’ 20”, and take the angle AEG equal to double the distance of the nodes from the quadratures; and AH will be the sine of the inclination desired. To this inclination of the orbit the inclination of the same is equal, when the moon is 90° distant from the nodes. In other situations of the moon, this menstrual inequality, to which the variation of the inclination is obnoxious in the calculus of the moon’s latitude, is balanced, and in a manner took off, by the menstrual inequality of the motion of the nodes (as we said before), and therefore may be neglected in the computation of the said latitude.

SCHOLIUM.

By these computations of the lunar motions I was willing to shew that by the theory of gravity the motions of the moon could be calculated from their physical causes. By the same theory I moreover found that the annual equation of the mean motion of the moon arises from the various dilatation which the orbit of the moon suffers from the action of the sun according to Cor. 6, Prop. LXVI, Book 1. The force of this action is greater in the perigeon sun, and dilates the moon’s orbit; in the apogeon sun it is less, and permits the orbit to be again contracted. The moon moves slower in the dilated and faster in the contracted orbit; and the annual equation, by which this inequality is regulated, vanishes in the apogee and perigee of the sun. In the mean distance of the sun from the earth it arises to about 11’ 50”; in other distances of the sun it is proportional to the equation of the sun’s centre, and is added to the mean motion of the moon, while the earth is passing from its aphelion to its perihelion, and subducted while the earth is in the opposite semi-circle. Taking for the radius of the *orbis magnus* 1000, and $16\frac{7}{8}$ for the earth’s eccentricity, this equation, when of the greatest magnitude, by the theory of gravity comes out 11’ 49”. But the eccentricity of the earth seems to be something greater, and with the eccentricity this

equation will be augmented in the same proportion. Suppose the eccentricity $16^{11}/_{12}$, and the greatest equation will be 11’ 51”.

Farther; I found that the apogee and nodes of the moon move faster in the perihelion of the earth, where the force of the sun’s action is greater, than in the aphelion thereof, and that in the reciprocal triplicate proportion of the earth’s distance from the sun; and hence arise annual equations of those motions proportional to the equation of the sun’s centre. Now the motion of the sun is in the reciprocal duplicate proportion of the earth’s distance from the sun; and the greatest equation of the centre which this inequality generates is 1° 56’ 20”, corresponding to the abovementioned eccentricity of the sun, $16^{11}/_{12}$. But if the motion of the sun had been in the reciprocal triplicate proportion of the distance, this inequality would have generated the greatest equation 2° 54’ 30”; and therefore the greatest equations which the inequalities of the motions of the moon’s apogee and nodes do generate are to 2° 54’ 30” as the mean diurnal motion of the moon’s apogee and the mean diurnal motion of its nodes are to the mean diurnal motion of the sun. Whence the greatest equation of the mean motion of the apogee comes out 19’ 43”, and the greatest equation of the mean motion of the nodes 9’ 24”. The former equation is added, and the latter subducted, while the earth is passing from its perihelion to its aphelion, and contrariwise when the earth is in the opposite semi-circle.

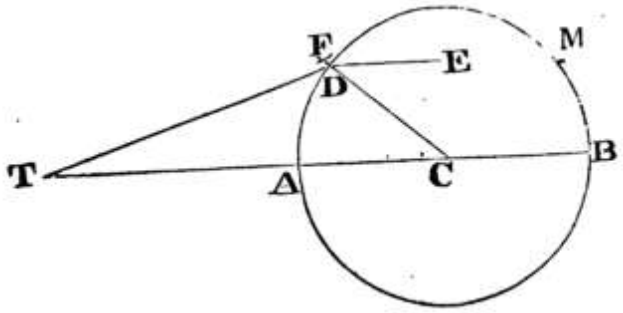
By the theory of gravity I likewise found that the action of the sun upon the moon is something greater when the transverse diameter of the moon’s orbit passeth through the sun than when the same is perpendicular upon the line which joins the earth and the sun; and therefore the moon’s orbit is something larger in the former than in the latter case. And hence arises another equation of the moon’s mean motion, depending upon the situation of the moon’s apogee in respect of the sun, which is in its greatest quantity when the moon’s apogee is in the octants of the sun, and vanishes when the apogee arrives at the quadratures or syzygies; and it is added to the mean motion while the moon’s apogee is passing from the quadrature of the sun to the syzygy, and subducted while the apogee is passing from the syzygy to the quadrature. This equation, which I shall call the semi-annual, when greatest in the octants of the apogee, arises to about 3’ 45”, so far as I could collect from the phaenomena: and this is its quantity in the mean distance of

the sun from the earth. But it is increased and diminished in the reciprocal triplicate proportion of the sun's distance, and therefore is nearly 3' 34" when that distance is greatest, and 3' 56" when least. But when the moon's apogee is without the octants, it becomes less, and is to its greatest quantity as the sine of double the distance of the moon's apogee from the nearest syzygy or quadrature to the radius.

By the same theory of gravity, the action of the sun upon the moon is something greater when the line of the moon's nodes passes through the sun than when it is at right angles with the line which joins the sun and the earth; and hence arises another equation of the moon's mean motion, which I shall call the second semi-annual; and this is greatest when the nodes are in the octants of the sun, and vanishes when they are in the syzygies or quadratures; and in other positions of the nodes is proportional to the sine of double the distance of either node from the nearest syzygy or quadrature. And it is added to the mean motion of the moon, if the sun is *in antecedentia*, to the node which is nearest to him, and subducted if *in consequentia*; and in the octants, where it is of the greatest magnitude, it arises to 47" in the mean distance of the sun from the earth, as I find from the theory of gravity. In other distances of the sun, this equation, greatest in the octants of the nodes, is reciprocally as the cube of the sun's distance from the earth; and therefore in the sun's perigee it comes to about 49", and in its apogee to about 45".

By the same theory of gravity, the moon's apogee goes forward at the greatest rate when it is either in conjunction with or in opposition to the sun, but in its quadratures with the sun it goes backward; and the eccentricity comes, in the former case, to its greatest quantity; in the latter to its least, by Cor. 7, 8, and 9, Prop. LXVI, Book 1. And those inequalities, by the Corollaries we have named, are very great, and generate the principal which I call the semi-annual equation of the apogee; and this semi-annual equation in its greatest quantity comes to about 12° 18', as nearly as I could collect from the phaenomena. Our countryman, *Horrox*, was the first who advanced the theory of the moon's moving in an ellipsis about the earth placed in its lower focus. Dr. *Halley* improved the notion, by putting the centre of the ellipsis in an epicycle whose centre is uniformly revolved about the earth; and from the motion in this epicycle the mentioned inequalities in the progress and regress of the apogee, and in the quantity of

eccentricity, do arise. Suppose the mean distance of the moon from the earth to be divided into 100000 parts, and let T represent the earth, and TC the moon's mean eccentricity of 5505 such parts. Produce TC to B, so as CB may be the sine of the greatest semi-annual equation 12° 18' to the radius



TC; and the circle BDA described about the centre C, with the interval CB, will be the epicycle spoken of, in which the centre of the moon's orbit is placed, and revolved according to the order of the letters BDA. Set off the angle BCD equal to twice the annual argument, or twice the distance of the sun's true place from the place of the moon's apogee once equated, and CTD will be the semi-annual equation of the moon's apogee, and TD the eccentricity of its orbit, tending to the place of the apogee now twice equated. But, having the moon's mean motion, the place of its apogee, and its eccentricity, as well as the longer axis of its orbit 200000, from these *data* the true place of the moon in its orbit, together with its distance from the earth, may be determined by the methods commonly known.

In the perihelion of the earth, where the force of the sun is greatest, the centre of the moon's orbit moves faster about the centre C than in the aphelion, and that in the reciprocal triplicate proportion of the sun's distance from the earth. But, because the equation of the sun's centre is included in the annual argument, the centre of the moon's orbit moves faster in its epicycle BDA, in the reciprocal duplicate proportion of the sun's distance from the earth. Therefore, that it may move yet faster in the reciprocal simple proportion of the distance, suppose that from D, the centre of the orbit, a right line DE is drawn, tending towards the moon's apogee once equated, that is, parallel to TC; and set off the angle EDF equal to the excess of the aforesaid annual argument above the distance of the moon's apogee from the sun's perigee *in consequentia*; or, which comes to the same thing, take the angle CDF equal to the complement of the sun's true anomaly to 360°; and let DF be to DC as twice the eccentricity of the *orbis*

magnus to the sun's mean distance from the earth, and the sun's mean diurnal motion from the moon's apogee to the sun's mean diurnal motion from its own apogee conjunctly, that is, as $33\frac{7}{8}$ to 1000, and 52' 27" 16'" to 59' 8" 10'" conjunctly, or as 3 to 100; and imagine the centre of the moon's orbit placed in the point F to be revolved in an epicycle whose centre is D; and radius DF, while the point D moves in the circumference of the circle DABD: for by this means the centre of the moon's orbit comes to describe a certain curve line about the centre C, with a velocity which will be almost reciprocally as the cube of the sun's distance from the earth, as it ought to be.

The calculus of this motion is difficult, but may be rendered more easy by the following approximation. Assuming, as above, the moon's mean distance from the earth of 100000 parts, and the eccentricity TC of 5505 such parts, the line CB or CD will be found 1172¾, and DF $35\frac{1}{5}$ of those parts; and this line DF at the distance TC subtends the angle at the earth, which the removal of the centre of the orbit from the place D to the place F generates in the motion of this centre; and double this line DF in a parallel position, at the distance of the upper focus of the moon's orbit from the earth, subtends at the earth the same angle as DF did before, which that removal generates in the motion of this upper focus; but at the distance of the moon from the earth this double line 2DF at the upper focus, in a parallel position to the first line DF, subtends an angle at the moon, which the said removal generates in the motion of the moon, which angle may be therefore called the second equation of the moon's centre; and this equation, in the mean distance of the moon from the earth, is nearly as the sine of the angle which that line DF contains with the line drawn from the point F to the moon, and when in its greatest quantity amounts to 2' 25". But the angle which the line DF contains with the line drawn from the point F to the moon is found either by subtracting the angle EDF from the mean anomaly of the moon, or by adding the distance of the moon from the sun to the distance of the moon's apogee from the apogee of the sun; and as the radius to the sine of the angle thus found, so is 2' 25" to the second equation of the centre: to be added, if the forementioned sum be less than a semi-circle; to be subducted, if greater. And from the moon's place in its orbit thus corrected, its longitude may be found in the syzygies of the luminaries.

The atmosphere of the earth to the height of 35 or 40 miles refracts the sun's light. This refraction scatters and spreads the light over the earth's shadow; and the dissipated light near the limits of the shadow dilates the shadow. Upon which account, to the diameter of the shadow, as it comes out by the parallax, I add 1 or 1⅓ minute in lunar eclipses.

But the theory of the moon ought to be examined and proved from the phenomena, first in the syzygies, then in the quadratures, and last of all in the octants; and whoever pleases to undertake the work will find it not amiss to assume the following mean motions of the sun and moon at the Royal Observatory of *Greenwich*, to the last day of *December* at noon, *anno* 1700, O.S. viz. The mean motion of the sun ♑ 20° 43' 40", and of its apogee ♋ 7° 44' 30"; the mean motion of the moon ♒ 15° 21' 00"; of its apogee, ♊ 8° 20' 00"; and of its ascending node ♌ 27° 24' 20"; and the difference of meridians betwixt the Observatory at *Greenwich* and the Royal Observatory at *Paris*, $O^h.9'20"$: but the mean motion of the moon and of its apogee are not yet obtained with sufficient accuracy.

Propositions XXXVI-XXXVIII (Forces to move the sea)

PROPOSITION XXXVI. PROBLEM XVII.

To find the force of the sun to move the sea.

The sun's force ML or PT to disturb the motions of the moon, was (by Prop. XXV.) in the moon's quadratures, to the force of gravity with us, as 1 to 638092,6; and the force TM - LM or 2PK in the moon's syzygies is double that quantity. But, descending to the surface of the earth, these forces are diminished in proportion of the distances from the centre of the earth, that is, in the proportion of 60½ to 1; and therefore the former force on the earth's surface is to the force of gravity as 1 to 38604600; and by this force the sea is depressed in such places as are 90 degrees distant from the sun. But by the other force, which is twice as great, the sea is raised not only in the places directly under the sun, but in those also which are directly opposed to it; and the sum of these forces is to the force of gravity as 1 to 12868200. And because the same force excites the same motion, whether it depresses the waters in those places which are 90 degrees distant from the sun, or raises them in the places which are directly under and directly opposed to the sun, the aforesaid sum will be the total force of the sun to disturb the sea, and will have the same effect as if the whole was employed in raising the sea in the places directly under and directly opposed to the sun, and did not act at all in the places which are 90 degrees removed from the sun.

And this is the force of the sun to disturb the sea in any given place, where the sun is at the same time both vertical, and in its mean distance from the earth. In other positions of the sun, its force to raise the sea is as the versed sine of double its altitude above the horizon of the place directly, and the cube of the distance from the earth reciprocally.

Cor. Since the centrifugal force of the parts of the earth, arising from the earth's diurnal motion, which is to the force of gravity as 1 to 289, raises the waters under the equator to a height exceeding that under the poles by

85472 *Paris* feet, as above, in Prop. XIX., the force of the sun, which we have now shewed to be to the force of gravity as 1 to 12868200, and therefore is to that centrifugal force as 289 to 12868200, or as 1 to 44527, will be able to raise the waters in the places directly under and directly opposed to the sun to a height exceeding that in the places which arc 90 degrees removed from the sun only by one *Paris* foot and $113\frac{1}{30}$ inches; for this measure is to the measure of 85472 feet as 1 to 44527.

PROPOSITION XXXVII. PROBLEM XVIII.

To find the force of the moon to move the sea.

The force of the moon to move the sea is to be deduced from its proportion to the force of the sun, and this proportion is to be collected from the proportion of the motions of the sea, which are the effects of those forces. Before the mouth of the river *Avon*, three miles below *Bristol*, the height of the ascent of the water in the vernal and autumnal syzygies of the luminaries (by the observations of *Samuel Sturmy*) amounts to about 45 feet, but in the quadratures to 25 only. The former of those heights arises from the sum of the aforesaid forces, the latter from their difference. If, therefore, S and L are supposed to represent respectively the forces of the sun and moon while they are in the equator, as well as in their mean distances from the earth, we shall have L + S to L - S as 45 to 25, or as 9 to 5.

At *Plymouth* (by the observations of *Samuel Colepress*) the tide in its mean height rises to about 16 feet, and in the spring and autumn the height thereof in the syzygies may exceed that in the quadratures by more than 7 or 8 feet. Suppose the greatest difference of those heights to be 9 feet, and L + S will be to L - S as 20½ to 11½, or as 41 to 23; a proportion that agrees well enough with the former. But because of the great tide at *Bristol*, we are rather to depend upon the observations of *Sturmy*; and, therefore, till we procure something that is more certain, we shall use the proportion of 9 to 5.

But because of the reciprocal motions of the waters, the greatest tides do not happen at the times of the syzygies of the luminaries, but, as we have said before, are the third in order after the syzygies; or (reckoning from the syzygies) follow next after the third appulse of the moon to the meridian of the place after the syzygies; or rather (as *Sturmy* observes) are the third after the day of the new or full moon, or rather nearly after the twelfth hour from the new or full moon, and therefore fall nearly upon the forty-third hour after the new or full of the moon. But in this port they fall out about the seventh hour after the appulse of the moon to the meridian of the place; and therefore follow next after the appulse of the moon to the meridian, when the moon is distant from the sun, or from opposition with the sun by about 18 or 19 degrees *in consequentia*. So the summer and winter seasons come not to their height in the solstices themselves, but when the sun is advanced beyond the solstices by about a tenth part of its whole course, that is, by about 36 or 37 degrees. In like manner, the greatest tide is raised after the appulse of the moon to the meridian of the place, when the moon has passed by the sun, *or the opposition thereof*; by about a tenth part of the whole motion from *one greatest tide to the next following greatest* tide. Suppose that distance about 18½ degrees; and the sun's force in this distance of the moon from the syzygies and quadratures will be of less moment to augment and diminish that part of the motion of the sea which proceeds from the motion of the moon than in the syzygies and quadratures themselves in the proportion of the radius to the co-sine of double this distance, or of an angle of 37 degrees; that is in proportion of 10000000 to 7986355; and, therefore, in the preceding analogy, in place of S we must put 0,7986355S.

But farther; the force of the moon in the quadratures must be diminished, on account of its declination from the equator; for the moon in those quadratures, or rather in 18½ degrees past the quadratures, declines from the equator by about 23° 13'; and the force of either luminary to move the sea is diminished as it declines from the equator nearly in the duplicate proportion of the co-sine of the declination; and therefore the force of the moon in those quadratures is only 0.8570327L; whence we have L + 0,7986355S to 0,8570327L - 0,7986355S as 9 to 5.

Farther yet; the diameters of the orbit in which the moon should move, setting aside the consideration of eccentricity, are one to the other as 69 to 70; and therefore the moon's distance from the earth in the syzygies is to its

distance in the quadratures, *caeteris paribus*, as 69 to 70; and its distances, when 18½ degrees advanced beyond the syzygies, where the greatest tide was excited, and when 18½ degrees passed by the quadratures, where the least tide was produced, are to its mean distance as 69,098745 and 69,897345 to 69½. But the force of the moon to move the sea is in the reciprocal triplicate proportion of its distance; and therefore its forces, in the greatest and least of those distances, are to its force in its mean distance is 0.9830427 and 1,017522 to 1. From whence we have 1,017522L 0,7986355S to 0,9830427 0,8570327L - 0,7986355S as 9 to 5; and S to L as 1 to 4,4815. Wherefore since the force of the sun is to the force of gravity as 1 to 12868200, the moon's force will be to the force of gravity as 1 to 2871400.

Cor. 1. Since the waters excited by the sun's force rise to the height of a foot and $11\frac{1}{30}$ inches, the moon's force will raise the same to the height of 8 feet and $7\frac{5}{22}$ inches; and the joint forces of both will raise the same to the height of 10½ feet; and when the moon is in its perigee to the height of 12½ feet, and more, especially when the wind sets the same way as the tide. And a force of that quantity is abundantly sufficient to excite all the motions of the sea, and agrees well with the proportion of those motions; for in such seas as lie free and open from east to west, as in the *Pacific* sea, and in those tracts of the *Atlantic* and *Ethiopic* seas which lie without the tropics, the waters commonly rise to 6, 9, 12, or 15 feet; but in the *Pacific* sea, which is of a greater depth, as well as of a larger extent, the tides are said to be greater than in the *Atlantic* and *Ethiopic* seas; for to have a full tide raised, an extent of sea from east to west is required of no less than 90 degrees. In the *Ethiopic* sea, the waters rise to a less height within the tropics than in the temperate zones, because of the narrowness of the sea between *Africa* and the southern parts of *America*. In the middle of the open sea the waters cannot rise with out falling together, and at the same time, upon both the eastern and western shores, when, notwithstanding, in our narrow seas, they ought to fall on those shores by alternate turns; upon which account there is commonly but a small flood and ebb in such islands as lie far distant from the continent. On the contrary, in some ports, where to fill and empty the bays alternately the waters are with great violence forced in and out through shallow channels, the flood and ebb must be

greater than ordinary; as at *Plymouth* and *Chepstow Bridge* in *England*, at the mountains of St. *Michael*, and the town of *Auranches*, in *Normandy*, and at *Cambaia* and *Pegu* in the *East Indies*. In these places the sea is hurried in and out with such violence, as sometimes to lay the shores under water, some times to leave them dry for many miles. Nor is this force of the influx and efflux to be broke till it has raised and depressed the waters to 30, 40, or 50 feet and above. And a like account is to be given of long and shallow channels or straits, such as the *Magellanic* straits, and those channels which environ *England*. The tide in such ports and straits, by the violence of the influx and efflux, is augmented above measure. But on such shores as lie towards the deep and open sea with a steep descent, where the waters may freely rise and fall without that precipitation of influx and efflux, the proportion of the tides agrees with the forces of the sun and moon.

Cor. 2. Since the moon's force to move the sea is to the force of gravity as 1 to 2871400, it is evident that this force is far less than to appear sensibly in statical or hydrostatical experiments, or even in those of pendulums. It is in the tides only that this force shews itself by any sensible effect.

Cor. 3. Because the force of the moon to move the sea is to the like force of the sun as 4,4815 to 1, and those forces (by Cor. 14, Prop. LXVI, Book 1) are as the densities of the bodies of the sun and moon and the cubes of their apparent diameters conjunctly, the density of the moon will be to the density of the sun as 4,4815 to 1 directly, and the cube of the moon's diameter to the cube of the sun's diameter inversely; that is (seeing the mean apparent diameters of the moon and sun are 31' 16½", and 32' 12"), as 4891 to 1000. But the density of the sun was to the density of the earth as 1000 to 4000; and therefore the density of the moon is to the density of the earth as 4891 to 4000, or as 11 to 9. Therefore the body of the moon is more dense and more earthly than the earth itself.

Cor. 4. And since the true diameter of the moon (from the observations of astronomers) is to the true diameter of the earth as 100 to 365, the mass of matter in the moon will be to the mass of matter in the earth as 1 to 39,788.

Cor. 5. And the accelerative gravity on the surface of the moon will be about three times less than the accelerative gravity on the surface of the earth.

Cor. 6. And the distance of the moon's centre from the centre of the earth will be to the distance of the moon's centre from the common centre of gravity of the earth and moon as 40,788 to 39,788

Cor. 7. And the mean distance of the centre of the moon from the centre of the earth will be (in the moon's octants) nearly $60^{2}/_{5}$ of the great est semi-diameters of the earth; for the greatest semi-diameter of the earth was 19658600 *Paris* feet, and the mean distance of the centres of the earth and moon, consisting of $60^{2}/_{5}$ such semi-diameters, is equal to 1187379440 feet. And this distance (by the preceding Cor.) is to the distance of the moon's centre from the common centre of gravity of the earth and moon as 40,788 to 39,788; which latter distance, therefore, is 1158268534 feet. And since the moon, in respect of the fixed stars, performs its revolution in $27^{d}.7^{h}.43^{4}/_{9}$', the versed sine of that angle which the moon in a minute of time describes is 12752341 to the radius 1000,000000,000000; and as the radius is to this versed sine, so are 1158268534 feet to 14,7706353 feet. The moon, therefore, falling towards the earth by that force which retains it in its orbit, would in one minute of time describe 14,7706353 feet; and if we augment this force in the proportion of $178^{29}/_{40}$ to $177^{29}/_{40}$, we shall have the total force of gravity at the orbit of the moon, by Cor. Prop. III; and the moon falling by this force, in one minute of time would describe 14,8538067 feet. And at the 60th part of the distance of the moon from the earth's centre, that is, at the distance of 197896573 feet from the centre of the earth, a body falling by its weight, would, in one second of time, likewise describe 14,8538067 feet. And, therefore, at the distance of 19615800, which compose one mean semi-diameter of the earth, a heavy body would describe in falling 15,11175, or 15 feet, 1 inch, and $4^{1}/_{11}$ lines, in the same time. This will be the descent of bodies in the latitude of 45 degrees. And by the foregoing table, to be found under Prop. XX, the descent in the latitude of *Paris* will be a little greater by an excess of about ⅔ parts of a line. Therefore, by this computation, heavy bodies in the latitude of Paris falling *in vacuo* will describe 15 *Paris* feet, 1 inch, $4^{25}/_{33}$ lines, very nearly, in one second of time. And if the gravity be diminished by taking away a quantity equal to the centrifugal force arising in that latitude from the earth's diurnal motion, heavy bodies falling there will

describe in one second of time 15 feet, 1 inch, and 1½ line. And with this velocity heavy bodies do really fall in the latitude of *Paris*, as we have shewn above in Prop. IV and XIX.

Cor. 8. The mean distance of the centres of the earth and moon in the syzygies of the moon is equal to 60 of the greatest semi-diameters of the earth, subducting only about one 30th part of a semi-diameter: and in the moon's quadratures the mean distance of the same centres is $60\frac{5}{6}$ such semi-diameters of the earth; for these two distances are to the mean distance of the moon in the octants as 69 and 70 to 69½, by Prop. XXVIII.

Cor. 9. The mean distance of the centres of the earth and moon in the syzygies of the moon is 60 mean semi-diameters of the earth, and a 10th part of one semi-diameter; and in the moon's quadratures the mean distance of the same centres is 61 mean semi-diameters of the earth, subducting one 30th part of one semi-diameter.

Cor. 10. In the moon's syzygies its mean horizontal parallax in the latitudes of 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90 degrees is 57' 20", 57' 16", 57' 14", 57' 12", 57' 10", 57' 8", 57' 4", respectively.

In these computations I do not consider the magnetic attraction of the earth, whose quantity is very small and unknown: if this quantity should ever be found out, and the measures of degrees upon the meridian, the lengths of isochronous pendulums in different parallels, the laws of the motions of the sea, and the moon's parallax, with the apparent diameters of the sun and moon, should be more exactly determined from phenomena: we should then be enabled to bring this calculation to a greater accuracy.

PROPOSITION XXXVIII. PROBLEM XIX.

To find the figure of the moon's body.

If the moon's body were fluid like our sea, the force of the earth to raise that fluid in the nearest and remotest parts would be to the force of the moon by which our sea is raised in the places under and opposite to the moon as the accelerative gravity of the moon towards the earth to the accelerative gravity of the earth towards the moon, and the diameter of the moon to the

diameter of the earth conjunctly; that is, as 39,788 to 1, and 100 to 365 conjunctly, or as 1081 to 100. Wherefore, since our sea, by the force of the moon, is raised to $8\frac{3}{5}$ feet, the lunar fluid would be raised by the force of the earth to 93 feet; and upon this account the figure of the moon would be a spheroid, whose greatest diameter produced would pass through the centre of the earth, and exceed the diameters perpendicular thereto by 186 feet. Such a figure, therefore, the moon affects, and must have put on from the beginning. Q.E.I.

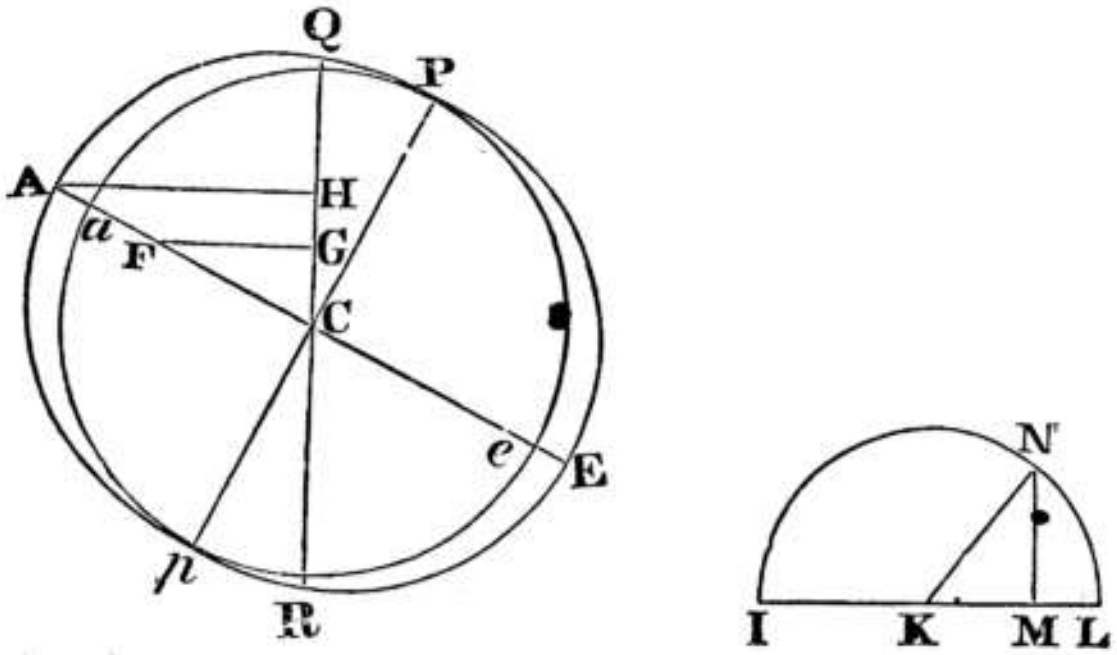
Cor. Hence it is that the same face of the moon always respects the earth; nor can the body of the moon possibly rest in any other position, but would return always by a libratory motion to this situation; but those librations, however, must be exceedingly slow, because of the weakness of the forces which excite them; so that the face of the moon, which should be always obverted to the earth, may, for the reason assigned in Prop. XVII. be turned towards the other focus of the moon's orbit, without being immediately drawn back, and converted again towards the earth.

Lemmas I-III, Proposition XXXIX (Precession of equinoxes)

LEMMA I.

If APEp *represent the earth uniformly dense, marked with the centre* C*, the poles* P, p*, and the equator* AE*; and if about the centre* C*, with the radius* CP*, we suppose the sphere* Pape *to be described, and* QR *to denote the plane on which a right line, drawn from the centre of the sun to the centre of the earth, insists at right angles; and further suppose that the several particles of the whole exterior earth* PapAPepE*, without the height of the said sphere, endeavour to recede towards this side and that side from the plane* QR*, every particle by a force proportional to its distance from that plane; I say, in the first place, that the whole force and efficacy of all the particles that are situate in* AE*, the circle of the equator, and disposed uniformly without the globe, encompassing the same after the manner of a ring, to wheel the earth about its centre, is to the whole force and efficacy of as many particles in that point* A *of the equator which is at the greatest distance from the plane* QR*, to wheel the earth about its centre with a like circular motion, as* 1 *to* 2*. And that circular motion will be performed about an axis lying in the common section of the equator and the plane* QR*.*

For let there be described from the centre K, with the diameter IL, the semi-circle INL. Suppose the semi-circumference INL to be divided into innumerable equal parts, and from the several parts N to the diameter



IL let fall the sines NM. Then the sums of the squares of all the sines NM will be equal to the sums of the squares of the sines KM, and both sums together will be equal to the sums of the squares of as many semi-diameters KN; and therefore the sum of the squares of all the sines NM will be but half so great as the sum of the squares of as many semi-diameters KN.

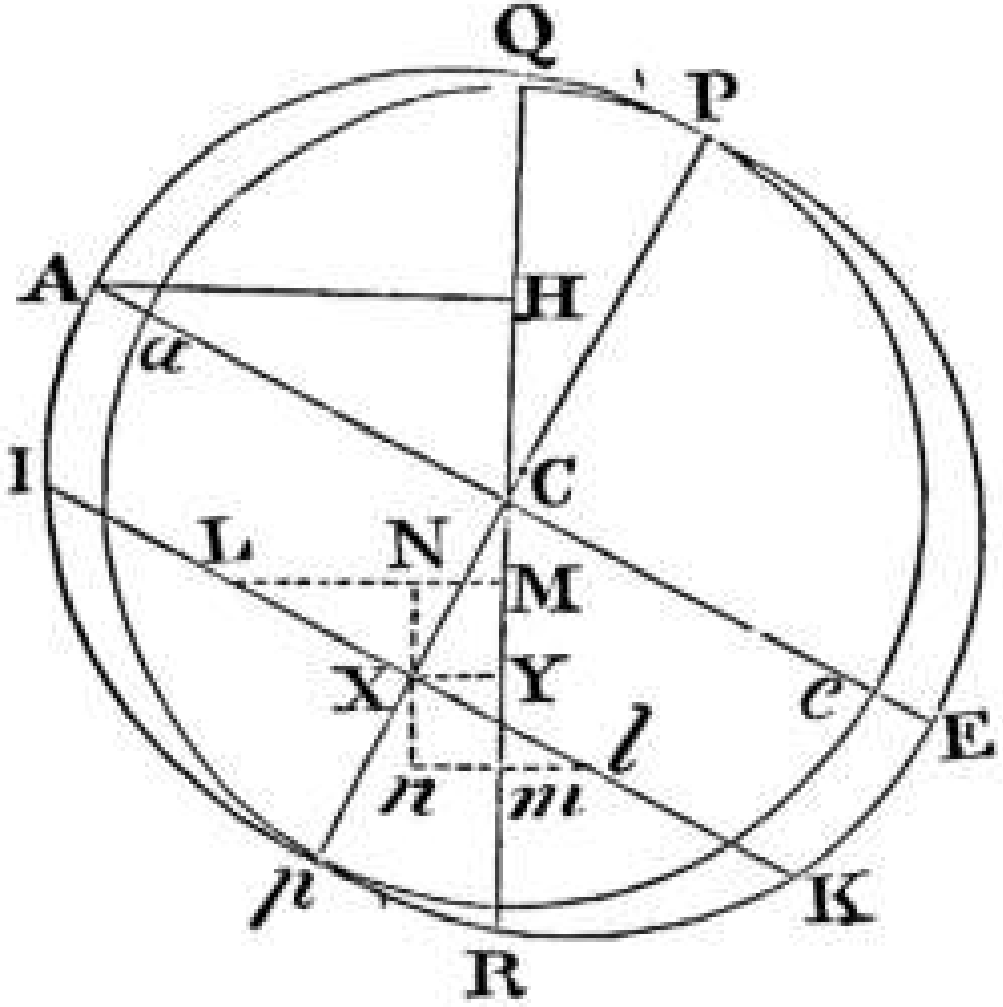
Suppose now the circumference of the circle AE to be divided into the like number of little equal parts, and from every such part F a perpendicular FG to be let fall upon the plane QR, as well as the perpendicular AH from the point A. Then the force by which the particle F recedes from the plane QR will (by supposition) be as that perpendicular FG; and this force multiplied by the distance CG will represent the power of the particle F to turn the earth round its centre. And, therefore, the power of a particle in the place F will be to the power of a particle in the place A as FG GC to AH HC; that is, as FC^2 to AC^2: and therefore the whole power of all the particles F, in their proper places F, will be to the power of the like number of particles in the place A as the sum of all the FC^2 to the sum of all the AC^2, that is (by what we have demonstrated before), as 1 to 2. Q.E.D.

And because the action of those particles is exerted in the direction of lines perpendicularly receding from the plane QR, and that equally from each side of this plane, they will wheel about the circumference of the circle

of the equator, together with the adherent body of the earth, round an axis which lies as well in the plane QR as in that of the equator.

LEMMA II.

The same things still supposed, I say, in the second place, that the total force or power of all the particles situated every where about the sphere to turn the earth about the said axis is to the whole force of the like number of particles, uniformly disposed round the whole circumference of the equator AE *in the fashion of a ring, to turn the whole earth about with the like circular motion, as* 2 *to* 5.



For let IK be any lesser circle parallel to the equator AE, and let L*l* be any two equal particles in this circle, situated without the sphere P*ape*; and if upon the plane QR, which is at right angles with a radius drawn to the sun, we let fall the perpendiculars LM, *lm*, the total forces by which these particles recede from the plane QR will be proportional to the perpendiculars LM, *lm*. Let the right line L*l* be drawn parallel to the plane P*ape*, and bisect the same in X; and through the point X draw N*n* parallel to the plane QR, and meeting the perpendiculars LM, *lm*, in N and *n*; and upon the plane QR let full the perpendicular XY. And the contrary forces of the particles L and *l* to wheel about the earth contrariwise are as LM MC, and *lm m*C; that is, as LN MC + NM MC, and *ln m*C - *nm m*C; or LN MC + NM MC, and LN *m*C - NM *m*C, and LN M*m* - NM, the difference of the two, is the force of both taken together to turn the earth round. The affirmative part of this difference LN M*m*, or 2LN NX, is to 2AH HC, the force of two particles of the same size situated in A, as LX^2 to AC^2; and the negative part NM, or 2XY CY, is to 2AH HC, the force of the same two particles situated in A, as CX^2 to AC^2. And therefore the difference of the parts, that is, the force of the two particles L and *l*, taken together, to wheel the earth about, is to the force of two particles, equal to the former and situated in the place A, to turn in like manner the earth round, as $LX^2 - CX^2$ to AC^2. But if the circumference IK of the circle IK is supposed to be divided into an infinite number of little equal parts L, all the LX^2 will be to the like number of IX^2 as 1 to 2 (by Lem. 1); and to the same number of AC^2 as IX^2 to $2AC^2$; and the same number of CX^2 to as many AC^2 as $2CX^2$ to $2AC^2$. Wherefore the united forces of all the particles in the circumference of the circle IK are to the joint forces of as many particles in the place A as $IX^2 - 2CX^2$ to $2AC^2$; and therefore (by Lem. 1) to the united forces of as many particles in the circumference of the circle AE as $IX^2 - 2CX^2$ to AC^2.

Now if P*p*, the diameter of the sphere, is conceived to be divided into an infinite number of equal parts, upon which a like number of circles IK are supposed to insist, the matter in the circumference of every circle IK will be as IX^2; and therefore the force of that matter to turn the earth about will be as IX^2 into $IX^2 - 2CX^2$; and the force of the same matter, if it was situated in the circumference of the circle AE, would be as IX^2 into AC^2. And therefore the force of all the particles of the whole matter situated without the sphere in the circumferences of all the circles is to the force of the like number of

particles situated in the circumference of the greatest circle AE as all the IX^2 into $IX^2 - 2CX^2$ to as many IX^2 into AC^2; that is, as all the $AC^2 - CX^2$ into $AC^2 - 3CX^2$ to as many $AC^2 - CX^2$ into AC^2; that is, as all the $AC^4 - 4AC^2\ CX^2 + 3CX^4$ to as many $AC^4 - AC^2\ CX^2$; that is, as the whole fluent quantity, whose fluxion is $AC^4 - 4AC^2\ CX^2 + 3CX^4$, to the whole fluent quantity, whose fluxion is $AC^4 - AC^2\ CX^2$; and, therefore, by the method of fluxions, as $AC^4\ CX - \frac{4}{3}AC^2\ CX^3 + \frac{3}{5}CX^5$ to $AC^4\ CX - \frac{1}{3}AC^2\ CX^3$; that is, if for CX we write the whole C*p*, or AC, as $\frac{4}{15}\ AC^5$ to $\frac{2}{3}AC^5$; that is, as 2 to 5. Q.E.D.

LEMMA III.

The same things still supposed, I say, in the third place, that the motion of the whole earth about the axis above-named arising from the motions of all the particles, will be to the motion of the aforesaid ring about the same axis in a proportion compounded of the proportion of the matter in the earth to the matter in the ring; and the proportion of three squares of the quadrantal arc of any circle to two squares of its diameter, that is, in the proportion of the matter to the matter, and of the number 925275 *to the number* 1000000.

For the motion of a cylinder revolved about its quiescent axis is to the motion of the inscribed sphere revolved together with it as any four equal squares to three circles inscribed in three of those squares; and the motion of this cylinder is to the motion of an exceedingly thin ring surrounding both sphere and cylinder in their common contact as double the matter in the cylinder to triple the matter in the ring; and this motion of the ring, uniformly continued about the axis of the cylinder, is to the uniform motion of the same about its own diameter performed in the same periodic time as the circumference of a circle to double its diameter.

HYPOTHESIS II.

If the other parts of the earth were taken away, and the remaining ring was carried alone about the sun in the orbit of the earth by the annual motion, while by the diurnal motion it was in the mean time revolved about its own axis inclined to the plane of the ecliptic by an angle of 23½ degrees, the motion of the equinoctial points would be the same, whether the ring were fluid, or whether it consisted of a hard and rigid matter.

PROPOSITION XXXIX. PROBLEM XX.

To find the precession of the equinoxes.

The middle horary motion of the moon's nodes in a circular orbit, when the nodes are in the quadratures, was 16" 35'" $16^{iv}.36^{v}$.; the half of which, 8" 17'" $38^{iv}.18^{v}$. (for the reasons above explained) is the mean horary motion of the nodes in such an orbit, which motion in a whole sidereal year becomes 20° 11' 46". Because, therefore, the nodes of the moon in such an orbit would be yearly transferred 20° 11' 46" *in antecedentia*; and, if there were more moons, the motion of the nodes of every one (by Cor. 16, Prop. LXVI. Book 1) would be as its periodic time; if upon the surface of the earth a moon was revolved in the time of a sidereal day, the annual motion of the nodes of this moon would be to 20° 11' 46" as $23^{h}.56'$, the sidereal day, to $27^{d}.7^{h}.43'$, the periodic time of our moon, that is, as 1436 to 39343. And the same thing would happen to the nodes of a ring of moons encompassing the earth, whether these moons did not mutually touch each the other, or whether they were molten, and formed into a continued ring, or whether that ring should become rigid and inflexible.

Let us, then, suppose that this ring is in quantity of matter equal to the whole exterior earth P*ap*AP*ep*E, which lies without the sphere P*ape* (see fig. Lem. II); and because this sphere is to that exterior earth as aC^2 to $AC^2 - aC^2$, that is (seeing PC or *a*C the least semi-diameter of the earth is to AC the greatest semi-diameter of the same as 229 to 230), as 52441 to 459; if this ring encompassed the earth round the equator, and both together were revolved about the diameter of the ring, the motion of the ring (by Lem. III) would be to the motion of the inner sphere as 459 to 52441 and 1000000 to 925275 conjunctly, that is, as 4590 to 485223; and therefore the motion of the ring would be to the sum of the motions of both ring and sphere as 4590

to 489813. Wherefore if the ring adheres to the sphere, and communicates its motion to the sphere, by which its nodes or equinoctial points recede, the motion remaining in the ring will be to its former motion as 4590 to 489813; upon which account the motion of the equinoctial points will be diminished in the same proportion. Wherefore the annual motion of the equinoctial points of the body, composed of both ring and sphere, will be to the motion 20° 11’ 46” as 1436 to 39343 and 4590 to 489813 conjunctly, that is, as 100 to 292369. But the forces by which the nodes of a number of moons (as we explained above), and therefore by which the equinoctial points of the ring recede (that is, the forces 3IT, in fig. Prop. XXX), are in the several particles as the distances of those particles from the plane QR; and by these forces the particles recede from that plane: and therefore (by Lem. II) if the matter of the ring was spread all over the surface of the sphere, after the fashion of the figure P*ap*AP*ep*E, in order to make up that exterior part of the earth, the total force or power of all the particles to wheel about the earth round any diameter of the equator, and therefore to move the equinoctial points, would become less than before in the proportion of 2 to 5. Wherefore the annual regress of the equinoxes now would be to 20° 11’ 46” as 10 to 73092; that is, would be 9” 56’” 50^{iv}.

But because the plane of the equator is inclined to that of the ecliptic, this motion is to be diminished in the proportion of the sine 91706 (which is the co-sine of 23½ deg.) to the radius 100000; and the remaining motion will now be 9” 7’” 20^{iv}. which is the annual precession of the equinoxes arising from the force of the sun.

But the force of the moon to move the sea was to the force of the sun nearly as 4,4815 to 1; and the force of the moon to move the equinoxes is to that of the sun in the same proportion. Whence the annual precession of the equinoxes proceeding from the force of the moon comes out 40” 52’” 52^{iv}. and the total annual precession arising from the united forces of both will be 50” 00’” 12^{iv}. the quantity of which motion agrees with the phaenomena; for the precession of the equinoxes, by astronomical observations, is about 50” yearly.

If the height of the earth at the equator exceeds its height at the poles by more than $17\frac{1}{6}$ miles, the matter thereof will be more rare near the surface

than at the centre; and the precession of the equinoxes will be augmented by the excess of height, and diminished by the greater rarity.

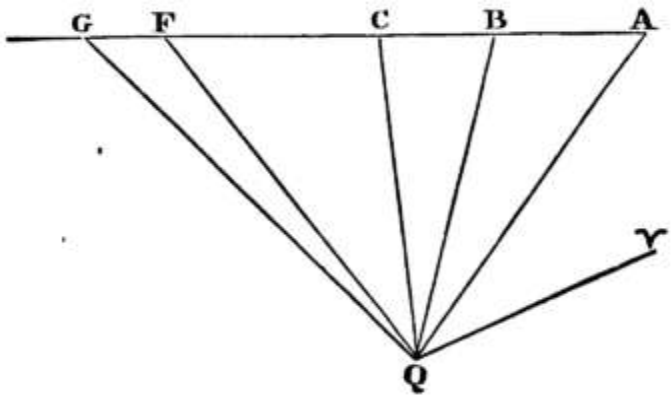
And now we have described the system of the sun, the earth, moon, and planets, it remains that we add something about the comets.

Lemmas IV-XI, Propositions XL-XLII (Comets)

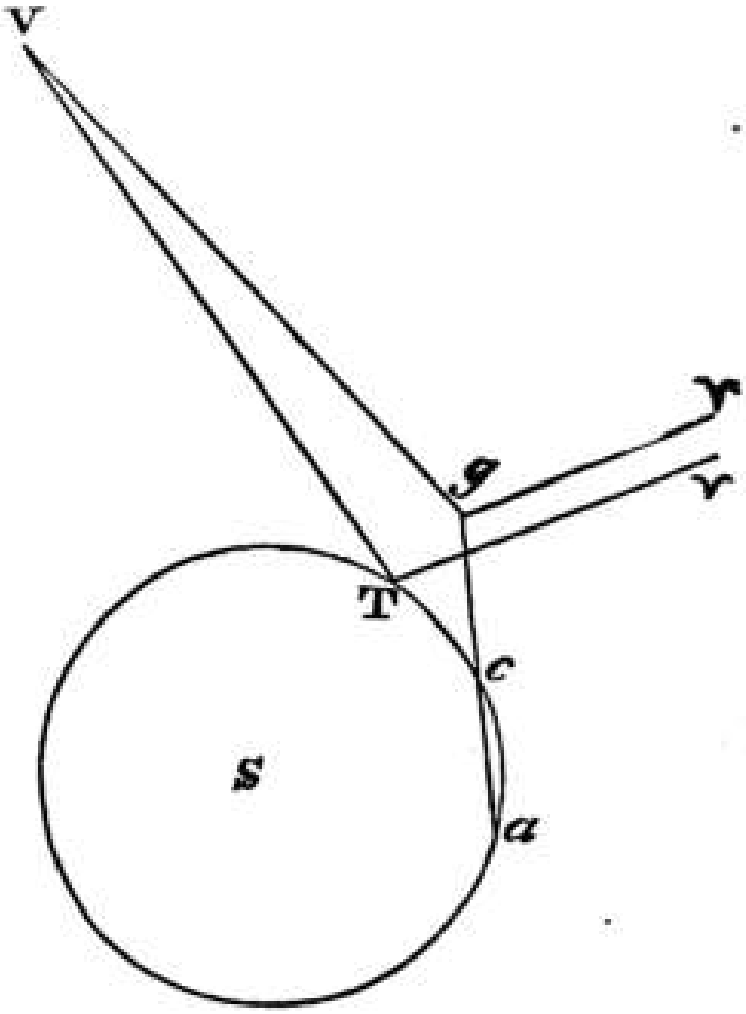
LEMMA IV.

That the comets are higher than the moon, and in the regions of the planets.

As the comets were placed by astronomers above the moon, because they were found to have no diurnal parallax, so their annual parallax is a convincing proof of their descending into the regions of the planets; for all the comets which move in a direct course according to the order of the signs, about the end of their appearance become more than ordinarily slow or retrograde, if the earth is between them and the sun; and more than ordinarily swift, if the earth is approaching to a heliocentric opposition with them; whereas, on the other hand, those which move against the order of the signs, towards the end of their appearance appear swifter than they ought to be, if the earth is between them and the sun; and slower, and perhaps retrograde, if the earth is in the other side of its orbit. And these appearances proceed chiefly from the diverse situations which the earth acquires in the course of its motion, after the same manner as it happens to the planets, which appear sometimes retrograde, sometimes more slowly, and sometimes more swiftly, progressive, according as the motion of the earth falls in with that of the planet, or is directed the contrary way. If the earth move the same way with the comet, but, by an angular motion about the sun, so much swifter that right lines drawn from the earth to the comet converge towards the parts beyond the comet, the comet seen from the earth, because of its slower motion, will appear retrograde; and even if the earth is slower than the comet, the motion of the earth being subducted, the motion of the comet will at least appear retarded; but if the earth tends the contrary way to that of the comet, the motion of the comet will from thence appear accelerated; and from this apparent acceleration, or retardation, or regressive motion, the distance of the comet may be inferred in this manner.



Let ♈ QA, ♈ QB, ♈ QC, be three observed longitudes of the comet about the time of its first appearing, and ♈ QF its last observed longitude before its disappearing. Draw the right line ABC, whose parts AB, BC, intercepted between the right lines QA and QB, QB and QC, may be one to the other as the two times between the three first observations. Produce AC to G, so as AG may be to AB as the time between the first and last observation to the time between the first and second; and join QG. Now if the comet did move uniformly in a right line, and the earth either stood still, or was likewise carried forwards in a right line by an uniform motion, the angle ♈ QG would be the longitude of the comet at the time of the last observation. The angle, therefore, FQG, which is the difference of the longitude, proceeds from the inequality of the motions of the comet and the earth; and this angle, if the earth and comet move contrary ways, is added to the angle ♈ QG, and accelerates the apparent motion of the comet; but if the comet move the same way with the earth, it is subtracted, and either retards the motion of the comet, or perhaps renders it retrograde, as we have but now explained. This angle, therefore, proceeding chiefly from the motion of the earth, is justly to be esteemed the parallax of the comet; neglecting, to wit, some little increment or decrement that may arise from the unequal motion of the comet in its orbit: and from this parallax we thus deduce the distance of the comet.



Let S represent the sun, *ac*T the *orbis magnus*, *a* the earth's place in the first observation, *c* the place of the earth in the third observation, T the place of the earth in the last observation, and T♈ a right line drawn to the beginning of Aries. Set off the angle ♈TV equal to the angle ♈QF, that is, equal to the longitude of the comet at the time when the earth is in T; join *ac*, and produce it to *g*, so as *ag* may be to *ac* as AG to AC; and *g* will be the place at which the earth would have arrived in the time of the last observation, if it had continued to move uniformly in the right line *ac*. Wherefore, if we draw *g*♈ parallel to T♈, and make the angle ♈*g*V equal to the angle ♈QG, this angle ♈*g*V will be equal to the longitude of the comet seen from the place *g*, and the angle TV*g* will be the parallax which arises from the earth's being transferred from the place *g* into the place T; and therefore V will be the

place of the comet in the plane of the ecliptic. And this place V is commonly lower than the orb of Jupiter.

The same thing may be deduced from the incurvation of the way of the comets; for these bodies move almost in great circles, while their velocity is great; but about the end of their course, when that part of their apparent motion which arises from the parallax bears a greater proportion to their whole apparent motion, they commonly deviate from those circles, and when the earth goes to one side, they deviate to the other; and this deflexion, because of its corresponding with the motion of the earth, must arise chiefly from the parallax; and the quantity thereof is so considerable, as, by my computation, to place the disappearing comets a good deal lower than Jupiter. Whence it follows that when they approach nearer to us in their perigees and perihelions they often descend below the orbs of Mars and the inferior planets.

The near approach of the comets is farther confirmed from the light of their heads; for the light of a celestial body, illuminated by the sun, and receding to remote parts, is diminished in the quadruplicate proportion of the distance; to wit, in one duplicate proportion, on account of the increase of the distance from the sun, and in another duplicate proportion, on account of the decrease of the apparent diameter. Wherefore if both the quantity of light and the apparent diameter of a comet are given, its distance will be also given, by taking the distance of the comet to the distance of a planet in the direct proportion of their diameters and the reciprocal subduplicate proportion of their lights. Thus, in the comet of the year 1682, Mr. *Flamsted* observed with a telescope of 16 feet, and measured with a micrometer, the least diameter of its head, 2’ 00; but the nucleus or star in the middle of the head scarcely amounted to the tenth part of this measure; and therefore its diameter was only 11” or 12”; but in the light and splendor of its head it surpassed that of the comet in the year 1680, and might be compared with the stars of the first or second magnitude. Let us suppose that Saturn with its ring was about four times more lucid; and because the light of the ring was almost equal to the light of the globe within, and the apparent diameter of the globe is about 21”, and therefore the united light of both globe and ring would be equal to the light of a globe whose diameter is 30”, it follows that the distance of the comet was to the distance of Saturn as 1 to inversely, and 12” to 30 directly; that is, as 24 to 30, or 4 to 5. Again;

the comet in the month of *April* 1665, as *Hevelius* informs us, excelled almost all the fixed stars in splendor, and even Saturn itself, as being of a much more vivid colour; for this comet was more lucid than that other which had appeared about the end of the preceding year, and had been compared to the stars of the first magnitude. The diameter of its head was about 6’; but the nucleus, compared with the planets by means of a telescope, was plainly less than Jupiter; and sometimes judged less, sometimes judged equal, to the globe of Saturn within the ring. Since, then, the diameters of the heads of the comets seldom exceed 8’ or 12’, and the diameter of the nucleus or central star is but about a tenth or perhaps fifteenth part of the diameter of the head, it appears that these stars are generally of about the same apparent magnitude with the planets. But in regard that their light may be often compared with the light of Saturn, yea, and sometimes exceeds it, it is evident that all comets in their perihelions must either be placed below or not far above Saturn; and they are much mistaken who remove them almost as far as the fixed stars; for if it was so, the comets could receive no more light from our sun than our planets do from the fixed stars.

So far we have gone, without considering the obscuration which comets suffer from that plenty of thick smoke which encompasseth their heads, and through which the heads always shew dull, as through a cloud; for by how much the more a body is obscured by this smoke, by so much the more near it must be allowed to come to the sun, that it may vie with the planets in the quantity of light which it reflects. Whence it is probable that the comets descend far below the orb of Saturn, as we proved before from their parallax. But, above all, the thing is evinced from their tails, which must be owing either to the sun’s light reflected by a smoke arising from them, and dispersing itself through the aether, or to the light of their own heads. In the former case, we must shorten the distance of the comets, lest we be obliged to allow that the smoke arising from their heads is propagated through such a vast extent of space, and with such a velocity and expansion as will seem altogether incredible; in the latter case, the whole light of both head and tail is to be ascribed to the central nucleus. But, then, if we suppose all this light to be united and condensed within the disk of the nucleus, certainly the nucleus will by far exceed Jupiter itself in splendor, especially when it emits a very large and lucid tail. If, therefore, under a less apparent diameter, it

reflects more light, it must be much more illuminated by the sun, and therefore much nearer to it; and the same argument will bring down the heads of comets sometimes within the orb of Venus, viz., when, being hid under the sun's rays, they emit such huge and splendid tails, like beams of fire, as sometimes they do; for if all that light was supposed to be gathered together into one star, it would sometimes exceed not one Venus only, but a great many such united into one.

Lastly; the same thing is inferred from the light of the heads, which increases in the recess of the comets from the earth towards the sun, and decreases in their return from the sun towards the earth; for so the comet of the year 1665 (by the observations of *Hevelius*), from the time that it was first seen, was always losing of its apparent motion, and therefore had already passed its perigee; but yet the splendor of its head was daily in creasing, till, being hid under the sun's rays, the comet ceased to appear. The comet of the year 1683 (by the observations of the same *Hevelius*), about the end of *July*, when it first appeared, moved at a very slow rate, advancing only about 40 or 45 minutes in its orb in a day's time; but from that time its diurnal motion was continually upon the increase, till *September* 4, when it arose to about 5 degrees; and therefore, in all this interval of time, the comet was approaching to the earth. Which is like wise proved from the diameter of its head, measured with a micrometer; for, *August* 6, *Hevelius* found it only 6' 05", including the *coma*, which, *September* 2 he observed to be 9' 07", and therefore its head appeared far less about the beginning than towards the end of the motion; though about the beginning, because nearer to the sun, it appeared far more lucid than towards the end, as the same *Hevelius* declares. Wherefore in all this interval of time, on account of its recess from the sun, it decreased in splendor, notwithstanding its access towards the earth. The comet of the year 1618, about the middle of *December*, and that of the year 1680, about the end of the same month, did both move with their greatest velocity, and were therefore then in their perigees; but the greatest splendor of their heads was seen two weeks before, when they had just got clear of the sun's rays; and the greatest splendor of their tails a little more early, when yet nearer to the sun. The head of the former comet (according to the observations of *Cysatus*), *December* 1, appeared greater than the stars of the first magnitude; and, *December* 16 (then in the perigee), it was but little

diminished in magnitude, but in the splendor and brightness of its light a great deal. *January* 7, *Kepler*, being uncertain about the head, left off observing. *December* 12, the head of the latter comet was seen and observed by Mr. *Flamsted*, when but 9 degrees distant from the sun; which is scarcely to be done in a star of the third magnitude. *December* 15 and 17, it appeared as a star of the third magnitude, its lustre being diminished by the brightness of the clouds near the setting sun. *December* 26, when it moved with the greatest velocity, being almost in its perigee, it was less than the mouth of *Pegasus*, a star of the third magnitude. *January* 3, it appeared as a star of the fourth. *January* 9, as one of the fifth. *January* 13, it was hid by the splendor of the moon, then in her increase. *January* 25, it was scarcely equal to the stars of the seventh magnitude. If we compare equal intervals of time on one side and on the other from the perigee, we shall find that the head of the comet, which at both intervals of time was far, but yet equally, removed from the earth, and should have therefore shone with equal splendor, appeared brightest on the side of the perigee towards the sun, and disappeared on the other. Therefore, from the great difference of light in the one situation and in the other, we conclude the great vicinity of the sun and comet in the former; for the light of comets uses to be regular, and to appear greatest when the heads move fastest, and are therefore in their perigees; excepting in so far as it is increased by their nearness to the sun.

Cor. 1. Therefore the comets shine by the sun's light, which they reflect.

Cor. 2. From what has been said, we may likewise understand why comets are so frequently seen in that hemisphere in which the sun is, and so seldom in the other. If they were visible in the regions far above Saturn, they would appear more frequently in the parts opposite to the sun; for such as were in those parts would be nearer to the earth, whereas the presence of the sun must obscure and hide those that appear in the hemisphere in which he is. Yet, looking over the history of comets, I find that four or five times more have been seen in the hemisphere towards the sun than in the opposite hemisphere; besides, without doubt, not a few, which have been hid by the light of the sun: for comets descending into our parts neither emit tails, nor are so well illuminated by the sun, as to discover themselves to our naked eyes, until they are come nearer to us than Jupiter. But the far greater part of that spherical space, which is described about the sun with so small an

interval, lies on that side of the earth which regards the sun; and the comets in that greater part are commonly more strongly illuminated, as being for the most part nearer to the sun.

Cor. 3. Hence also it is evident that the celestial spaces are void of resistance; for though the comets are carried in oblique paths, and some times contrary to the course of the planets, yet they move every way with the greatest freedom, and preserve their motions for an exceeding long time, even where contrary to the course of the planets. I am out in my judgment if they are not a sort of planets revolving in orbits returning into themselves with a perpetual motion; for, as to what some writers contend, that they are no other than meteors, led into this opinion by the perpetual changes that happen to their heads, it seems to have no foundation; for the heads of comets are encompassed with huge atmospheres, and the lowermost parts of these atmospheres must be the densest; and therefore it is in the clouds only, not in the bodies of the comets them selves, that these changes are seen. Thus the earth, if it was viewed from the planets, would, without all doubt, shine by the light of its clouds, and the solid body would scarcely appear through the surrounding clouds. Thus also the belts of Jupiter are formed in the clouds of that planet, for they change their position one to another, and the solid body of Jupiter is hardly to be seen through them; and much more must the bodies of comets be hid under their atmospheres, which are both deeper and thicker.

PROPOSITION XL. THEOREM XX.

That the comets move in some of the conic sections, having their foci in the centre of the sun; and by radii drawn to the sun describe areas proportional to the times.

This proposition appears from Cor. 1, Prop. XIII, Book 1, compared with Prop. VIII, XII, and XIII, Book III.

Cor. 1. Hence if comets are revolved in orbits returning into themselves, those orbits will be ellipses; and their periodic times be to the periodic times of the planets in the sesquiplicate proportion of their principal axes. And therefore the comets, which for the most part of their course are higher than

the planets, and upon that account describe orbits with greater axes, will require a longer time to finish their revolutions. Thus if the axis of a comet's orbit was four times greater than the axis of the orbit of Saturn, the time of the revolution of the comet would be to the time of the revolution of Saturn, that is, to 30 years, as 4 (or 8) to 1, and would therefore be 240 years.

Cor. 2. But their orbits will be so near to parabolas, that parabolas may be used for them without sensible error.

Cor. 3. And, therefore, by Cor. 7, Prop. XVI, Book 1, the velocity of every comet will always be to the velocity of any planet, supposed to be revolved at the same distance in a circle about the sun, nearly in the subduplicate proportion of double the distance of the planet from the centre of the sun to the distance of the comet from the sun's centre, very nearly. Let us suppose the radius of the *orbis manus*, or the greatest semidiameter of the ellipsis which the earth describes, to consist of 100000000 parts; and then the earth by its mean diurnal motion will describe 1720212 of those parts, and 71675½ by its horary motion. And therefore the comet, at the same mean distance of the earth from the sun, with a velocity which is to the velocity of the earth as to 1, would by its diurnal motion describe 2432747 parts, and 101364½ parts by its horary motion. But at greater or less distances both the diurnal and horary motion will be to this diurnal and horary motion in the reciprocal subduplicate proportion of the distances, and is therefore given.

Cor. 4. Wherefore if the *latus rectum* of the parabola is quadruple of the radius of the *orbis magnus*, and the square of that radius is sup posed to consist of 100000000 parts, the area which the comet will daily describe by a radius drawn to the sun will be 1216373½ parts, and the horary area will be 50682¼ parts. But, if the *latus rectum* is greater or less in any proportion, the diurnal and horary area will be less or greater in the subduplicate of the same proportion reciprocally.

LEMMA V.

To find a curve line of the parabolic kind which shall pass through any given number of points.

Let those points be A, B, C, D, E, F, &c., and from the same to any right line HN, given in position, let fall as many perpendiculars AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c.

b

2b

3b

4b

5b

c

2c

3c

4c

d

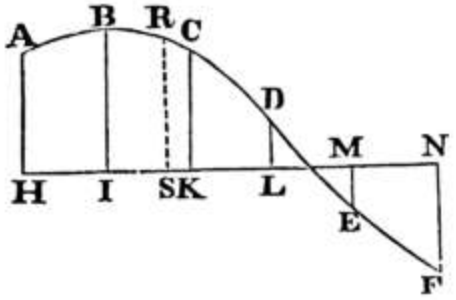
2d

3d

e

2e

f



Case 1. If HI, IK, KL, &c., the intervals of the points H, I, K, L, M, N, &c., are equal, take *b, 2b, 3b, 4b, 5b,* &c., the first differences of the perpendiculars AH, BI, CK, &c.; their second differences *c, 2c, 3c, 4c, &c.*; their third, *d, 2d, 3d,* &c., that is to say, so as AH - BI may be = *b*, BI - CK = 2*b*, CK - DL = 3*b*, DL + EM = 4*b*, - EM + FN = 5*b*, &c.; then *b* - 2*b* = *c*, &c., and so on to the last difference, which is here *f*. Then, erecting any perpendicular RS, which may be considered as an ordinate of the curve required, in order to find the length of this ordinate, suppose the intervals HI, IK, KL, LM, &c., to be units, and let AH = *a*, - HS = *p*, ½*p* into - IS = *q*, ⅓*q* into + SK = *r*, ¼*r* into + SL = *s*, $\frac{1}{5}s$ into + SM = *t*; proceeding, to wit, to ME, the last perpendicular but one, and prefixing negative signs before the terms HS, IS, &c., which lie from S towards A; and affirmative signs before the terms SK, SL, &c., which lie on the other side of the point S; and, observing well the signs, RS will be = *a* + *bp* + *cq* + *dr* + *es* + ft, + &c.

Case 2. But if HI, IK, &c., the intervals of the points H, I, K, L, &c.. are unequal, take *b, 2b, 3b, 4b, 5b,* &c., the first differences of the perpendiculars AH, BI, CK, &c., divided by the intervals between those perpendiculars; *c, 2c, 3c, 4c,* &c., their second differences, divided by the intervals between every two; *d, 2d, 3d,* &c., their third differences, divided by the intervals between every three; *e, 2e,* &c., their fourth differences, divided by the intervals between every four; and so forth; that is, in such manner, that *b* may be, , , &c., then, , , &c., then, , &c. And those differences being found, let AH be = *a*, - HS = *p, p* into - IS = *q, q* into + SK = *r, r* into + SL = *s, s* into + SM = *t*; proceeding, to wit, to ME, the last perpendicular but one: and the ordinate RS will *be* = *a* + *bp* + *cq* + *dr* + *es* + *ft,* + &c.

Cor. Hence the areas of all curves may be nearly found; for if some number of points of the curve to be squared are found, and a parabola be supposed to be drawn through those points, the area of this parabola will be nearly the same with the area of the curvilinear figure proposed to be squared: but the parabola can be always squared geometrically by methods vulgarly known.

LEMMA VI.

Certain observed places of a comet being given, to find the place of the same to any intermediate given time.

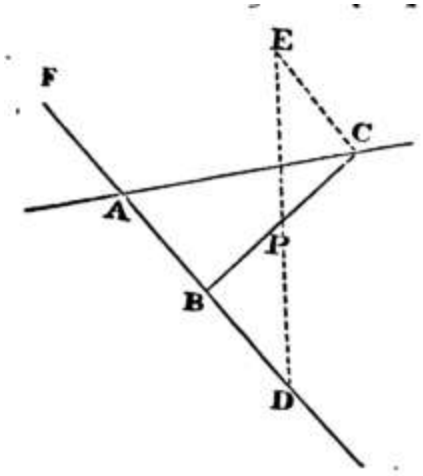
Let HI, IK, KL, LM (in the preceding Fig.), represent the times between the observations; HA, IB, KC, LD, ME, five observed longitudes of the comet; and HS the given time between the first observation and the longitude required. Then if a regular curve ABCDE is supposed to be drawn through the points A, B, C, D, E, and the ordinate RS is found out by the preceding lemma, RS will be the longitude required.

After the same method, from five observed latitudes, we may find the latitude to a given time.

If the differences of the observed longitudes are small, suppose of 4 or 5 degrees, three or four observations will be sufficient to find a new longitude and latitude; but if the differences are greater, as of 10 or 20 degrees, five observations ought to be used.

LEMMA VII.

Through a given point P to draw a right line BC*, whose parts* PB, PC*, cut off by two right lines* AB, AC*, given in position, may be one to the other in a given proportion.*

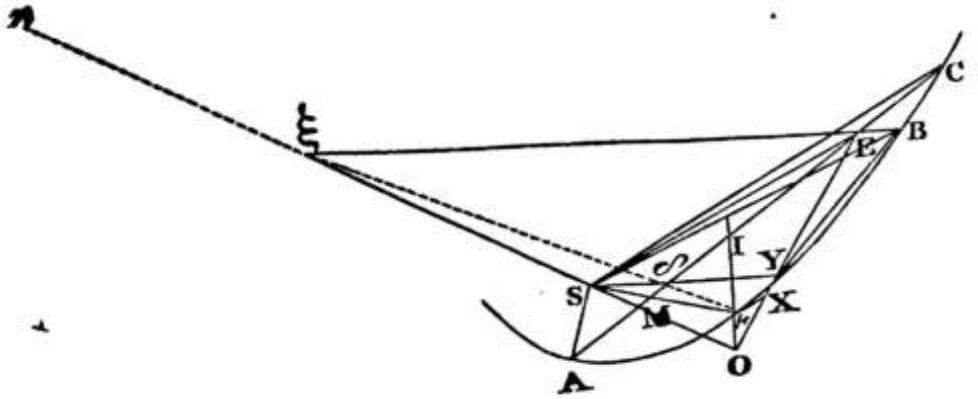


From the given point P suppose any right line PD to be drawn to either of the right lines given, as AB; and produce the same towards AC, the other given right line, as far as E, so as PE may be to PD in the given proportion. Let EC be parallel to AD. Draw CPB, and PC will be to PB as PE to PD. Q.E.F.

LEMMA VIII.

Let ABC *be a parabola, having its focus in* S. *By the chord* AC *bisected in* I *cut off the segment* ABCI*, whose diameter is* Iμ *and vertex* μ. *In* Iμ *produced take* μO *equal to one half of* Iμ. *Join* OS*, and produce it to* ξ, *so as* Sξ *may be equal to* 2SO. *Now, supposing a comet to revolve in the arc* CBA*, draw* ξB*, cutting* AC *in* E*; I say, the point* E *will cut off from the chord* AC *the segment* AE*, nearly proportional to the time.*

For if we join EO, cutting the parabolic arc ABC in Y, and draw μX touching the same arc in the vertex μ, and meeting EO in X, the curvilinear area AEXμA will be to the curvilinear area ACYμA as AE to AC; and, therefore, since the triangle ASE is to the triangle ASC in the same proportion, the whole area ASEXμA will be to the whole area ASCYμA as



AE to AC. But, because ξO is to SO as 3 to 1, and EO to XO in the same proportion, SX will be parallel to EB; and, therefore, joining BX, the triangle SEB will be equal to the triangle XEB. Wherefore if to the area ASEXμA we add the triangle EXB, and from the sum subduct the triangle SEB, there will remain the area ASBXμA, equal to the area ASEXμA, and therefore in proportion to the area ASCYμA as AE to AC. But the area

ASBYμA is nearly equal to the area ASBXμA; and this area ASBYμA is to the area ASCYμA as the time of description of the arc AB to the time of description of the whole arc AC; and, therefore, AE is to AC nearly in the proportion of the times. Q.E.D.

Cor. When the point B falls upon the vertex μ of the parabola, AE is to AC accurately in the proportion of the times.

SCHOLIUM.

If we join $\mu\xi$ cutting AC in δ, and in it take ξn in proportion to μB as 27MI to 16Mμ, and draw B*n*, this B*n* will cut the chord AC, in the proportion of the times, more accurately than before; but the point *n* is to be taken beyond or on this side the point ξ, according as the point B is more or less distant from the principal vertex of the parabola than the point μ.

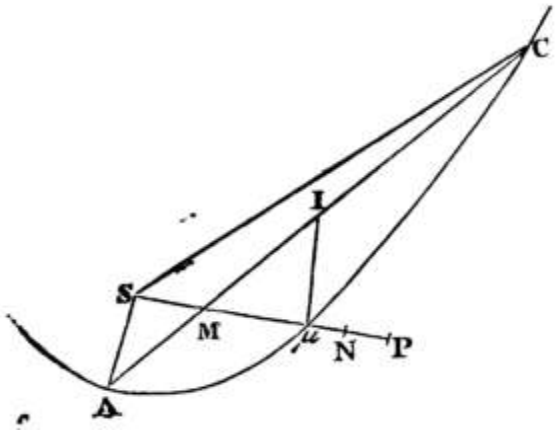
LEMMA IX.

*The right lines I*μ *and* μ*M, and the length , are equal among themselves.*

For 4Sμ is the latus rectum of the parabola belonging to the vertex μ.

LEMMA X.

Produce Sμ *to* N *and* P*, so as* μN *may be one third of* μI*, and* SP *may be to* SN *as* SN *to* Sμ*; and in the time that a comet would describe the arc* AμC*, if it was supposed to move always forwards with the velocity which it hath in a height equal to* SP*, it would describe a length equal to the chord* AC.

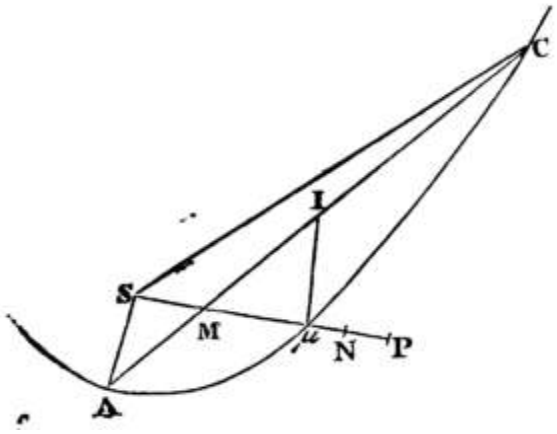


For if the comet with the velocity which it hath in μ was in the said time supposed to move uniformly forward in the right line which touches the parabola in μ, the area which it would describe by a radius drawn to the point's would be equal to the parabolic area ASCμA; and therefore the space contained under the length described in the tangent and the length Sμ would be to the space contained under the lengths AC and SM as the area ASCμA to the triangle ASC, that is, as SN to SM. Wherefore AC is to the length described in the tangent as Sμ to SN. But since the velocity of the comet in the height SP (by Cor. 6, Prop. XVI., Book I) is to the velocity of the same in the height Sμ in the reciprocal subduplicate proportion of SP to Sμ, that is, in the proportion of Sμ to SN, the length described with this velocity will be to the length in the same time described in the tangent as Sμ to SN. Wherefore since AC, and the length described with this new velocity, are in the same proportion to the length described in the tangent, they mast be equal betwixt themselves. Q.E.D.

Cor. Therefore a comet, with that velocity which it hath in the height Sμ + ⅔Iμ, would in the same time describe the chord AC nearly.

LEMMA XI.

If a comet void of all motion was let fall from, the height SN*, or* Sμ + ⅓Iμ*, towards the sun, and was still impelled to the sun by the same force uniformly continued by which it was impelled at first, the same, in one half of that time in which it might describe the arc* AC *in its own orbit, would in descending describe a space equal to the length* Iμ.



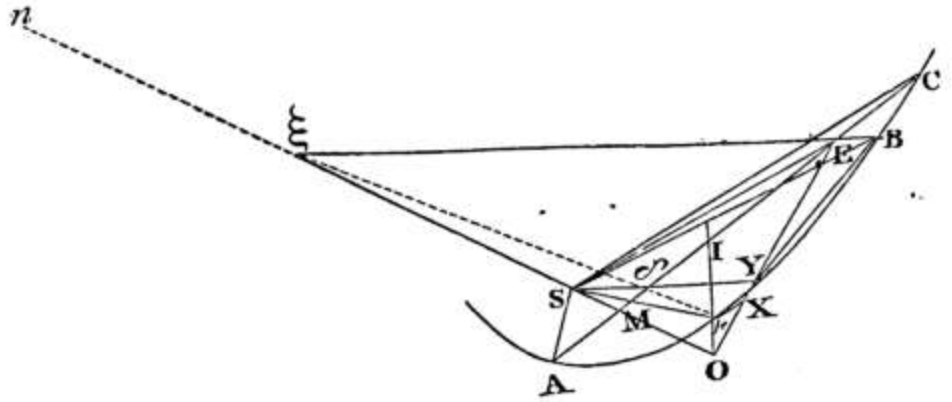
For in the same time that the comet would require to describe the parabolic arc AC, it would (by the last Lemma), with that velocity which it hath in the height SP, describe the chord AC; and, therefore (by Cor. 7, Prop. XVI, Book 1), if it was in the same time supposed to revolve by the force of its own gravity in a circle whose semidiameter was SP, it would describe an arc of that circle, the length of which would be to the chord of the parabolic arc AC in the subduplicate proportion of 1 to 2. Wherefore if with that weight, which in the height SP it hath towards the sun, it should fall from that height towards the sun, it would (by Cor. 9, Prop. XVI, Book 1) in half the said time describe a space equal to the square of half the said chord applied to quadruple the height SP, that is, it would describe the space. But since the weight of the comet towards the sun in the height SN is to the weight of the same towards the sun in the height SP as SP to Sμ, the comet, by the weight which it hath in the height SN, in falling from that height towards the sun, would in the same time describe the space; that is, a space equal to the length Iμ or μM . Q.E.D.

PROPOSITION XLI. PROBLEM XXI.

From three observations given to determine the orbit of a comet moving in a parabola.

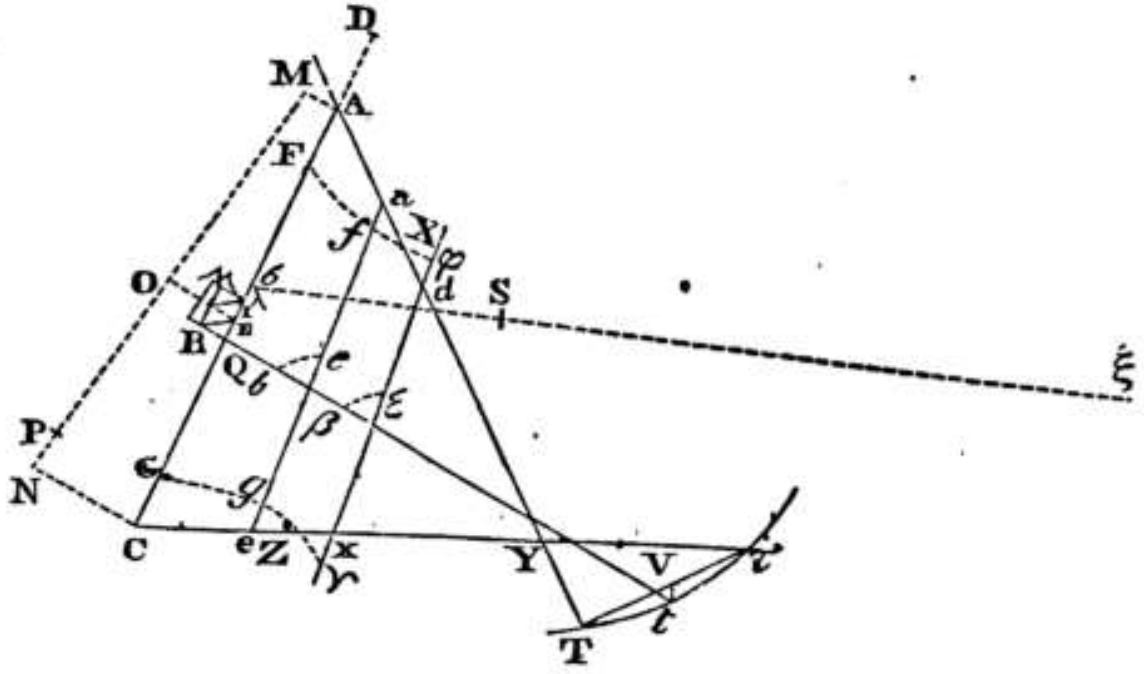
This being a Problem of very great difficulty, I tried many methods of resolving it; and several of these Problems, the composition whereof I have given in the first Book, tended to this purpose. But afterwards I contrived the following solution, which is something more simple.

Select three observations distant one from another by intervals of time nearly equal; but let that interval of time in which the comet moves more slowly be somewhat greater than the other; so, to wit, that the difference of the times may be to the sum of the times as the sum of the



times to about 600 days; or that the point E may fall upon M nearly, and may err therefrom rather towards I than towards A. If such direct observations are not at hand, a new place of the comet must be found, by Lem. VI.

Let S represent the sun; T, *t, τ*, three places of the earth in the *orbis magnus*; TA, *t*B, *τ*C, three observed longitudes of the comet; V the time between the first observation and the second; W the time between the second and the third; X the length which in the whole time V + W



the comet might describe with that velocity which it hath in the mean distance of the earth from the sun, which length is to be found by Cor. 3, Prop. XL, Book III; and *t*V a perpendicular upon the chord T*τ*. In the mean observed longitude *t*B take at pleasure the point B, for the place of the comet in the plane of the ecliptic; and from thence, towards the sun S, draw the line BE, which may be to the perpendicular *t*V as the content under SB and S*t*² to the cube of the hypothenuse of the right angled triangle, whose sides are SB, and the tangent of the latitude of the comet in the second observation to the radius *t*B. And through the point E (by Lemma VII) draw the right line AEC, whose parts AE and EC, terminating in the right lines TA and *τ*C, may be one to the other as the times V and W: then A and C will be nearly the places of the comet in the plane of the ecliptic in the first and third observations, if B was its place rightly assumed in the second.

Upon AC, bisected in I, erect the perpendicular I*i*. Through B draw the obscure line B*i* parallel to AC. Join the obscure line S*i*, cutting AC in *λ*, and complete the parallelogram *i*I *λμ*. Take I*σ* equal to 3I*λ*; and through the sun S draw the obscure line *σξ* equal to 3S*σ* + 3*iλ*. Then, cancelling the letters A, E, C, I, from the point B towards the point *ξ*, draw the new obscure line BE, which may be to the former BE in the duplicate proportion of the distance BS to the quantity S*μ* + ⅓*iλ*. And through the point E draw again the right line AEC by the same rule as before; that is, so as its parts AE and EC may be one to the other as the times V and W between the observations. Thus A and C will be the places of the comet more accurately.

Upon AC, bisected in I, erect the perpendiculars AM, CN, IO, of which AM and CN may be the tangents of the latitudes in the first and third observations, to the radii TA and *τ*C. Join MN, cutting IO in O. Draw the rectangular parallelogram *i*I*λμ*, as before. In IA produced take ID equal to S*μ* + ⅔*iλ*. Then in MN, towards N, take MP, which may be to the above found length X in the subduplicate proportion of the mean distance of the earth from the sun (or of the semidiameter of the *orbis magnus*) to the distance OD. If the point P fall upon the point N; A, B, and C, will be three places of the comet, through which its orbit is to be described in the plane of the ecliptic. But if the point P falls not upon the point N, in the right line AC take CG equal to NP, so as the points G and P may lie on the same side of the line NC.

By the same method as the points E, A, C, G, were found from the assumed point B, from other points *b* and *β* assumed at pleasure, find out the new points *e, a, c, g*; and *ε, α, κ, γ*. Then through G, *g*, and *γ*, draw the circumference of a circle G*gγ*, cutting the right line *τ*C in Z: and Z will he one place of the comet in the plane of the ecliptic. And in AC, *ac, ακ*, taking AF, af, *αΦ*, equal respectively to CG, *cg, κγ*; through the points F, *f*, and *Φ*, draw the circumference of a circle F*fΦ*, cutting the right line AT in X; and the point X will be another place of the comet in the plane of the ecliptic. And at the points X and Z, erecting the tangents of the latitudes of the comet to the radii TX and *τ*Z, two places of the comet in its own orbit will be determined. Lastly, if (by Prop. XIX., Book 1) to the focus S a parabola is described passing through those two places, this parabola will be the orbit of the comet. Q.E.I.

The demonstration of this construction follows from the preceding Lemmas, because the right line AC is cut in E in the proportion of the times, by Lem. VII., as it ought to be, by Lem. VIII.; and BE; by Lem. XI., is a portion of the right line BS or B*ξ* in the plane of the ecliptic, intercepted between the arc ABC and the chord AEC; and MP (by Cor. Lem. X.) is the length of the chord of that arc, which the comet should describe in its proper orbit between the first and third observation, and therefore is equal to MN, providing B is a true place of the comet in the plane of the ecliptic.

But it will be convenient to assume the points B, *b, β*, not at random, but nearly true. If the angle AQ*t*, at which the projection of the orbit in the plane of the ecliptic cuts the right line *t*B, is rudely known, at that angle with B*t* draw the obscure line AC, which may be to $\frac{4}{3}$T*τ* in the subduplicate proportion of SQ, to S*t*; and, drawing the right line SEB so as its part EB may be equal to the length V*t*, the point B will be determined, which we are to use for the first time. Then, cancelling the right line AC, and drawing anew AC according to the preceding construction, and, moreover, finding the length MP, in *t*B take the point *b*, by this rule, that, if TA and *τ*C intersect each other in Y, the distance Y*b* may be to the distance YB in a proportion compounded of the proportion of MP to MN, and the subduplicate proportion of SB to S*b*. And by the same method you may find the third point *β*, if you please to repeat the operation the third time; but if this method is followed, two operations generally will be sufficient; for if

the distance B*b* happens to be very small, after the points F, *f*, and G, *g*, are found, draw the right lines F*f* and G*g*, and they will cut TA and τC in the points required, X and Z.

EXAMPLE.

Let the comet of the year 1680 be proposed. The following table shews the motion thereof, as observed by *Flamsted*, and calculated afterwards by him from his observations, and corrected by Dr. *Halley* from the same observations.

1680, *Dec*. 12

21

24

26

29

30

1681, *Jan*. 5

9

10

13

25

30

Feb. 2
5

Time	Sun's Longitude	Comet's Appar. True. Longitude. Lat. N.
h. "		
4.46		
6.32½		
6.12		
5.14		
7.55		
8.02		
5.51		
6.49		
5.54		
6.56		
7.44		
8.07		
6.20		
6.50		

h. ‘ “
4.46.0
6.36.59
6.17.52
5.20.44
8.03.02
8.10.26
6.01.38
7.00.53
6.06.10
7.08.55
7.58.42
8.21.53
6.34.51
7.04.41

∘ ‘ “
♑ 1.51.23

11.06.44

14.09.26

16.09.22

19.19.43

20.21.09

26.22.18
♒ 0.29.02

1.27.43

4.33.20

16.45.36

21.49.58

24.46.59

27.49.51

° ‘ “

♑ 6.32.30
♒ 5.08.12

18.49.23

28.24.13
♓ 13.10.41

17.38.20

♈ 8.48.53

18.44.04

20.40.50

25.59.48

♉ 9.35.0

13.19.51

15.13.53
16.59.06

° ‘ “

8.25. 0

21.42.13

25.23. 5

27.00.52

28.09.58

28.11.53

26.15. 7

24.11.56

23.43.52

22.17.28

17.56.30

16.42.18

16.04. 1
15.27. 3

To these you may add some observations of mine.

1681, Feb. 25

27

Mar. 1

2

5

7

9

Ap.
Time.

Comet's

Longitude

Lat. N.

h. '

8.30

8.15
11. 0
8. 0

11.30

9.30
8.30

° ‘ “
♉ 26.18.35

27.04.30

27.52.42

28.12.48

29.18. 0
♊ 0. 4. 0
0. 43. 4

° ‘ “

12.46.46

12.36.12

12.23.40

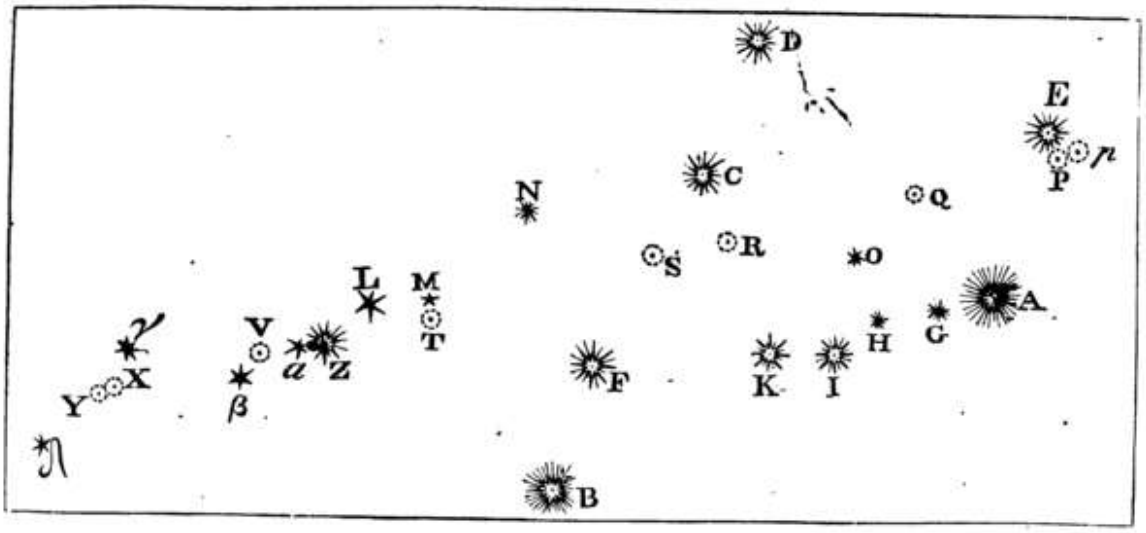
12.19.38

12.03.16

11.57. 0
11.45.52

These observations were made by a telescope of 7 feet, with a micrometer and threads placed in the focus of the telescope; by which

instruments we determined the positions both of the fixed stars among themselves, and of the comet in respect of the fixed stars. Let A represent the star of the fourth magnitude in the left heel of *Perseus* (*Bayer's' o*), B the following star of the third magnitude in the left foot (*Bayer's ζ*), C a star of the sixth magnitude (*Bayer's n*) in the heel of the same foot, and D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, *α, β, γ, δ*, other smaller stars in the same foot; and let *p*, P, Q, R, S, T, V, X, represent the places of the comet in the observations above set down; and, reckoning the distance AB of $80\frac{7}{12}$ parts, AC was 52¼ of those parts; BC, $58\frac{5}{6}$; AD, $57\frac{5}{12}$; BD, $82\frac{6}{11}$; CD, 23⅔; AE, $29\frac{4}{7}$; CE, 57½; DE, $49\frac{11}{12}$; AI, $27\frac{7}{12}$; BI, $52\frac{1}{6}$; CI, $36\frac{7}{12}$; DI, $53\frac{5}{11}$; AK, 38⅔; BK, 43; CK, $31\frac{5}{9}$; FK, 29; FB, 23; FC, 36¼; AH, $18\frac{6}{7}$; DH, $50\frac{7}{8}$; BN, $46\frac{5}{12}$; CN, 31⅓; BL, $45\frac{5}{12}$; NL, $31\frac{5}{7}$. HO was to HI as 7 to 6, and, produced, did pass between the stars D and E, so as the distance of the star D from this right line was $\frac{1}{6}$CD. LM was to LN as 2 to 9, and, produced, did pass through the star H. Thus were the positions of the fixed stars determined in respect of one another.



Mr. *Pound* has since observed a second time the positions of those fixed stars amongst themselves, and collected their longitudes and latitudes according to the following table.

The fixed stars.

Their
Longitudes

Latitude
North.

The
fixed
stars.

Their
Longitudes

Latitude
North.

A
B
C
E
F
G
H
I
K

° ‘ “
♉ 26.41.50

28.40.23

27.58.30

26.27.17

28.28.37
26.56. 8

27.11.45

27.25. 2
27.42. 7

° ‘ “
♉ 12. 8.36

11.17.54

12.40.25
12.52. 7

11.52.22

14.4.58
12.2. 1

11.53.11

11.53.26

L
M
N
Z
α
β
γ
δ

° ‘ “
♉ 29.33.34

29.18.54

28.48.29

29.44.48

29.52. 3
♊ 0. 8.23

0.40.10

1. 3.20

° ‘ “
12. 7.48
12. 7.20
12.31. 9

11.57.13

11.55.48

11.48.53

11.55.18
11.30.42

The positions of the comet to these fixed stars were observed to be as follow:

Friday, *February* 25, O.S. at $8\frac{1}{2}^{h}$. P. M. the distance of the comet in *p* from the star E was less than $\frac{3}{13}$AE, and greater than $\frac{1}{5}$AE, and therefore nearly equal to $\frac{3}{14}$AE; and the angle A*p*E was a little obtuse, but almost right. For from A, letting fall a perpendicular on *p*E; the distance of the comet from that perpendicular was $\frac{1}{5}$*p*E.

The same night, at $9\frac{1}{2}^h$., the distance of the comet in P from the star E was greater than AE, and less than AE, and therefore nearly equal to of AE, or $\frac{8}{39}$ AE. But the distance of the comet from the perpendicular let fall from the star A upon the right line PE was $\frac{4}{5}$PE.

Sunday, *February* 27, $8\frac{1}{4}^h$. P. M. the distance of the comet in Q from the star O was equal to the distance of the stars O and H; and the right line QO produced passed between the stars K and B. I could not, by reason of intervening clouds, determine the position of the star to greater accuracy.

Tuesday, *March* 1, 11^h . P. M. the comet in R lay exactly in a line between the stars K and C, so as the part CR of the right line CRK was a little greater than ⅓CK, and a little less than ⅓CK + $\frac{1}{8}$CR, and therefore = ⅓CK + $\frac{1}{16}$CR, or $\frac{16}{45}$CK.

Wednesday, *March* 2, 8^h. P. M. the distance of the comet in S from the star C was nearly $\frac{4}{9}$FC; the distance of the star F from the right line CS produced was $\frac{1}{24}$FC; and the distance of the star B from the same right line was five times greater than the distance of the star F; and the right line NS produced passed between the stars H and I five or six times nearer to the star H than to the star I.

Saturday, *March* 5, $11\frac{1}{2}^h$. P. M. when the comet was in T, the right line MT was equal to ½ML, and the right line LT produced passed between B and F four or five times nearer to F than to B, cutting off from BF a fifth or sixth part thereof towards F: and MT produced passed on the outside of the space BF towards the star B four times nearer to the star B than to the star F. M was a very small star, scarcely to be seen by the telescope; but the star L was greater, and of about the eighth magnitude.

Monday, *March* 7, $9\frac{1}{2}^h$. P. M. the comet being in V, the right line V*a* produced did pass between B and F, cutting off, from BF towards F, $\frac{1}{10}$ of BF, and was to the right line Vβ as 5 to 4. And the distance of the comet from the right line $\alpha\beta$ was ½Vβ.

Wednesday, *March* 9, $8\frac{1}{2}^h$. P. M. the comet being in X, the right line γX was equal to ¼$\gamma\delta$ and the perpendicular let fall from the star δ upon the right γX was $\frac{2}{5}$ of $\gamma\delta$.

The same night, at 12^h. the comet being in Y, the right line γY was equal to ⅓ of $\gamma\delta$, or a little less, as perhaps $^5/_{16}$ of $\gamma\delta$; and a perpendicular let fall from the star δ on the right line γY was equal to about $^1/_6$ or $^1/_7$ $\gamma\delta$. But the comet being then extremely near the horizon, was scarcely discernible, and therefore its place could not be determined with that certainty as in the foregoing observations.

Prom these observations, by constructions of figures and calculations, I deduced the longitudes and latitudes of the comet; and Mr. *Pound*, by correcting the places of the fixed stars, hath determined more correctly the places of the comet, which correct places are set down above. Though my micrometer was none of the best, yet the errors in longitude and latitude (as derived from my observations) scarcely exceed one minute. The comet (according to my observations), about the end of its motion, began to decline sensibly towards the north, from the parallel which it described about the end of *February*.

Now, in order to determine the orbit of the comet out of the observations above described, I selected those three which *Flamsted* made, *Dec*. 21, *Jan*. 5, and *Jan*. 25; from which I found S*t* of 9842,1 parts, and V*t* of 455, such as the semidiameter of the *orbis magnus* contains 10000. Then for the first observation, assuming *t*B of 5657 of those parts, I found SB 9747, BE for the first time 412, Sμ 9503, *i*λ 413, BE for the second time 421, OD 10186, X 8528,4, PM 8450, MN 8475, NP 25; from whence, by the second operation, I collected the distance *tb* 5640; and by this operation I at last deduced the distances TX 4775 and τZ 11322. From which, limiting the orbit, I found its descending node in ♋, and ascending node in ♑ 1° 53; the inclination of its plane to the plane of the ecliptic 61° 20⅓, the vertex thereof (or the perihelion of the comet) distant from the node 8° 38, and in ♐ 27° 43', with latitude 7° 34' south; its *latus rectum* 236,8; and the diurnal area described by a radius drawn to the sun 93585, supposing the square of the semidiameter of the *orbis magnus* 100000000; that the comet in this orbit moved directly according to the order of the signs, and on *Dec*. $8^d.00^h.04'$ P. M was in the vertex or perihelion of its orbit. All which I determined by scale and compass, and the chords of angles, taken from the table of natural sines, in a pretty large figure, in which, to wit, the radius of

the *orbis magnus* (consisting of 10000 parts) was equal to 16⅓ inches of an *English* foot.

Lastly, in order to discover whether the comet did truly move in the orbit so determined, I investigated its places in this orbit partly by arithmetical operations, and partly by scale and compass, to the times of some of the observations, as may be seen in the following table: — The Comet's

Dist. from sun.	Longitude computed.	Latitud. computed.	Longitude observed.	Latitude observed	Dif. Lo.	Dif. Lat.
Dec. 12						

Feb. 5
Mar. 5

2792
8403
16669
21737

♑ 6°.32’
♓ 13 .13⅔
♉ 17 .00
29 .19¾

8°.18½
28 .00
15 .29⅔
12 . 4

♑ 6° 31½
♓ 13 .11
♉ 16 .59⅞
29 .20⅙

8°.26
28 .10 1/12
15 .27⅖
12 .3½

+1
+2
+0
-1

-7½
-10 1/12

+ 2¼
+ ½

But afterwards Dr. *Halley* did determine the orbit to a greater accuracy by an arithmetical calculus than could be done by linear descriptions; and, retaining the place of the nodes in ♋ and ♑ 1° 53’, and the inclination of the plane of the orbit to the ecliptic 61° 20⅓’, as well as the time of the comet’s being in perihelio, *Dec*. $8^{d}.00^{h}.04$’, he found the distance of the perihelion from the ascending node measured in the comet’s orbit 9° 20’, and the *lutus rectum* of the parabola 2430 parts, supposing the mean distance of the sun from the earth to be 100000 parts; and from these *data*, by an accurate arithmetical calculus, he computed the places of the comet to the times of the observations as follows: — The Comet’s

True time.	Dist from the sun.	Longitude computed.	Latitude computed.	Errors in Long.	Errors in Lat.
d. h. ‘ “					
Dec. 12.4.46.					
21.6.37.					
24.6.18.					

26.5.20.
29.8. 3.
30.8.10.
Jan. 5.3.1.½
9.7. 0.
10.6. 6.
13.7. 9.
25.7.59.
30.8.22.
Feb. 2.6.35.
5.7.4.½
25.8.41.
Mar. 5.11.39.

28025

61076

70008

75576

84021

86661

101440

110959

113162

120000

145370

155303

160951

166686

202570

216205

° ‘ “

♑ 6.29.25
♒ 5.6.30

18.48.20

28.22.45
♓ 13.12.40

17.40.5

♈ 8.49.49

18.44.36

20.41.0

26.0.21

♉ 9.33.40

13.17.41

15.11.11

16.58.55

26.15.46
29.18.35

° ‘ “

8.26.0 bor.

21.43.20

25.22.40

27.1.36

28.10.10

28.11.20

26.15.15

24.12.54

23.44.10

22.17.30

17.57.55

16.42.7

16.4.15

15.29.13

12.48.0
15.5.40

‘ “

-3.5
-1.42

-1.3
-1.28
+1.59
+1.45
+0.56
+0.32

0.10

0.33
-1.20
-2.10
-2.42
-0.41
-2.49
+0.35

‘ “

-2.0
+1.7
-0.25
+0.44
+0.12
-0.33
+0.8

0.58

+0.18
+0.2
+1.25
-0.11
+0.14
+2.0
+1.10
+2.14

This comet also appeared in the *November* before, and at *Coburg*, in *Saxony*, was observed by Mr. *Gottfried Kirch*, on the 4th of that month, on the 6th and 11th O. S.; from its positions to the nearest fixed stars observed with sufficient accuracy, sometimes with a two feet, and sometimes with a ten feet telescope; from the difference of longitudes of *Coburg* and *London*, 11°; and from the places of the fixed stars observed by Mr. *Pound*, Dr. *Halley* has determined the places of the comet as follows: — *Nov*. 3, $17^{h}.2'$, apparent time at *London*, the comet was in ♌ 29 deg. 51', with 1 deg. 17' 45" latitude north.

November 5. $15^{h}.58'$ the comet was in ♍ 3° 23', with 1° 6' nortl. lat.

November 10, $16^{h}.31'$, the comet was equally distant from two stars in ♌ which are σ and τ in *Bayer*; but it had not quite touched the right line that joins them, but was very little distant from it. In *Flamsted's* catalogue this star σ was then in ♍ 14° 15', with 1 deg. 41' lat. north nearly, and τ in ♍ 17° 3½', with 0 deg. 34 lat. south; and the middle point between those stars was ♍ 15° 39¼', with 0° 33½' lat. north. Let the distance of the comet from that right line be about 10' or 12'; and the difference of the longitude of the comet and that middle point will be 7'; and the difference of the latitude nearly 7½'; and thence it follows that the comet was in ♍ 15° 32', with about 26' lat. north.

The first observation from the position of the comet with respect to certain small fixed stars had all the exactness that could be desired; the second also was accurate enough. In the third observation, which was the least accurate, there might be an error of 6 or 7 minutes, but hardly greater. The longitude of the comet, as found in the first and most accurate observation, being computed in the aforesaid parabolic orbit, comes out ♌ 29° 30’ 22”, its latitude north 1° 25’ 7”, and its distance from the sun 115546.

Moreover, Dr. *Halley*, observing that a remarkable comet had appeared four times at equal intervals of 575 years (that is, in the month of *September* after *Julius Caesar* was killed; *An. Chr*. 531, in the consulate of *Lampadius* and *Orestes*; *An. Chr*. 1106, in the month of *February*; and at the end of the year 1680; and that with a long and remarkable tail, except when it was seen after *Caesar’s* death, at which time, by reason of the inconvenient situation of the earth, the tail was not so conspicuous), set himself to find out an elliptic orbit whose greater axis should be 1382957 parts, the mean distance of the earth from the sun containing 10000 such; in which orbit a comet might revolve in 575 years; and, placing the ascending node in ♋ 2° 2’, the inclination of the plane of the orbit to the plane of the ecliptic in an angle of 61° 6’ 48”, the perihelion of the comet in this plane in ♐ 22° 44’ 25”, the equal time of the perihelion *December* $7^{d}.23^{h}.9$’, the distance of the perihelion from the ascending node in the plane of the ecliptic 9° 17’ 35”, and its conjugate axis 18481,2, he computed the motions of the comet in this elliptic orbit. The places of the comet, as deduced from the observations, and as arising from computation made in this orbit, may be seen in the following table.

	True time.
Longitudes observed.	
Latitude North obs.	

Longitude computed.	Latitude computed.	Errors in Long.	Errors in Lat.
d. h. ‘			
Nov. 3.16.47			
5.15.37			
10.16.18			
16.17.00			
18.21.34			
20.17.0			
23.17.5			
Dec. 12.4.46			
21.6.37			
24.6.18			
26.5.21			
29.8.3			
30.8.10			
Jan. 5.6.1½			

9.7.7

10.6.6

13.7.9

25.7.59

30.8.22

Feb. 2.6.35
5.7.4½

25.8.41

Mar. 1.11.10

5.11.39

9.8.38

° ‘ “
♌ 29.51.0
♍ 3.23.0
15.32. 0

♑ 6.32.30
♒ 5. 8.12

18.49.23

28.24.13
♓ 13.10.41
17.38. 0

♈ 8.48.53
18.44. 4

20.40.50

25.59.48
♉ 9.35. 0

13.19.51

15.13.53
16.59. 6

26.18.35

27.52.42
29.18. 0
♊ 0.43.4

° ‘ “

1.17.45

1.6. 0
0.27. 0

8.28. 0

21.42.13

25.23. 5
27. 0.52
28. 9.58

28.11.53

26.15. 7

24.11.56

23.43.32

22.17.28

17.56.30

16.42.18

16. 4. 1
15.27. 3

12.46.46

12.23.40
12. 3.16
11.45.52

° ‘ “
♌ 29.51.22
♍ 3.24.32
15.33. 2
♎ 8.16.45

18.52.15

28.10.36
♏ 13.22.42
♑ 6.31.20
♒ 5. 6.14

18.47.30

28.21.42
♓ 13.11.14

17.38.27

♈ 8.48.51

18.43.51

20.40.23
26. 0. 8
♉ 9.34.11

13.18.25

15.11.59

16.59.17

26.16.59

27.51.47

29.20.11
♊ 0.42.43

° ‘ “
1.17.32 N
1. 6. 9
0.25. 7
0.53. 7 S

1.26.54

1.53.35
2.29. 0
8.29. 6 N

21.44.42

25.23.35
27. 2. 1

28.10.38

28.11.37

26.14.57

24.12.17

23.43.25

22.16.32
17.56. 6
16.40. 5
16. 2.17
15.27. 0

12.45.22

12.22.28
12. 2.50
11.45.35

‘ “
+0.22
+1.32
+1.2

-1.10
-1.58
-1.53
-2.31

+0,33
+0.7
-0.2
-0.13
-0.27
+0.20
-0,49
-1.23
-1.54
+0.11
-1.36
-0.55
+2.11
-0.21

‘ ‘
-0.13
+0.9
-1.53

+1.6
+2.29
+0.30
+1.9
+0.40
-0.16
-0.10
+0.21
-0.7
-0.56
-0.24
-2.13
-1.54
-0.3

-1.24
-1.12
-0.26
-0.17

The observations of this comet from the beginning to the end agree at perfectly with the motion of the comet in the orbit just now described as the motions of the planets do with the theories from whence they are calculated; and by this agreement plainly evince that it was one and the same comet that appeared all that time, and also that the orbit of that comet is here rightly defined.

In the foregoing table we have omitted the observations of *Nov*. 16, 18, 20. and 23, as not sufficiently accurate, for at those times several persons had observed the comet. *Nov*. 17, O. S. *Ponthaeus* and his companions, at 6^h. in the morning at *Rome* (that is, 5^h.10' at *London*], by threads directed to the fixed stars, observed the comet in ♎ 8° 30', with latitude 0° 40 south. Their observations may be seen in a treatise which *Ponthaeus* published concerning this comet. *Cellius*, who was present, and communicated his observations in a letter to *Cassini* saw the comet at the same hour in ♎ 8° 30', with latitude 0° 30 south. It was likewise seen by *Galletius* at the same hour at *Avignon* (that is, at 5^h.42' morning at *London*) in ♎ 8° without latitude. But by the theory the comet was at that time in ♎ 8° 16' 45", and its latitude was 0° 53' 7" south.

Nov. 18, at 6^h.30' in the morning at *Rome* (that is, at 5^h.40' at *London*), *Ponthaeus* observed the comet in ♎ 13° 30, with latitude 1° 20' south; and *Cellius* in ♎ 13° 30', with latitude 1° 00 south. But at 5^h.30' in the morning at *Avignon*, *Galletius* saw it in ♎ 13° 00', with latitude 1° 00 south. In the University of *La Fleche*, in *France*, at 5^h. in the morning (that is, at 5^h.9 at *London*), it was seen by P. *Ango*, in the middle between two small stars, one of which is the middle of the three which lie in a right line in the southern hand of Virgo, *Bayers* ψ; and the other is the outmost of the wing, *Bayer's* θ. Whence the comet was then in ♎ 12° 46' with latitude 50' south. And I was informed by Dr. *Halley*, that on the same day at *Boston* in

New England, in the latitude of 42½ deg. at 5^h. in the morning (that is, at 9^h.44' in the morning at *London*), the comet was seen near ♎ 14°, with latitude 1° 30 south.

Nov. 19, at $4½^h$. at *Cambridge*, the comet (by the observation of a young man) was distant from *Spica* ♍ about 2° towards the north west. Now the spike was at that time in ♎ 19° 23' 47", with latitude 2° 1' 59" south. The same day, at 5^h. in the morning, at *Boston* in *New England*, the comet was distant from Spica ♍ 1°, with the difference of 40' in latitude. The same day, in the island of *Jamaica*, it was about 1° distant from Spica ♍. The same day, Mr. *Arthur Storer*, at the river *Patuxent*, near *Hunting Creek*, in *Maryland*, in the confines of *Virginia*, in lat. 38½°, at 5 in the morning (that is, at 10^h. at *London*), saw the comet above *Spica* ♍, and very nearly joined with it, the distance between them being about ¾ of one deg. And from these observations compared. I conclude, that at 9^h.44' at *London* the comet was in ♎ 18° 50', with about 1° 25' latitude south. Now by the theory the comet was at that time in ♎ 18° 52' 15", with 1° 26' 54" lat. south.

Nov. 20, *Montenari*, professor of astronomy at *Padua*, at 6^h. in the morning at *Venice* (that is, 5^h.10 at *London*), saw the comet in ♎ 23°, with latitude 1° 30' south. The same day, at Boston, it was distant from Spica ♍ by about 4° of longitude east, and therefore was in ♎ 23° 24' nearly.

Nov. 21, *Ponthaeus* and his companions, at $7¼^h$. in the morning, ob served the comet in ♎ 27° 50', with latitude 1° 16' south; *Cellius*, in ♎ 28°; P. *Ango* at 5^h. in the morning, in ♎ 27° 45'; *Montenari* in ♎ 27° 51'. The same day, in the island of *Jamaica*, it was seen near the beginning of ♏, and of about the same latitude with *Spica* ♍, that is, 2° 2'. The same day, at 5^h. morning, at *Ballasore*, in the *East Indies* (that is, at 11^h.20' of the night preceding at *London*), the distance of the comet from Spica ♍ was taken 7° 35' to the east. It was in a right line between the spike and the balance, and therefore was then in ♎ 26° 58', with about 1° 11' lat. south; and after 5^h.40' (that is, at 5^h. morning at *London*), it was in ♎ 28° 12', with 1° 16' lat. south. Now by the theory the comet was then in ♎ 28° 10' 36", with 1° 53' 35" lat. south.

Nov. 22, the comet was seen by *Montenari* in ♏ 2° 33’; but at *Boston* in *New England*, it was found in about ♏ 3°, and with almost the same latitude as before, that is, 1° 30’. The same day, at 5^{h}. morning at *Ballasore*,ihe comet was observed in ♏ 1° 50’; and therefore at 5^{h}. morning at *London*, the comet was ♏ 3° 5’ nearly. The same day, at $6\frac{1}{2}^{h}$. in the morning at *London*, Dr. *Hook* observed it in about ♏ 3° 30’, and that in the right line which passeth through *Spica* ♍ and *Cor Leonis*; not, indeed, exactly, but deviating a little from that line towards the north. *Montenari* likewise observed, that this day, and some days after, a right line drawn from the comet through *Spica* passed by the south side of *Cor Leonis* at a very small distance therefrom. The right line through *Cor Leonis* and *Spica* ♍ did cut the ecliptic in ♍ 3° 46’ at an angle of 2° 51’; and if the comet had been in this line and in ♏ 3°, its latitude would have been 2° 26’; but since *Hook* and *Montenari* agree that the comet was at some small distance from this line towards the north, its latitude must have been something less. On the 20th, by the observation of *Montenari*, its latitude was almost the same with that of *Spica* ♍, that is, about 1° 30’. But by the agreement of *Hook*, *Montenari*, and *Ango*, the latitude was continually increasing, and therefore must now, on the 22d, be sensibly greater than 1° 30’; and, taking a mean between the extreme limits but now stated, 2° 26’ and 1° 30’, the latitude will be about 1° 58’. *Hook* and *Montenari* agree that the tail of the comet was directed towards *Spica* ♍, declining a little from that star towards the south according to *Hook*, but towards the north according to *Montenari*; and, therefore, that declination was scarcely sensible; and the tail, lying nearly parallel to the equator, deviated a little from the opposition of the sun towards the north.

Nov. 23, O. S. at 5^{h}. morning, at *Nuremberg* (that is, at $4\frac{1}{2}^{h}$. at *London*), Mr. *Zimmerman* saw the comet in ♏ 8° 8’, with 2° 31’ south lat. its place being collected by taking its distances from fixed stars.

Nov. 24, before sunrising, the comet was seen by *Montenari* in ♏ 12° 52’ on the north side of the right line through *Cor Leonis* and *Spica* ♍, and therefore its latitude was something less than 2° 38’; and since the latitude, as we said, by the concurring observations of *Montenari*, *Ango*, and *Hook*, was continually increasing, therefore, it was now, on the 24th, something

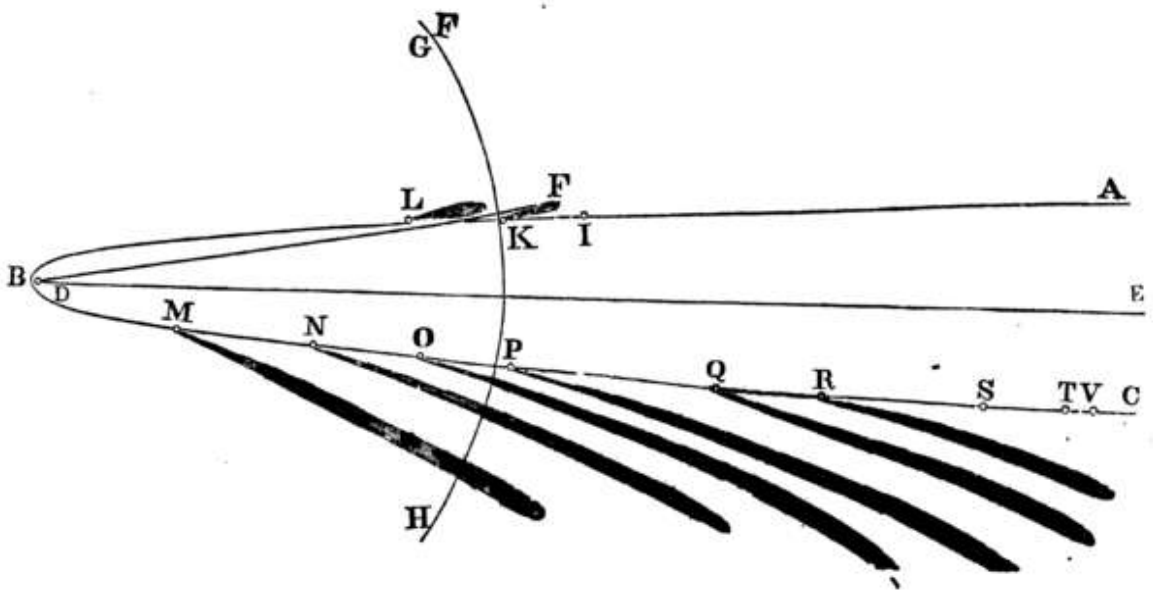
greater than 1° 58’; and, taking the mean quantity, may be reckoned 2° 18’, without any considerable error. *Ponthaeus* and *Galletius* will have it that the latitude was now decreasing; and *Cellius*, and the observer in *New England*, that it continued the same, viz., of about 1°, or 1½°. The observations of *Ponthaeus* and *Cellius* are more rude, especially those which were made by taking the azimuths and altitudes; as are also the observations of *Galletius*. Those are better which were made by taking the position of the comet to the fixed stars by *Montenari*, *Hook*, *Ango*, and the observer in *New England*, and sometimes by *Ponthaeus* and *Cellius*. The same day, at 5^{h}. morning, at *Ballasore*, the comet was observed in ♏ 11° 45’; and, therefore, at 5^{h}. morning at *London*, was in ♏ 13° nearly. And, by the theory, the comet was at that time in ♏ 13° 22’ 2”.

Nov. 25, before sunrise, *Montenari* observed the comet in ♏ 17¾ nearly; and *Cellius* observed at the same time that the comet was in a right line between the bright star in the right thigh of Virgo and the southern scale of Libra; and this right line cuts the comet’s way in ♏ 18° 36’. And, by the theory, the comet was in ♏ 18⅓° nearly.

From all this it is plain that these observations agree with the theory, so far as they agree with one another; and by this agreement it is made clear that it was one and the same comet that appeared all the time from *Nov*. 4 to *Mar*. 9. The path of this comet did twice cut the plane of the ecliptic, and therefore was not a right line. It did cut the ecliptic not in opposite parts of the heavens, but in the end of Virgo and beginning of Capricorn, including an arc of about 98°; and therefore the way of the comet did very much deviate from the path of a great circle; for in the month of *Nov*. it declined at least 3° from the ecliptic towards the south; and in the month of Dec. following it declined 29° from the ecliptic towards the north; the two parts of the orbit in which the comet descended towards the sun, and ascended again from the sun, declining one from the other by an apparent angle of above 30°, as observed by *Montenari*. This comet travelled over 9 signs, to wit, from the last deg. of ♌ to the beginning of ♊, beside the sign of ♌, through which it passed before it began to be seen; and there is no other theory by which a comet can go over so great a part of the heavens with a regular motion. The motion of this comet was very unequable; for about the 20th of *Nov*. it described about 5° a day. Then its motion being retarded

between Nov. 26 and Dec. 12, to wit, in the space of 15½ days, it described only 40°. But the motion thereof being afterwards accelerated, it described near 5° a day, till its motion began to be again retarded. And the theory which justly corresponds with a motion so unequable, and through so great a part of the heavens, which observes the same laws with the theory of the planets, and which accurately agrees with accurate astronomical observations, cannot be otherwise than true.

And, thinking it would not be improper, I have given a true representation of the orbit which this comet described, and of the tail which it emitted in several places, in the annexed figure; protracted in the plane of the trajectory. In this scheme ABC represents the trajectory of the comet, D the sun DE the axis of the trajectory, DF the line of the nodes, GH the intersection of the sphere of the *orbis magnus* with the plane of the trajectory, I the place of the comet *Nov*. 4, *Ann*. 1680; K the place of the same *Nov*. 11; L the place of the same *Nov*. 19; M its place *Dec*. 12; N



its place *Dec*. 21; O its place *Dec*. 29; P its place *Jan*. 5 following; Q its place *Jan*. 25; R its place *Feb*. 5; S its place *Feb*. 25; T its place *March* 5; and V its place *March* 9. In determining the length of the tail, I made the following observations.

Nov. 4 and 6, the tail did not appear; *Nov*. 11, the tail just begun to shew itself, but did not appear above ½ deg. long through a 10 feet telescope; *Nov*. 17, the tail was seen by *Ponthaeus* more than 15° long; Nov. 18, in *New-England*, the tail appeared 30° long, and directly opposite to the sun,

extending itself to the planet Mars, which was then in ♍, 9° 54': *Nov*. 19. in *Maryland*, the tail was found 15° or 20° long; *Dec*. 10 (by the observation of Mr. *Flamsted*), the tail passed through the middle of the distance intercepted between the tail of the Serpent of *Ophiuchus* and the star *δ* in the south wing of *Aquila*, and did terminate near the stars A, *ω, b*, in *Bayer's* tables. Therefore the end of the tail was in ♑ 19½°, with latitude about 34¼° north; *Dec* 11, it ascended to the head of *Sagitta* (*Bayer's α, β*), terminating in ♑ 26° 43', with latitude 38° 34' north; *Dec*. 12, it passed through the middle of *Sagitta*, nor did it reach much farther; terminating in ♒ 4°, with latitude 42½° north nearly. But these things are to be understood of the length of the brighter part of the tail; for with a more faint light, observed, too, perhaps, in a serener sky, at *Rome*, *Dec*. 12, 5^{h}.40', by the observation of *Ponthaeus*, the tail arose to 10° above the rump of the Swan, and the side thereof towards the west and towards the north was 45' distant from this star. But about that time the tail was 3° broad towards the upper end; and therefore the middle thereof was 2° 15 distant from that star towards the south, and the upper end was ♓ in 22°, with latitude 61° north; and thence the tail was about 70° long; *Dec*. 21, it extended almost to *Cassiopeia's* chair, equally distant from *β* and from *Schedir*, so as its distance from either of the two was equal to the distance of the one from the other, and therefore did terminate in ♈ 24°, with latitude 47½°; *Dec*. 29, it reached to a contact with *Scheat* on its left, and exactly filled up the space between the two stars in the northern foot of *Andromeda*, being 54° in length; and therefore terminated in ♉ 19°, with 35° of latitude; *Jan*. 5, it touched the star *π* in the breast of *Andromeda* on its right side, and the star *μ* of the girdle on its left; and, according to our observations, was 40° long; but it was curved, and the convex side thereof lay to the south; and near the head of the comet it made an angle of 4° with the circle which passed through the sun and the comet's head; but towards the other end it was inclined to that circle in an angle of about 10° or 11°; and the chord of the tail contained with that circle an angle of 8°. *Jan*. 13, the tail terminated between *Alamech* and *Algol*, with a light that was sensible enough: but with a faint light it ended over against the star *κ* in *Perseus's* side. The distance of the end of the tail from the circle passing through the sun and the comet was 3° 50'; and the inclination of the chord of the tail to that circle was

8½°. *Jan*. 25 and 26. it shone with a faint light to the length of 6° or 7°; and for a night or two after, when there was a very clear sky, it extended to the length of 12°, or something more, with a light that was very faint and very hardly to be seen; but the axis thereof was exactly directed to the bright star in the eastern shoulder of *Auriga*, and therefore deviated from the opposition of the sun towards the north by an angle of 10°. Lastly, *Feb*. 10, with a telescope I observed the tail 2° long; for that fainter light which I spoke of did not appear through the glasses. But *Ponthaeus* writes, that, on *Feb*. 7, he saw the tail 12° long. *Feb*. 25, the comet was without a tail, and so continued till it disappeared.

Now if one reflects upon the orbit described, and duly considers the other appearances of this comet, he will be easily satisfied that the bodies of comets are solid, compact, fixed, and durable, like the bodies of the planets; for if they were nothing else but the vapours or exhalations of the earth, of the sun, and other planets, this comet, in its passage by the neighbourhood of the sun, would have been immediately dissipated; for the heat of the sun is as the density of its rays, that is, reciprocally as the square of the distance of the places from the sun. Therefore, since on *Dec*. 8, when the comet was in its perihelion, the distance thereof from the centre of the sun was to the distance of the earth from the same as about 6 to 1000, the sun's heat on the comet was at that time to the heat of the summer-sun with us as 1000000 to 36, or as 28000 to 1. But the heat of boiling water is about 3 times greater than the heat which dry earth acquires from the summer-sun, as I have tried; and the heat of red-hot iron (if my conjecture is right) is about three or four times greater than the heat of boiling water. And therefore the heat which dry earth on the comet, while in its perihelion, might have conceived from the rays of the sun, was about 2000 times greater than the heat of red-hot iron. But by so fierce a heat, vapours and exhalations, and every volatile matter, must have been immediately consumed and dissipated.

This comet, therefore, must have conceived an immense heat from the sun, and retained that heat for an exceeding long time; for a globe of iron of an inch in diameter, exposed red-hot to the open air, will scarcely lose all its heat in an hour's time; but a greater globe would retain its heat longer in the proportion of its diameter, because the surface (in proportion to which it is cooled by the contact of the ambient air) is in that proportion less in respect of the quantity of the included hot matter; and therefore a globe of red hot

iron equal to our earth, that is, about 40000000 feet in diameter, would scarcely cool in an equal number of days, or in above 50000 years. But I suspect that the duration of heat may, on account of some latent causes, increase in a yet less proportion than that of the diameter; and I should be glad that the true proportion was investigated by experiments.

It is farther to be observed, that the comet in the month of *December*, just after it had been heated by the sun, did emit a much longer tail, and much more splendid, than in the month of *November* before, when it had not yet arrived at its perihelion; and, universally, the greatest and most fulgent tails always arise from comets immediately after their passing by the neighbourhood of the sun. Therefore the heat received by the comet conduces to the greatness of the tail: from whence, I think I may infer, that the tail is nothing else but a very fine vapour, which the head or nucleus of the comet emits by its heat.

But we have had three several opinions about the tails of comets; for some will have it that they are nothing else but the beams of the sun's light transmitted through the comets heads, which they suppose to be transparent; others, that they proceed from the refraction which light suffers in passing from the comet's head to the earth; and, lastly, others, that they are a sort of clouds or vapour constantly rising from the comets heads, and tending towards the parts opposite to the sun. The first is the opinion of such as are yet unacquainted with optics; for the beams of the sun are seen in a darkened room only in consequence of the light that is reflected from them by the little particles of dust and smoke which are always flying about in the air; and, for that reason, in air impregnated with thick smoke, those beams appear with great brightness, and move the sense vigorously; in a yet finer air they appear more faint, and are less easily discerned; but in the heavens, where there is no matter to reflect the light they can never be seen at all. Light is not seen as it is in the beam, but as it is thence reflected to our eyes; for vision can be no other wise produced than by rays falling upon the eyes; and, therefore, there must be some reflecting matter in those parts where the tails of the comets are seen: for otherwise, since all the celestial spaces are equally illuminated by the sun's light, no part of the heavens could appear with more splendor than another. The second opinion is liable to many difficulties. The tails of comets are never seen variegated with those colours which commonly are inseparable from refraction; and the distinct

transmission of the light of the fixed stars and planets to us is a demonstration that the aether or celestial medium is not endowed with any refractive power: for as to what is alleged, that the fixed stars have been sometimes seen by the *Egyptians* environed with a *Coma* or *Capitlitium*, because that has but rarely happened, it is rather to be ascribed to a casual refraction of clouds; and so the radiation and scintillation of the fixed stars to tin refractions both of the eyes and air; for upon laying a telescope to the eye, those radiations and scintillations immediately disappear. By the tremulous agitation of the air and ascending vapours, it happens that the rays of light are alternately turned aside from the narrow space of the pupil of the eye; but no such thing can have place in the much wider aperture of the object-glass of a telescope; and hence it is that a scintillation is occasioned in the former case, which ceases in the latter; and this cessation in the latter case is a demonstration of the regular transmission of light through the heavens, without any sensible refraction. But, to obviate an objection that may be made from the appearing of no tail in such comets as shine but with a faint light, as if the secondary rays were then too weak to affect the eyes, and for that reason it is that the tails of the fixed stars do not appear, we are to consider, that by the means of telescopes the light of the fixed stars may be augmented above an hundred fold, and yet no tails are seen; that the light of the planets is yet more copious without any tail; but that comets are seen sometimes with huge tails, when the light of their heads is but faint and dull. For so it happened in the comet of the year 1680, when in the month of *December* it was scarcely equal in light to the stars of the second magnitude, and yet emitted a notable tail, extending to the length of 40°, 50°, 60°, or 70°, and upwards; and afterwards, on the 27th and 28th of *January*, when the head appeared but us a star of the 7th magnitude, yet the tail (as we said above), with a light that was sensible enough, though faint, was stretched out to 6 or 7 degrees in length, and with a languishing light that was more difficultly seen, even to 12°, and upwards. But on the 9th and 10th of *February*, when to the naked eye the head appeared no more, through a telescope I viewed the tail of 2° in length. But farther; if the tail was owing to the refraction of the celestial matter, and did deviate from the opposition of the sun, according to the figure of the heavens, that deviation in the same places of the heavens should be always directed

towards the same parts. But the comet of the year 1680, *December* $28^{d}.8\frac{1}{2}^{h}$. P. M. at *London*, was seen in ♓ 8° 41', with latitude north 28° 6'; while the sun was in ♑ 18° 26'. And the comet of the year 1577, *December* 29^{d}. was in ♓ 8° 41', with latitude north 28° 40', and the sun, as before, in about ♑ 18° 26'. In both cases the situation of the earth was the same, and the comet appeared in the same place of the heavens; yet in the former case the tail of the comet (as well by my observations as by the observations of others) deviated from the opposition of the sun towards the north by an angle of 4½ degrees; whereas in the latter there was (according to the observations of *Tycho*) a deviation of 21 degrees towards the south. The refraction, therefore, of the heavens being thus disproved, it remains that the *phaenomena* of the tails of comets must be derived from some reflecting matter.

And that the tails of comets do arise from their heads, and tend towards the parts opposite to the sun, is farther confirmed from the laws which the tails observe. As that, lying in the planes of the comets orbits which pass through the sun, they constantly deviate from the opposition of the sun towards the parts which the comets heads in their progress along these orbits have left. That to a spectator, placed in those planes, they appear in the parts directly opposite to the sun; but, as the spectator recedes from those planes, their deviation begins to appear, and daily be comes greater. That the deviation, *caeteris paribus*, appears less when the tail is more oblique to the orbit of the comet, as well as when the head of the comet approaches nearer to the sun, especially if the angle of deviation is estimated near the head of the comet. That the tails which have no deviation appear straight, but the tails which deviate are like wise bended into a certain curvature. That this curvature is greater when the deviation is greater; and is more sensible when the tail, *caeteris paribus*, is longer; for in the shorter tails the curvature is hardly to be perceived. That the angle of deviation is less near the comet's head, but greater towards the other end of the tail; and that because the convex side of the tail regards the parts from which the deviation is made, and which lie in a right line drawn out infinitely from the sun through the comet's head. And that the tails that are long and broad, and shine with a stronger light, appear more resplendent and more exactly defined on the convex than on the concave side. Upon

which accounts it is plain that the *phaenomena* of the tails of comets depend upon the motions of their heads, and by no means upon the places of the heavens in which their heads are seen; and that, therefore, the tails of comets do not proceed from the refraction of the heavens, but from their own heads, which furnish the matter that forms the tail. For, as in our air, the smoke of a heated body ascends either perpendicularly if the body is at rest, or obliquely if the body is moved obliquely, so in the heavens, where all bodies gravitate towards the sun, smoke and vapour must (as we have already said) ascend from the sun, and either rise perpendicularly if the smoking body is at rest, or obliquely if the body, in all the progress of its motion, is always leaving those places from which the upper or higher parts of the vapour had risen before; and that obliquity will be least where the vapour ascends with most velocity, to wit, near the smoking body, when that is near the sun. But, because the obliquity varies, the column of vapour will be incurvated; and because the vapour in the preceding sides is something more recent, that is, has ascended something more late from the body, it will therefore be something more dense on that side, and must on that account reflect more light, as well as be better defined. I add nothing concerning the sudden uncertain agitation of the tails of comets, and their irregular figures, which authors sometimes describe, because they may arise from the mutations of our air, and the motions of our clouds, in part obscuring those tails; or, perhaps, from parts of the *Via Lactea*, which might have been confounded with and mistaken for parts of the tails of the comets as they passed by.

But that the atmospheres of comets may furnish a supply of vapour great enough to fill so immense spaces, we may easily understand from the rarity of our own air; for the air near the surface of our earth possesses a space 850 times greater than water of the same weight; and therefore a cylinder of air 850 feet high is of equal weight with a cylinder of water of the same breadth, and but one foot high. But a cylinder of air reaching to the top of the atmosphere is of equal weight with a cylinder of water about 33 feet high: and, therefore, if from the whole cylinder of air the lower part of 850 feet high is taken away, the remaining upper part will be of equal weight with a cylinder of water 32 feet high: and from thence (and by the hypothesis, confirmed by many experiments, that the compression of air is as the weight of the incumbent atmosphere, and that the force of gravity is

reciprocally as the square of the distance from the centre of the earth) raising a calculus, by Cor. Prop. XXII, Book II, I found, that, at the height of one semidiameter of the earth, reckoned from the earth's surface, the air is more rare than with us in a far greater proportion than of the whole space within the orb of Saturn to a spherical space of one inch in diameter; and therefore if a sphere of our air of but one inch in thickness was equally rarefied with the air at the height of one semidiameter of the earth from the earth's surface, it would fill all the regions of the planets to the orb of Saturn, and far beyond it. Wherefore since the air at greater distances is immensely rarefied, and the *coma* or atmosphere of comets is ordinarily about ten times higher, reckoning from their centres, than the surface of the nucleus, and the tails rise yet higher, they must therefore be exceedingly rare; and though, on account of the much thicker atmospheres of comets, and the great gravitation of their bodies towards the sun, as well as of the particles of their air and vapours mutually one towards another, it may happen that the air in the celestial spaces and in the tails of comets is not so vastly rarefied, yet from this computation it is plain that a very small quantity of air and vapour is abundantly sufficient to produce all the appearances of the tails of comets; for that they are, indeed, of a very notable rarity appears from the shining of the stars through them. The atmosphere of the earth, illuminated by the sun's light, though but of a few miles in thickness, quite obscures and extinguishes the light not only of all the stars, but even of the moon itself; whereas the smallest stars are seen to shine through the immense thickness of the tails of comets, likewise illuminated by the sun, without the least diminution of their splendor. Nor is the brightness of the tails of most comets ordinarily greater than that of our air, an inch or two in thickness, reflecting in a darkened room the light of the sun-beams let in by a hole of the window-shutter.

And we may pretty nearly determine the time spent during the ascent of the vapour from the comet's head to the extremity of the tail, by drawing a right line from the extremity of the tail to the sun, and marking the place where that right line intersects the comet's orbit: for the vapour that is now in the extremity of the tail, if it has ascended in a right line from the sun, must have begun to rise from the head at the time when the head was in the point of intersection. It is true, the vapour does not rise in a right line from the sun, but, retaining the motion which it had from the comet before its

ascent, and compounding that motion with its motion of ascent, arises obliquely; and, therefore, the solution of the Problem will be more exact, if we draw the line which intersects the orbit parallel to the length of the tail; or rather (because of the curvilinear motion of the comet) diverging a little from the line or length of the tail. And by means of this principle I found that the vapour which, *January* 25, was in the extremity of the tail, had begun to rise from the head before *December* 11, and therefore had spent in its whole ascent 45 days; but that the whole tail which appeared on *December* 10 had finished its ascent in the space of the two days then elapsed from the time of the comet's being in its perihelion. The vapour, therefore, about the beginning and in the neighbourhood of the sun rose with the greatest velocity, and afterwards continued to ascend with a motion constantly retarded by its own gravity; and the higher it ascended, the more it added to the length of the tail; and while the tail continued to be seen, it was made up of almost all that vapour which had risen since the time of the comet's being in its perihelion; nor did that part of the vapour which had risen first, and which formed the extremity of the tail, cease to appear, till its too great distance, as well from the sun, from which it received its light, as from our eyes, rendered it invisible. Whence also it is that the tails of other comets which are short do not rise from their heads with a swift and continued motion, and soon after disappear, but are permanent and lasting columns of vapours and exhalations, which, ascending from the heads with a slow motion of many days, and partaking of the motion of the heads which they had from the beginning, continue to go along together with them through the heavens. From whence again we have another argument proving the celestial spaces to be free, and without resistance, since in them not only the solid bodies of the planets and comets, but also the extremely rare vapours of comets tails, maintain their rapid motions with great freedom, and for an exceeding long time.

Kepler ascribes the ascent of the tails of the comets to the atmospheres of their heads; and their direction towards the parts opposite to the sun to the action of the rays of light carrying along with them the matter of the comets tails; and without any great incongruity we may suppose, that, in so free spaces, so fine a matter as that of the aether may yield to the action of the rays of the sun's light, though those rays are not able sensibly to move the gross substances in our parts, which are clogged with so palpable a

resistance. Another author thinks that there may be a sort of particles of matter endowed with a principle of levity, as well as others are with a power of gravity; that the matter of the tails of comets may be of the former sort, and that its ascent from the sun may be owing to its levity; but, considering that the gravity of terrestrial bodies is as the matter of the bodies, and therefore can be neither more nor less in the same quantity of matter, I am inclined to believe that this ascent may rather proceed from the rarefaction of the matter of the comets tails. The ascent of smoke in a chimney is owing to the impulse of the air with which it is entangled. The air rarefied by heat ascends, because its specific gravity is diminished, and in its ascent carries along with it the smoke with which it is engaged; and why may not the tail of a comet rise from the sun after the same manner? For the sun's rays do not act upon the mediums which they pervade otherwise than by reflection and refraction; and those reflecting particles heated by this action, heat the matter of the aether which is involved with them. That matter is rarefied by the heat which it acquires, and be cause, by this rarefaction, the specific gravity with which it tended towards the sun before is diminished, it will ascend therefrom, and carry along with it the reflecting particles of which the tail of the comet is composed. But the ascent of the vapours is further promoted by their circumgyration about the sun, in consequence whereof they endeavour to recede from the sun, while the sun's atmosphere and the other matter of the heavens are either altogether quiescent, or are only moved with a slower circumgyration derived from the rotation of the sun. And these are the causes of the ascent of the tails of the comets in the neighbourhood of the sun, where their orbits are bent into a greater curvature, and the comets themselves are plunged into the denser and therefore heavier parts of the sun's atmosphere: upon which account they do then emit tails of an huge length; for the tails which then arise, retaining their own proper motion, and in the mean time gravitating towards the sun, must be revolved in ellipses about the sun in like manner as the heads are, and by that motion must always accompany the heads, and freely adhere to them. For the gravitation of the vapours towards the sun can no more force the tails to abandon the heads, and descend to the sun, than the gravitation of the heads can oblige them to fall from the tails. They must by their common gravity either fall together towards the sun, or be retarded together in their common ascent therefrom; and, therefore (whether from the causes

already described, or from any others), the tails and heads of comets may easily acquire and freely retain any position one to the other, without disturbance or impediment from that common gravitation.

The tails, therefore, that rise in the perihelion positions of the comets will go along with their heads into far remote parts, and together with the heads will either return again from thence to us, after a long course of years, or rather will be there rarefied, and by degrees quite vanish away; for afterwards, in the descent of the heads towards the sun, new short tails will be emitted from the heads with a slow motion; and those tails by degrees will be augmented immensely, especially in such comets as in their perihelion distances descend as low as the sun's atmosphere; for all vapour in those free spaces is in a perpetual state of rarefaction and dilatation; and from hence it is that the tails of all comets are broader at their upper extremity than near their heads. And it is not unlikely but that the vapour, thus perpetually rarefied and dilated, may be at last dissipated and scattered through the whole heavens, and by little and little be attracted towards the planets by its gravity, and mixed with their atmosphere; for as the seas are absolutely necessary to the constitution of our earth, that from them, the sun, by its heat, may exhale a sufficient quantity of vapours, which, being gathered together into clouds, may drop down in rain, for watering of the earth, and for the production and nourishment of vegetables; or, being condensed with cold on the tops of mountains (as some philosophers with reason judge), may run down in springs and rivers; so for the conservation of the seas, and fluids of the planets, comets seem to be required, that, from their exhalations and vapours condensed, the wastes of the planetary fluids spent upon vegetation and putrefaction, and converted into dry earth, may be continually supplied and made up; for all vegetables entirely derive their growths from fluids, and afterwards, in great measure, are turned into dry earth by putrefaction; and a sort of slime is always found to settle at the bottom of putrefied fluids; and hence it is that the bulk of the solid earth is continually increased; and the fluids, if they are not supplied from without, must be in a continual decrease, and quite fail at last. I suspect, moreover, that it is chiefly from the comets that spirit comes, which is indeed the smallest but the most subtle and useful part of our air, and so much required to sustain the life of all things with us.

The atmospheres of comets, in their descent towards the sun, by running out into the tails, are spent and diminished, and become narrower, at least on that side which regards the sun; and in receding from the sun, when they less run out into the tails, they are again enlarged, if *Hevelius* has justly marked their appearances. But they are seen least of all just after they have been most heated by the sun, and on that account then emit the longest and most resplendent tails; and, perhaps, at the same time, the nuclei are environed with a denser and blacker smoke in the lowermost parts of their atmosphere; for smoke that is raised by a great and intense heat is commonly the denser and blacker. Thus the head of that comet which we have been describing, at equal distances both from the sun and from the earth, appeared darker after it had passed by its perihelion than it did before; for in the month of *December* it was commonly compared with the stars of the third magnitude, but in *November* with those of the first or second; and such as saw both appearances have described the first as of another and greater comet than the second. For, *November* 19, this comet appeared to a young man at *Cambridge*, though with a pale and dull light, yet equal to *Spica Virginis*; and at that time it shone with greater brightness than it did afterwards. And *Montenari*, *November* 20, st. vet. observed it larger than the stars of the first magnitude, its tail being then 2 degrees long. And Mr. *Storer* (by letters which have come into my hands) writes, that in the month of *December*, when the tail appeared of the greatest bulk and splendor, the head was but small, and far less than that which was seen in the month of *November* before sunrising; and, conjecturing at the cause of the appearance, he judged it to proceed from there being a greater quantity of matter in the head at first, which was afterwards gradually spent.

And, which farther makes for the same purpose, I find, that the heads of other comets, which did put forth tails of the greatest bulk and splendor, have appeared but obscure and small. For in *Brazil, March* 5, 1668, 7^{h}. P. M., *St. N. P. Valentinus Estancius* saw a comet near the horizon, and towards the south west, with a head so small as scarcely to be discerned, but with a tail above measure splendid, so that the reflection thereof from the sea was easily seen by those who stood upon the shore; and it looked like a fiery beam extended 23° in length from the west to south, almost parallel to the horizon. But this excessive splendor continued only three days,

decreasing apace afterwards; and while the splendor was decreasing, the bulk of the tail increased: whence in *Portugal* it is said to have taken up one quarter of the heavens, that is, 45 degrees, extending from west to east with a very notable splendor, though the whole tail was not seen in chose parts, because the head was always hid under the horizon: and from the increase of the bulk and decrease of the splendor of the tail, it appears that the head was then in its recess from the sun, and had been very near to it in its perihelion, as the comet of 1680 was. And we read, in the *Saxon* Chronicle, of a like comet appearing in the year 1106, *the star whereof was small and obscure* (as that of 1680), *but the splendour of its tail was very bright, and like a huge fiery beam stretched out in a direction between the east and north*, as *Hevelius* has it also from *Simeon*, the monk of *Durham*. This comet appeared in the beginning of *February*, about the evening, and towards the south west part of heaven; from whence, and from the position of the tail, we infer that the head was near the sun. *Matthew Paris* says, *It was distant from the sun by about a cubit, from, three of the clock* (rather six) *till nine, putting forth a long tail*. Such also was that most resplendent comet described by *Aristotle*, lib. 1, *Meteor*. 6. *The head whereof could not be seen, because it had set before the sun, or at least was hid under the sun's rays; but next day it was seen as well as might be; for, having left the sun but a very little way, it set immediately after it. And the scattered light of the head,, obscured by the too great splendour* (of the tail) *did not yet appear. But afterwards* (as *Aristotle* says) *when the splendour* (of the tail) *was now diminished* (the head of), *the comet recovered its native brightness; and the splendour* (of its tail) *reached now to a third part of the heavens* (that is, to 60°). *This appearance was in the winter season* (an. 4, Olym), *and, rising to* Orion's *girdle, it there vanished away.* It is true that the comet of 1618, which came out directly from under the sun's rays with a very large tail, seemed to equal, if not to exceed, the stars of the first magnitude; but, then, abundance of other comets have appeared yet greater than this, that put forth shorter tails; some of which are said to have appeared as big as Jupiter, others as big as Venus, or even as the moon.

We have said, that comets are a sort of planets revolved in very eccentric orbits about the sun; and as, in the planets which are without tails, those are commonly less which are revolved in lesser orbits, and nearer to the sun, so in comets it is probable that those which in their perihelion approach nearer

to the sun ate generally of less magnitude, that they may not agitate the sun too much by their attractions. But as to the transverse diameters of their orbits, and the periodic times of their revolutions, I leave them to be determined by comparing comets together which after long intervals of time return again in the same orbit. In the mean time, the following Proposition may give some light in that inquiry.

PROPOSITION XLII. PROBLEM XXII.

To correct a comet's trajectory found as above.

Operation 1. Assume that position of the plane of the trajectory which was determined according to the preceding proposition; and select three places of the comet, deduced from very accurate observations, and at great distances one from the other. Then suppose A to represent the time between the first observation and the second, and B the time between the second and the third; but it will be convenient that in one of those times the comet be in its perigeon, or at least not far from it. From those apparent places find, by trigonometric operations, the three true places of the comet in that assumed plane of the trajectory; then through the places found, and about the centre of the sun as the focus, describe a conic section by arithmetical operations, according to Prop. XXI., Book 1. Let the areas of this figure which are terminated by radii drawn from the sun to the places found be D and E; to wit, D the area between the first observation and the second, and E the area between the second and third; and let T represent the whole time in which the whole area D + E should be described with the velocity of the comet found by Prop. XVI., Book 1.

Oper. 2. Retaining the inclination of the plane of the trajectory to the plane of the ecliptic, let the longitude of the nodes of the plane of the trajectory be increased by the addition of 20 or 30 minutes, which call P. Then from the aforesaid three observed places of the comet let the three true places be found (as before) in this new plane; as also the orbit passing through those places, and the two areas of the same described between the two observations, which call *d* and *e*; and let *t* be the whole time in which the whole area *d* + *e* should be described.

Oper. 3. Retaining the longitude of the nodes in the first operation, let the inclination of the plane of the trajectory to the plane of the ecliptic be increased by adding thereto 20’ or 30’, which call Q. Then from the aforesaid three observed apparent places of the comet let the three true places be found in this new plane, as well as the orbit passing through them, and the two areas of the same described between the observation, which call δ and ε; and let τ be the whole time in which the whole area $\delta + \varepsilon$ should be described.

Then taking C to 1 as A to B; and G to 1 as D to E; and g to 1 as d to e; and γ to 1 as δ to ε; let S be the true time between the first observation and the third; and, observing well the signs + and -, let such numbers m and n be found out as will make 2G - 2C, = mG - mg + nG - nγ; and 2T - 2S = mT - mt + $n\tau$. And if, in the first operation, I represents the inclination of the plane of the trajectory to the plane of the ecliptic, and K the longitude of either node, then I + nQ will be the true inclination of the plane of the trajectory to the plane of the ecliptic, and K + mP the true longitude of the node. And, lastly, if in the first, second, and third operations, the quantities R, r, and ρ, represent the parameters of the trajectory, and the quantities $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$, the transverse diameters of the same, then R + mr - mR + $n\rho$ - nR will be the true parameter, and will be the true transverse diameter of the trajectory which the comet describes; and from the transverse diameter given the periodic time of the comet is also given. Q.E.I. But the periodic times of the revolutions of comets, and the transverse diameters of their orbits, cannot be accurately enough determined but by comparing comets together which appear at different times. If, after equal intervals of time, several comets are found to have described the same orbit, we may thence conclude that they are all but one and the same comet revolved in the same orbit; and then from the times of their revolutions the transverse diameters of their orbits will be given, and from those diameters the elliptic orbits themselves will be determined.

To this purpose the trajectories of many comets ought to be computed, supposing those trajectories to be parabolic; for such trajectories will always nearly agree with the *phaenomena*, as appears not only from the parabolic trajectory of the comet of the year 1680, which I compared above with the observations, but likewise from that of the notable comet which

appeared in the year 1664 and 1665, and was observed by *Hevelius*, who, from his own observations, calculated the longitudes and latitudes thereof, though with little accuracy. But from the same observations Dr. *Halley* did again compute its places; and from those new places determined its trajectory, finding its ascending node in ♊ 21° 13’ 55”; the inclination of the orbit to the plane of the ecliptic 21° 18’ 40”; the distance of its perihelion from the node, estimated in the comet’s orbit, 49° 27’ 30°, its perihelion in ♌ 8° 40’ 30”, with heliocentric latitude south 16° 01’ 45”; the comet to have been in its perihelion *November* $24^{d}.1^{h}.52’$ P.M. equal time at *London*, or $13^{h}.8’$ at *Dantzick*, O. S.; and that the *latus rectum* of the parabola was 410286 such parts as the sun’s mean distance from the earth is supposed to contain 100000. And how nearly the places of the comet computed in this orbit agree with the observations, will appear from the annexed table, calculated by Dr. *Halley*.

Appar. Time
at Dantzick.

The observed Distances of the Comet from
The observed Places.

The Places
computed in
the orb.

December
d. h. ‘
3.18.29½

The Lion’s heart
The Virgin’s spike

° ‘ “

46.24.20

22.52.10

Long. ♎
Lat. S.

° ‘ “

7.01.00

21.39.0

♎

° ‘ “

7.1.29

21.38.50

4.18.1½

The Lion’s heart
The Virgin’s spike

46.2.45
23.52.40

Long. ♎
Lat. S.

6.15.0
22.24.0

♎

6.16.5
22.24.0

7.17.48

The Lion’s heart
The Virgin’s spike

44.48.0
27.53.40

Long. ♎
Lat. S.

3.6.0
25.22.0

♎

3.7.33
25.21.40

7.17.48

The Lion’s heart
Orion’s right shoulder

53.15.15
45.43.30

Long. ♌
Lat. S.

2.56.0
49.25.0

♌

2.56.0
49.25.0

19.9.25

Procyon
Bright star of Whale's jaw

35.13.50
52.56.0

Long. ♊
Lat. S.

28.40.30
45.48.0

♊

28.43.0
45.46.0

20.9.53½

Procyon
Bright star of Whale's jaw

40.49.0
40.04.0

Long. ♊
Lat. S.

13.03.0
39.54.0

♊

13.5.0
39.5.0

21.9.9½

Orion’s right shoulder
Bright star of Whale’s jaw

26.21.25
29.28.0

Long. ♊
Lat. S.

2.16.0
33.41.0

♊

2.18.30
33.39.40

22.9.0

Orion’s right shoulder
Bright star of Whale’s jaw

29.47.0
20.29.30

Long. ♉
Lat. S.

24.24.0
27.45.0

♉

24.27.0
27.46.0

26.7.58

The bright star of Aries
Aldebaran

20.20.0
26.44.0

Long. ♉
Lat. S.

9.0.0
12.36.0

♉

9.2.28
12.34.13

27.6.45

The bright star of Aries
Aldebaran

20.45.0
28.10.0

Long. ♉
Lat. S.

7.5.40
10.23.0

♉

7.8.45
10.23.13

28.7.39

The bright star of Aries
Palilicium

18.29.0
29.37.0

Long. ♉
Lat. S.

5.24.45
8.22.50

♉

5.27.52
8.23.37

31.6.45

Andromeda's girdle
Palilicium

30.48.10
32.53.30

Long. ♉
Lat. S.

2.7.40
4.13.0

♉

2.8.20
4.16.25

Jan. 1665
7.7.37½

Andromeda's girdle
Palilicium

25.11.0
37.12.25

Long. ♈
Lat. N.

28.24.47
0.54.0

♈

28.24.0
0.53.0

13.7.0

Andromeda’s head
Palilicium

28.7.10
38.55.20

Long. ♈
Lat. N.

27.6.54
3.6.50

♈

27.6.39
3.7.40

24.7.29

Andromeda’s girdle
Palilicium

20.32.15
40.5.0

Long. ♈
Lat. N.

26.29.15
5.25.50

♈

26.28.50
5.26.0

Feb.
7.8.37

Long. ♈
Lat. N.

27.4.46
7.3.29

♈

27.24.55
7.3.15

22.8.46

Long. ♈
Lat. N.

28.29.46
8.12.36

28.29.58
8.10.25

March
1.8.16

Long. ♈
Lat. N.

29.18.15
8.36.26

29.18.20
8.36.12

7.8.37

Long. ♉
Lat. N.

0.2.48
8.56.30

0.2.42
8.56.56

In *February*, the beginning of the year 1665, the first star of Aries, which I shall hereafter call γ, was in ♈ 28° 30’ 15”, with 7° 8’ 58” north lat.; the second star of Aries was in ♈ 29° 17’ 18”, with 8° 28’ 16” north lat.; and another star of the seventh magnitude, which I call A, was in ♈ 28° 24’ 45”, with 8° 28’ 33” north lat. The comet *Feb*. $7^{d}.7^{h}.30$’ at *Paris* (that is, *Feb*. $7^{d}.8^{h}.30$’ at Dantzick) O. S. made a triangle with those stars γ and A, which was right-angled in γ; and the distance of the comet from the star γ was equal to the distance of the stars γ and A, that is, 1° 19’ 46” of a great circle; and therefore in the parallel of the latitude of the star γ it was 1° 20’ 26”. Therefore if from the longitude of the star γ there be subducted the longitude 1° 20’ 26”, there will remain the longitude of the comet ♈ 27° 9’ 49”. M. *Auzout*, from this observation of his, placed the comet in ♈ 27° 0’, nearly; and, by the scheme in which Dr. *Hooke* delineated its motion, it was then in ♈ 26° 59’ 24”. I place it in ♈ 27° 4’ 46”, taking the middle between the two extremes.

From the same observations, M. *Auzout* made the latitude of the comet at that time 7° and 4’ or 5’ to the north; but he had done better to have made it 7° 3’ 29”, the difference of the latitudes of the comet and the star γ being equal to the difference of the longitude of the stars γ and A.

February $22^{d}.7^{h}.30$’ at *London*, that is, *February* $22^{d}.\ 8^{h}.46$’ at *Dantzick*, the distance of the comet from the star A, according to Dr. *Hooke’s* observation, as was delineated by himself in a scheme, and also by the observations of M. *Auzout*, delineated in like manner by M. *Petit*, was a fifth part of the distance between the star A and the first star of Aries, or 15’ 57”; and the distance of the comet from a right line joining the star A and

the first of Aries was a fourth part of the same fifth part, that is, 4’; and therefore the comet was in ♈ 28° 29’ 46”, with 8° 12’ 36” north lat.

March 1, 7^h at *London*, that is, *March* 1, 8^h.16’ at *Dantzick*. the comet was observed near the second star in Aries, the distance between them being to the distance between the first and second stars in Aries, that is, to 1° 33’, as 4 to 45 according to Dr. Hooke, or as 2 to 23 according to M. *Gottignies*. And, therefore, the distance of the comet from the second star in Aries was 8’ 16” according to Dr. *Hooke*, or 8’ 5” according to M. *Gottignies*; or, taking a mean between both, 8’ 10”. But, according to M. *Gottignies*, the comet had gone beyond the second star of Aries about a fourth or a fifth part of the space that it commonly went over in a day, to wit, about 1’ 35” (in which he agrees very well with M. *Auzout*); or, according to Dr. *Hooke*, not quite so much, as perhaps only 1’. Wherefore if to the longitude of the first star in Aries we add 1’, and 8’ 10” to its latitude, we shall have the longitude of the comet ♈ 29° 18’, with 8° 36’ 26” north lat.

March 7, 7^h.30’ at *Paris* (that is, *March* 7, 8^h.37’ at *Dantzick*), from the observations of M. *Auzout*, the distance of the comet from the second star in Aries was equal to the distance of that star from the star A, that is, 52.’29”; and the difference of the longitude of the comet and the second star in Aries was 45’ or 46’, or, taking a mean quantity, 45’ 30”; and therefore the comet was in ♉ 0° 2’ 48”. From the scheme of the observations of M. *Auzout*, constructed by M. *Petit, Hevelius* collected the latitude of the comet 8° 54’. But the engraver did not rightly trace the curvature of the comet’s way towards the end of the motion; and *Hevelius*, in the scheme of M. *Auzout’s* observations which he constructed himself, corrected this irregular curvature, and so made the latitude of the comet 8° 55’ 30”. And, by farther correcting this irregularity, the latitude may become 8° 56, or 8° 57’.

This comet was also seen *March* 9, and at that time its place must have been in ♉ 0° 18’, with 9° 3½’ north lat. nearly.

This comet appeared three months together, in which space of time it travelled over almost six signs, and in one of the days thereof described almost 20 deg. Its course did very much deviate from a great circle, bending towards the north, and its motion towards the end from retrograde became direct; and, notwithstanding its course was so uncommon, yet by the table it appears that the theory, from beginning to end, agrees with the observations

no less accurately than the theories of the planets usually do with the observations of them: but we are to subduct about 2’ when the comet was swiftest, which we may effect by taking off 12” from the angle between the ascending node and the perihelion, or by making that angle 49° 27’ 18”. The annual parallax of both these comets (this and the preceding) was very conspicuous, and by its quantity demonstrates the annual motion of the earth in the *orbis magnus*.

This theory is likewise confirmed by the motion of that comet, which in the year 1683 appeared retrograde, in an orbit whose plane contained almost a right angle with the plane of the ecliptic, and whose ascending node (by the computation of Dr. *Halley*) was in ♍ 23° 23’; the inclination of its orbit to the ecliptic 83° 11’; its perihelion in ♊ 25° 29’ 30”; its perihelion distance from the sun 56020 of such parts as the radius of the *orbis magnus* contains 100000; and the time of its perihelion *July* $2^{d}.3^{h}.50’$. And the places thereof, computed by Dr. *Halley* in this orbit, are compared with the places of the same observed by Mr. *Flamsted*, in the following table: —

1683

Eq. time.

Sun’s place

Comet’s
Long. com.

Lat. Nor.
comput.

Comet’s
Long. obs’d

Lat.Nor.
observ’d

Diff.
Long.

Diff.
Lat.

d. h. ‘
July 13.12.55

15.11.15

17.10.20

23.13.40

25.14.5

31.9.42

31.14.55
Aug. 2.14.56

4.10.49

6.10.9

9.10.26

15.14.1

16.15.10

18.15.44

22.14.44

23.15.52
26.16. 2

° ‘ “

♌ 1.02.30

2.53.12

4.45.45

10.38.21

12.35.28

18.09.22

18.21.53

20.17.16

22.02.50

23.56.45

26.50.52

♍ 2.47.13

3.48. 2

5.45.33

9.35.49

10.36.48

13.31.10

° ‘ “

♋ 13.05.42

11.37.48

10. 7. 6

5.10.27

3.27.53
♊ 27.55. 3
27.41. 7

25.29.32

23.18.20

20.42.23

16 7.57

3.30.48

0.43. 7
♉ 24.52.53

11. 7.14
7. 2.18
♈ 24.45.31

° ‘ “

29.28.13

29.34. 0

29.33.30

28.51.42

24.24.47

26.22.52

26.16.57

25.16.19

24.10.49

22.17. 5
20. 6.37

11.37.33

9.34.16

5.11.15

South.

5.16.58

8.17. 9
16.38. 0

° ‘ “
♋ 13. 6.42

11.39.43

10. 8.40

5.11.30

3.27. 0
♊ 27.54.24
27.41. 8

25.28.46

23.16.55

20.40.32

16. 5.55

3.26.18

0.41.55
♉ 24.49. 5

11.07.12

7. 1.17
♈ 24.44.00

° ‘ “

29.28.20

29.34.50
29.34. 0

28.50.28

28.23.40

26.22.25

26.14.50

25.17.28

24.12.19
22.49. 5
20. 6.10
11.32. 1

9.34.13

5. 9.11
South

5.16.58

8.16.41
16.38.20

‘ “
+ 1.00
+ 1.55
+ 1.34
+ 1.03
- 0.53
- 0.39
+ 0. 1
- 0.46
- 1.25
- 1.51
- 2. 2
- 4.30
- 1.12
- 3.48

- 0. 2
- 1. 1
- 1.31

‘ “
+ 0.07
+ 0.50
+ 0.30
- 1.14
-1. 7
- 0.27
- 2. 7

+ 1. 9
+ 1.30
+ 2. 0
- 0.27
- 5.32
- 0. 3
- 2. 4

-0. 3
- 0.28
+ 0.20

This theory is yet farther confirmed by the motion of that retrograde comet which appeared in the year 1682. The ascending node of this (by Dr. *Halley's* computation) was in ♉ 21° 16' 30"; the inclination of its orbit to the plane of the ecliptic 17° 56' 00"; its perihelion in ♒ 2° 52' 50"; its perihelion distance from the sun 58328 parts, of which the radius of the *orbis magnus* contains 100000; the equal time of the comet's being in its perihelion *Sept*. $4^{d}.7^{h}.39'$. And its places, collected from Mr. *Flamsted's* observations, are compared with its places computed from our theory in the following table: — 1682

App. Time.

Sun's place

Comet's
Long. comp.

Lat. Nor.
comp.

Com. Long.
observed.

Lat.Nor.
observ.

Diff.
Long.

Diff.
Lat.

d. h. ‘
Aug. 19.16.38

20.15.38

21. 8.21
22. 8. 8

29.08.20

30. 7.45
Sept. 1. 7.33
4. 7.22
5. 7.32
8. 7.16
9. 7.26

° ‘ “
♍ 7. 0. 7
7.55 52

8.36.14

9.33.55

16.22.40

17.19.41
19.16. 9

22.11.28

23.10.29
26. 5.58
27. 5. 9

° ‘ “
♌ 18.14 28

24.46.23

29.37.15
♍ 6.29.53
♎ 12.37.54
15 36. 1

20.30.53

25.42. 0
27. 0.46

29.58.44

♏ 0.44.10

° ‘ “
25.50. 7

26.14.42

26.20. 3
26. 8.42

18.37.47

17.26.43
15.13. 0

12.23.48

11.33.08

9.26.46

8.49.10

° ‘ “

♌ 18.14.40

24.46.22

29.38.02
♍ 6.30. 3
♎ 12.37.49

15.35.18

20.27. 4

25.40.58

26.59.24

29.58.45

♏ 0.44. 4

° ‘ “

25.49.55

26.12.52

26.17.37

26. 7.12
18.34. 5

17.27.17

15. 9.49
12.22. 0

11.33.51

9.26.43
8.48.25

‘ “
- 0.12
+ 0. 1
- 0.47
- 0.10
+ 0. 5
+ 0.43
+ 3.49
+ 1. 2
+ 1.22
- 0.1
+ 0. 6

‘ “
+ 0.12
+ 1.50
+ 2.26
+ 1.30
+ 3.42
- 0.34
+ 3.11
+ 1.48

- 0.43
+ 0. 3
+ 0.45

This theory is also confirmed by the retrograde motion of the comet that appeared in the year 1723. The ascending node of this comet (according to the computation of Mr. *Bradley*, Savilian Professor of Astronomy at *Oxford*) was in ♈ 14° 16’. The inclination of the orbit to the plane of the ecliptic 49° 59’. Its perihelion was in ♉ 12° 15’ 20”. Its perihelion distance from the sun 998651 parts, of which the radius of the *orbis magnus* contains 1000000, and the equal time of its perihelion *September* 16^{d} 16^{h}.10’. The places of this comet computed in this orbit by Mr. *Bradley*, and compared with the places observed by himself, his uncle Mr. *Pound*, and Dr. *Halley*, may be seen in the following table.

1723
Eq. Time.

Comet’s
Long. obs.

Lat. Nor.
obs.

Comet’s
Lon. com.

Lat.Nor.
comp.

Diff.
Lon.

Diff.
Lat.

d. h. ‘
Oct. 9.8. 5

10.6.21

12.7.22

14.8.57

15.6.35

21.6.22

22. 6.24
24.8. 2

29.8.56

30.6.20
Nov. 5.5.53
8.7. 6

14.6.20

20.7.45
Dec. 7.6.45

∘ ‘ “
♒ 7.22.15

6.41.12

5.39.58

4.59.49

4.47.41
4. 2.32
3.59. 2

3.55.29

3.56.17
3.58. 9

4.16.30

4.29.36
5. 2.16

5.42.20

8. 4.13

° ‘ “
5. 2. 0

7.44.13

11.55. 0

14.43.50

15.40.51

19.41.49

20. 8.12

20.55.18

22.20.27

22.32.28

23.38 33
24. 4.30

24.48.46

25.24.45
26.54.18

° ‘ “
♒ 7.21.26

6.41.42

5.40.19
5. 0.37

4.47.45

4. 2.21

3.59.10

3.55.11

3.56.42

3.58.17

4.16.23

4.29.54
5. 2.51

5.43.13

8. 3.55

° ‘ “
5. 2 47

7.43.18

11.54.55
14.44. 1

15.40.55

19.42. 3
20. 8.17
20.55. 9

22.20.10

22.32.12
23.38. 7
24. 4.40

24.48.16

25.25.17
26.53.42

“
+ 49
- 50
- 21
- 48
- 4
+ 11
- 8
+ 18
- 25
- 8
+ 7

- 18
- 35
- 53
+ 18

“
- 47
+ 55
+ 5
- 11
- 4
- 14
- 5
+ 9
+ 17
+ 16
+ 26
- 10
+ 30
- 32
+ 36

From these examples it is abundantly evident that the motions of comets are no less accurately represented by our theory than the motions of the planets commonly are by the theories of them; and, therefore, by means of this theory, we may enumerate the orbits of comets, and so discover the periodic time of a comet’s revolution in any orbit; whence, at last, we shall have the transverse diameters of their elliptic orbits and their aphelion distances.

That retrograde comet which appeared in the year 1607 described an orbit whose ascending node (according to Dr. *Halley’s* computation) was in ♉ 20° 21’; and the inclination of the plane of the orbit to the plane of the ecliptic 17° 2’; whose perihelion was in ♒ 2° 16’; and its perihelion distance from the sun 58680 of such parts as the radius of the *orbis magnus*

contains 100000; and the comet was in its perihelion *October* $16^{d}.3^{h}.50'$; which orbit agrees very nearly with the orbit of the comet which was seen in 1682. If these were not two different comets, but one and the same, that comet will finish one revolution in the space of 75 years; and the greater axis of its orbit will be to the greater axis of the *orbis magnus* as to 1, or as 1778 to 100, nearly. And the aphelion distance of this comet from the sun will be to the mean distance of the earth from the sun as about 35 to 1; from which data it will be no hard matter to determine the elliptic orbit of this comet. But these things are to be supposed on condition, that, after the space of 75 years, the same comet shall return again in the same orbit. The other comets seem to ascend to greater heights, and to require a longer time to perform their revolutions.

But, because of the great number of comets, of the great distance of their aphelions from the sun, and of the slowness of their motions in the aphelions, they will, by their mutual gravitations, disturb each other; so that their eccentricities and the times of their revolutions will be sometimes a little increased, and sometimes diminished. Therefore we are not to expect that the same comet will return exactly in the same orbit, and in the same periodic times: it will be sufficient if we find the changes no greater than may arise from the causes just spoken of.

And hence a reason may be assigned why comets are not comprehended within the limits of a zodiac, as the planets are; but, being confined to no bounds, are with various motions dispersed all over the heavens; namely, to this purpose, that in their aphelions, where their motions are exceedingly slow, receding to greater distances one from another, they may suffer less disturbance from their mutual gravitations: and hence it is that the comets which descend the lowest, and therefore move the slowest in their aphelions, ought also to ascend the highest.

The comet which appeared in the year 1680 was in its perihelion less distant from the sun than by a sixth part of the sun's diameter; and because of its extreme velocity in that proximity to the sun, and some density of the sun's atmosphere, it must have suffered some resistance and retardation; and therefore, being attracted something nearer to the sun in every revolution, will at last fall down upon the body of the sun. Nay, in its aphelion, where it moves the slowest, it may sometimes happen to be yet

farther retarded by the attractions of other comets, and in consequence of this retardation descend to the sun. So fixed stars, that have been gradually wasted by the light and vapours emitted from them for a long time, may be recruited by comets that fall upon them; and from this fresh supply of new fuel those old stars, acquiring new splendor, may pass for new stars. Of this kind are such fixed stars as appear on a sudden, and shine with a wonderful brightness at first, and afterwards vanish by little and little. Such was that star which appeared in *Cassiopeia's* chair; which *Cornelius Gemma* did not see upon the 8th of *November*, 1572, though he was observing that part of the heavens upon that very night, and the sky was perfectly serene; but the next night (*November* 9) he saw it shining much brighter than any of the fixed stars, and scarcely inferior to *Venus* in splendor. *Tycho Brahe* saw it upon the 11th of the same month, when it shone with the greatest lustre; and from that time he observed it to decay by little and little; and in 16 months' time it entirely disappeared. In the month of *November*, when it first appeared, its light was equal to that of *Venus*. In the month of *December* its light was a little diminished, and was now become equal to that of *Jupiter*. In January 1573 it was less than *Jupiter*, and greater than *Sirius*; and about the end of *February* and the beginning of *March* became equal to that star. In the months of *April* and *May* it was equal to a star of the second magnitude; in *June, July,* and *August*, to a star of the third magnitude; in *September, October*, and *November*, to those of the fourth magnitude; in *December* and *January* 1574 to those of the fifth; in *February* to those of the sixth magnitude; and in *March* it entirely vanished. Its colour at the beginning was clear, bright, and inclining to white; afterwards it turned a little yellow; and in *March* 1573 it became ruddy, like *Mars* or *Aldebaran*: in *May* it turned to a kind of dusky whiteness, like that we observe in *Saturn*; and that colour it retained ever after, but growing always more and more obscure. Such also was the star in the right foot of *Serpentarius*, which *Kepler's* scholars first observed *September* 30, O.S. 1604, with a light exceeding that of *Jupiter*, though the night before it was not to be seen; and from that time it decreased by little and little, and in 15 or 16 months entirely disappeared. Such a new star appearing with an unusual splendor is said to have moved *Hipparchus* to observe, and make a catalogue of, the fixed stars. As to those fixed stars that appear and disappear by turns, and increase slowly and by degrees, and scarcely ever

exceed the stars of the third magnitude, they seem to be of another kind, which revolve about their axes, and, having a light and a dark side, shew those two different sides by turns. The vapours which arise from the sun, the fixed stars, and the tails of the comets, may meet at last with, and fall into, the atmospheres of the planets by their gravity, and there be condensed and turned into water and humid spirits; and from thence, by a slow heat, pass gradually into the form of salts, and sulphurs, and tinctures, and mud, and clay, and sand, and stones, and coral, and other terrestrial substances.

General Scholium

The hypothesis of vortices is pressed with many difficulties. That every planet by a radius drawn to the sun may describe areas proportional to the times of description, the periodic times of the several parts of the vortices should observe the duplicate proportion of their distances from the sun; but that the periodic times of the planets may obtain the sesquiplicate proportion of their distances from the sun, the periodic times of the parts of the vortex ought to be in the sesquiplicate proportion of their distances. That the smaller vortices may maintain their lesser revolutions about *Saturn, Jupiter*, and other planets, and swim quietly and undisturbed in the greater vortex of the sun, the periodic times of the parts of the sun's vortex should be equal; but the rotation of the sun and planets about their axes, which ought to correspond with the motions of their vortices, recede far from all these proportions. The motions of the comets are exceedingly regular, are governed by the same laws with the motions of the planets, and can by no means be accounted for by the hypothesis of vortices; for comets are carried with very eccentric motions through all parts of the heavens indifferently, with a freedom that is incompatible with the notion of a vortex.

Bodies projected in our air suffer no resistance but from the air. Withdraw the air, as is done in Mr. *Boyle's* vacuum, and the resistance ceases; for in this void a bit of line down and a piece of solid gold descend with equal velocity. And the parity of reason must take place in the celestial spaces above the earth's atmosphere; in which spaces, where there is no air to resist their motions, all bodies will move with the greatest freedom; and the planets and comets will constantly pursue their revolutions in orbits given in kind and position, according to the laws above explained; but though these bodies may, indeed, persevere in their orbits by the mere laws of gravity, yet they could by no means have at first derived the regular position of the orbits themselves from those laws.

The six primary planets are revolved about the sun in circles concentric with the sun, and with motions directed towards the same parts, and almost in the same plane. Ten moons are revolved about the earth, Jupiter and Saturn, in circles concentric with them, with the same direction of motion,

and nearly in the planes of the orbits of those planets; but it is not to be conceived that mere mechanical causes could give birth to so many regular motions, since the comets range over all parts of the heavens in very eccentric orbits; for by that kind of motion they pass easily through the orbs of the planets, and with great rapidity; and in their aphelions, where they move the slowest, and are detained the longest, they recede to the greatest distances from each other, and thence suffer the least disturbance from their mutual attractions. This most beautiful system of the sun, planets, and comets, could only proceed from the counsel and dominion of an intelligent and powerful Being. And if the fixed stars are the centres of other like systems, these, being formed by the like wise counsel, must be all subject to the dominion of One; especially since the light of the fixed stars is of the same nature with the light of the sun, and from every system light passes into all the other systems: and lest the systems of the fixed stars should, by their gravity, fall on each other mutually, he hath placed those systems at immense distances one from another.

This Being governs all things, not as the soul of the world, but as Lord over all; and on account of his dominion he is wont to be called *Lord God* παντοκράτωρ, or *Universal Ruler*; for *God* is a relative word, and has a respect to servants; and *Deity* is the dominion of God not over his own body, as those imagine who fancy God to be the soul of the world, but over servants. The Supreme God is a Being eternal, infinite, absolutely perfect; but a being, however perfect, without dominion, cannot be said to be Lord God; for we say, my God, your God, the God of *Israel*, the God of Gods, and Lord of Lords; but we do not say, my Eternal, your Eternal, the Eternal of *Israel*, the Eternal of Gods; we do not say, my Infinite, or my Perfect: these are titles which have no respect to servants. The word *God* usually signifies *Lord*; but every lord is not a God. It is the dominion of a spiritual being which constitutes a God: a true, supreme, or imaginary dominion makes a true, supreme, or imaginary God. And from his true dominion it follows that the true God is a living, intelligent, and powerful Being; and, from his other perfections, that he is supreme, or most perfect. He is eternal and infinite, omnipotent and omniscient; that is, his duration reaches from eternity to eternity; his presence from infinity to infinity; he governs all things, and knows all things that are or can be done. He is not eternity or infinity, but eternal and infinite; he is not duration or space, but he endures

and is present. He endures for ever, and is every where present; and by existing always and every where, he constitutes duration and space. Since every particle of space is *always*, and every indivisible moment of duration is *every where*, certainly the Maker and Lord of all things cannot be *never* and *no where*. Every soul that has perception is, though in different times and in different organs of sense and motion, still the same indivisible person. There are given successive parts in duration, co-existent parts in space, but neither the one nor the other in the person of a man, or his thinking principle; and much less can they be found in the thinking substance of God. Every man, so far as he is a thing that has perception, is one and the same man during his whole life, in all and each of his organs of sense. God is the same God, always and every where. He is omnipresent not *virtually* only, but also *substantially*; for virtue cannot subsist without substance. In him are all things contained and moved; yet neither affects the other: God suffers nothing from the motion of bodies; bodies find no resistance from the omnipresence of God. It is allowed by all that the Supreme God exists necessarily; and by the same necessity he exists *always* and *every where*. Whence also he is all similar, all eye, all ear, all brain, all arm, all power to perceive, to understand, and to act; but in a manner not at all human, in a manner not at all corporeal, in a manner utterly unknown to us. As a blind mail has no idea of colours, so have we no idea of the manner by which the all-wise God perceives and understands all things. He is utterly void of all body and bodily figure, and can therefore neither be seen, nor heard, nor touched; nor ought he to be worshipped under the representation of any corporeal thing. We have ideas of his attributes, but what the real substance of any thing is we know not. In bodies, we see only their figures and colours, we hear only the sounds, we touch only their outward surfaces, we smell only the smells, and taste the savours; but their inward substances are not to be known either by our senses, or by any reflex act of our minds: much less, then, have we any idea of the substance of God. We know him only by his most wise and excellent contrivances of things, and final causes: we admire him for his perfections; but we reverence and adore him on account of his dominion: for we adore him as his servants; and a god without dominion, providence, and final causes, is nothing else but Fate and Nature. Blind metaphysical necessity, which is certainly the same always and every where, could produce no variety of

things. All that diversity of natural things which we find suited to different times and places could arise from nothing but the ideas and will of a Being necessarily existing. But, by way of allegory, God is said to see, to speak, to laugh, to love, to hate, to desire, to give, to receive, to rejoice, to be angry, to fight, to frame, to work, to build; for all our notions of God are taken from the ways of mankind by a certain similitude, which, though not perfect, has some likeness, however. And thus much concerning God; to discourse of whom from the appearances of things, does certainly belong to Natural Philosophy.

Hitherto we have explained the phenomena of the heavens and of our sea by the power of gravity, but have not yet assigned the cause of this power. This is certain, that it must proceed from a cause that penetrates to the very centres of the sun and planets, without suffering the least diminution of its force; that operates not according to the quantity of the surfaces of the particles upon which it acts (as mechanical causes use to do), but according to the quantity of the solid matter which they contain, and propagates its virtue on all sides to immense distances, decreasing always in the duplicate proportion of the distances. Gravitation towards the sun is made up out of the gravitations towards the several particles of which the body of the sun is composed; and in receding from the sun decreases accurately in the duplicate proportion of the distances as far as the orb of Saturn, as evidently appears from the quiescence of the aphelions of the planets; nay, and even to the remotest aphelions of the comets, if those aphelions are also quiescent. But hitherto I have not been able to discover the cause of those properties of gravity from phaenomena, and I frame no hypotheses; for whatever is not deduced from the phaenomena is to be called an hypothesis; and hypotheses, whether metaphysical or physical, whether of occult qualities or mechanical, have no place in experimental philosophy. In this philosophy particular propositions are inferred from the phenomena, and afterwards rendered general by induction. Thus it was that the impenetrability, the mobility, and the impulsive force of bodies, and the laws of motion and of gravitation, were discovered. And to us it is enough that gravity does really exist, and act according to the laws which we have explained, and abundantly serves to account for all the motions of the celestial bodies, and of our sea.

And now we might add something concerning a certain most subtle Spirit which pervades and lies hid in all gross bodies; by the force and action of which Spirit the particles of bodies mutually attract one another at near distances, and cohere, if contiguous; and electric bodies operate to greater distances, as well repelling as attracting the neighbouring corpuscles; and light is emitted, reflected, refracted, inflected, and heats bodies; and all sensation is excited, and the members of animal bodies move at the command of the will, namely, by the vibrations of this Spirit, mutually propagated along the solid filaments of the nerves, from the outward organs of sense to the brain, and from the brain into the muscles. But these are things that cannot be explained in few words, nor are we furnished with that sufficiency of experiments which is required to an accurate determination and demonstration of the laws by which this electric and elastic Spirit operates.

END OF THE MATHEMATICAL PRINCIPLES.

Dr. *Pocock* derives the Latin word *Deus* from the *Arabic du* (in the oblique case *di*), which signifies *Lord*. And in this sense princes are called *gods*, *Psal*. lxxxii. ver. 6; and *John* x. ver. 35. And *Moses* is called a *god* to his brother *Aaron*, and a god to *Pharaoh* (*Exod*. iv. ver. 16; and vii. ver. 1). And in the same sense the souls of dead princes were formerly, by the Heathens, culled *gods*, but falsely, because of their want of dominion.

This was the opinion of the Ancients. So *Pythagoras*, in *Cicer. de Nat. Deor.* lib. i *Thales, Anaxagoros, Virgil,* Georg. lib. iv. ver. 220; and AEneid, lib. vi. ver. 721. *Philo Allegor,* at the beginning of lib. i. *Aratus*, in his Phaenom. at the beginning. So also the sacred writers; as St. *Paul, Acts*, xvii. ver 27, 28. St. *John's* Gosp. chap. xiv. ver. 2. *Moses*. in *Deut*. iv. ver. 39; and x ver. 14. *David, Psal*. cxxxix. ver. 7, 8, 9. *Solomon*, 1 *Kings*, viii. ver. 27. *Job*, xxii. ver. 12, 13, 14. *Jeremiah*, xxiii. ver. 23, 24. The Idolaters opposed the sun, moon, and stars, the souls of men, and other parts of the world, to be parts of the Supreme God, and therefore to be worshipped; but erroneously.

The System of the World.

It was the ancient opinion of not a few, in the earliest ages of philosophy, that the fixed stars stood immoveable in the highest parts of the world; that under the fixed stars the planets were carried about the sun; that the earth, as one of the planets, described an annual course about the sun, while by a diurnal motion it was in the mean time revolved about its own axis; and that the sun, as the common fire which served to warm the whole, was fixed in the centre of the universe.

This was the philosophy taught of old by *Philolaus, Aristarchus* of *Samos, Plato* in his riper years, and the whole sect of the *Pythagoreans*; and this was the judgment of *Anaximander*, more ancient than any of them; and of that wise king of the *Romans, Numa Pompilius*, who, as a symbol of the figure of the world with the sun in the centre, erected a temple in honour of *Vesta*, of a round form, and ordained perpetual fire to be kept in the middle of it.

The *Egyptians* were early observers of the heavens; and from them, probably, this philosophy was spread abroad among other nations; for from them it was, and the nations about them, that the *Greeks*, a people of themselves more addicted to the study of philology than of nature, derived their first, as well as soundest, notions of philosophy; and in the vestal ceremonies we may yet trace the ancient spirit of the *Egyptians*; for it was their way to deliver their mysteries, that is, their philosophy of things above the vulgar way of thinking, under the veil of religious rites and hieroglyphic symbols.

It is not to be denied but that *Anaxagoras, Democritus*, and others, did now and then start up, who would have it that the earth possessed the centre of the world, and that the stars of all sorts were revolved towards the west about the earth quiescent in the centre, some at a swifter, others at a slower rate.

However, it was agreed on both sides that the motions of the celestial bodies were performed in spaces altogether free and void of resistance. The whim of solid orbs was of a later date, introduced by *Eudoxus, Calippus*,

and *Aristotle*; when the ancient philosophy began to decline, and to give place to the new prevailing fictions of the Greeks.

But, above all things, the phenomena of comets can by no means consist with the notion of solid orbs. The *Chaldeans*, the most learned astronomers of their time, looked upon the comets (which of ancient times before had been numbered among the celestial bodies) as a particular sort of planets, which, describing very eccentric orbits, presented themselves to our view only by turns, viz., once in a revolution, when they descended into the lower parts of their orbits.

And as it was the unavoidable consequence of the hypothesis of solid orbs, while it prevailed, that the comets should be thrust down below the moon, so no sooner had the late observations of astronomers restored the comets to their ancient places in the higher heavens, but these celestial spaces were at once cleared of the incumbrance of solid orbs, which by these observations were broke into pieces, and discarded for ever.

Whence it was that the planets came to be retained within any certain bounds in these free spaces, and to be drawn off from the rectilinear courses, which, left to themselves, they should have pursued, into regular revolutions in curvilinear orbits, are questions which we do not know how the ancients explained; and probably it was to give some sort of satisfaction to this difficulty that solid orbs were introduced.

The later philosophers pretend to account for it either by the action of certain vortices, as *Kepler* and *Des Cartes*; or by some other principle of impulse or attraction, as *Borelli*, *Hooke*, and others of our nation; for, from the laws of motion, it is most certain that these effects must proceed from the action of some force or other.

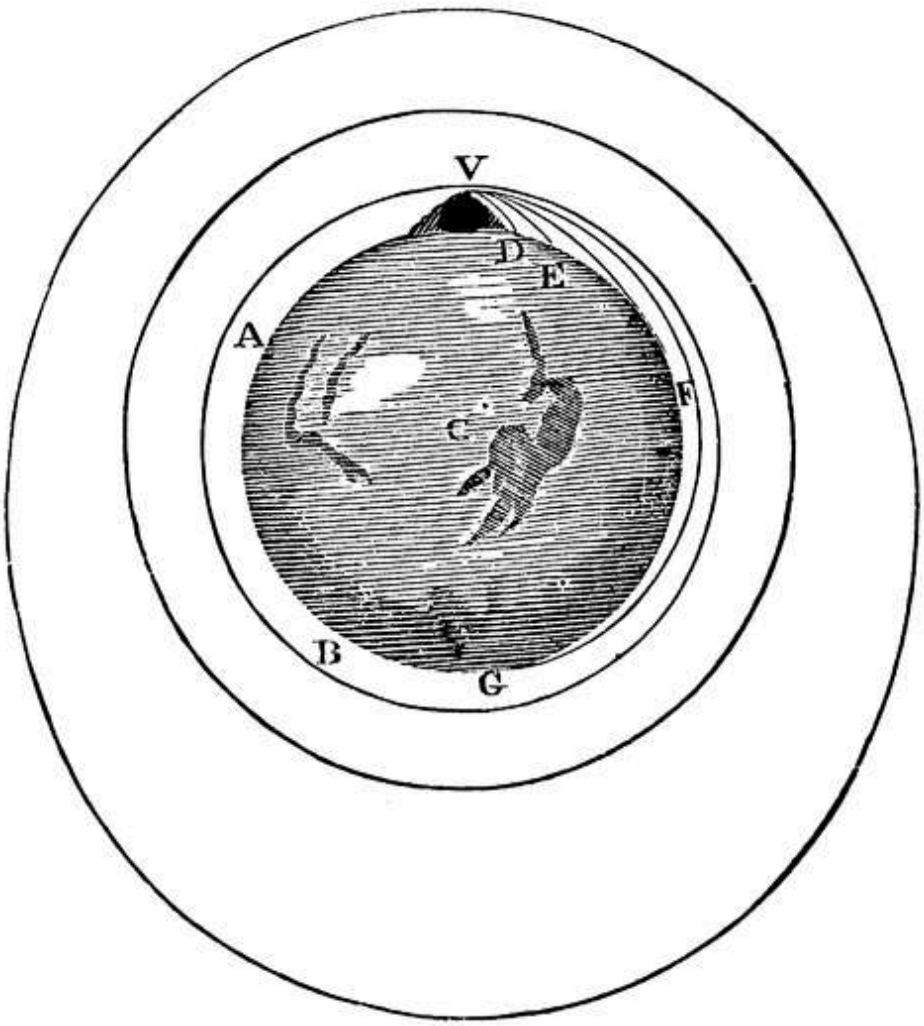
But our purpose is only to trace out the quantity and properties of this force from the phaenomena (), and to apply what we discover in some simple cases as principles, by which, in a mathematical way, we may estimate the effects thereof in more involved cases; for it would be endless and impossible to bring every particular to direct and immediate observation.

We said, *in a mathematical way*, to avoid all questions about the nature or quality of this force, which we would not be understood to determine by any hypothesis; and therefore call it by the general name of a centripetal force, as it is a force which is directed towards some centre; and as it

regards more particularly a body in that centre, we call it circum-solar, circum-terrestrial, circum-jovial; and in like manner in respect of other central bodies.

That by means of centripetal forces the planets may be retained in certain orbits, we may easily understand, if we consider the motions of projectiles (, 76, 77); for a stone projected is by the pressure of its own weight forced out of the rectilinear path, which by the projection alone it should have pursued, and made to describe a curve line in the air; and through that crooked way is at last brought down to the ground; and the greater the velocity is with which it is projected, the farther it goes before it falls to the earth. We may therefore suppose the velocity to be so increased, that it would describe an arc of 1, 2, 5, 10, 100, 1000 miles before it arrived at the earth, till at last, exceeding the limits of the earth, it should pass quite by without touching it.

Let AFB represent the surface of the earth, C its centre, VD, VE, VF, the curve lines which a body would describe, if projected in an horizontal direction from the top of an high mountain successively with more and



more velocity (); and, because the celestial motions are scarcely retarded by the little or no resistance of the spaces in which they are performed, to keep up the parity of cases, let us suppose either that there is no air about the earth, or at least that it is endowed with little or no power of resisting; and for the same reason that the body projected with a less velocity describes the lesser arc VD, and with a greater velocity the greater arc VE, and, augmenting the velocity, it goes farther and farther to F and G, if the velocity was still more and more augmented, it would reach at last quite beyond the circumference of the earth, and return to the mountain from which it was projected.

And since the areas which by this motion it describes by a radius drawn to the centre of the earth are (by Pro, Book 1, *Princip. Math.*) proportional to the times in which they are described, its velocity, when it returns to the

mountain, will be no less than it was at first; and, retaining the velocity, it will describe the same curve over and over, by the same law.

But if we now imagine bodies to be projected in the directions of lines parallel to the horizon from greater heights, as of 5, 10, 100, 1000, or more miles, or rather as many semi-diameters of the earth, those bodies, according to their different velocity, and the different force of gravity in different heights, will describe arcs either concentric with the earth, or variously eccentric, and go on revolving through the heavens in those trajectories, just as the planets do in their orbs.

As when a stone is projected obliquely, that is, any way but in the perpendicular direction, the perpetual deflection thereof towards the earth from the right line in which it was projected is a proof of its gravitation to the earth, no less certain than its direct descent when only suffered to fall freely from rest; so the deviation of bodies moving in free spaces from rectilinear paths, and perpetual deflection therefrom towards any place, is a sure indication of the existence of some force which from all quarters impels those bodies towards that place.

And as, from the supposed existence of gravity, it necessarily follows that all bodies about the earth must press downwards, and therefore must either descend directly to the earth, if they are let fall from rest, or at least perpetually deviate from right lines towards the earth, if they are projected obliquely; so from the supposed existence of a force directed to any centre, it will follow, by the like necessity, that all bodies upon which this force acts must either descend directly to that centre, or at least deviate perpetually towards it from right lines, if otherwise they should have moved obliquely in these right lines.

And how from the motions given we may infer the forces, or from the forces given we may determine the motions, is shewn in the two first Books of our *Principles of Philosophy*.

If the earth is supposed to stand still, and the fixed stars to be revolved in free spaces in the space of 24 hours, it is certain the forces by which the fixed stars are retained in their orbs are not directed to the earth, but to the centres of the several orbs, that is, of the several parallel circles, which the fixed stars, declining to one side and the other from the equator, describe daily; also that by radii drawn to the centres of those orbs the fixed stars describe areas exactly proportional to the times of description. Then,

because the periodic times are equal (by Cor. III, Prop. IV, Book 1), it follows that the centripetal forces are as the radii of the several orbs, and that they will perpetually revolve in the same orbs. And the like consequences may be drawn from the supposed diurnal motion of the planets.

That forces should be directed to no body on which they physically depend, but to innumerable imaginary points in the axis of the earth, is an hypothesis too incongruous. It is more incongruous still that those forces should increase exactly in proportion of the distances from this axis; for this is an indication of an increase to immensity, or rather to infinity; whereas the forces of natural things commonly decrease in receding from the fountain from which they flow. But, what is yet more absurd, neither are the areas described by the same star proportional to the times, nor are its revolutions performed in the same orb; for as the star recedes from the neighbouring pole, both areas and orb increase; and from the increase of the area it is demonstrated that the forces are not directed to the axis of the earth. And this difficulty (Cor. 1, Prop. II) arises from the twofold motion that is observed in the fixed stars, one diurnal round the axis of the earth, the other exceedingly slow round the axis of the ecliptic. And the explication thereof requires a composition of forces so perplexed and so variable, that it is hardly to be reconciled with any physical theory.

That there are centripetal forces actually directed to the bodies of the sun, of the earth, and other planets, I thus infer.

The moon revolves about our earth, and by radii drawn to its centre () describes areas nearly proportional to the times in which they are described, as is evident from its velocity compared with its apparent diameter; for its motion is slower when its diameter is less (and therefore its distance greater), and its motion is swifter when its diameter is greater.

The revolutions of the satellites of Jupiter about that planet are more regular (); for they describe circles concentric with Jupiter by equable motions, as exactly as our senses can distinguish.

And so the satellites of Saturn are revolved about this planet with motions nearly () circular and equable, scarcely disturbed by any eccentricity hitherto observed.

That Venus and Mercury are revolved about the sun, is demonstrable from their moon-like appearances (); when they shine with a full face, they

are in those parts of their orbs which in respect of the earth lie beyond the sun; when they appear half full, they are in those parts which lie over against the sun; when horned, in those parts which lie between the earth and the sun; and sometimes they pass over the sun's disk, when directly interposed between the earth and the sun.

And Venus, with a motion almost uniform, describes an orb nearly circular and concentric with the sun.

But Mercury, with a more eccentric motion, makes remarkable approaches to the sun, and goes off again by turns; but it is always swifter as it is near to the sun, and therefore by a radius drawn to the sun still describes areas proportional to the times.

Lastly, that the earth describes about the sun, or the sun about the earth, by a radius from the one to the other, areas exactly proportional to the times, is demonstrable from the apparent diameter of the sun compared with its apparent motion.

These are astronomical experiments; from which it follows, by Prop. I, II, III, in the first Book of our *Principles*, and their Corollaries (, 213, 214), that there are centripetal forces actually directed (either accurately or without considerable error) to the centres of the earth, of Jupiter, of Saturn, and of the sun. In Mercury, Venus, Mars, and the lesser planets, where experiments are wanting, the arguments from analogy must be allowed in their place.

That those forces (, 213, 214) decrease in the duplicate proportion of the distances from the centre of every planet, appears by Cor. VI, Prop. IV, Book I; for the periodic times of the satellites of Jupiter are one to another (, 387) in the sesquiplicate proportion of their distances from the centre of this planet.

This proportion has been long ago observed in those satellites; and Mr. *Flamsted*, who had often measured their distances from Jupiter by the micrometer, and by the eclipses of the satellites, wrote to me, that it holds to all the accuracy that possibly can be discerned by our senses. And he sent me the dimensions of their orbits taken by the micrometer, and reduced to the mean distance of Jupiter from the earth, or from the sun, together with the times of their revolutions, as follows: —

The greatest elongation
of the satelites
from the centre
of Jupiter as seen
from the sun.

The periodic
times of their
revolutions.

1st
2d
3d
4th

‘
1
3
4
8

“
48
01
46
13½

or
or
or
or

“
108
181
186
493½

d
1
3
7
16

h
18
13
03
18

‘
28
17
59
5

“
36
54
36
13

Whence the sesquiplicate proportion may be easily seen. For example; the 16^{d} 18^{h}.05’ 13” is to the time 1^{d}.18^{h}.28’ 36” as 493½” to 108, neglecting those small fractions which, in observing, cannot be certainly determined.

Before the invention of the micrometer, the same distances were determined in semi-diameters of Jupiter thus: —

Distance of the

1st

2d

3d

4th

By Galileo
“ Simon Marius
“ Cassini
Borelli, more exactly

6
6
5
5⅔

10
10
8
8⅔

16
16
13
14

28
26
23
24⅔

After the invention of the micrometer: —

By Townley
“ Flamsted
More accurately by the eclipses

5,51
5,31
5,578

8,78
8,85
8,876

13,47
13,98
14,159

24,72
24,23
24,903

And the periodic times of those satellites, by the observations of Mr. *Flamsted*, are $1^{d}.18^{h}.28'36''$ | $3^{d}.13^{h}.17'54''$ | $7^{d}.3^{h}.59'36''$ | $16^{d}.18^{h}.5'13''$, as above.

And the distances thence computed are 5,578 | 8,878 | 14,168 | 24,968, accurately agreeing with the distances by observation.

Cassini assures us (, 389) that the same proportion is observed in the circum-saturnal planets. But a longer course of observations is required before we can have a certain and accurate theory of those planets.

In the circum-solar planets. Mercury and Venus, the same proportion holds with great accuracy, according to the dimensions of their orbs, as determined by the observations of the best astronomers.

That Mars is revolved about the sun is demonstrated from the phases which it shews, and the proportion of its apparent diameters (, 389, and 390); for from its appearing full near conjunction with the sun, and gibbous in its quadratures, it is certain that it surrounds the sun.

And since its diameter appears about five times greater when in opposition to the sun than when in conjunction therewith, and its distance from the earth is reciprocally as its apparent diameter, that distance will be about five times less when in opposition to than when in conjunction with

the sun; but in both cases its distance from the sun will be nearly about the same with the distance which is inferred from its gibbous appearance in the quadratures. And as it encompasses the sun at almost equal distances, but in respect of the earth is very unequally distant, so by radii drawn to the sun it describes areas nearly uniform; but by radii drawn to the earth, it is sometimes swift, sometimes stationary, and sometimes retrograde.

That Jupiter, in a higher orb than Mars, is likewise revolved about the sun, with a motion nearly equable, as well in distance as in the areas described, I infer thus.

Mr. *Flamsted* assured me, by letters, that all the eclipses of the inner most satellite which hitherto have been well observed do agree with his theory so nearly, as never to differ therefrom by two minutes of time; that in the outmost the error is little greater; in the outmost but one, scarcely three times greater; that in the innermost but one the difference is indeed much greater, yet so as to agree as nearly with his computations as the moon does with the common tables; and that he computes those eclipses only from the mean motions corrected by the equation of light discovered and introduced by Mr. *Romer*. Supposing, then, that the theory differs by a less error than that of 2 from the motion of the outmost satellite as hitherto described, and taking as the periodic time 16^{d}. 18^{h}.5’13” to 2 in time, so is the whole circle or 360° to the arc 1’ 48”, the error of Mr. *Flamsted’s* computation, reduced to the satellite’s orbit, will be less than 1’ 48”; that is, the longitude of the satellite, as seen from the centre of Jupiter, will be determined with a less error than 1’ 48”. But when the satellite is in the middle of the shadow, that longitude is the same with the heliocentric longitude of Jupiter; and, therefore, the hypothesis which Mr. *Flamsted* follows, viz., the *Copernican*, as improved by *Kepler*, and (as to the motion of Jupiter) lately corrected by himself, rightly represents that longitude within a less error than 1’ 48”; but by this longitude, together with the geocentric longitude, which is always easily found, the distance of Jupiter from the sun is determined; which must, therefore, be the very same with that which the hypothesis exhibits. For that greatest error of 1’ 48” that can happen in the heliocentric longitude is almost insensible, and quite to be neglected, and perhaps may arise from some yet undiscovered eccentricity of the satellite; but since both longitude and distance are rightly determined, it follows of necessity that Jupiter, by

radii drawn to the sun, describes areas so conditioned as the hypothesis requires, that is, proportional to the times.

And the same thing may be concluded of Saturn from his satellite, by the observations of Mr. *Huygens* and Dr. *Halley*; though a longer series of observations is yet wanting to confirm the thing, and to bring it under a sufficiently exact computation.

For if Jupiter was viewed from the sun, it would never appear retrograde nor stationary, as it is seen sometimes from the earth, but always to go forward with a motion nearly uniform (). And from the very great inequality of its apparent geocentric motion, we infer (by Prop. III Cor. IV) that the force by which Jupiter is turned out of a rectilinear course, and made to revolve in an orb, is not directed to the centre of the earth. And the same argument holds good in Mars and in Saturn. Another centre of these forces is therefore to be looked for (by Prop. II and III, and the Corollaries of the latter), about which the areas described by radii intervening may be equable; and that this is the sun, we have proved already in Mars and Saturn nearly, but accurately enough in Jupiter. It may be alledged that the sun and planets are impelled by some other force equally and in the direction of parallel lines; but by such a force (by Cor. VI of the Laws of Motion) no change would happen in the situation of the planets one to another, nor any sensible effect follow: but our business is with the causes of sensible effects. Let us, therefore, neglect every such force as imaginary and precarious, and of no use in the phaenomena of the heavens; and the whole remaining force by which Jupiter is impelled will be directed (by Prop. III, Cor. I) to the centre of the sun.

The distances of the planets from the sun come out the same, whether, with *Tycho*, we place the earth in the centre of the system, or the sun with *Copernicus*: and we have already proved that these distances are true in Jupiter.

Kepler and *Bullialdus* have, with great care (), determined the distances of the planets from the sun; and hence it is that their tables agree best with the heavens. And in all the planets, in Jupiter and Mars, in Saturn and the earth, as well as in Venus and Mercury, the cubes of their distances are as the squares of their periodic times; and therefore (by Cor. VI, Prop. IV) the centripetal circum-solar force throughout all the planetary regions decreases in the duplicate proportion of the distances from the sun. In examining this

proportion, we are to use the mean distances, or the transverse semi-axes of the orbits (by Prop. XV), and to neglect those little fractions, which, in defining the orbits, may have arisen from the in sensible errors of observation, or may be ascribed to other causes which we shall afterwards explain. And thus we shall always find the said proportion to hold exactly; for the distances of Saturn, Jupiter, Mars, the Earth, Venus, and Mercury, from the sun, drawn from the observations of astronomers, are, according to the computation of Kepler, as the numbers 951000, 519650, 152350, 100000, 72400, 38806; by the computation of *Bullialdus*, as the numbers 954193, 522520, 152350, 100000, 72398, 38585; and from the periodic times they come out 953806, 520116, 152399, 100000, 72333, 38710. Their distances, according to *Kepler* and *Bullialdus*, scarcely differ by any sensible quantity, and where they differ most the distances drawn from the periodic times, fall in between them.

That the circum-terrestrial force likewise decreases in the duplicate proportion of the distances, I infer thus.

The mean distance of the moon from the centre of the earth, is, in semi-diameters of the earth, according to *Ptolemy*, *Kepler* in his *Ephemerides*, *Bullialdus*, *Hevelius*, and *Ricciolus*, 59; according to *Flamsted*, 59⅓; according to *Tycho*, 56½; to *Vendelin*, 60; to *Copernicus*, 60⅓; to *Kircher*, 62½ (p . 391, 392, 393).

But *Tycho*, and all that follow his tables of refraction, making the refractions of the sun and moon (altogether against the nature of light) to exceed those of the fixed stars, and that by about four or five minutes in the horizon, did thereby augment the horizontal parallax of the moon by about the like number of minutes; that is, by about the 12th or 15th part of the whole parallax. Correct this error, and the distance will be come 60 or 61 semi-diameters of the earth, nearly agreeing with what others have determined.

Let us, then, assume the mean distance of the moon 60 semi-diameters of the earth, and its periodic time in respect of the fixed stars $27^{d}.7^{h}.43'$, as astronomers have determined it. And (by Cor. VI, Prop. IV) a body revolved in our air, near the surface of the earth supposed at rest, by means of a centripetal force which should be to the same force at the distance of the moon in the reciprocal duplicate proportion of the distances from the centre

of the earth, that is, as 3600 to 1, would (secluding the resistance of the air) complete a revolution in $1^{h}.24'\ 27''$.

Suppose the circumference of the earth to be 123249600 *Paris* feet, as has been determined by the late mensuration of the *French* (vide); then the same body, deprived of its circular motion, and falling by the impulse of the same centripetal force as before, would, in one second of time, describe $15\frac{1}{12}$ *Paris* feet.

This we infer by a calculus formed upon Prop. XXXVI, and it agrees with what we observe in all bodies about the earth. For by the experiments of pendulums, and a computation raised thereon, Mr. *Huygens* has demonstrated that bodies falling by all that centripetal force with which (of whatever nature it is) they are impelled near the surface of the earth, do, in one second of time, describe $15\frac{1}{12}$ *Paris* feet.

But if the earth is supposed to move, the earth and moon together (by Cor. IV of the Laws of Motion, and Prop. LVII) will be revolved about their common centre of gravity. And the moon (by Prop. LX) will in the same periodic time, $27^{d}.7^{h}.43'$, with the same circum-terrestrial force diminished in the duplicate proportion of the distance, describe an orbit whose semi-diameter is to the semi-diameter of the former orbit, that is, to 60 semi-diameters of the earth, as the sum of both the bodies of the earth and moon to the first of two mean proportionals between this sum and the body of the earth; that is if we suppose the moon (on account of its mean apparent diameter $31\frac{1}{2}'$) to be about $\frac{1}{42}$ of the earth, as 43 to, or as about 128 to 127. And therefore the semi-diameter of the orbit, that is, the distance between the centres of the moon and earth, will in this case be $60\frac{1}{2}$ semi-diameters of the earth, almost the same with that assigned by *Copernicus*, which the *Tychonic* observations by no means disprove; and, therefore, the duplicate proportion of the decrement of the force holds good in this distance. I have neglected the increment of the orbit which arises from the action of the sun as inconsiderable; but if that is subducted, the true distance will remain about $60\frac{4}{9}$ semi-diameters of the earth.

But farther (); this proportion of the decrement of the forces is confirmed from the eccentricity of the planets, and the very slow motion of their apses; for (by the Corollaries of Prop. XLV) in no other proportion could the

circum-solar planets once in every revolution descend to their least and once ascend to their greatest distance from the sun, and the places of those distances remain immoveable. A small error from the duplicate proportion would produce a motion of the apses considerable in every revolution, but in many enormous.

But now, after innumerable revolutions, hardly any such motion has been perceived in the orbs of the circum-solar planets. Some astronomers affirm that there is no such motion; others reckon it no greater than what may easily arise from the causes hereafter to be assigned, and is of no moment in the present question.

We may even neglect the motion of the moon's apsis (, 391), which is far greater than in the circum-solar planets, amounting in every revolution to three degrees; and from this motion it is demonstrable that the circum-terrestrial force decreases in no less than the duplicate, but far less than the triplicate proportion of the distance; for if the duplicate proportion was gradually changed into the triplicate, the motion of the apsis would thereby increase to infinity; and, therefore, by a very small mutation, would exceed the motion of the moon's apsis. This slow motion arises from the action of the circum-solar force, as we shall afterwards explain. But, secluding this cause, the apsis or apogeon of the moon will be fixed, and the duplicate proportion of the decrease of the circum-terrestrial force in different distances from the earth will accurately take place.

Now that this proportion has been established, we may compare the forces of the several planets among themselves ().

In the mean distance of Jupiter from the earth, the greatest elongation of the outmost satellite from Jupiter's centre (by the observations of Mr. *Flamsted*) is 8' 13"; and therefore the distance of the satellite from the centre of Jupiter is to the mean distance of Jupiter from the centre of the sun as 124 to 52012, but to the mean distance of Venus from the centre of the sun as 124 to 7234; and their periodic times are $16\frac{3}{4}^{d}$. and $224\frac{2}{3}^{d}$; and from hence (according to Cor. II, Prop. IV), dividing the distances by the squares of the times, we infer that the force by which the satellite is impelled towards Jupiter is to the force by which Venus is impelled towards the sun as 442 to 143; and if we diminish the force by which the satellite is impelled in the duplicate proportion of the distance 124 to 7234, we shall

have the circum-jovial force in the distance of Venus from the sun to the circum-solar force by which Venus is impelled as $^{13}/_{100}$ to 143, or as 1 to 1100; wherefore at equal distances the circum-solar force is 1100 times greater than the circum-jovial.

And, by the like computation, from the periodic time of the satellite of Saturn $15^{d}.22^{h}$. and its greatest elongation from Saturn, while that planet is in its mean distance from us, 3' 20", it follows that the distance of this satellite from Saturn's centre is to the distance of Venus from the sun as $92^{2}/_{5}$ to 7234; and from thence that the absolute circum-solar force is 2360 times greater than the absolute circum-saturnal.

From the regularity of the heliocentric and irregularity of the geocentric motions of Venus, of Jupiter, and the other planets, it is evident (by Cor. IV, Prop. III) that the circum-terrestrial force, compared with the circum-solar, is very small.

Ricciolus and *Vendelin* have severally tried to determine the sun's parallax from the moon's dichotomies observed by the telescope, and they agree that it does not exceed half a minute.

Kepler, from *Tycho's* observations and his own, found the parallax of Mars insensible, even in opposition to the sun, when that parallax is some thing greater than the sun's.

Flamsted attempted the same parallax with the micrometer in the perigeon position of Mars, but never found it above 25"; and thence concluded the sun's parallax at most 10".

Whence it follows that the distance of the moon from the earth bears no greater proportion to the distance of the earth from the sun than 29 to 1 0000; nor to the distance of Venus from the sun than 29 to 7233.

From which distances, together with the periodic times, by the method above explained, it is easy to infer that the absolute circum-solar force is greater than the absolute circum-terrestrial force at least 229400 times.

And though we were only certain, from the observations of *Ricciolus* and *Vendelin*, that the sun's parallax was less than half a minute, yet from this it will follow that the absolute circum-solar force exceeds the absolute circum-terrestrial force 8500 times.

By the like computations I happened to discover an analogy, that is observed between the forces and the bodies of the planets; but, before I

explain this analogy, the apparent diameters of the planets in their mean distances from the earth must be first determined.

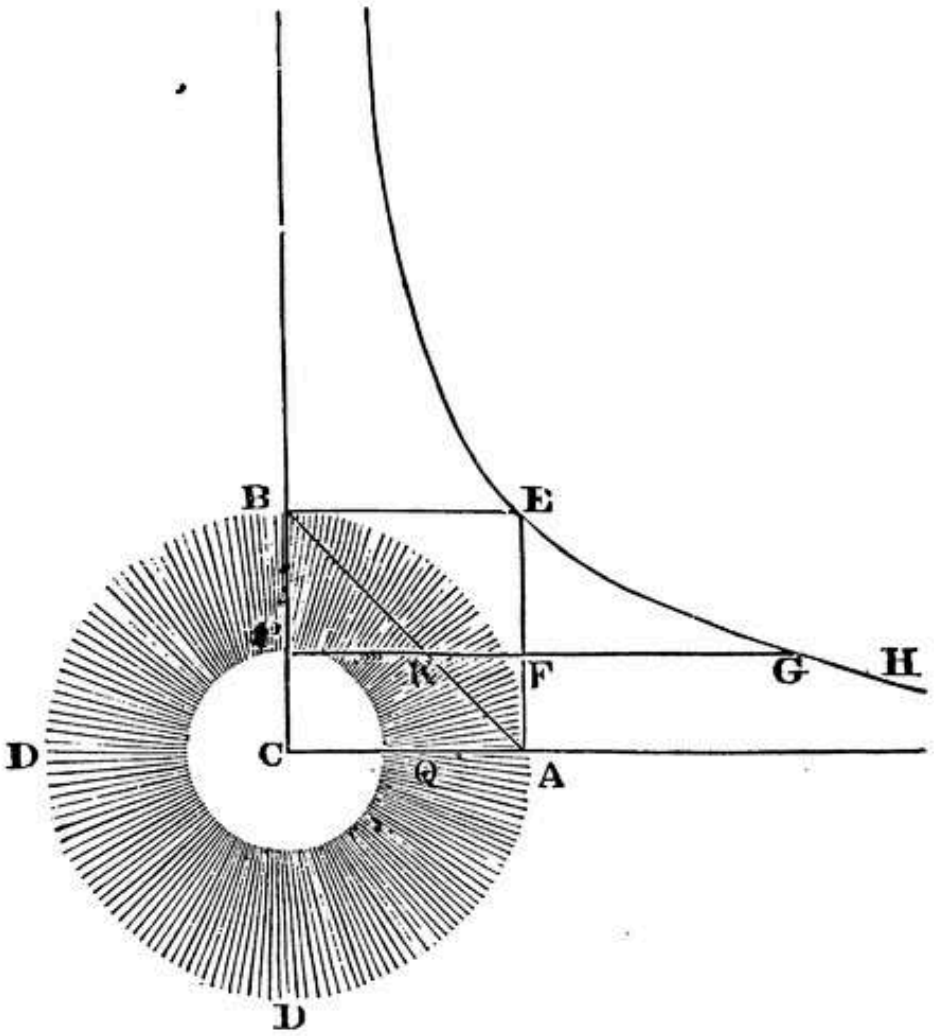
Mr. *Flamsted* (), by the micrometer, measured the diameter of Jupiter 40” or 41”; the diameter of Saturn’s ring 50”; and the diameter of the sun about 32’ 13” ().

But the diameter of Saturn is to the diameter of the ring, according tu Mr. *Huygens* and Dr. *Halley*, as 4 to 9; according to *Galletius*, as 4 to 10; and according to *Hooke* (by a telescope of 60 feet), as 5 to 12. And from the mean proportion, 5 to 12, the diameter of Saturn’s body is inferred about 21”.

Such as we have said are the apparent magnitudes; but, because of the unequal refrangibility of light, all lucid points are dilated by the telescope, and in the focus of the object-glass possess a circular space whose breadth is about the 50th part of the aperture of the glass.

It is true, that towards the circumference the light is so rare as hardly to move the sense; but towards the middle, where it is of greater density, and is sensible enough, it makes a small lucid circle, whose breadth varies according to the splendor of the lucid point, but is generally about the 3d, or 4th, or 5th part of the breadth of the whole.

Let ABD represent the circle of the whole light; PQ the small circle of the denser and clearer light; C the centre of both; CA, CB, semi-diameters of the greater circle containing a right angle at C; ACBE the square comprehended under these semi-diameters; AB the diagonal of that square; EGH an hyperbola with the centre C and asymptotes CA, CB, PG a perpendicular erected from any point P of the line BC, and meeting the hyperbola in G, and the right lines AB, AE, in K and F: and the density of the light in any place P, will, by my computation, be as the line FG, and therefore at the centre infinite, but near the circumference very small. And the whole light within the small circle PQ is to the without as the area of the quadrilateral figure CAKP to the triangle



PKB. And we are to understand the small circle PQ to be there terminated, where FG, the density of the light, begins to be less than what is required to move the sense.

Hence it was, that, at the distance of 191382 feet, a fire of 3 feet in diameter, through a telescope of 3 feet, appeared to Mr. *Picart* of 8” in breadth, when it should have appeared only of 3” 14”’; and hence it is that the brighter fixed stars appear through the telescope as of 5” or 6” in diameter, and that with a good full light; but with a fainter light they appear to run out to a greater breadth. Hence, likewise, it was that *Hevelius*, by diminishing the aperture of the telescope, did cut off a great part of the light towards the circumference, and brought the disk of the star to be more distinctly defined, which, though hereby diminished, did yet appear as of 5” or 6” in diameter. But Mr. *Huygens*, only by clouding the eye-glass with a

little smoke, did so effectually extinguish this scattered light, that the fixed stars appeared as mere points, void of all sensible breadth. Hence also it was that Mr. *Huygens*, from the breadth of bodies interposed to intercept the whole light of the planets, reckoned their diameters greater than others have measured them by the micrometer; for the scattered light, which could not be seen before for the stronger light of the planet, when the planet is hid, appears every way farther spread. Lastly, from hence it is that the planets appear so small in the disk of the sun, being lessened by the dilated light. For to *Hevelius, Galletius*, and Dr. *Halley*, Mercury did not seem to exceed 12” or 15”; and Venus appeared to Mr. *Crabtrie* only 1’ 3”; to *Horrox* but 1’ 12”; though by the mensurations of *Hevelius* and *Hugenius* without the sun’s disk, it ought to have been seen at least 1’ 24”. Thus the apparent diameter of the moon, which in 1684, a few days both before and after the sun’s eclipse, was measured at the observatory of *Paris* 31’ 30”, in the eclipse itself did not seem to exceed 30’ or 30’ 05”; and therefore the diameters of the planets are to be diminished when without the sun, and to be augmented when within it, by some seconds. But the errors seem to be less than usual in the mensurations that are made by the micrometer. So from the diameter of the shadow, determined by the eclipses of the satellites, Mr. *Flamsted* found that the semi-diameter of Jupiter was to the greatest elongation of the outmost satellite as 1 to 24,903. Wherefore since that elongation is 8’ 13”, the diameter of Jupiter will be 39½”; and, rejecting the scattered light, the diameter found by the micrometer 40” or 41” will be reduced to 39½”; and the diameter of Saturn 21” is to be diminished by the like correction, and to be reckoned 20”, or something less. But (if I am not mistaken) the diameter of the sun, because of its stronger light, is to be diminished something more, and to be reckoned about 32’, or 32’ 6”.

That bodies so different in magnitude should come so near to an analogy with their forces, is not without some mystery ().

It may be that the remoter planets, for want of heat, have not those metallic substances and ponderous minerals with which our earth abounds; and that the bodies of Venus and Mercury, as they are more exposed to the sun’s heat, are also harder baked, and more compact.

For, from the experiment of the burning-glass, we see that the heat increases with the density of light; and this density increases in the reciprocal duplicate proportion of the distance from the sun; from whence

the sun's heat in Mercury is proved to be sevenfold its heat in our summer seasons. But with this heat our water boils; and those heavy fluids, quick silver and the spirit of vitriol, gently evaporate, as I have tried by the thermometer; and therefore there can be no fluids in Mercury but what are heavy, and able to bear a great heat, and from which substances of great density may be nourished.

And why not, if God has placed different bodies at different distances from the sun, so as the denser bodies always possess the nearer places, and each body enjoys a degree of heat suitable to its condition, and proper for its nourishment? From this consideration it will best appear that the weights of all the planets are one to another as their forces.

But I should be glad the diameters of the planets were more accurately measured; and that may be done, if a lamp, set at a great distance, is made to shine through a circular hole, and both the hole and the light of the lamp are so diminished that the spectrum may appear through the telescope just like the planet, and may be defined by the same measure: then the diameter of the hole will be to its distance from the objective glass as the true diameter of the planet to its distance from us. The light of the lamp may be diminished by the interposition either of pieces of cloth, or of smoked glass.

Of kin to the analogy we have been describing, there is another observed between the forces and the bodies attracted (, 396, 397). Since the action of the centripetal force upon the planets decreases in the duplicate proportion of the distance, and the periodic time increases in the sesquiplicate thereof, it is evident that the actions of the centripetal force, and therefore the periodic times, would be equal in equal planets at equal distances from the sun; and in equal distances of unequal planets the total actions of the centripetal force would be as the bodies of the planets; for if the actions were not proportional to the bodies to be moved, they could not equally retract these bodies from the tangents of their orbs in equal times: nor could the motions of the satellites of Jupiter be so regular, if it was not that the circum-solar force was equally exerted upon Jupiter and all its satellites in proportion of their several weights. And the same thing is to be said of Saturn in respect of its satellites, and of our earth in respect of the moon, as appears from Cor. II and III, Prop. LXV. And, therefore, at equal distances, the actions of the centripetal force are equal upon all the planets in proportion of their bodies, or of the quantities of matter in their several

bodies; and for the same reason must be the same upon all the particles of the same size of which the planet is composed; for if the action was greater upon some sort of particles than upon others than in proportion to their quantity of matter, it would be also greater or less upon the whole planets not in proportion to the quantity only, but like wise of the sort of the matter more copiously found in one and more sparingly in another.

In such bodies as are found on our earth of very different sorts, I examined this analogy with great accuracy (, 344).

If the action of the circum-terrestrial force is proportional to the bodies to be moved, it will (by the Second Law of Motion) move them with equal velocity in equal times, and will make all bodies let fall to descend through equal spaces in equal times, and all bodies hung by equal threads to vibrate in equal times. If the action of the force was greater, the times would be less; if that was less, these would be greater.

But it has been long ago observed by others, that (allowance being made for the small resistance of the air) all bodies descend through equal spaces in equal times; and, by the help of pendulums, that equality of times may be distinguished to great exactness.

I tried the thing in gold, silver, lead, glass, sand, common salt, wood, water, and wheat. I provided two equal wooden boxes. I filled the one with wood, and suspended an equal weight of gold (as exactly as I could) in the centre of oscillation of the other. The boxes, hung by equal threads of 11 feet, made a couple of pendulums perfectly equal in weight and figure, and equally exposed to the resistance of the air: and, placing the one by the other, I observed them to play together forwards and backwards for a long while, with equal vibrations. And therefore (by Cor. 1 and VI, Prop. XXIV. Book II) the quantity of matter in the gold was to the quantity of matter in the wood as the action of the motive force upon all the gold to the action of the same upon all the wood; that is, as the weight of the one to the weight of the other.

And by these experiments, in bodies of the same weight, could have discovered a difference of matter less than the thousandth part of the whole.

Since the action of the centripetal force upon the bodies attracted is, at equal distances, proportional to the quantities of matter in those bodies, reason requires that it should be also proportional to the quantity of matter in the body attracting.

For all action is mutual, and (, 93. by the Third Law of Motion) makes the bodies mutually to approach one to the other, and therefore must be the same in both bodies. It is true that we may consider one body at attracting, another as attracted; but this distinction is more mathematical than natural. The attraction is really common of either to other, and therefore of the same kind in both.

And hence it is that the attractive force is found in both. The sun attracts Jupiter and the other planets; Jupiter attracts its satellites; and, for the same reason, the satellites act as well one upon another as upon Jupiter, and all the planets mutually one upon another.

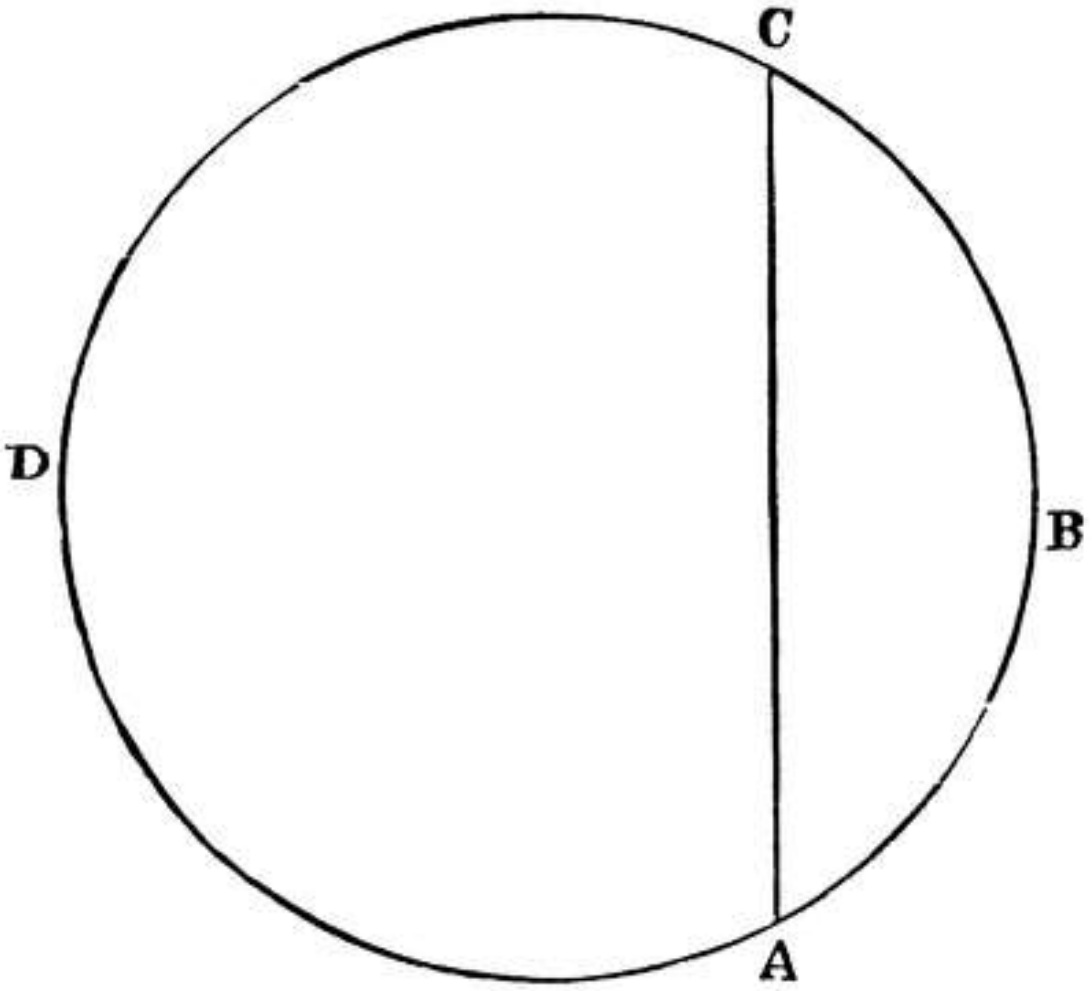
And though the mutual actions of two planets may be distinguished and considered as two, by which each attracts the other, yet, as those actions are intermediate, they do not make two but one operation between two terms. Two bodies may be mutually attracted each to the other by the contraction of a cord interposed. There is a double cause of action, to wit, the disposition of both bodies, as well as a double action in so far as the action is considered as upon two bodies; but as betwixt two bodies it is but one single one. It is not one action by which the sun attracts Jupiter, and another by which Jupiter attracts the sun; but it is one action by which the sun and Jupiter mutually endeavour to approach each the other. By the action with which the sun attracts Jupiter, Jupiter and the sun endeavours to come nearer together (by the Third Law of Motion); and by the action with which Jupiter attracts the sun, likewise Jupiter and the sun endeavor to come nearer together. But the sun is not attracted towards Jupiter by a twofold action, nor Jupiter by a twofold action towards the sun; but it is one single intermediate action, by which both approach nearer together.

Thus iron draws the load-stone (), as well as the load-stone draws the iron: for all iron in the neighbourhood of the load-stone draws other iron. But the action betwixt the load-stone and iron is single, and is considered as single by the philosophers. The action of iron upon the load-stone, is, indeed, the action of the load-stone betwixt itself and the iron, by which both endeavour to come nearer together: and so it manifestly appears; for if you remove the load-stone, the whole force of the iron almost ceases.

In this sense it is that we are to conceive one single action to be exerted betwixt two planets, arising from the conspiring natures of both: and this action standing in the same relation to both, if it is proportional to the

quantity of matter in the one, it will be also proportional to the quantity of matter in the other.

Perhaps it may be objected, that, according to this philosophy (), all bodies should mutually attract one another, contrary to the evidence of experiments in terrestrial bodies; but I answer, that the experiments in terrestrial bodies come to no account; for the attraction of homogeneous spheres near their surfaces are (by Prop. LXXII) as their diameters. Whence a sphere of one foot in diameter, and of a like nature to the earth, would attract a small body placed near its surface with a force 20000000 times less than the earth would do if placed near its surface; but so small a force could produce no sensible effect. If two such spheres were distant but by of an inch, they would not, even in spaces void of



resistance, come together by the force of their mutual attraction in less than a month's time; and less spheres will come together at a rate yet slower, viz., in the proportion of their diameters. Nay, whole mountains will not be sufficient to produce any sensible effect. A mountain of an hemispherical figure, three miles high, and six broad, will not, by its attraction, draw the pendulum two minutes out of the true perpendicular; and it is only in the great bodies of the planets that these forces are to be perceived, unless we may reason about smaller bodies in manner following.

Let ABCD () represent the globe of the earth cut by any plane AC into two parts ACB, and ACD. The part ACB bearing upon the part ACD presses it with its whole weight; nor can the part ACD sustain this pressure and continue unmoved, if it is not opposed by an equal contrary pressure. And therefore the parts equally press each other by their weights, that is, equally attract each other, according to the third Law of Motion; and, if separated and let go, would fall towards each other with velocities reciprocally as the bodies. All which we may try and see in the load-stone, whose attracted part does not propel the part attracting, but is only stopped and sustained thereby.

Suppose now that ACB represents some small body on the earth's surface; then, because the mutual attractions of this particle, and of the remaining part ACD of the earth towards each other, are equal, but the attraction of the particle towards the earth (or its weight) is as the matter of the particle (as we have proved by the experiment of the pendulums), the attraction of the earth towards the particle will likewise be as the matter of the particle; and therefore the attractive forces of all terrestrial bodies will be as their several quantities of matter.

The forces (), which are as the matter in terrestrial bodies of all forms, and therefore are not mutable with the forms, must be found in all sorts of bodies whatsoever, celestial as well as terrestrial, and be in all proportional to their quantities of matter, because among all there is no difference of substance, but of modes and forms only. But in the celestial bodies the same thing is likewise proved thus. We have shewn that the action of the circum-solar force upon all the planets (reduced to equal distances) is as the matter of the planets; that the action of the circum-jovial force upon the satellites of Jupiter observes the same law; and the same thing is to be said of the attraction of all the planets towards every planet: but thence it follows (by

Prop. LXIX) that their attractive forces are as their several quantities of matter.

As the parts of the earth mutually attract one another, so do those of all the planets. If Jupiter and its satellites were brought together, and formed into one globe, without doubt they would continue mutually to attract one another as before. And, on the other hand, if the body of Jupiter was broke into more globes, to be sure, these would no less attract one another than they do the satellites now. From these attractions it is that the bodies of the earth and all the planets effect a spherical figure, and their parts cohere, and are not dispersed through the aether. But we have before proved that these forces arise from the universal nature of matter (), and that, therefore, the force of any whole globe is made up of the several forces of all its parts. And from thence it follows (by Cor. III, Prop. LXXIV) that the force of every particle decreases in the duplicate proportion of the distance from that particle; and (by Prop. LXXIII and LXXV) that the force of an entire globe, reckoning from the surface outwards, decreases in the duplicate, but, reckoning inwards, in the simple proportion of the distances from the centres, if the matter of the globe be uniform. And though the matter of the globe, reckoning from the centre towards the surface, is not uniform (, 399), yet the decrease in the duplicate proportion of the distance outwards would (by Prop. LXXVI) take place, provided that difformity is similar in places round about at equal distances from the centre. And two such globes will (by the same Proposition) attract one the other with a force decreasing in the duplicate proportion of the distance between, their centres.

Wherefore the absolute force of every globe is as the quantity of matter which the globe contains; but the motive force by which every globe is attracted towards another, and which, in terrestrial bodies, we commonly call their weight, is as the content under the quantities of matter in both globes applied to the square of the distance between their centres (by Cor. IV, Prop. LXXVI), to which force the quantity of motion, by which each globe in a given time will be carried towards the other, is proportional. And the accelerative force, by which every globe according to its quantity of matter is attracted towards another, is as the quantity of matter in that other globe applied to the square of the distance between the centres of the two (by Cor. II, Prop. LXXVI), to which force, the velocity by which the attracted globe will, in a given time, be carried towards the other is

proportional. And from these principles well understood, it will be now easy to determine the motions of the celestial bodies among themselves.

From comparing the forces of the planets one with another, we have above seen that the circum-solar does more than a thousand times exceed all the rest; but by the action of a force so great it is unavoidable but that all bodies within, nay, and far beyond, the bounds of the planetary system must descend directly to the sun, unless by other motions they are impelled towards other parts: nor is our earth to be excluded from the number of such bodies; for certainly the moon is a body of the same nature with the planets, and subject to the same attractions with the other planets, seeing it is by the circum-terrestrial force that it is retained in its orbit. But that the earth and moon are equally attracted towards the sun, we have above proved; we have likewise before proved that all bodies are subject to the said common laws of attraction. Nay, supposing any of those bodies to be deprived of its circular motion about the sun, by having its distance from the sun, we may find (by Prop. XXXVI) in what space of time it would in its descent arrive at the sun; to wit, in half that periodic time in which the body might be revolved at one half of its former distance; or in a space of time that is to the periodic time of the planet as 1 to 4; as that Venus in its descent would arrive at the sun in the space of 40 days, Jupiter in the space of two years and one month, and the earth and moon together in the space of 66 days and 19 hours. But, since no such thing happens, it must needs be, that those bodies are moved towards other parts (), nor is every motion sufficient for this purpose. To hinder such a descent, a due proportion of velocity is required. And hence depends the force of the argument drawn from the retardation of the motions of the planets. Unless the circum-solar force decreased in the duplicate ratio of their increasing slowness, the excess thereof would force those bodies to descend to the sun; for instance, if the motion (*caeteris paribus*) was retarded by one half, the planet would be retained in its orb by one fourth of the former circum-solar force, and by the excess of the other three fourths would descend to the sun. And therefore the planets (Saturn, Jupiter, Mars, Venus, and Mercury) are not really retarded in their perigees, nor become really stationary, or regressive with slow motions. All these are but apparent, and the absolute motions, by which the planets continue to revolve in their orbits, are always direct, and nearly equable. But that such motions are performed about the sun, we have

already proved; and therefore the sun, as the centre of the absolute motions, is quiescent. For we can by no means allow quiescence to the earth, lest the planets in their perigees should indeed be truly retarded, and become truly stationary and regressive, and so for want of motion should descend to the sun. But farther; since the planets (Venus, Mars, Jupiter, and the rest) by radii drawn to the sun describe regular orbits, and areas (as we have shewn) nearly and to sense proportional to the times, it follows (by Prop. III. and Cor. III, Prop. LXV) that the sun is moved with no notable force, unless perhaps with such as all the planets are equally moved with, according to their several quantities of matter, in parallel lines, and so the whole system is transferred in right lines. Reject that translation of the whole system, and the sun will be almost quiescent in the centre thereof. If the sun was revolved about the earth, and carried the other planets round about itself, the earth ought to attract the sun with a great force, but the circum-solar planets with no force producing any sensible effect, which is contrary to Cor. III, Prop. LXV. Add to this, that if hitherto the earth, because of the gravitation of its parts, has been placed by most authors in the lowermost region of the universe; now, for better reason, the sun possessed of a centripetal force exceeding our terrestrial gravitation a thousand times and more, ought to be depressed into the lowermost place, and to be held for the centre of the system. And thus the true disposition of the whole system will be more fully and more exactly understood.

Because the fixed stars are quiescent one in respect of another (, 402), we may consider the sun, earth, and planets, as one system of bodies carried hither and thither by various motions among themselves; and the common centre of gravity of all (by Cor. IV of the Laws of Motion) will either be quiescent, or move uniformly forward in a right line: in which case the whole system will likewise move uniformly forward in right lines. But this is an hypothesis hardly to be admitted; and, therefore, setting it aside, that common centre will be quiescent: and from it the sun is never far removed. The common centre of gravity of the sun and Jupiter falls on the surface of the sun; and though all the planets were placed towards the same parts from the sun with Jupiter the common centre of the sun and all of them would scarcely recede twice as far from the sun's centre; and, therefore, though the sun, according to the various situation of the planets, is variously agitated, and always wandering to and fro with a slow motion of libration, yet it

never recedes one entire diameter of its own body from the quiescent centre of the whole system. But from the weights of the sun and planets above determined, and the situation of all among themselves, their common centre of gravity may be found; and, this being given, the sun's place to any supposed time may be obtained.

About the sun thus librated the other planets are revolved in elliptic orbits (p 403), and, by radii drawn to the sun, describe areas nearly proportional to the times, as is explained in Prop. LXV. If the sun was quiescent, and the other planets did not act mutually one upon another, their orbits would be elliptic, and the areas exactly proportional to the times (by Prop. XI, and Cor. 1, Prop. XIII). But the actions of the planets among themselves, compared with the actions of the sun on the planets, are of no moment, and produce no sensible errors. And those errors are less in revolutions about the sun agitated in the manner but now described than if those revolutions were made about the sun quiescent (by Prop. LXVI, and Cor. Prop. LXVIII), especially if the focus of every orbit is placed in the common centre of gravity of all the lower included planets; viz., the focus of the orbit of Mercury in the centre of the sun; the focus of the orbit of Venus in the common centre of gravity of Mercury and the sun; the focus of the orbit of the earth in the common centre of gravity of Venus, Mercury, and the sun; and so of the rest. And by this means the foci of the orbits of all the planets, except Saturn, will not be sensibly removed from the centre of the sun, nor will the focus of the orbit of Saturn recede sensibly from the common centre of gravity of Jupiter and the sun. And therefore astronomers are not far from the truth, when they reckon the sun's centre the common focus of all the planetary orbits. In Saturn itself the error thence arising does not exceed 1' 45". And if its orbit, by placing the focus thereof in the common centre of gravity of Jupiter and the sun, shall happen to agree better with the phenomena, from thence all that we have said will be farther confirmed.

If the sun was quiescent, and the planets did not act one on another, the aphelions and nodes of their orbits would likewise (by Pro, XI, and Cor. Prop. XIII) be quiescent. And the longer axes of their elliptic orbits would (by Prop. XV) be as the cubic roots of the squares of their periodic times: and therefore from the given periodic times would be also given. But those times are to be measured not from the equinoctial points, which are

moveable, but from the first star of Aries. Put the semi-axis of the earth's orbit 100000, and the semi-axes of the orbits of Saturn, Jupiter, Mars, Venus, and Mercury, from their periodic times, will come out 953806, 520116, 152399, 72333, 38710 respectively. But from the sun's motion every semi-axis is increased (by Prop. LX) by about one third of the distance of the sun's centre from the common centre of gravity of the sun and planet (, 406.) And from the actions of the exterior planets on the interior, the periodic times of the interior are something protracted, though scarcely by any sensible quantity; and their aphelions are transferred (by Cor. VI. and VII, Prop. LXVI) by very slow motions in *consequentia*. And on the like account the periodic times of all, especially of the exterior planets, will be prolonged by the actions of the comets, if any such there are, without the orb of Saturn, and the aphelions of all will be thereby carried forwards in *consequentia*. But from the progress of the aphelions the regress of the nodes follows (by Cor. XI, XIII, Prop. LXVI). And if the plane of the ecliptic is quiescent, the regress of the nodes (by Cor. XVI, Prop. LXVI) will be to the progress of the aphelion in every orbit as the regress of the nodes of the moon's orbit to the progress of its apogeon nearly, that is, as about 10 to 21. But astronomical observations seem to confirm a very slow progress of the aphelions, and a regress of the nodes in respect of the fixed stars. And hence it is probable that there are comets in the regions beyond the planets, which, revolving in very eccentric orbs, quickly fly through their perihelion parts, and, by an exceedingly slow motion in their aphelions, spend almost their whole time in the regions beyond the planets; as we shall afterwards explain more at large.

The planets thus revolved about the sun (, 414, 415) may at the same time carry others revolving about themselves as satellites or moons, as appears by Prop. LXVI. But from the action of the sun our moon must move with greater velocity, and, by a radius drawn to the earth, describe an area greater for the time; it must have its orbit less curve, and therefore approach nearer to the earth in the syzygies than in the quadratures, except in so far as the motion of eccentricity hinders those effects. For the eccentricity is greatest when the moon's apogeon is in the syzygies, and least when the same is in the quadratures; and hence it is that the perigeon moon is swifter and nearer to us, but the apogeon moon slower and farther from us, in the syzygies than in the quadratures. But farther; the apogeon

has a progressive and the nodes a regressive motion, both unequable. For the apogeon is more swiftly progressive in its syzygies, more slowly regressive in its quadratures, and by the excess of its progress above its regress is yearly transferred in *consequentia*; but the nodes are quiescent in their syzygies, and most swiftly regressive in their quadratures. But farther, still, the greatest latitude of the moon is greater in its quadratures than in its syzygies; and the mean motion swifter in the aphelion of the earth than in its perihelion. More inequalities in the moon's motion have not hitherto been taken notice of by astronomers: but all these follow from our principles in Cor. II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, Prop. LXVI, and are known really to exist in the heavens. And this may seen in that most ingenious, and if I mistake not, of all, the most accurate, hypothesis of Mr. *Horrox*, which Mr. *Flamsted* has fitted to the heavens; but the astronomical hypotheses are to be corrected in the motion of the nodes; for the nodes admit the greatest equation or prosthaphaeresis in their octants, and this inequality is most conspicuous when the moon is in the nodes, and therefore also in the octants; and hence it was that *Tycho*, and others after him, referred this inequality to the octants of the moon, and made it menstrual; but the reasons by us adduced prove that it ought to be referred to the octants of the nodes, and to be made annual.

Beside those inequalities taken notice of by astronomers (, 445, 447,) there are yet some others, by which the moon's motions are so disturbed, that hitherto by no law could they be reduced to any certain regulation. For the velocities or horary motions of the apogee and nodes of the moon, and their equations, as well as the difference betwixt the greatest eccentricity in the syzygies and the least in the quadratures, and that inequality which we call the variation, in the progress of the year are augmented and diminished (by Cor. XIV, Prop. LXVI) in the triplicate ratio of the sun's apparent diameter. Beside that, the variation is mutable nearly in the duplicate ratio of the time between the quadratures (by Cor. I and II, Lem. X, and Cor. XVI, Prop. LXVI); and all those inequalities are something greater in that part of the orbit which respects the sun than in the opposite part, but by a difference that is scarcely or not at all perceptible.

By a computation (), which for brevity's sake I do not describe, I also find that the area which the moon by a radius drawn to the earth describes in the several equal moments of time is nearly as the sum of the number 237

$^{3}/_{10}$, and versed sine of the double distance of the moon from the nearest quadrature in a circle whose radius is unity; and therefore that the square of the moon's distance from the earth is as that sum divided by the horary motion of the moon. Thus it is when the variation in the octants is in its mean quantity; but if the variation is greater or less, that versed sine must be augmented or diminished in the same ratio. Let astronomers try how exactly the distances thus found will agree with the moon's apparent diameters.

From the motions of our moon we may derive the motions of the moons or satellites of Jupiter and Saturn (); for the mean motion of the nodes of the outmost satellite of Jupiter is to the mean motion of the nodes of our moon in a proportion compounded of the duplicate proportion of the periodic time of the earth about the sun to the periodic time of Jupiter about the sun, and the simple proportion of the periodic time of the satellite about Jupiter to the periodic time of our moon about the earth (by Cor. XVI, Prop. LXVI): and therefore those nodes, in the space of a hundred years, are carried 8° 24' backwards, or in *antecedentia*. The mean motions of the nodes of the inner satellites are to the (mean) motion of (the nodes of) the outmost as their periodic times to the periodic time of this, by the same corollary, and are thence given. And the motion of the apsis of every satellite in *consequentia* is to the motion of its nodes in *antecedentia*, as the motion of the apogee of our moon to the motion of its nodes (by the same Corollary), and is thence given. The greatest equations of the nodes and line of the apses of each satellite are to the greatest equations of the nodes and the line of the apses of the moon respectively as the motion of the nodes and line of the apses of the satellites in the time of one revolution of the first equations to the motion of the nodes and apogeon of the moon in the time of one revolution of the last equations. The variation of a satellite seen from Jupiter is to the variation of our moon in the same proportion as the whole motions of their nodes respectively, during the times in which the satellite and our moon (after parting from) are revolved (again) to the sun, by the same Corollary; and therefore in the outmost satellite the variation does not exceed 5" 12'". From the small quantity of those inequalities, and the slowness of the motions, it happens that the motions of the satellites are found to be so regular, that the more modern astronomers either deny all motion to the nodes, or affirm them to be very slowly regressive.

(P. 404). While the planets are thus revolved in orbits about remote centres, in the mean time they make their several rotations about their proper axes; the sun in 26 days; Jupiter in $9^h.56'$; Mars in $24\frac{2}{3}^h$.; Venus in 23^h.; and that in planes not much inclined to the plane of the ecliptic, and according to the order of the signs, as astronomers determine from the spots or maculae that by turns present themselves to our sight in their bodies; and there is a like revolution of our earth performed in 24^h.; find those motions are neither accelerated nor retarded by the actions of the centripetal forces, as appears by Cor. XXII, Prop. LXVI; and therefore of all others they are the most equable and most fit for the mensuration of time; but those revolutions are to be reckoned equable not from their return to the sun, but to some fixed star: for as the position of the planets to the sun is unequably varied, the revolutions of those planets from sun to sun are rendered unequable.

In like manner is the moon revolved about its axis by a motion most equable in respect of the fixed stars, viz., in $27^d.7^h.43'$, that is, in the space of a sidereal month; so that this diurnal motion is equal to the mean motion of the moon in its orbit; upon which account the same face of the moon always respects the centre about which this mean motion is performed, that is, the exterior focus of the moon's orbit nearly; and hence arises a deflection of the moon's face from the earth, sometimes towards the east, and other times towards the west, according to the position of the focus which it respects; and this deflection is equal to the equation of the moon's orbit, or to the difference betwixt its mean and true motions; and this is the moon's libration in longitude: but it is likewise affected with a libration in latitude arising from the inclination of the moon's axis to the plane of the orbit in which the moon is revolved about the earth; for that axis retains the same position to the fixed stars nearly, and hence the poles present themselves to our view by turns, as we may understand from the example of the motion of the earth, whose poles, by reason of the incl nation of its axis to the plane of the ecliptic, are by turns illuminated by the sun. To determine exactly the position of the moon's axis to the fixed stars, and the variation of this position, is a problem worthy of an astronomer.

By reason of the diurnal revolutions of the planets, the matter which they contain endeavours to recede from the axis of this motion; and hence the

fluid parts rising higher towards the equator than about the poles (), would lay the solid parts about the equator under water, if those parts did not rise also (, 409): upon which account the planets are something thicker about the equator than about the poles; and their equinoctial points () thence become regressive; and their axes, by a motion of nutation, twice in every revolution, librate towards their ecliptics, and twice return again to their former inclination, as is explained in Cor. XVIII, Prop. LXVI; and hence it is that Jupiter, viewed through very long telescopes, does not appear altogether round (), but having its diameter that lies parallel to the ecliptic something longer than that which is drawn from north to south.

And from the diurnal motion and the attractions (, 418) of the sun and moon our sea ought twice to rise and twice to fall every day, as well lunar as solar (by Cor. XIX, XX, Prop. LXVI), and the greatest height of the water to happen before the sixth hour of either day and after the twelfth hour preceding. By the slowness of the diurnal motion the flood is retracted to the twelfth hour; and by the force of the motion of reciprocation it is protracted and deferred till a time nearer to the sixth hour. But till that time is more certainly determined by the phaenomena, choosing the middle between those extremes, why may we not conjecture the greatest height of the water to happen at the third hour? for thus the water will rise all that time in which the force of the luminaries to raise it is greater, and will fall all that time in which their force is less; viz., from the ninth to the third hour when that force is greater, and from the third to the ninth when it is less. The hours I reckon from the appulse of each luminary to the meridian of the place, as well under as above the horizon; and by the hours of the lunar day I understand the twenty-fourth parts of that time which the moon spends before it comes about again by its apparent diurnal motion to the meridian of the place which it left the day before.

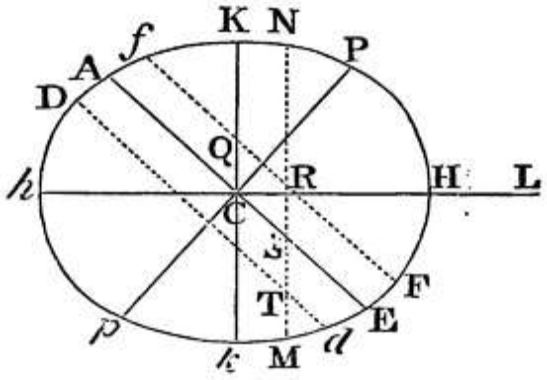
But the two motions which the two luminaries raise will not appear distinguished, but will make a certain mixed motion. In the conjunction or opposition of the luminaries their forces will be conjoined, and bring on the greatest flood and ebb. In the quadratures the sun will raise the waters which the moon depresseth, and depress the waters which the moon raiseth; and from the difference of their forces the smallest of all tides will follow. And because (as experience tells us) the force of the moon is greater than that of the sun, the greatest height of the water will happen about the third

lunar hour. Out of the syzygies and quadratures the greatest tide which by the single force of the moon ought to fall out at the third lunar hour, and by the single force of the sun at the third solar hour, by the compounded forces of both must fall out in an intermediate time that approaches nearer to the third hour of the moon than to that of the sun; and, therefore, while the moon is passing from the syzygies to the quadratures, during which time the third hour of the sun precedes the third of the moon, the greatest tide will precede the third lunar hour, and that by the greatest interval a little after the octants of the moon; and by like intervals the greatest tide will follow the third lunar hour, while the moon is passing from the quadratures to the syzygies.

But the effects of the luminaries depend upon their distances from the earth; for when they are less distant their effects are greater, and when more distant their effects are less, and that in the triplicate proportion of their apparent diameters. Therefore it is that the sun in the winter time, being then in its perigee, has a greater effect, and makes the tides in the syzygies something greater, and those in the quadratures something less, *caeteris paribus*, than in the summer season; and every month the moon while in the perigee, raiseth greater tides than at the distance of 15 days before or after, when it is in its apogee. Whence it comes to pass that two highest tides do not follow one the other in two immediately succeeding syzygies.

The effect of either luminary doth likewise depend upon its declination or distance from the equator; for if the luminary was placed at the pole, it would constantly attract all the parts of the waters, without any intension or remission of its action, and could cause no reciprocation of motion; and, therefore, as the luminaries decline from the equator towards either pole, they will by degrees lose their force, and on this account will excite lesser tides in the solstitial than in the equinoctial syzygies. But in the solstitial quadratures they will raise greater tides than in the quadratures about the equinoxes; because the effect of the moon, then situated in the equator, most exceeds the effect of the sun; therefore the greatest tides fall out in those syzygies, and the least in those quadratures, which happen about the time of both equinoxes; and the greatest tide in the syzygies is always succeeded by the least tide in the quadratures, as we find by experience. But because the sun is less distant from the earth in winter than in summer, it comes to pass

that the greatest and least tides more frequently appear before than after the vernal equinox, and more frequently after than before the autumnal.



Moreover, the effects of the luminaries depend upon the latitudes of places. Let A*p*EP represent the earth on all sides covered with deep waters; C its centre; P, *p*, its poles; AE the equator; F any place without the equator; F*f* the parallel of the place; D*d* the correspondent parallel on the other side of the equator; L the place which the moon possessed three hours before; H the place of the earth directly under it; *h* the opposite place; K, *k*, the places at 90 degrees distance; CH, C*h*, the greatest heights of the sea from the centre of the earth; and CK, C*k*, the least heights; and if with the axes H*h*, K*k*, an ellipsis is described, and by the revolution of that ellipsis about its longer axis H*h* a spheroid HPK*hpk* is formed, this spheroid will nearly represent the figure of the sea; and CF, C*f*, CD, C*d*, will represent the sea in the places F, *f*, D, *d*. But farther; if in the said revolution of the ellipsis any point N describes the circle NM, cutting the parallels F*f*, D*d*, in any places R, T, and the equator AE in S, CN will represent the height of the sea in all those places R, S, T, situated in this circle. Wherefore in the diurnal revolution of any place F the greatest flood will be in F, at the third hour after the appulse of the moon to the meridian above the horizon; and afterwards the greatest ebb in Q, at the third hour after the setting of the moon; and then the greatest flood in *f*, at the third hour after the appulse of the moon to the meridian under the horizon, and, lastly, the greatest ebb in Q, at the third hour after the rising of the moon; and the latter flood in *f* will be less than the preceding flood in F. For the whole sea is divided into two huge and hemispherical floods, one in the hemisphere KH*k*C on the north side, the other in the opposite hemisphere KH*k*C, which we may therefore call the northern and the southern floods: these floods being always

opposite the one to the other, come by turns to the meridians of all places after the interval of twelve lunar hours; and, seeing the northern countries partake more of the northern flood, and the southern countries more of the southern flood, thence arise tides alternately greater and less in all places without the equator in which the luminaries rise and set. But the greater tide will happen when the moon declines towards the vertex of the place, about the third hour after the appulse of the moon to the meridian above the horizon; and when the moon changes its declination, that which was the greater tide will be changed into a lesser; and the greatest difference of the floods will fall out about the times of the solstices, especially if the ascending node of the moon is about the first of Aries. So the morning tides in winter exceed those of the evening, and the evening tides exceed those of the morning in summer; at *Plymouth* by the height of one foot, but at *Bristol* by the height of 15 inches, according to the observations of *Colepress* and *Sturmy*.

But the motions which we have been describing suffer some alteration from that force of reciprocation which the waters [having once received] retain a little while by their *vis insita*; whence it comes to pass that the tides may continue for some time, though the actions of the luminaries should cease. This power of retaining the impressed motion lessens the difference of the alternate tides, and makes those tides which immediately succeed after the syzygies greater, and those which follow next after the quadratures less. And hence it is that the alternate tides at *Plymouth* and *Bristol* do not differ much more one from the other than by the height of a foot, or of 15 inches; and that the greatest tides of all at those ports are not the first but the third after the syzygies.

And, besides, all the motions are retarded in their passage through shallow channels, so that the greatest tides of all, in some straits and mouths of rivers, are the fourth, or even the fifth, after the syzygies.

It may also happen that the greatest tide may be the fourth or fifth after the syzygies, or fall out yet later, because the motions of the sea are retarded in passing through shallow places towards the shores; for so the tide arrives at the western coast of *Ireland* at the third lunar hour, and an hour or two after at the ports in the southern coast of the same island; as also at the islands *Cassiterides*, commonly *Sorlings*; then successively at *Falmouth, Plymouth, Portland,* the isle of *Wight, Winchester, Dover,* the mouth of the

Thames, and *London Bridge*, spending twelve hours in this passage. But farther; the propagation of the tides may be obstructed even by the channels of the ocean itself, when they are not of depth enough, for the flood happens at the third lunar hour in the *Canary* islands; and at all those western coasts that lie towards the Atlantic ocean, as of *Ireland, France, Spain,* and all *Africa*, to the *Cape* of *Good Hope*, except in some shallow places, where it is impeded, and falls out later; and in the straits of *Gibraltar*, where, by reason of a motion propagated from the Mediterranean sea, it flows sooner. But, passing from those coasts over the breadth of the ocean to the coasts of *America*, the flood arrives first at the most eastern shores of *Brazil*, about the fourth or fifth lunar hour; then at the mouth of the river of the *Amazons* at the sixth hour, but at the neighbouring islands at the fourth hour: afterwards at the islands of *Bermudas* at the seventh hour, and at port St. *Augustin* in *Florida* at seven and a half. And therefore the tide is propagated through the ocean with a slower motion than it should be according to the course of the moon; and this retardation is very necessary, that the sea at the same time may fall between *Brazil* and *New France*, and rise at the *Canary* islands, and on the coasts of *Europe* and *Africa*, and *vice versa*: for the sea cannot rise in one place but by falling in another. And it is probable that the *Pacific* sea is agitated by the same laws: for in the coasts of *Chili* and *Peru* the highest flood is said to happen at the third lunar hour. But with what velocity it is thence propagated to the eastern coasts of *Japan*, the *Philippine* and other islands adjacent to *China*, I have not yet learned.

Farther; it may happen () that the tide may be propagated from the ocean through different channels towards the same port, and may pass quicker through some channels than through others, in which case the same tide, divided into two or more succeeding one another, may compound new motions of different kinds. Let us suppose one tide to be divided into two equal tides, the former whereof precedes the other by the space of six hours, and happens at the third or twenty-seventh hour from the appulse of the moon to the meridian of the port. If the moon at the time of this appulse to the meridian was in the equator, every six hours alternately there would arise equal floods, which, meeting with as many equal ebbs, would so balance one the other, that, for that day, the water would stagnate, and remain quiet. If the moon then declined from the equator, the tides in the ocean would be alternately greater and less, as was said; and from hence

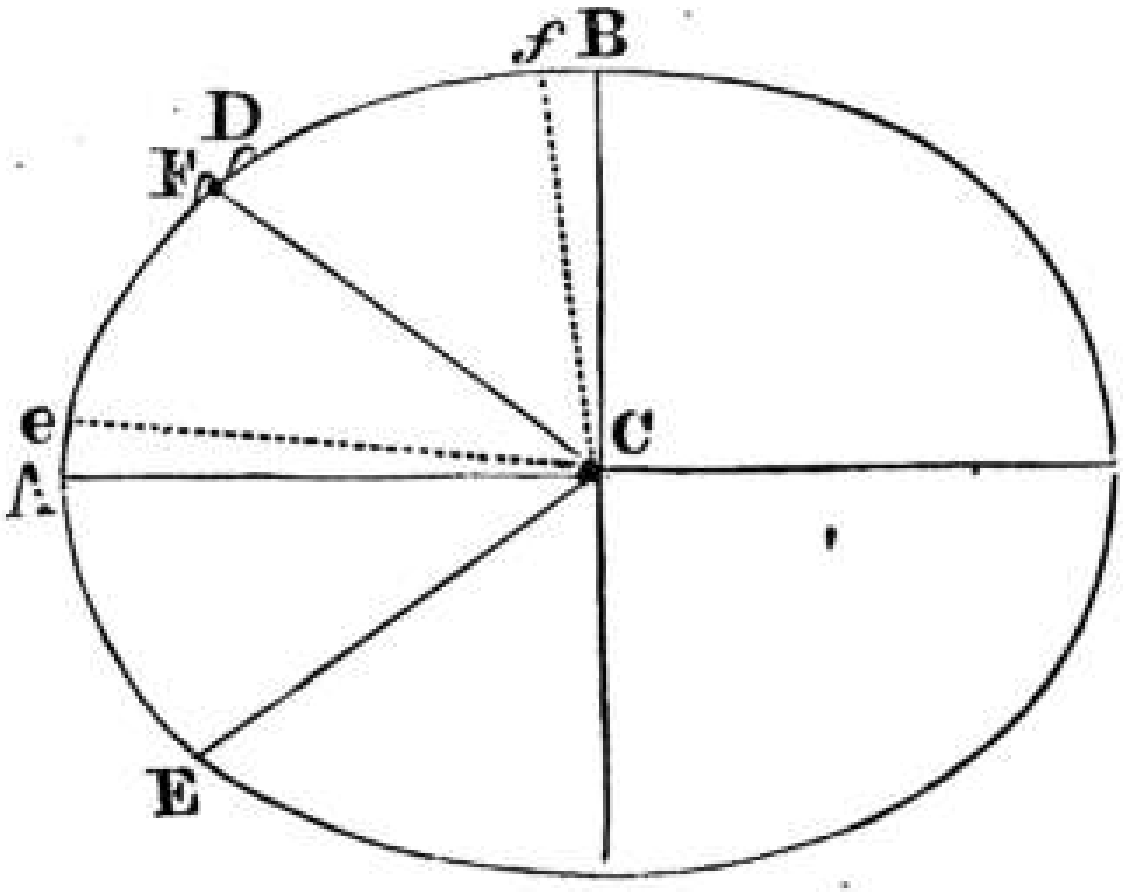
two greater and two lesser tides would be alternately propagated towards that port. But the two greater floods would make the greatest height of the waters to fall out in the middle time betwixt both, and the greater and lesser floods would make the waters to rise to a mean height in the middle time between them; and in the middle time between the two lesser floods the waters would rise to their least height. Thus in the space of twenty-four hours the waters would come, riot twice, but once only to their greatest, and once only to their least height; and their greatest height, if the moon declined towards the elevated pole, would happen at the sixth or thirtieth hour after the appulse of the moon to the meridian; and when the moon changed its declination, this flood would be changed into an ebb.

Of all which we have an example in the port of *Batsham*, in the kingdom of *Tunquin*, in the latitude of 20° 50’ north. In that port, on the day which follows after the passage of the moon over the equator, the waters stagnate; when the moon declines to the north, they begin to flow and ebb, not twice, as in other ports, but once only every day; and the flood happens at the setting, and the greatest ebb at the rising of the moon. This tide increaseth with the declination of the moon till the seventh or eighth day; then for the seventh or eighth day following it decreaseth at the same rate as it had increased before, and ceaseth when the moon changeth its declination. After which the flood is immediately changed into an ebb; and thenceforth the ebb happens at the setting and the flood at the rising of the moon, till the moon again changes its declination. There are two inlets from the ocean to this port; one more direct and short between the island *Hainan* and the coast of *Quantung*, a province of *China*; the other round about between the same island and the coast of *Cochim*; and through the shorter passage the tide is sooner propagated to *Batsham*.

In the channels of rivers the influx and reflux depends upon the current of the rivers, which obstructs the ingress of the waters from the sea, and promotes their egress to the sea, making the ingress later and slower, and the egress sooner and faster; and hence it is that the reflux is of longer duration that the influx, especially far up the rivers, where the force of the sea is less. So *Sturmy* tells us, that in the river *Avon*, three miles below *Bristol*, the water flows only five hours, but ebbs seven; and without doubt the difference is yet greater above *Bristol*, as at *Caresham* or the *Bath*. This difference does likewise depend upon the quantity of the flux and reflux; for

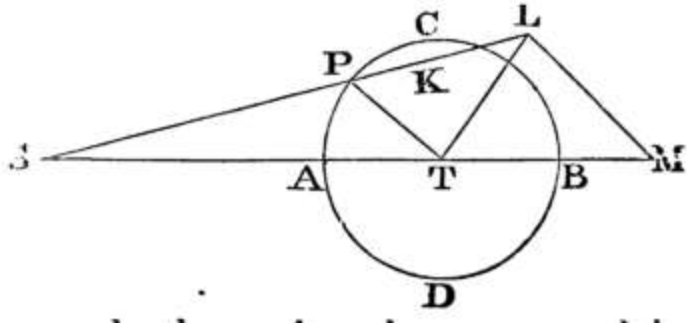
the more vehement motion of the sea near the syzygies of the luminaries more easily overcoming the resistance of the rivers, will make the ingress of the water to happen sooner and to continue longer, and will therefore diminish this difference. But while the moon is approaching to the syzygies, the rivers will be more plentifully filled, their currents being obstructed by the greatness of the tides, and therefore will something more retard the reflux of the sea a little after than a little before the syzygies. Upon which account the slowest tides of all will not happen in the syzygies, but precede them a little; and I observed above that the tides before the syzygies were also retarded by the force of the sun; and from both causes conjoined the retardation of the tides will be both greater and sooner before the syzygies. All which I find to be so, by the tide-tables which *Flamsted* has composed from a great many observations.

By the laws we have been describing, the times of the tides are governed; but the greatness of the tides depends upon the greatness of the seas. Let C represent the centre of the earth, EADB the oval figure of the seas, CA the longer semi-axis of this oval, CB the shorter insisting at right angles upon the former, D the middle point between A and B, and ECF or *e*C*f* the angle at the centre of the earth, subtended by the breadth of the sea that terminates in the shores E, F, or *e, f*. Now, supposing that the point



A is in the middle between the points E, F, and the point D in the middle between the points *e, f*, if the difference of the heights CA, CB, represent the quantity of the tide in a very deep sea surrounding the whole earth, the excess of the height CA above the height CE or CF will represent the quantity of the tide in the middle of the sea EF, terminated by the shores E, F; and the excess of the height C*e* above the height C*f* will nearly represent the quantity of the tide on the shores *f* of the same sea. Whence it appears that the tides are far less in the middle of the sea than at the shores; and that the tides at the shores are nearly as EF (, 452), the breadth of the sea not exceeding a quadrantal arc. And hence it is that near the equator, where the sea between *Africa* and *America* is narrow, the tides are far less than towards either side in the temperate zones, where the seas are extended wider; or on almost all the shores of the Pacific sea; as well towards *America* as towards *China*, and within as well as without the tropics; and that in islands in the middle of the sea they scarcely rise higher than two or three feet, but on the shores of great continents are three or four times

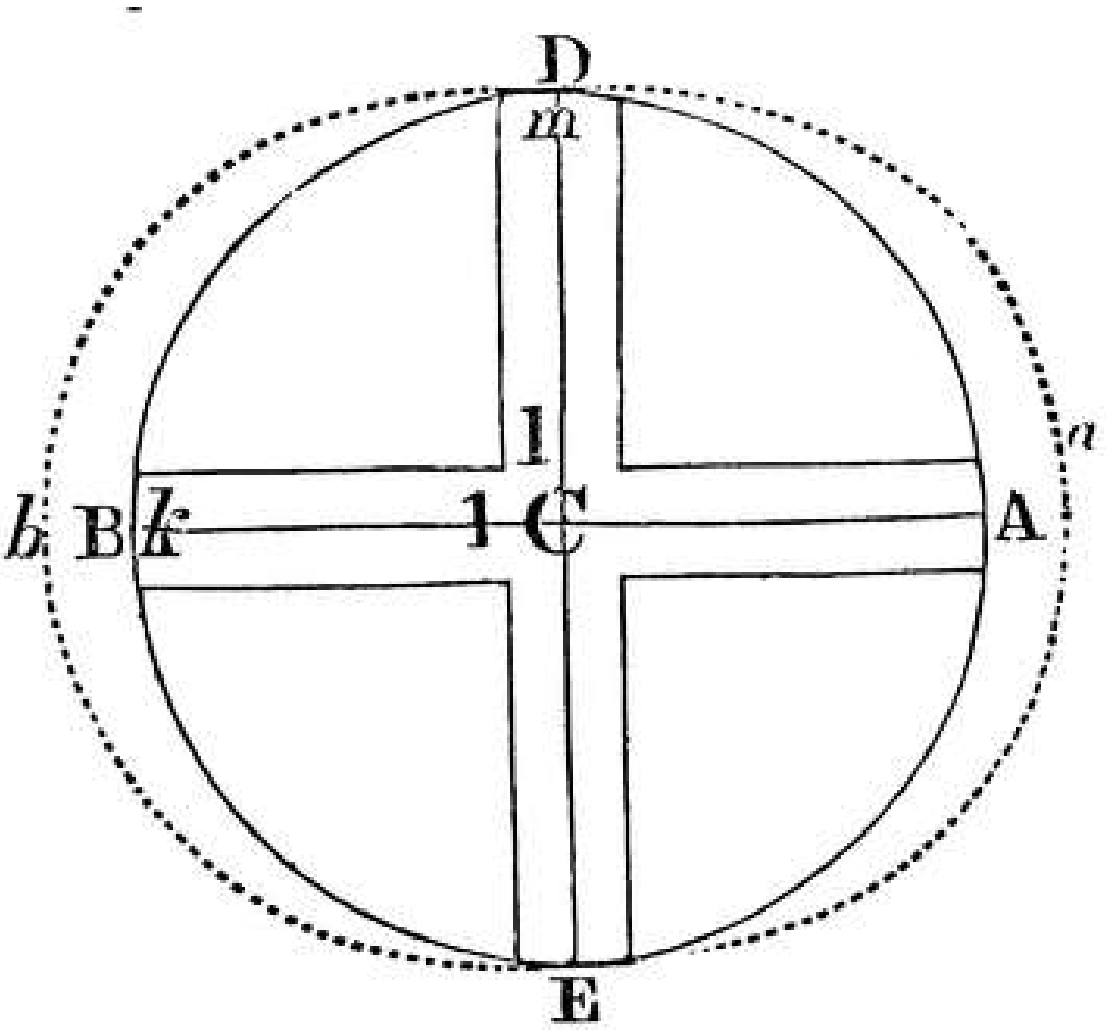
greater, and above, especially if the motions propagated from the ocean are by degrees contracted into a narrow space, and the water, to fill and empty the bays alternately, is forced to flow and ebb with great violence through shallow places; as *Plymouth* and *Chepstow Bridge* in England, at the mount of *St. Michael* and town of *Avranches* in *Normandy*, and at *Cambaia* and *Peru* in the *East Indies*. In which places, the sea, hurried in and out with great violence, sometimes lays the shores under water, sometimes leaves them dry, for many miles. Nor is the force of the influx and efflux to be broke till it has raised or depressed the water to forty or fifty feet and more. Thus also long and shallow straits that open to the sea with mouths wider and deeper than the rest of their channel (such as those about *Britain* and the *Magellanic Straits* at the eastern entry) will have a greater flood and ebb, or will more intend and remit their course, and therefore will rise higher and be depressed lower. Or the coast of *South America* it is said that the *Pacific* sea in its reflux sometimes retreats two miles, and gets out of sight of those that stand on shore. Whence in these places the floods will be also higher but in deeper waters the velocity of influx and efflux is always less, and therefore the ascent and descent is so too. Nor in such places is the ocean known to ascend to more than six, eight, or ten feet. The quantity of the ascent I compute in the following manner.



Let S represent the sun, T the earth (419, 420), P the moon, PAGB the moon's orbit. In SP take SK equal to ST and SL to SK in the duplicate ratio of SK to SP. Parallel to PT draw LM; and, supposing the mean quantity of the circum-solar force directed towards the earth to be represented by the distance ST or SK, SL will represent the quantity thereof directed towards the moon. But that force is compounded of the parts SM, LM; of which the force LM and that part of SM which is represented by TM, do disturb the motion of the moon (as appears from Prop. LXVI, and its Corollaries). In so

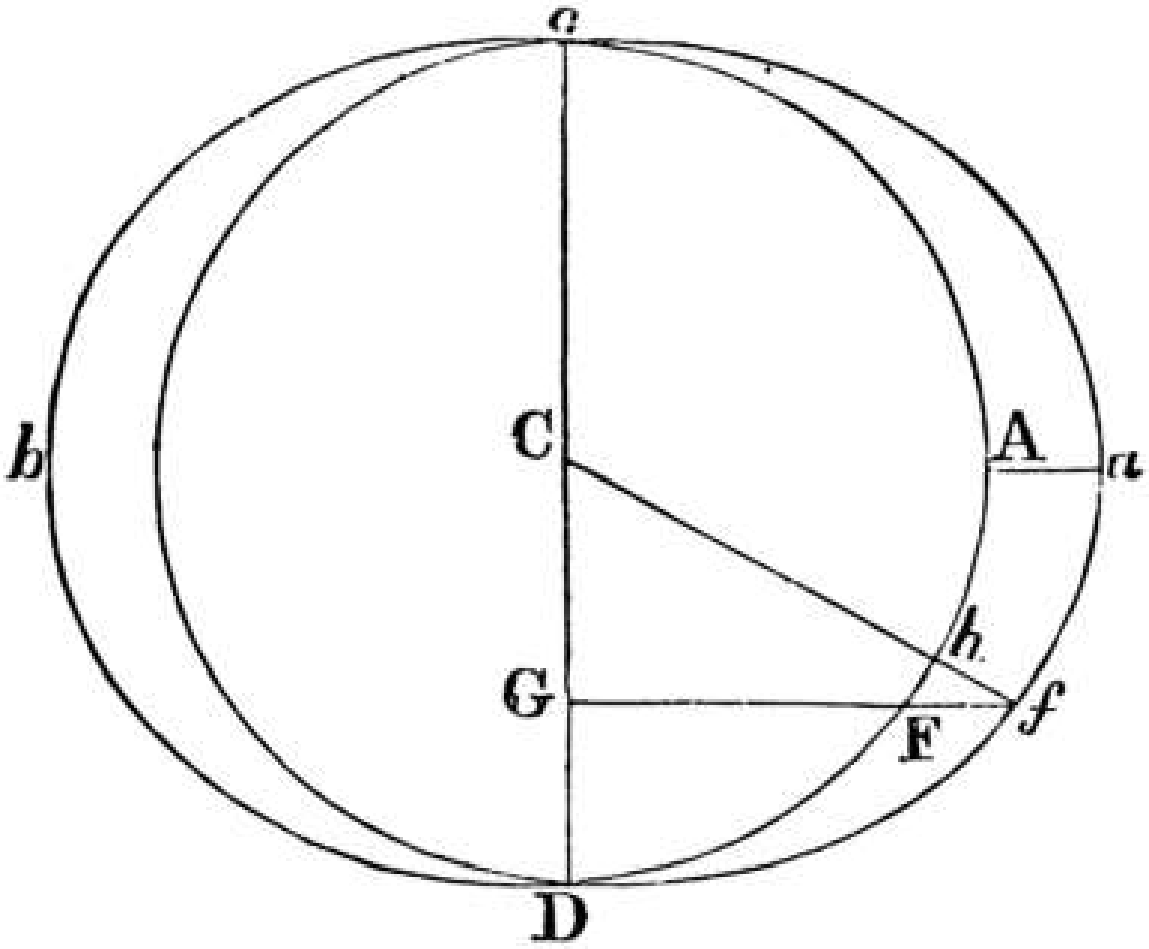
far as the earth and moon are revolved about their common centre of gravity, the earth will be liable to the action of the like forces. But we may refer the sums as well of the forces as of the motions to the moon, and represent the sums of the forces by the lines TM and ML, which are proportional to them. The force LM, in its mean quantity, is to the force by which the moon may be revolved in an orbit, about the earth quiescent, at the distance PT in the duplicate ratio of the moon's periodic time about the earth to the earth's periodic time about the sun (by Cor. XVII, Prop. LXVI); that is, in the duplicate ratio of $27^{d}.7^{h}.43'$ to $365^{d}.6^{d}.9'$; or as 1000 to 178725, or 1 to $178\frac{29}{40}$. The force by which the moon may be revolved in its orb about the earth in rest, at the distance PT of 60½ semi-diameters of the earth, is to the force by which it may revolve in the same time at the distance of 60 semi-diameters as 60½ to 60; and this force is to the force of gravity with us as 1 to 60 60 nearly; and therefore the mean force ML is to the force of gravity at the surface of the earth as 1 60½ to 60 60 $178\frac{29}{40}$, or 1 to 638092,6. Whence the force TM will be also given from the proportion of the lines TM, ML. And these are the forces of the sun, by which the moon's motions are disturbed.

If from the moon's orbit () we descend to the earth's surface, those forces will be diminished in the ratio of the distances 60½ and 1; and therefore the force LM will then become 38604600 times less than the force of gravity. But this force acting equally every where upon the earth, will scarcely effect any change on the motion of the sea, and therefore may be neglected in the explication of that motion. The other force TM, in places where the sun is vertical, or in their nadir, is triple the quantity of the force ML, and therefore but 12868200 times less than the force of gravity.



Suppose now ADBE to represent the spherical surface of the earth, *a*D*b*E the surface of the water overspreading it, C the centre of both, A the place to winch the sun is vertical, B the place opposite; D, E, places at 90 degrees distance from the former; ACE*mlk* a right angled cylindric canal passing through the earth's centre. The force TM in any place is as the distance of the place from the plane DE, on which a line from A to C insists at right angles, and therefore in the part of the canal which is represented by EC*lm* is of no quantity, but in the other part AC*lk* is as the gravity at the several heights; for in descending towards the centre of the earth, gravity is (by Prop LXXIII) every where as the height; and therefore the force TM drawing the water upwards will diminish its gravity in the leg AC*lk* of the canal in a given ratio: upon which account the water will ascend in this leg, till its defect of gravity is supplied by its greater height; nor will it rest in an

equilibrium till its total gravity becomes equal to the total gravity in EC*lm*, the other leg of the canal. Because the gravity of every particle is as its distance from the earth's centre, the weight of the whole water in either leg will increase in the duplicate ratio of the height; and therefore the height of the water in the leg AC*lk* will be to the height thereof in the leg C*lm*E in the subduplicate ratio of the number 12868201 to 12868200, or in the ratio of the number 25623053 to the number 25623052, and the height of the water in the leg EC*lm* to the difference of the heights, as 25623052 to 1. But the height in the leg EC*lm* is of 19615800 *Paris* feet, as has been lately found by the mensuration of the *French*; and, therefore, by the preceding analogy, the difference of the heights comes out $9\frac{1}{5}$ inches of the *Paris* foot; and the sun's force will make the height of the sea at A to exceed the height of the same at E by 9 inches. And though the water of the canal ACE*mlk* be supposed to be frozen into a hard and solid consistence, yet the heights thereof at A and E, and all other intermediate places, would still remain the same.



Let A*a* (in the following figure) represent that excess of height of 9 inches at A, and *hf* the excess of height at any other place *h*; and upon DC let fall the perpendicular *f*G, meeting the globe of the earth in F; and because the distance of the sun is so great that all the right lines drawn thereto may be considered as parallel, the force TM in any place *f* will be to the same force in the place A as the sine FG to the radius AC. And, therefore, since those forces tend to the sun in the direction of parallel lines, they will generate the parallel heights F*f*, A*a*, in the same ratio; and therefore the figure of the water D*faeb* will be a spheroid made by the revolution of an ellipsis about its longer axis *ab*. And the perpendicular height *fh* will be to the oblique height F*f* as *f*G to *f*C, or as FG to AC: and therefore the height *fh* is to the height A*a* in the duplicate ratio of FG to AC, that is, in the ratio of the versed sine of double the angle DC*f* to double the radius, and is thence given. And hence to the several moments of the apparent revolution of the sun about the earth we may infer the proportion

of the ascent and descent of the waters at any given place under the equator, as well as of the diminution of that ascent and descent, whether arising from the latitude of places or from the sun's declination; viz., that on account of the latitude of places, the ascent and descent of the sea is in all places diminished in the duplicate ratio of the co-sines of latitude; and on account of the sun's declination, the ascent and descent under the equator is diminished in the duplicate ratio of the co-sine of declination. And in places without the equator the half sum of the morning and evening ascents (that is, the mean ascent) is diminished nearly in the same ratio.

Let S and L respectively represent the forces of the sun and moon placed in the equator, and at their mean distances from the earth; R the radius; T and V the versed sines of double the complements of the sun and moon's declinations to any given time; D and E the mean apparent diameters of the sun and moon: and, supposing F and G to be their apparent diameters to that given time, their forces to raise the tides under the equator will be, in the syzygies; in the quadratures,. And if the same ratio is likewise observed under the parallels, from observations accurately made in our northern climates we may determine the proportion of the forces L and S; and then by means of this rule predict the quantities of the tides to every syzygy and quadrature.

At the mouth of the river *Avon*, three miles below *Bristol* (to 453), in spring and autumn, the whole ascent of the water in the conjunction or opposition of the luminaries (by the observation of *Sturmy*) is about 45 feet, but in the quadratures only 25. Because the apparent diameters of the luminaries are not here determined, let us assume them in their mean quantities, as well as the moon's declination in the equinoctial quadratures in its mean quantity, that is, 23½°; and the versed sine of double its complement will be 1682, supposing the radius to be 1000. But the declinations of the sun in the equinoxes and of the moon in the syzygies are of no quantity, and the versed sines of double the complements are each 2000. Whence those forces become L + S in the syzygies, and $^{1682}\!/_{2000}$ L - S in the quadratures; respectively proportional to the heights of the tides of 45 and 25 feet, or of 9 and 5 paces. And, therefore, multiplying the extremes and the means, we have 5L + 5S = $^{15138}\!/_{2000}$L - 9S, or L = $^{28000}\!/_{5138}$S = $5^{5}\!/_{11}$S.

But farther; I remember to have been told that in summer the ascent of the sea in the syzygies is to the ascent thereof in the quadratures as about 5 to 4. In the solstices themselves it is probable that the proportion may be something less, as about 6 to 5; whence it would follow that L is $5\frac{1}{6}$S [for then the proportion is]. Till we can more certainly determine the proportion from observation, let us assume L = 5⅓S; and since the heights of the tides are as the forces which excite them, and the force of the sun is able to raise the tides to the height of nine inches, the moon's force will be sufficient to raise the same to the height of four feet. And if we allow that this height may be doubled, or perhaps tripled, by that force of reciprocation which we observe in the motion of the waters, and by which their motion once begun is kept up for some time, there will be force enough to generate all that quantity of tides which we really find in the ocean.

Thus we have seen that these forces are sufficient to move the sea. But, so far as I can observe, they will not be able to produce any other effect sensible on our earth; for since the weight of one grain in 4000 is not sensible in the nicest balance; and the sun's force to move the tides is 12868200 less than the force of gravity; and the sum of the forces of both moon and sun, exceeding the sun's force only in the ratio of 6⅓ to 1, is still 2032890 times less than the force of gravity; it is evident that both forces together are 500 times less than what is required sensibly to increase or diminish the weight of any body in a balance. And, therefore, they will not sensibly move any suspended body; nor will they produce any sensible effect on pendulums, barometers, bodies swimming in stagnant water, or in the like statical experiments. In the atmosphere, indeed, they will excite such a flux and reflux as they do in the sea, but with so small a motion that no sensible wind will be thence produced.

If the effects of both moon and sun in raising the tides (), as well as their apparent diameters, were equal among themselves, their absolute forces would (by Cor. XIV, Prop. LXVI) be as their magnitudes. But the effect of the moon is to the effect of the sun as about 5⅓ to 1; and the moon's diameter less than the sun's in the ratio of 31½ to 32⅓, or of 45 to 46. Now the force of the moon is to be increased in the ratio of the effect directly, and in the triplicate ratio of the diameter inversely. Whence the force of the moon compared with its magnitude will be to the force of the sun compared

with its magnitude in the ratio compounded of 5⅓ to 1, and the triplicate of 45 to 46 inversely, that is, in the ratio of about $5^{7}/_{10}$ to 1. And therefore the moon, in respect of the magnitude of its body, has an absolute centripetal force greater than the sun in respect of the magnitude of its body in the ratio to $5^{7}/_{10}$ to 1, and is therefore more dense in the same ratio.

In the time of $27^{d}.7^{h}.43'$, in which the moon makes its revolution about the earth, a planet may be revolved about the sun at the distance of 18,954 diameters of the sun from the sun's centre, supposing the mean apparent diameter of the sun to be $32^{1}/_{5}'$; and in the same time the moon may be revolved about the earth at rest, at the distance of 30 of the earth's diameters. If in both cases the number of diameters was the same, the absolute circum-terrestrial force would (by Cor. II, Prop. LXXII) be to the absolute circum-solar force as the magnitude of the earth to the magnitude of the sun. Because the number of the earth's diameters is greater in the ratio of 30 to 18,954, the body of the earth will be less in the triplicate of that ratio, that is, in the ratio of $3^{28}/_{29}$ to 1. Wherefore the earth's force, for the magnitude of its body, is to the sun's force, for the magnitude of its body, as $3^{28}/_{29}$ to 1; and consequently the earth's density to the sun's will be in the same ratio. Since, then, the moon's density is to the sun's density as $5^{7}/_{10}$ to 1, the moon's density will be to the earth's density as $5^{7}/_{10}$ to $3^{28}/_{29}$, or as 23 to 16. Wherefore since the moon's magnitude is to the earth's magnitude as about 1 to 41½, the moon's absolute centripetal force will be to the earth's absolute centripetal force as about 1 to 29, and the quantity of matter in the moon to the quantity of matter in the earth in the same ratio. And hence the common centre of gravity of the earth and moon is more exactly determined than hitherto has been done; from the knowledge of which we may now infer the moon's distance from the earth with greater accuracy. But I would rather wait till the proportion of the bodies of the moon and earth one to the other is more exactly defined from the phaenomena of the tides, hoping that in the mean time the circumference of the earth may be measured from more distant stations than any body has yet employed for this purpose.

Thus I have given an account of the system of the planets. As to the fixed stars, the smallness of their annual parallax proves them to be removed to

immense distances from the system of the planets: that this parallax is less than one minute is most certain; and from thence it follows that the distance of the fixed stars is above 360 times greater than the distance of Saturn from the sun. Such as reckon the earth one of the planets, and the sun one of the fixed stars, may remove the fixed stars to yet greater distances by the following arguments: from the annual motion of the earth there would happen an apparent transposition of the fixed stars, one in respect of another, almost equal to their double parallax; but the greater and nearer stars, in respect of the more remote, which are only seen by the telescope, have not hitherto been observed to have the least motion. If we should suppose that motion to be but less than 20”, the distance of the nearer fixed stars would exceed the mean distance of Saturn by above 2000 times. Again; the disk of Saturn, which is only 17” or 18” in diameter, receives but about $^{1}/_{2100000000}$ the sun’s light; for so much less is that disk than the whole spherical surface of the orb of Saturn. Now if we suppose Saturn to reflect about ¼ of this light, the whole light reflected from its illuminated hemisphere will be about $^{1}/_{4200000000}$ of the whole light emitted from the sun’s hemisphere; and, therefore, since light is rarefied in the duplicate ratio of the distance from the luminous body, if the sun was 10000 times more distant than Saturn, it would yet appear as lucid as Saturn now does without its ring, that is, something more lucid than a fixed star of the first magnitude. Let us, therefore, suppose that the distance from which the sun would shine as a fixed star exceeds that of Saturn by about 100,000 times, and its apparent diameter will be $7^{v}.16^{vi}$. and its parallax arising from the annual motion of the earth 13”“: and so great will be the distance, the apparent diameter, and the parallax of the fixed stars of the first magnitude, in bulk and light equal to our sun. Some may, perhaps, imagine that a great part of the light of the fixed stars is intercepted and lost in its passage through so vast spaces, and upon that account pretend to place the fixed stars at nearer distances; but at this rate the remoter stars could be scarcely seen. Suppose, for example, that ¾ of the light perish in its passage from the nearest fixed stars to us; then ¾ will twice perish in its passage through a double space, thrice through a triple, and so forth. And, therefore, the fixed stars that are at a double distance will be 16 times more obscure, viz., 4 times more obscure on account of the diminished apparent diameter; and,

again, 4 times more on account of the lost light. And, by the same argument, the fixed stars at a triple distance will be 9 4 4, or 144 times more obscure; and those at a quadruple distance will be 16 4 4 4, or 1024 times more obscure: but so great a diminution of light is no ways consistent with the phenomena and with that hypothesis which places the fixed stars at different distances.

The fixed stars being, therefore, at such vast distances from one another (, 461), can neither attract each other sensibly, nor be attracted by our sun. But the comets must unavoidably be acted on by the circum-solar force; for as the comets were placed by astronomers above the moon, because they were found to have no diurnal parallax, so their annual parallax is a convincing proof of their descending into the regions of the planets. For all the comets which move in a direct course, according to the order of the signs, about the end of their appearance become more than ordinarily slow, or retrograde, if the earth is between them and the sun; and more than ordinarily swift if the earth is approaching to a heliocentric opposition with them. Whereas, on the other hand, those which move against the order of the signs, towards the end of their appearance, appear swifter than they ought to be if the earth is between them and the sun; and slower, and perhaps retrograde, if the earth is in the other side of its orbit. This is occasioned by the motion of the earth in different situations. If the earth go the same way with the comet, with a swifter motion, the comet becomes retrograde; if with a slower motion, the comet becomes slower, however; and if the earth move the contrary way, it be comes swifter; and by collecting the differences between the slower and swifter motions, and the sums of the more swift and retrograde motions, and comparing them with the situation and motion of the earth from whence they arise, I found, by means of this parallax, that the distances of the comets at the time they cease to be visible to the naked eye are always less than the distance of Saturn, and generally even less than the distance of Jupiter.

The same thing may be collected from the curvature of the way of the comets (). These bodies go on nearly in great circles while their motion continues swift; but about the end of their course, when that part of their apparent motion which arises from the parallax bears a greater proportion to their whole apparent motion, they commonly deviate from those circles; and when the earth goes to one side, they deviate to the other; and this

deflection, because of its corresponding with the motion of the earth, must arise chiefly from the parallax; and the quantity there of is so considerable, as, by my computation, to place the disappearing comets a good deal lower than Jupiter. Whence it follows, that, when they approach nearer to us in their perigees and perihelions, they often descend below the orbits of Mars and the inferior planets.

Moreover, this nearness of the comets is confirmed by the annual parallax of the orbit, in so far as the same is pretty nearly collected by the supposition that the comets move uniformly in right lines. The method of collecting the distance of a comet according to this hypothesis from four observations (first attempted by *Kepler*, and perfected by Dr. *Wallis* and Sir *Christopher Wren*) is well known; and the comets reduced to this regularity generally pass through the middle of the planetary region. So the comets of the year 1607 and 1618, as their motions are defined by *Kepler*, passed between the sun and the earth; that of the year 1664 below the orbit of Mars; and that in 1680 below the orbit of Mercury, as its motion was defined by Sir *Christopher Wren* and others. By a like rectilinear hypothesis, *Hevelius* placed all the comets about which we have any observations below the orbit of Jupiter. It is a false notion, therefore, and contrary to astronomical calculation, which some have entertained, who, from the regular motion of the comets, either remove them into the regions of the fixed stars, or deny the motion of the earth; whereas their motions cannot be reduced to perfect regularity, unless we suppose them to pass through the regions near the earth in motion; and these are the arguments drawn from the parallax, so far as it can be determined without an exact knowledge of the orbits and motions of the comets.

The near approach of the comets is farther confirmed from the light of their heads (, 465); for the light of a celestial body, illuminated by the sun, and receding to remote parts, is diminished in the quadruplicate proportion of the distance; to wit, in one duplicate proportion on account of the increase of the distance from the sun; and in another duplicate proportion on account of the decrease of the apparent diameter. Hence it may be inferred, that Saturn being at a double distance, and having its apparent diameter nearly half of that of Jupiter, must appear about 16 times more obscure; and that, if its distance were 4 times greater, its light would be 256 times less; and therefore would be hardly perceivable to the naked eye. But now the

comets often equal Saturn's light, without exceeding him in their apparent diameters. So the comet of the year 1668, according to Dr. *Hooke's* observations, equalled in brightness the light of a fixed star of the first magnitude; and its head, or the star in the middle of the coma, appeared, through a telescope of 15 feet, as lucid as Saturn near the horizon; but the diameter of the head was only 25", that is, almost the same with the diameter of a circle equal to Saturn and his ring. The coma or hair surrounding the head was about ten times as broad; namely, $4\frac{1}{6}$ min. Again; the least diameter of the hair of the comet of the year 1682, observed by Mr. *Flamsted* with a tube of 16 feet and measured with the micrometer, was 2' 0"; but the nucleus, or star in the middle, scarcely possessed the tenth part of this breadth, and was therefore only 11" or 12" broad; but the light and clearness of its head exceeded that of the year 1680, and was equal to that of the stars of the first or second magnitude. Moreover, the comet of the year 1665, in *April*, as *Hevelius* informs us, exceeded almost all the fixed stars in splendor, and even Saturn itself, as being of a much more vivid colour; for this comet was more lucid than that which appeared at the end of the foregoing year and was compared to the stars of the first magnitude. The diameter of the coma was about 6'; but the nucleus, compared with the planets by means of a telescope, was plainly less than Jupiter, and was sometimes thought less, sometimes equal to the body of Saturn within the ring. To this breadth add that of the ring, and the whole face of Saturn will be twice as great as that of the comet, with a light not at all more intense; and therefore the comet was nearer to the sun than Saturn. From the proportion of the nucleus to the whole head found by these observations, and from its breadth, which seldom exceeds 8' or 12', it appears that the stars of the comets are most commonly of the same apparent magnitude as the planets; but that their light may be compared oftentimes with that of Saturn, and sometimes exceeds it. And hence it is certain that in their perihelia their distances can scarcely be greater than that of Saturn. At twice that distance, the light would be four times less, which besides by its dim paleness would be as much inferior to the light of Saturn as the light of Saturn is to the splendor of Jupiter: but this difference would be easily observed. At a distance ten times greater, their bodies must be greater than that of the sun; but their light would be 100 times fainter than that of Saturn.

And at distances still greater, their bodies would far exceed the sun; but, being in such dark regions, they must be no longer visible. So impossible is it to place the comets in the middle regions between the sun and fixed stars, accounting the sun as one of the fixed stars; for certainly they would receive no more light there from the sun than we do from the greatest of the fixed stars.

So far we have gone without considering that obscuration which comets suffer from that plenty of thick smoke which encompasseth their heads, and through which the heads always shew dull as through a cloud; for by how much the more a body is obscured by this smoke, by so much the more near it must be allowed to come to the sun, that it may vie with the planets in the quantity of light which it reflects; whence it is probable that the comets descend far below the orbit of Saturn, as we proved before from their parallax. But, above all, the thing is evinced from their tails, which must be owing either to the sun's light reflected from a smoke arising from them, and dispersing itself through the aether, or to the light of their own heads.

In the former case we must shorten the distance of the comets, lest we be obliged to allow that the smoke arising from their heads is propagated through such a vast extent of space, and with such a velocity of expansion, as will seem altogether incredible; in the latter case the whole light of both head and tail must be ascribed to the central nucleus. But, then, if we suppose all this light to be united and condensed within the disk of the nucleus, certainly the nucleus will by far exceed Jupiter itself in splendor, especially when it emits a very large and lucid tail. If, therefore, under a less apparent diameter, it reflects more light, it must be much more illuminated by the sun, and therefore much nearer to it. So the comet that appeared *Dec*. 12 and 15, O.S. *Anno* 1679, at the time it emitted a very shining tail, whose splendor was equal to that of many stars like Jupiter, if their light were dilated and spread through so great a space, was, as to the magnitude of its nucleus, less than Jupiter (as Mr. *Flamsted* observed), and therefore was much nearer to the sun: nay, it was even less than Mercury. For on the 17th of that month, when it was nearer to the earth, it appeared to *Cassini* through a telescope of 35 feet a little less than the globe of Saturn. On the 8th of this month, in the morning, Dr. *Halley* saw the tail, appearing broad and very short, and as if it rose from the body of the sun itself, at that time very near its rising. Its form was like that of an extraordinary bright cloud;

nor did it disappear till the sun itself began to be seen above the horizon. Its splendor, therefore, exceeded the light of the clouds till the sun rose, and far surpassed that of all the stars together, as yielding only to the immediate brightness of the sun itself. Neither Mercury, nor Venus, nor the moon itself, are seen so near the rising sun. Imagine all this dilated light collected together, and to be crowded into the orbit of the comet's nucleus which was less than Mercury; by its splendor, thus increased, becoming so much more conspicuous, it will vastly exceed Mercury, and therefore must be nearer to the sun. On the 12th and 15th of the same month, this tail, extending itself over a much greater space, appeared more rare; but its light was still so vigorous as to become visible when the fixed stars were hardly to be seen, and soon after to appear like a fiery beam shining in a wonderful manner. From its length, which was 40 or 50 degrees, and its breadth of 2 degrees, we may compute what the light of the whole must be.

This near approach of the comets to the sun is confirmed from the sitution they are seen in when their tails appear most resplendent; for when the head passes by the sun, and lies hid under the solar rays, very bright and shining tails, like fiery beams, are said to issue from the horizon; but afterwards, when the head begins to appear, and is got farther from the sun, that splendor always decreases, and turns by degrees into a paleness like to that of the milky way, but much more sensible at first; after that vanishing gradually. Such was that most resplendent comet described by *Aristotle*, Lib. 1, Meteor. 6. "The head thereof could not be seen, because it set before the sun, or at least was hid under the sun's rays; but the next day it was seen as well as might be; for, having left the sun but a very little way, it set immediately after it; and the scattered light of the head obscured by the too great splendour (of the tail) did not yet appear. But afterwards (says *Aristotle*), when the splendour of the tail was now diminished (the head of), the comet recovered its native brightness. And the splendour of its tail reached now to a third part of the heavens (that is, to 60°). It appeared in the winter season, and, rising to *Orion's* girdle, there vanished away." Two comets of the same kind are described by Justin, Lib. 37, which, according to his account, "shined so bright, that the whole heaven seemed to be on fire; and by their greatness filled up a fourth part of the heavens, and by their splendour exceeded that of the sun." By which last words a near position of these bright comets and the rising or setting sun is intimated (,

495). We may add to these the comet of the year 1101 or 1106, “the star of which was small and obscure (like that of 1680); but the splendour arising from it extremely bright, reaching like a fiery beam to the east and north,” as *Hevelius* has it from *Simeon*, the monk of *Durham*. It appeared at the beginning of *February* about the evening in the south-west. From this and from the situation of the tail we may infer that the head was near the sun. *Matthew Paris* says, “it was about one cubit from the sun; from the third [or rather the sixth] to the ninth hour sending out a long stream of light.” The comet of 1264, in *July*, or about the solstice, preceded the rising sun, sending out its beams with a great light towards the west as far as the middle of the heavens; and at the beginning it ascended a little above the horizon: but as the sun went forwards it retired every day farther from the horizon, till it passed by the very middle of the heavens. It is said to have been at the beginning large and bright, having a large coma, which decayed from day to day. It is described in *Append. Matth. Paris, Hist. Ang.* after this manner: “*An. Christi* 1265, there appeared a comet so wonderful, that none then living had ever seen the like; for, rising from the east with a great brightness, it extended itself with a great light as far as the middle of the hemisphere towards the west.” The Latin original being somewhat barbarous and obscure, it is here subjoined. *Ab oriente enim cum magno fulgore surgens, usque ad medium hemisphœrii versus occidentem, omnia perlucide pertrahebat.*

“In the year 1401 or 1402, the sun being got below the horizon, there appeared in the west a bright and shining comet, sending out a tail upwards, in splendor like a flame of fire, and in form like a spear, darting its rays from west to east. When the sun was sunk below the horizon, by the lustre of its own rays it enlightened all the borders of the earth; not permitting the other stars to shew their light, or the shades of night to darken the air, because its light exceeded that of the others, and extended itself to the upper part of the heavens, flaming,” &c., *Hist. Byzant. Duc. Mich. Nepot.* From the situation of the tail of this comet, and the time of its first appearance, we may infer that the head was then near the sun, and went farther from him every day; for that comet continued three months. In the year 1527, *Aug*. 11, about four in the morning, there was seen almost throughout *Europe* a terrible comet in *Leo*, which continued flaming an hour and a quarter every day. It rose from the east, and ascended to the south and west to a

prodigious length. It was most conspicuous to the north, and its cloud (that is, its tail) was very terrible; having, according to the fancies of the vulgar, the form of an arm a little bent holding a sword of a vast magnitude. In the year 1618, in the end of *November*, there began a rumour, that there appeared about sun-rising a bright beam, which was the tail of a comet whose head was yet concealed within the brightness of the solar rays. On *Nov*. 24, and from that time, the comet itself appeared with a bright light, its head and tail being extremely resplendent. The length of the tail, which was at first 20 or 30 deg., increased till *December* 9, when it arose to 75 deg,, but with a light much more faint and dilute than at the beginning. In the year 1668, *March* 5, N. S., about 7 in the evening, *P. Valent. Estancius*, being in *Brazil*, saw a comet near the horizon in the south-west. Its head was small, and scarcely discernible, but its tail extremely bright and refulgent, so that the reflection of it from the sea was easily seen by those who stood upon the shore. This great splendor lasted but three days, decreasing very remark ably from that time. The tail at the beginning extended itself from west to south, and in a situation almost parallel to the horizon, appearing like a shining beam 23 deg. in length. Afterwards, the light decreasing, its magnitude increased till the comet ceased to be visible; so that *Cassini*, at *Bologna*, saw it (*Mar*. 10, 11, 12) rising from the horizon 32 deg. in length. In *Portugal* it is said to have taken up a fourth part of the heavens (that is, 45 deg.), extending itself from west to east with a notable brightness; though the whole of it was not seen, because the head in this part of the world always lay hid below the horizon. From the increase of the tail it is plain that the head receded from the sun, and was nearest to it at the beginning, when the tail appeared brightest.

To all these we may add the comet of 1680, whose wonderful splendor at the conjunction of the head with the sun was above described. But so great a splendor argues the comets of this kind to have really passed near the fountain of light, especially since the tails never shine so much in their opposition to the sun; nor do we read that fiery beams have ever appeared there.

Lastly, the same thing is inferred (, 467) from the light of the heads increasing in the recess of the comets from the earth towards the sun, and decreasing in their return from the sun towards the earth; for so the last comet of the year 1665 (by the observation of *Hevelius*), from the time that it was first seen, was always losing of its apparent motion, and therefore had already passed its perigee: yet the splendor of its head was daily increasing, till, being hid by the sun's rays, the comet ceased to appear. The comet of the year 1683 (by the observation of the same *Hevelius*), about the end of *July*, when it first appeared, moved at a very slow rate, advancing only about 40 or 45 minutes in its orbit in a day's time. But from that time its diurnal motion was continually upon the increase till *September* 4, when it arose to about 5 degrees; and therefore in all this interval of time the comet was approaching to the earth. Which is likewise proved from the diameter of its head measured with a micrometer; for, August the 6th, *Hevelius* found it only 6' 5", including the coma: which, *September* 2, he observed 9' 7". And therefore its head appeared far less about the beginning than towards the end of its motion, though about the beginning, because nearer to the sun, it appeared far more lucid than towards the end, as the same *Hevelius* declares. Wherefore in all this interval of time, on account of its recess from the sun, it decreased in splendor, notwithstanding its access towards the earth. The comet of the year 1618, about the middle of *December*, and that of the year 1680, about the end of the same month, did both move with their greatest velocity, and were therefore then in their perigees; but the greatest splendor of their heads was seen two weeks before, when they had just got clear of the sun's rays; and the greatest splendor of their tails a little more early, when yet nearer to the sun. The head of the former comet, according to the observations of *Cysatus*, *Dec*. 1, appeared greater than the stars of the first magnitude; and, *Dec*. 16 (being then in its perigee), of a small magnitude, and the splendor or clearness was much diminished. *Jan*. 7, *Kepler*, being uncertain about the head, left off observing. *Dec*. 12, the head of the last comet was seen and observed by *Flamsted* at the distance of 9 degrees from the sun, which a star of the third magnitude could hardly have been. *December* 15 and 17, the same appeared like a star of the third magnitude, its splendor being diminished by the bright clouds near the setting sun. *Dec*. 26, when it moved with the greatest swiftness, and was almost in its perigee, it was inferior to *Os Pegasi*, a star

of the third magnitude. *Jan*. 3, it appeared like a star of the fourth; *Jan*. 9, like a star of the fifth. *Jan*. 13. it disappeared, by reason of the brightness of the moon, which was then in its increase. *Jan*. 25, it was scarcely equal to the stars of the seventh magnitude. If we take equal times on each hand of the perigee, the heads placed at remote distances would have shined equally before and after, because of their equal distances from the earth. That in one case they shined very bright, and in the other vanished, is to be ascribed to the nearness of the sun in the first case, and his distance in the other; and from the great difference of the light in these two cases we infer its great nearness in the first of them; for the light of the comets uses to be regular, and to appear greatest when their heads move the swiftest, and are therefore in their perigees, excepting in so far as it is increased by their nearness to the sun.

From these things I at last discovered why the comets frequent so much the region of the sun. If they were to be seen in the regions a great way beyond Saturn, they must appear oftener in these parts of the heavens that are opposite to the sun; for those which are in that situation would be nearer to the earth, and the interposition of the sun would obscure the others: but, looking over the history of comets, I find that four or five times more have been seen in the hemisphere towards the sun than in the opposite hemisphere; besides, without doubt, not a few which have been hid by the light of the sun; for comets descending into our parts neither emit tails, nor are so well illuminated by the sun, as to discover themselves to our naked eyes, till they are come nearer to us than Jupiter. But the far greater part of that spherical space, which is described about the sun with so small an interval, lies on that side of the earth which regards the sun, and the comets in that greater part are more strongly illuminated, as being for the most part nearer to the sun: besides, from the remarkable eccentricity of their orbits, it comes to pass that their lower apsides are much nearer to the sun than if their revolutions were performed in circles concentric to the sun.

Hence also we understand why the tails of the comets, while their heads are descending towards the sun, always appear short and rare, and are seldom said to have exceeded 15 or 20 deg. in length; but in the recess of the heads from the sun often shine like fiery beams, and soon after reach to 40, 50, 60, 70 deg. in length, or more. This great splendor and length of the tails arises from the heat which the sun communicates to the comet as it

passes near it. And thence, I think, it may be concluded, that all the comets that have had such tails have passed very near the sun.

Hence also we may collect that the tails arise from the atmospheres of the heads (to 488): but we have had three several opinions about the tails of comets; for some will have it that they are nothing else but the beams of the sun's light transmitted through the comets heads, which they suppose to be transparent; others, that they proceed from the refraction which light suffers in passing from the comet's head to the earth; and, lastly, others, that they are a sort of clouds or vapour constantly rising from the comets heads, and tending towards the parts opposite to the sun. The first is the opinion of such as are yet unacquainted with optics; for the beams of the sun are not seen in a darkened room, but in consequence of the light that is reflected from them by the little particles of dust and smoke which are always flying about in the air; and hence it is that in air impregnated with thick smoke they appear with greater brightness, and are more faintly and more difficultly seen in a finer air; but in the heavens, where there is no matter to reflect the light, they are not to be seen at all. Light is not seen as it is in the beams, but as it is thence reflected to our eyes; for vision is not made but by rays falling upon the eyes, and therefore there must be some reflecting matter in those parts where the tails of comets are seen; and so the argument turns upon the third opinion; for that reflecting matter can be no where found but in the place of the tail, because otherwise, since all the celestial spaces are equally illuminated by the sun's light, no part of the heavens could appear with more splendor than another. The second opinion is liable to many difficulties. The tails of comets are never seen variegated with those colours which ever use to be inseparable from refraction; and the distinct transmission of the light of the fixed stars and planets to us is a demonstration that the aether or celestial medium is not endowed with any refractive power. For as to what is alledged that the fixed stars have been sometimes seen by the *Egyptians* environed with a coma or capillitium, because that has but rarely happened, it is rather to be ascribed to a casual refraction of clouds, as well as the radiation and scintillation of the fixed stars to the refractions both of the eyes and air; for upon applying a telescope to the eye, those radiations and scintillations immediately disappear. By the tremulous agitation of the air and ascending vapours, it happens that the rays of light are alternately turned aside from the narrow

space of the pupil of the eye; but no such thing can have place in the much wider aperture of the object-glass of a telescope; and hence it is that a scintillation is occasioned in the former case which ceases in the latter; and this cessation in the latter case is a demonstration of the regular transmission of light through the heavens without any sensible refraction. But, to obviate an objection that may be made from the appearing of no tail in such comets as shine but with a faint light, as if the secondary rays were then too weak to affect the eyes, and for this reason it is that the tails of the fixed stars do not appear, we are to consider that by the means of telescopes the light of the fixed stars may be augmented above an hundred fold and yet no tails are seen; that the light of the planets is yet more copious without any tail, but that comets are seen sometimes with huge tails when the light of their heads is but faint and dull; for so it happened in the comet of the year 1680, when in the month of *December* it was scarcely equal in light to the stars of the second magnitude, and yet emitted a notable tail, extending to the length of 40°, 50°, 60°, or 70°, and upwards; and afterwards, on the 27th and 28th of *January*, the head appeared but as a star of the seventh magnitude; but the tail (as was said above), with a light that was sensible enough, though faint, was stretched out to 6 or 7 degrees in length, and with a languishing light that was more difficultly seen, even to 12° and upwards. But on the 9th and 10th of *February*, when to the naked eye the head appeared no more, I saw through a telescope the tail of 2° in length. But farther; if the tail was owing to the refraction of the celestial matter, and did deviate from the opposition of the sun, according as the figure of the heavens requires, that deviation, in the same places of the heavens, should be always directed towards the same parts: but the comet of the year 1680, *December* $28^{d}.8\frac{1}{2}^{h}$. P. M. at *London*, was seen in *Pisces*, 8° 41', with latitude north 28° 6', while the sun was in *Capricorn* 18° 26'. And the comet of the year 1577, *December* 29, was in *Pisces* 8° 41', with latitude north 28° 40'; and the sun, as before, in about *Capricorn* 18° 26'. In both cases the situation of the earth was the same, and the comet appeared in the same place of the heavens; yet in the former case the tail of the comet (as well by my observations as by the observations of others) deviated from the opposition of the sun towards the north by an angle of 4½ degrees, whereas in the latter there was (according to the observation of *Tycho*) a deviation of

21 degrees towards the south. The refraction, therefore, of the heavens being thus disproved, it remains that the *phaenomena* of the tails of comets must be derived from some reflecting matter. That vapours sufficient to fill such immense spaces may arise from the comet's atmospheres, may be easily understood from what follows.

It is well known that the air near the surface of our earth possesses a space about 1200 times greater than water of the same weight; and therefore a cylindric column of air 1200 feet high is of equal weight with a cylinder of water of the same breadth, and but one foot high. But a cylinder of air reaching to the top of the atmosphere is of equal weight with a cylinder of water about 33 feet high; and therefore if from the whole cylinder of air the lower part of 1200 feet high is taken away, the remaining upper part will be of equal weight with a cylinder of water 32 feet high. Wherefore at the height of 1200 feet, or two furlongs, the weight of the incumbent air is less, and consequently the rarity of the compressed air greater, than near the surface of the earth in the ratio of 33 to 32. And, having this ratio, we may compute the rarity of the air in all places whatsoever (by the help of Cor. Prop. XXII, Book II), supposing the expansion thereof to be reciprocally proportional to its compression; and this proportion has been proved by the experiments of *Hooke* and others. The result of the computation I have set down in the following table, in the first column of which you have the height of the air in miles, whereof 4000 make a semi-diameter of the earth; in the second the compression of the air, or the incumbent weight; in the third its rarity or expansion, supposing gravity to decrease in the duplicate ratio of the distances from the earth's centre. And the *Latin* numeral characters are here used for certain numbers of ciphers, as 0,xvii 1224 for 0,00000000000000001224, and 26956 xv for 269560000000000000000.

AIR's

Height.

Compression.

Expansion.

0

5

10

20

40

400

4000

40000

400000

4000000

Infinite.

33
17,8515
9,6717
2,852
0,2525
0,xvii 1224
0,cv. 4465
0,cxcii 1628
0,ccx 7895
0,ccxii 9878
0,ccxii 6041

1

1

3

11

136

26956

73907

20263

41798

33414

54622

,8486
,4151
,571
,83

xv

cii

clxxxix

ccvii

ccix

ccix

But from this table it appears that the air, in proceeding upwards, is rarefied in such manner, that a sphere of that air which is nearest to the earth, of but one inch in diameter, if dilated with that rarefaction which it would have at the height of one semi-diameter of the earth, would fill all the planetary regions as far as the sphere of Saturn, and a great way beyond; and at the height of ten semi-diameters of the earth would fill up more space than is contained in the whole heavens on this side the fixed stars, according to the preceding computation of their distance. And though, by reason of the far greater thickness of the atmospheres of comets, and the great quantity of the circum-solar centripetal force, it may happen that the air in the celestial spaces, and in the tails of comets, is not so vastly rarefied, yet from this computation it is plain that a very small quantity of air and vapour is abundantly sufficient to produce all the appearances of the tails of comets; for that they are indeed of a very notable rarity appears from the shining of

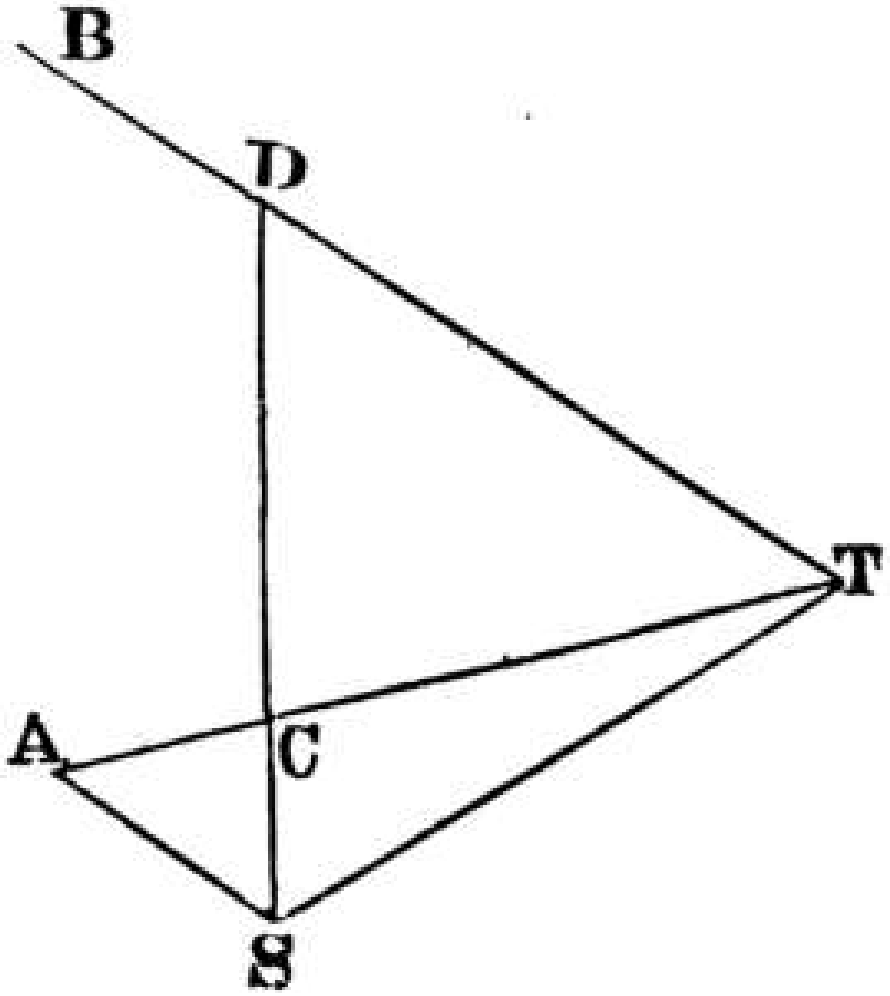
the stars through them. The atmosphere of the earth, illuminated by the sun's light, though but of a few miles in thickness, obscures and extinguishes the light not only of all the stars, but even of the moon itself; whereas the smallest stars are seen to shine through the immense thickness of the tails of comets, likewise illuminated by the sun, without the least diminution of their splendor.

Kepler ascribes the ascent of the tails of comets to the atmospheres of their heads, and their direction towards the parts opposite to the sun to the action of the rays of light carrying along with them the matter of the comets' tails; and without any great incongruity we may suppose that, in so free spaces, so fine a matter as that of the aether may yield to the action of the rays of the sun's light, though those rays are not able sensibly to move the gross substances in our parts, which are clogged with so palpable a resistance. Another author thinks that there may be a sort of particles of matter endowed with a principle of levity as well as others are with a power of gravity; that the matter of the tails of comets may be of the former sort, and that its ascent from the sun may be owing to its levity; but, considering the gravity of terrestrial bodies is as the matter of the bodies, and therefore can be neither more nor less in the same quantity of matter, I am inclined to believe that this ascent may rather proceed from the rarefaction of the matter of the comets' tails. The ascent of smoke in a chimney is owing to the impulse of the air with which it is entangled. The air rarefied by heat ascends, because its specific gravity is diminished, and in its ascent carries along with it the smoke with which it is engaged. And why may not the tail of a comet rise from the sun after the same manner? for the sun's rays do not act any way upon the mediums which they pervade but by reflection and refraction; and those reflecting particles heated by this action, heat the matter of the aether which is involved with them. That matter is rarefied by the heat which it acquires, and because by this rarefaction the specific gravity, with which it tended towards the sun before, is diminished, it will ascend therefrom like a stream, and carry along with it the reflecting particles of which the tail of the comet is composed; the impulse of the sun's light, as we have said, promoting the ascent.

But that the tails of comets do arise from their heads (), and tend towards the parts opposite to the sun, is farther confirmed from the laws which the tails observe; for, lying in the planes of the comets orbits which pass

through the sun, they constantly deviate from the opposition of the sun towards the parts which the comets heads in their progress along those orbits have left; and to a spectator placed in those planes they appear in the parts directly opposite to the sun; but as the spectator recedes from those planes, their deviation begins to appear, and daily becomes greater. And the deviation, *caeteris paribus*, appears less when the tail is more oblique to the orbit of the comet, as well as when the head of the comet approaches nearer to the sun; especially if the angle of deviation is estimated near the head of the comet. Farther; the tails which have no deviation appear straight, but the tails which deviate are likewise bended into a certain curvature; and this curvature is greater when the deviation is greater, and is more sensible when the tail, *caeteris paribus*, is longer; for in the shorter tails the curvature is hardly to be perceived. And the angle of deviation is less near the comet's head, but greater towards the other end of the tail, and that because the lower side of the tail regards the parts from which the deviation is made, and which lie in a right line drawn out infinitely from the sun through the comet's head. And the tails that are longer and broader, and shine with a stronger light, appear more resplendent and more exactly defined on the convex than on the concave side. Upon which accounts it is plain that the phaenomena of the tails of comets depend upon the motions of their heads, and by no means upon the places of the heavens in which their heads are seen; and that, therefore, the tails of the comets do not proceed from the refraction of the heavens, but from their own heads, which furnish the matter that forms the tail; for as in our air the smoke of a heated body ascends either perpendicularly, if the body is at rest, or obliquely if the body is moved obliquely, so in the heavens, where all the bodies gravitate towards the sun, smoke and vapour must (as we have already said) ascend from the sun, and either rise perpendicularly, if the smoking body is at rest, or obliquely, if the body, in the progress of its motion, is always leaving those places from which the upper or higher parts of the vapours had risen before. And that obliquity will be less where the vapour ascends with more velocity, to wit, near the smoking body, when that is near the sun; for there the force of the sun by which the vapour ascends is stronger. But because the obliquity is varied, the column of vapour will be incurvated; and because the vapour in the preceding side is something more recent, that is, has ascended something more lately from the body, it will therefore be

something more dense on that side, and must on that account reflect more light, as well as be better defined; the vapour on the other side languishing by degrees, and vanishing out of sight.



But it is none of our present business to explain the causes of the appearances of nature. Let those things which we have last said be true or false, we have at least made out, in the preceding discourse, that the rays of light are directly propagated from the tails of comets in right lines through the heavens, in which those tails appear to the spectators wherever placed; and consequently the tails must ascend from the heads of the comets towards the parts opposite to the sun. And from this principle we may determine anew the limits of their distances in manner following. Let S represent the sun, T the earth, STA the elongation of a comet from the sun, and ATB the apparent length of its tail; and because the light is propagated

from the extremity of the tail in the direction of the right line TB, that extremity must lie somewhere in the line TB. Suppose it in D, and join DS cutting TA in C. Then, because the tail is always stretched out towards the parts nearly opposite to the sun, and therefore the sun, the head of the comet, and the extremity of the tail, lie in a right line, the comet's head will be found in C. Parallel to TB draw SA, meeting the line TA in A, and the comet's head C must necessarily be found between T and A, because the extremity of the tail lies somewhere in the infinite line TB; and all the lines SD which can possibly be drawn from the point S to the line TB must cut the line TA somewhere between T and A. Wherefore the distance of the comet from the earth cannot exceed the interval TA, nor its distance from the sun the interval SA beyond, or ST on this side the sun. For instance: the elongation of the comet of 1680 from the sun, *Dec*. 12, was 9°, and the length of its tail 35° at least. If, therefore, a triangle TSA is made, whose angle T is equal to the elongation 9°, and angle A equal to ATB, or to the length of the tail, viz., 35°, then SA will be to ST, that is, the limit of the greatest possible distance of the comet from the sun to the semi-diameter of the *orbis magnus*, as the sine of the angle T to the sine of the angle A, that is, as about 3 to 11. And therefore the comet at that time was less distant from the sun than by $^{3}/_{11}$ of the earth's distance from the sun, and consequently either was within the orb of Mercury, or between that orb and the earth. Again, *Dec*. 21, the elongation of the comet from the sun was 32⅔°, and the length of its tail 70°. Wherefore as the sine of 32⅔° to the sine of 70°, that is, as 4 to 7, so was the limit of the comet's distance from the sun to the distance of the earth from the sun, and consequently the comet had not then got without the orb of Venus. *Dec*. 28, the elongation of the comet from the sun was 55°, and the length of its tail 56°; and therefore the limit of the comet's distance from the sun was not yet equal to the distance of the earth from the same, and consequently the comet had not then got without the earth's orbit. But from its parallax we find that its egress from the orbit happened about *Jan*. 5, as well as that it had descended far within the orbit of Mercury. Let us suppose it to have been in its perihelion *Dec*. the 8th, when it was in conjunction with the sun; and it will follow that in the journey from its perihelion to its exit out of the earth's orbit it had spent 28 days; and consequently that in the 26 or 27 days

following, in which it ceased to be farther seen by the naked eye, it had scarcely doubled its distance from the sun; and by limiting the distances of other comets by the like arguments, we come at last to this conclusion, — that all comets, during the time in which they are visible by us, are within the compass of a spherical space described about the sun as a centre, with a radius double, or at most triple, of the distance of the earth from the sun.

And hence it follows that the comets, during the whole time of their appearance unto us, being within the sphere of activity of the circum-solar force, and therefore agitated by the impulse of that force, will (by Cor. I, Prop. XII, Book I, for the same reason as the planets) be made to move in conic sections that have one focus in the centre of the sun, and by radii drawn to the sun, to describe areas proportional to the times; for that force is propagated to an immense distance, and will govern the motions of bodies far beyond the orbit of Saturn.

There are three hypotheses about comets (); for some will have it that they are generated and perish as often as they appear and vanish; others, that they come from the regions of the fixed stars, and are seen by us in their passage through the system of our planets; and, lastly, others, that they are bodies perpetually revolving about the sun in very eccentric orbits. In the first case, the comets, according to their different velocities, will move in conic sections of all sorts; in the second, they will describe hyperbolas, and in either of the two will frequent indifferently all quarters of the heavens, as well those about the poles as those towards the ecliptic; in the third, their motions will be performed in ellipses very eccentric, and very nearly approaching to parabolas. But (if the law of the planets is observed) their orbits will not much decline from the plane of the ecliptic; and, so far as I could hitherto observe, the third case obtains; for the comets do, indeed, chiefly frequent the zodiac, and scarcely ever attain to a heliocentric latitude of 40°. And that they move in orbits very nearly parabolical, I infer from their velocity; for the velocity with which a parabola is described is every where to the velocity with which a comet or planet may be revolved about the sun in a circle at the same distance in the subduplicate ratio of 2 to 1 (by Cor. VII, Prop. XVI); and, by my computation, the velocity of comets is found to be much about the same. I examined the thing by inferring nearly the velocities from the distances, and the distances both from the parallaxes and the phaenomena of the tails, and never found the errors of excess or

defect in the velocities greater than what might have arose from the errors in the distances collected after that manner. But I likewise made use of the reasoning that follows.

Supposing the radius of the *orbis magnus* to be divided into 1000 parts: let the numbers in the first column of the following table represent the distance of the vertex of the parabola from the sun's centre, expressed by those parts: and a comet in the times expressed in col. 2, will pass from its perihelion to the surface of the sphere which is described about the sun as a centre with the radius of the *orbis magnus*; and in the times expressed in col. 3, 4, and 5, it will double, triple, and quadruple, that its distance from the sun.

TABLE I.

The distance of a comet's perihelion from the Suns's centre.	The time of a comet's passage from its perihelion to a distance from the sun equal to the radii of the *orbis magnus*.		
	To its double.	To its triple.	To its Quadruple.

0

5
10

20

40

80

160
320

640

1280

2560

d. h. ‘
27 11 12

27 16 07
27 21 00

28 06 40
29 01 32
30 13 25

33 05 29
37 13 46

37 09 49

d. h. ‘
77 16 28

77 23 14
78 06 24

78 20 13

79 23 34

82 04 56

86 10 26
93 23 38

105 01 28

106 06 35

d. h. ‘
142 17 14

144 03 19

153 16 08

200 06 43

147 22 31

d. h. ‘
219 17 30

221 08 54

232 12 20

297 03 46

300 06 03

[This table, here corrected, is made on the supposition that the earth’s diurnal motion is just 59’, and the measure of one minute loosely 0,2909, in respect of the radius 1000. If those measures are taken true, the true numbers of the table will all come out less. But the difference, even when greatest, and to the quadruple of the earth’s distance from the sun, amounts only to $16^{h}.55’$.]

The time of a comet’s ingress into the sphere of the *orbis magnus*, or of its egress from the same, may be inferred nearly from its parallax, but with more expedition by the following

TABLE II.

The apparent elongation of a comet from the sun.	Its apparent diurnal motion in its own orbit.	Its distance from the earth in parts whereof the radius of the *orbis magnus* contains 1000.
60°	Direct.	
65	2° 18’	
70	2° 33’	
72		
74		
76		
78		
80		
82		
84		
86		
88		
90		

2° 55’
3° 07’
3° 23’
3° 43’
4° 10’
4° 57’
5° 45’
7° 18’
10° 27’
18° 37’
Infi’ite.

Retrog.
00° 20’
00° 35’
00° 57’
01° 09’
01° 25’
01° 45’
02° 12’
02° 49’
03° 47’
05° 20’
08° 19’
16° 39’
Infi’ite.

1000
845
684
618
651
484
416
347

278
209
140
70
00

The ingress of a comet into the sphere of the *orbis magnus*, or its egress from the same, happens at the time of its elongation from the sun, expressed in col. 1, against its diurnal motion. So in the comet of 1681. *Jan*. 4, O.S. the apparent diurnal motion in its orbit was about 3° 5', and the corresponding elongation 71⅔°; and the comet had acquired this elongation from the sun *Jan*. 4, about six in the evening. Again, in the year 1680, *Nov*. 11, the diurnal motion of the comet that then appeared was about 4⅔°; and the corresponding elongation 79⅔ happened *Nov*. 10, a little before midnight. Now at the times named these comets had arrived at an equal distance from the sun with the earth, and the earth was then almost in its perihelion. But the first table is fitted to the earth's mean distance from the sun assumed of 1000 parts; and this distance is greater by such an excess of space as the earth might describe by its annual motion in one day's time, or the comet by its motion in 16 hours. To reduce the comet to this mean distance of 1000 parts, we add those 16 hours to the former time, and subduct them from the latter; and thus the former becomes *Jan*. 4^{d}. 10^{h}. afternoon; the latter *Nov*. 10, about six in the morning. But from the tenor and progress of the diurnal motions it appears that both comets were in conjunction with the sun between *Dec*. 7 and *Dec*. 8; and from thence to Jan. $4^{d}.10^{h}$. afternoon on one side, and to *Nov*. $10^{d}.6^{h}$. of the morning on the other, there are about 28 days. And so many days (by Table 1) the motions in parabolic trajectories do require.

But though we have hitherto considered those comets as two, yet, from the coincidence of their perihelions and agreement of their velocities, it is probable that in effect they were but one and the same; and if so, the orbit of this comet must have either been a parabola, or at least a conic section very little differing from a parabola, and at its vertex almost in contact with the surface of the sun. For (by Tab. 2) the distance of the comet from the earth,

Nov. 10, was about 360 parts, and *Jan*. 4, about 630. From which distances, together with its longitudes and latitudes, we infer the distance of the places in which the comet was at those times to have been about 280: the half of which, viz., 140, is an ordinate to the comet's orbit, cutting off a portion of its axis nearly equal to the radius of the *orbis magnus*, that is, to 1000 parts. And, therefore, dividing the square of the ordinate 140 by 1000, the segment of the axis, we find the *latus rectum* 19, 16, or in a round number 20; the fourth part whereof, 5, is the distance of the vertex of the orbit from the sun's centre. But the time corresponding to the distance of 5 parts in Tab. 1 is $27^{d}.16^{h}.7'$. In which time, if the comet moved in a parabolic orbit, it would have been carried from its perihelion to the surface of the sphere of the *orbis magnus* described with the radius 1000, and would have spent the double of that time, viz., $55^{d}.8¼^{h}$. in the whole course of its motion within that sphere: and so in fact it did; for from *Nov*. 10^{d}. 6^{h}. of the morning, the time of the comet's ingress into the sphere of the *orbis magnus*, to *Jan*. 4^{d}. 10^{h}. afternoon, the time of its egress from the same, there are 55^{d}. 16^{h}. The small difference of $7¾^{h}$. in this rude way of computing is to be neglected, and perhaps may arise from the comet's motion being some small matter slower, as it must have been if the true orbit in which it was carried was an ellipsis. The middle time between its ingress and egress was *December* $8^{d}.2^{h}$. of the morning; and therefore at this time the comet ought to have been in its perihelion. And accordingly that very day, just before sunrising, Dr. *Halley* (as we said) saw the tail short and broad, but very bright, rising perpendicularly from the horizon. From the position of the tail it is certain that the comet had then crossed over the ecliptic, and got into north latitude, and therefore had passed by its perihelion, which lay on the other side of the ecliptic, though it had not yet come into conjunction with the sun; and the comet [see more of this famous comet, to 486] being at this time between its perihelion and its conjunction with the sun, must have been in its perihelion a few hours before; for in so near a distance from the sun it must have been carried with great velocity, and have apparently described almost half a degree every hour.

By like computations I find that the comet of 1618 entered the sphere of the *orbis magnus December* 7, towards sun-setting; but its conjunction with the sun was *Nov*. 9, or 10, about 28 days intervening, as in the preceding

comet; for from the size of the tail of this, in which it was equal to the preceding, it is probable that this comet likewise did come almost into a contact with the sun. Four comets were seen that year of which this was the last. The second, which made its first appearance *October* 31, in the neighbourhood of the rising sun, and was soon after hid under the sun's rays, I suspect to have been the same with the fourth, which emerged out of the sun's rays about *Nov*. 9. To these we may add the comet of 1607, which entered the sphere of the *orbis magnus Sept*. 14, O.S. and arrived at its perihelion distance from the sun about *October* 19, 35 days intervening. Its perihelion distance subtended an apparent angle at the earth of about 23 degrees, and was therefore of 390 parts. And to this number of parts about 34 days correspond in Tab. 1. Farther; the comet of 1665 entered the sphere of the *orbis magnus* about *March* 17, and came to its perihelion about April 16, 30 days intervening. Its perihelion distance subtended an angle at the earth of about seven degrees, and therefore was of 122 parts: and corresponding to this number of parts, in Tab. 1, we find 30 days. Again; the comet of 1682 entered the sphere of the *orbis magnus* about *Aug*. 11, and arrived at its perihelion about *Se*, being then distant from the sun by about 350 parts, to which, in Tab. I, belong 33½ days. Lastly; that memorable comet of *Regiomontanus*, which in 1472 was carried through the circumpolar parts of our northern hemisphere with such rapidity as to describe 40 degrees in one day, entered the sphere of the *orbis magnus Jan* 21, about the time that it was passing by the pole, and, hastening from thence towards the sun, was hid under the sun's rays about the end of *Feb*.; whence it is probable that 30 days, or a few more, were spent between its ingress into the sphere of the *orbis magnus* and its perihelion. Nor did this comet truly move with more velocity than other comets, but owed the greatness of its apparent velocity to its passing by the earth at a near distance.

It appears, then, that the velocity of comets (), so far as it can be determined by these rude ways of computing, is that very velocity with which parabolas, or ellipses near to parabolas, ought to be described; and therefore the distance between a comet and the sun being given, the velocity of the comet is nearly given. And hence arises this problem.

PROBLEM.

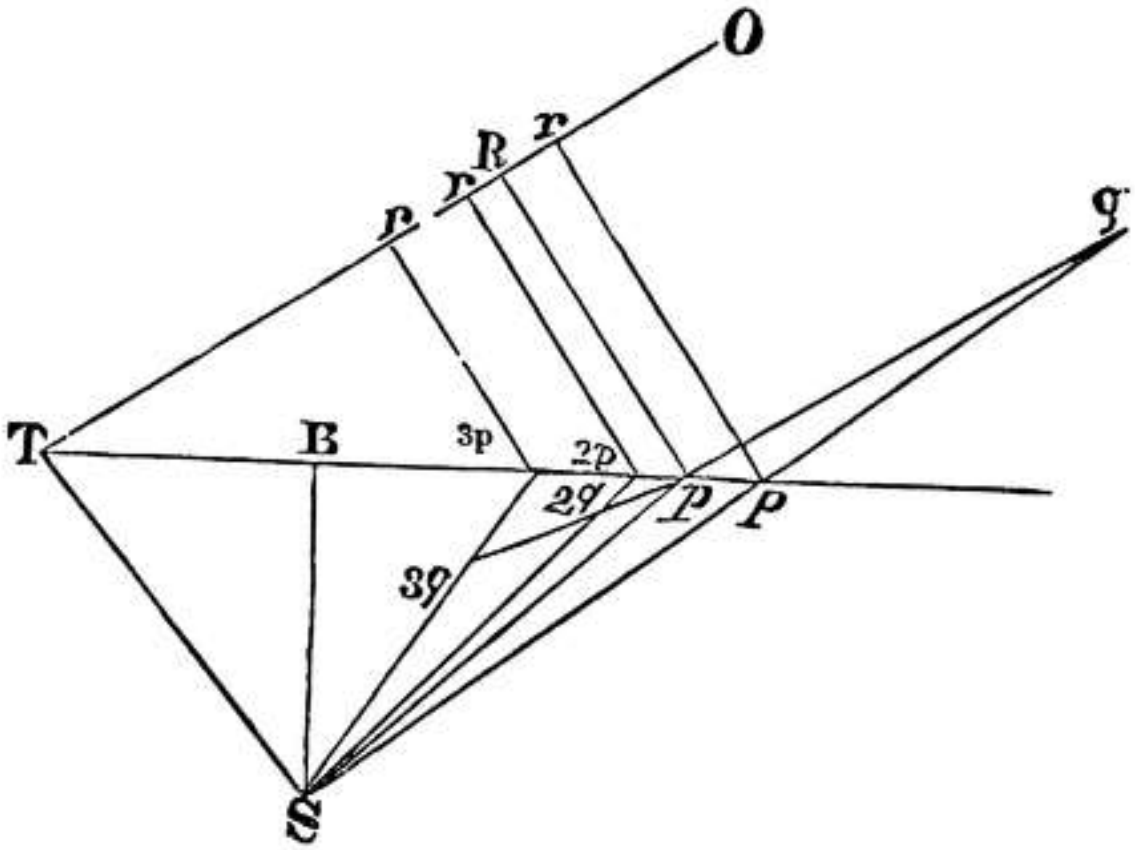
The relation betwixt the velocity of a comet and its distance from the sun's centre being given, the comet's trajectory is required.

If this problem was resolved, we should thence have a method of determining the trajectories of comets to the greatest accuracy; for if that relation be twice assumed, and from thence the trajectory be twice computed, and the error of each trajectory be found from observations, the assumption may be corrected by the Rule of False, and a third trajectory may thence be found that will exactly agree with the observations. And by determining the trajectories of comets after this method, we may come, at last, to a more exact knowledge of the parts through which those bodies travel, of the velocities with which they are carried, what sort of trajectories they describe, and what are the true magnitudes and forms of their tails according to the various distances of their heads from the sun; whether, after certain intervals of time, the same comets do return again, and in what periods they complete their several revolutions. But the problem may be resolved by determining, first, the hourly motion of a comet to a given time from three or more observations, and then deriving the trajectory from this motion. And thus the invention of the trajectory, depending on one observation, and its hourly motion at the time of this observation, will either confirm or disprove itself; for the conclusion that is drawn from the motion only of an hour or two and a false hypothesis, will never agree with the motions of the comets from beginning to end. The method of the whole computation is this.

LEMMA I.

To cut two right lines OR, TP*, given in position, by a third right lint* RP*, so as* TRP *may be a right angle; and, if another right line* SP *is drawn to any given point* S*, the solid contained under this line* SP*, and the square of the right line* OR *terminated at a given point* O*, may be of a given magnitude.*

It is done by linear description thus. Let the given magnitude of the solid be M^2 N: from any point *r* of the right line OR erect the perpendicular



rp meeting TP in *p*. Then through the point S*p* draw the line S*q* equal to. In like manner draw three or more right lines S2*q*, S3*q*, &c., and a regular line *q*2*q*3*q*, drawn through all the points *q*2*q*3*q*, &c., will cut the right line TP in the point P, from which the perpendicular PR is to be let fall. Q.E.F.

By trigonometry thus. Assuming the right line TP as found by the preceding method, the perpendiculars TR, SB, in the triangles TPR, TPS, will be thence given; and the side SP in the triangle SBP, as well as the error. Let this error, suppose D, be to a new error, suppose E, as the error 2*p*2*q* ± 3*p*3*q* to the error 2*p*3*p*; or as the error 2*p*2*q* ± D to the error 2*p*P; and this new error added to or subducted from the length TP, will give the correct length TP ± E. The inspection of the figure will shew whether we are to add to or subtract; and if at any time there should be use for a farther correction, the operation may be repeated.

By arithmetic thus. Let us suppose the thing done, and let TP + *e* be the correct length of the right line TP as found out by delineation: and thence the correct lengths of the lines OR, BP, and SP, will be OR - *e*, BP + *e*, and. Whence, by the method of converging series, we have, &c., , &c. For the

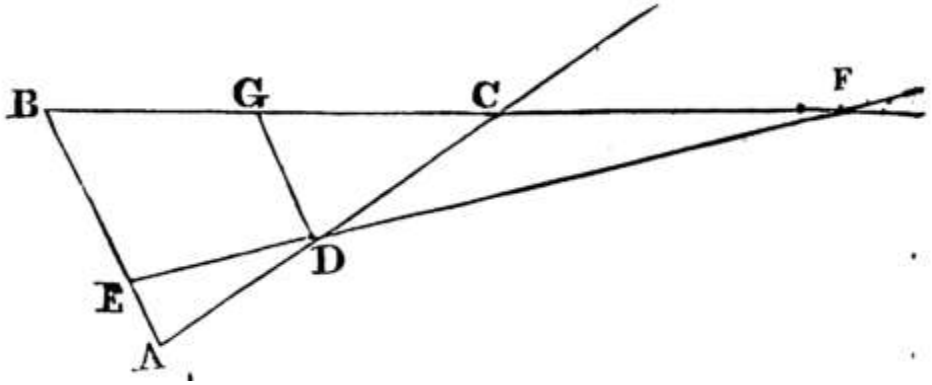
given co-efficients, , , putting F, , , and carefully observing the signs, we find, and. Whence, neglecting the very small term, *e* comes out equal to - G. If the error is not despicable, take

And it is to be observed that here a general method is hinted at for solving the more intricate sort of problems, as well by trigonometry as by arithmetic, without those perplexed computations and resolutions of affected equations which hitherto have been in use.

LEMMA II.

To cut three right lines given in position, by a fourth right line that shall pass through a point assigned in any of the three, and so as its intercepted parts shall be in a given ratio one to the other.

Let AB, AC, BC, be the right lines given in position, and suppose D to be the given point in the line AC. Parallel to AB draw DG meeting BC



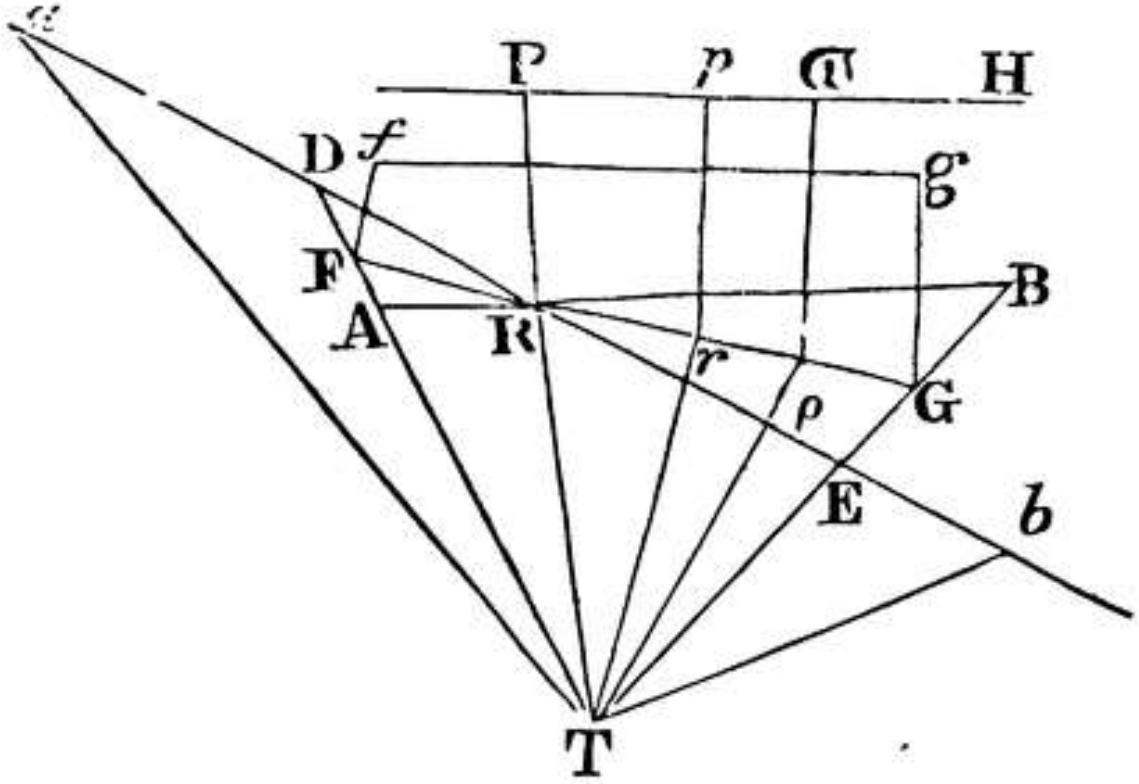
in G; and, taking GF to BG in the given ratio, draw FDE; and FD will be to DE as FG to BG. Q.E.F.

By trigonometry thus. In the triangle CGD all the angles and the side CD are given, and from thence its remaining sides are found; and from the given ratios the lines GF and BE are also given.

LEMMA III.

To find and represent by a linear description the hourly motion of a comet to any given time.

From observations of the best credit, let three longitudes of the comet be given, and, supposing ATR, RTB, to be their differences, let the hourly motion be required to the time of the middle observation TR. By *Lem* II, draw the right line ARB, so as its intercepted parts AR, RB, may be



as the times between the observations; and if we suppose a body in the whole time to describe the whole line AB with an equal motion, and to be in the mean time viewed from the place T, the apparent motion of that body about the point R will be nearly the same with that of the comet at the time of the observation TR.

The same more accurately.

Let T*a*, T*b*, be two longitudes given at a greater distance on one side and on the other; and by *Lem*. II draw the right line *a*R*b* so as its intercepted parts *a*R, R*b* may be as the times between the observations *a*TR, RT*b*. Suppose this to cut the lines TA, TB, in D and E; and because the error of the

inclination TR*a* increases nearly in the duplicate ratio of the time between the observations, draw FRG, so as either the angle DRF may be to the angle ARF, or the line DF to the line AF, in the duplicate ratio of the whole time between the observations *a*TB to the whole time between the observations ATB, and use the line thus found FG in place of the line AB found above.
It will be convenient that the angles ATR, RTB, *a*TA, BT*b*, be no less than of ten or fifteen degrees, the times corresponding no greater than of eight or twelve days, and the longitudes taken when the comet moves with the greatest velocity; for thus the errors of the observations will bear a less proportion to the differences of the longitudes.

LEMMA IV.

To find the longitudes of a comet to any given times.

It is done by taking in the line FG the distances R*r*, R*ρ*, proportional to the times, and drawing the lines T*r*, T*ρ*. The way of working by trigonometry is manifest.

LEMMA V.

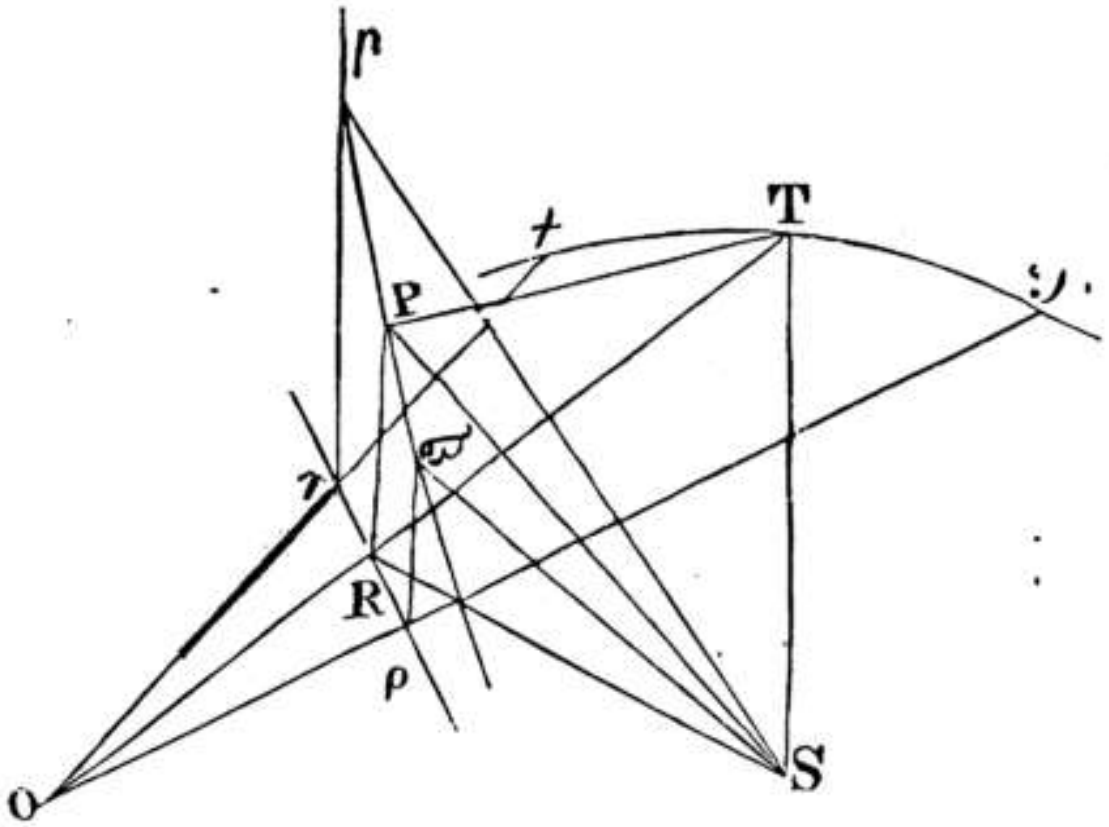
To find the latitudes.

On TF, TR, TG, as radiuses, at right angles erect F*f*, RP, G*g*, tangents of the observed latitudes; and parallel to *fg* draw PH. The perpendiculars *rp, ρϖ̃*, meeting PH, will be the tangents of the sought latitudes to T*r* and T*ρ* as radiuses.

PROBLEM I.

From the assumed ratio of the velocity to determine the trajectory of a comet.

Let S represent the sun; *t*, T, *τ*, three places of the earth in its orbit at equal distances; *p*, P, *ϖ̃*, as many corresponding places of the comet in



its trajectory, so as the distances interposed betwixt place and place may answer to the motion of one hour; *pr*, PR, $\tilde{\omega}\rho$, perpendiculars let fall on the plane of the ecliptic, and *r*R*p* the vestige of the trajectory in this plane. Join S*p*, SP, S$\tilde{\omega}$, SR, ST, *tr*, TR, $\tau\rho$, TP, and let *tr,* $\tau\rho$, meet in O, TR will nearly converge to the same point O, or the error will be in considerable. By the premised lemmas the angles *r*OR, ROρ, are given, as well as the ratios *pr* to *tr*, PR to TR, and $\tilde{\omega}\rho$ to $\tau\rho$. The figure *t*TτO is likewise given both in magnitude and position, together with the distance ST, and the angles STR, PTR, STP. Let us assume the velocity of the comet in the place P to be to the velocity of a planet revolved about the sun in a circle, at the same distance SP, as V to 1; and we shall have a line *p*P$\tilde{\omega}$ to be determined, of this condition, that the space *p*$\tilde{\omega}$, described by the comet in two hours, may be to the space V $t\tau$ (that is, to the space which the earth describes in the same time multiplied by the number V) in the subduplicate ratio of ST, the distance of the earth from the sun, to SP, the distance of the comet from the sun; and that the space *p*P, described by the comet in the first hour, may be to the space P$\tilde{\omega}$, described by the comet in the second hour, as the velocity in *p* to the velocity in P; that is, in the subduplicate ratio of the distance SP

to the distance S*p*, or in the ratio of 2S*p* to SP + S*p*; for in this whole work I neglect small fractions that can produce no sensible error.

In the first place, then, as mathematicians, in the resolution of affected equations, are wont, for the first essay, to assume the root by conjecture, so, in this analytical operation, I judge of the sought distance TR as I best can by conjecture. Then, by *Lem*. II. I draw *rρ*, first supposing *r*R equal to R*ρ*, and again (after the ratio of SP to S*p* is discovered) so as *r*R may be to R*ρ* as 2SP to SP + S*p*, and I find the ratios of the lines *pω̃, rρ*, and OR, one to the other. Let M be to V *tτ* as OR to *pω̃*; and because the square of *pω̃* is to the square of V *tτ* as ST to SP, we shall have, *ex aequo*, OR^2 to M^2 as ST to SP, and therefore the solid OR^2 SP equal to the given solid M^2 ST; whence (supposing the triangles STP, PTR, to be now placed in the same plane) TR, TP, SP, PR, will be given, by Lem. I. All this I do, first by delineation in a rude and hasty way; then by a new delineation with greater care; and, lastly, by an arithmetical computation. Then I proceed to determine the position of the lines *rρ, pω̃*, with the greatest accuracy, together with the nodes and inclination of the plane S*pω̃* to the plane of the ecliptic; and in that plane S*pω̃* I describe the trajectory in which a body let go from the place P in the direction of the given right line *pω̃* would be carried with a velocity that is to the velocity of the earth as *pω̃* to V *tτ*. Q.E.F.

PROBLEM II.

To correct the assumed ratio of the velocity and the trajectory thence found.

Take an observation of the comet about the end of its appearance, or any other observation at a very great distance from the observations used before, and find the intersection of a right line drawn to the comet, in that observation with the plane S*pω̃*, as well as the comet's place in its trajectory to the time of the observation. If that intersection happens in this place, it is a proof that the trajectory was rightly determined; if otherwise, a new number V is to be assumed, and a new trajectory to be found; and then the place of the comet in this trajectory to the time of that probatory observation, and the intersection of a right line drawn to the comet with the plane of the trajectory, are to be determined as before; and by comparing the

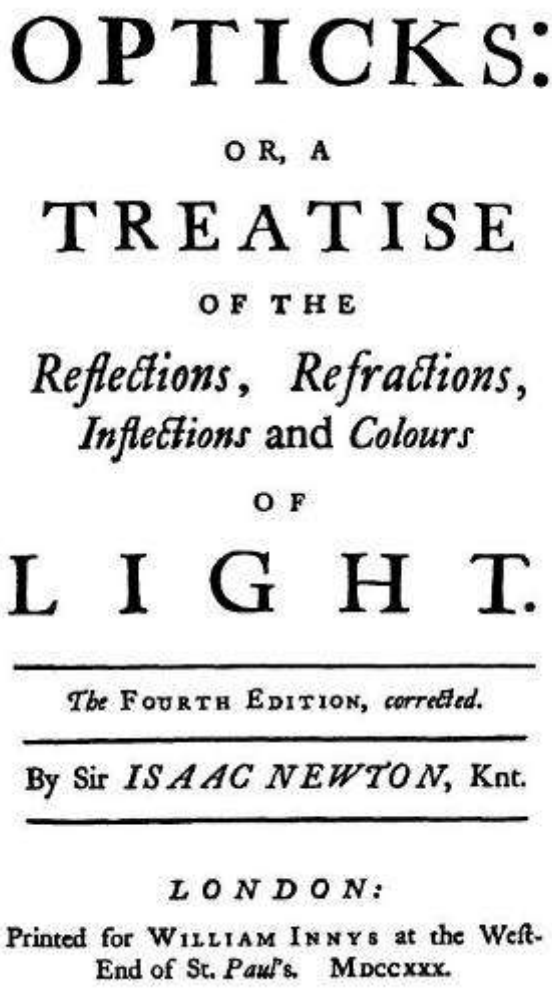
variation of the error with the variation of the other quantities, we may conclude, by the Rule of Three, how far those other quantities ought to be varied or corrected, so as the error may become as small as possible. And by means of these corrections we may have the trajectory exactly, providing the observations upon which the computation was founded were exact, and that we did not err much in the assumption of the quantity V; for if we did, the operation is to be repeated till the trajectory is exactly enough determined. Q.E.F.

END OF THE SYSTEM OF THE WORLD.

OPTICKS

The book entitled *Opticks* was originally published in 1704 and the definitive volume (4th Edition; see Figure 1) was published (with corrections) in 1730, shortly after Newton's death. Unlike the *Principia*, this original volume was published first in English, the Latin translation following two years later. It represents another landmark in physics – defining the basic experimental procedures for studying visible light. Here are the definitive experiments on colour, prisms and rainbows (see Figures 2 and 3) – here lies the origin of the cover of Pink Floyd's "*The Dark Side of the Moon*". I could give my own comments here, but the words of Albert Einstein (1952) about Newton and this book carry more weight: "He stands before us strong, certain, and alone: his joy in creation and his minute precision are evident in every word and in every figure. Reflexion, refraction, the formation of images by lenses, the mode of operation of the eye, the spectral decomposition and the recomposition of the different kinds of light, the invention of the reflecting telescope, the first foundations of colour theory, the elementary theory of the rainbow pass by us in procession, and finally come his observations of the colours of thin films as the origin of the next great theoretical advance, which had to await, over a hundred years, the coming of Thomas Young [Young's slits]."

Einstein recognised the seminal importance of Newton's study, and its historical significance. Not only was this one of the first important works of science to be published in English, but it overturned Aristotle's theory (in Book 1 of *De anima*), still accepted in Newton's time, that "pure" light was white (or colourless). Newton demonstrated that it could be split into all the colours of the rainbow. Today, we take this for granted; in the eighteenth century, this turned the scientific world on its head.



OPTICKS:

OR, A

TREATISE

OF THE

Reflections, Refractions, Inflections and *Colours*

OF

LIGHT.

The FOURTH EDITION, *corrected.*

By Sir *ISAAC NEWTON*, Knt.

LONDON:

Printed for WILLIAM INNYS at the West-End of St. *Paul's*. MDCCXXX.

Figure 1: The title page of the fourth (corrected) edition (1730) of Newton's landmark book

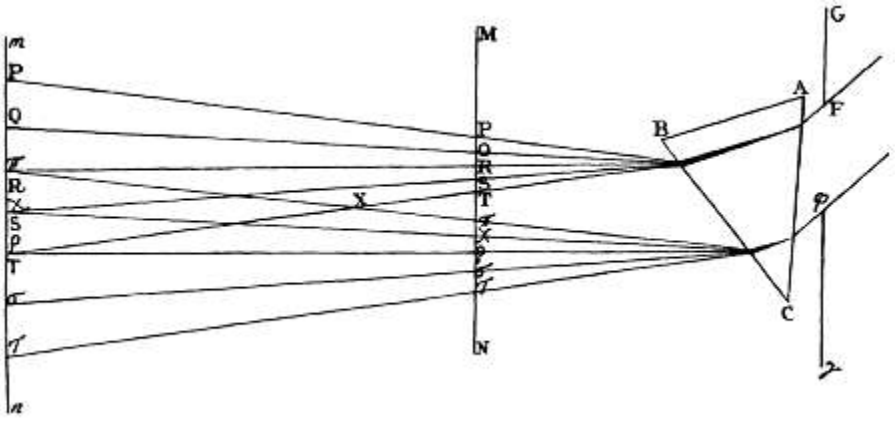


Figure 2: Newton's representation of sunlight passing through a prism (ABC), in a section called "By the discovered Properties of Light to explain the Colours made by Prisms"

Figure 3: A rainbow (Donaghadee Harbour), a natural phenomenon explained by Newton, in a series of elegant experiments (© K.R. Seddon, 2016)

CONTENTS

SIR ISAAC NEWTON'S ADVERTISEMENTS

THE FIRST BOOK OF OPTICKS

PART I.
PROPOSITIONS.
PART II.

THE SECOND BOOK OF OPTICKS

PART I.
PART II.
PART III.
PART IV.

THE THIRD BOOK OF OPTICKS

PART I.

OPTICKS:

OR, A

TREATISE

OF THE

Reflections, *Refractions*,
Inflections and *Colours*

OF

LIGHT.

The Fourth Edition, *corrected*.

By Sir *ISAAC NEWTON*, Knt.

SIR ISAAC NEWTON'S ADVERTISEMENTS

Advertisement I *Part of the ensuing Discourse about Light was written at the Desire of some Gentlemen of the* Royal-Society, *in the Year 1675, and then sent to their Secretary, and read at their Meetings, and the rest was added about twelve Years after to complete the Theory; except the third Book, and the last Proposition of the Second, which were since put together out of scatter'd Papers. To avoid being engaged in Disputes about these Matters, I have hitherto delayed the printing, and should still have delayed it, had not the Importunity of Friends prevailed upon me. If any other Papers writ on this Subject are got out of my Hands they are imperfect, and were perhaps written before I had tried all the Experiments here set down, and fully satisfied my self about the Laws of Refractions and Composition of Colours. I have here publish'd what I think proper to come abroad, wishing that it may not be translated into another Language without my Consent.*

The Crowns of Colours, which sometimes appear about the Sun and Moon, I have endeavoured to give an Account of; but for want of sufficient Observations leave that Matter to be farther examined. The Subject of the Third Book I have also left imperfect, not having tried all the Experiments which I intended when I was about these Matters, nor repeated some of those which I did try, until I had satisfied my self about all their Circumstances. To communicate what I have tried, and leave the rest to others for farther Enquiry, is all my Design in publishing these Papers.

In a Letter written to Mr. Leibnitz *in the year 1679, and published by Dr.* Wallis, *I mention'd a Method by which I had found some general Theorems about squaring Curvilinear Figures, or comparing them with the Conic Sections, or other the simplest Figures with which they may be compared. And some Years ago I lent out a Manuscript containing such Theorems, and having since met with some Things copied out of it, I have on this Occasion made it publick, prefixing to it an* Introduction, *and subjoining a* Scholium *concerning that Method. And I have joined with it another small Tract concerning the Curvilinear Figures of the Second Kind, which was also*

written many Years ago, and made known to some Friends, who have solicited the making it publick.

I. N.

April 1, 1704.

Advertisement II *In this Second Edition of these Opticks I have omitted the Mathematical Tracts publish'd at the End of the former Edition, as not belonging to the Subject. And at the End of the Third Book I have added some Questions. And to shew that I do not take Gravity for an essential Property of Bodies, I have added one Question concerning its Cause, chusing to propose it by way of a Question, because I am not yet satisfied about it for want of Experiments.*

I. N.

July 16, 1717.

Advertisement to this Fourth Edition *This new Edition of Sir* Isaac Newton's Opticks *is carefully printed from the Third Edition, as it was corrected by the Author's own Hand, and left before his Death with the Bookseller. Since Sir* Isaac's Lectiones Opticæ, *which he publickly read in the University of* Cambridge *in the Years 1669, 1670, and 1671, are lately printed, it has been thought proper to make at the bottom of the Pages several Citations from thence, where may be found the Demonstrations, which the Author omitted in these* Opticks.

THE FIRST BOOK OF OPTICKS

PART I.

My Design in this Book is not to explain the Properties of Light by Hypotheses, but to propose and prove them by Reason and Experiments: In order to which I shall premise the following Definitions and Axioms.

DEFINITIONS

DEFIN. I.

By the Rays of Light I understand its least Parts, and those as well Successive in the same Lines, as Contemporary in several Lines. For it is manifest that Light consists of Parts, both Successive and Contemporary; because in the same place you may stop that which comes one moment, and let pass that which comes presently after; and in the same time you may stop it in any one place, and let it pass in any other. For that part of Light which is stopp'd cannot be the same with that which is let pass. The least Light or part of Light, which may be stopp'd alone without the rest of the Light, or propagated alone, or do or suffer any thing alone, which the rest of the Light doth not or suffers not, I call a Ray of Light.

DEFIN. II.

Refrangibility of the Rays of Light, is their Disposition to be refracted or turned out of their Way in passing out of one transparent Body or Medium into another. And a greater or less Refrangibility of Rays, is their Disposition to be turned more or less out of their Way in like Incidences on the same Medium. Mathematicians usually consider the Rays of Light to be Lines reaching from the luminous Body to the Body illuminated, and the refraction of those Rays to be the bending or breaking of those lines in their passing out of one Medium into another. And thus may Rays and Refractions be considered, if Light be propagated in an instant. But by an Argument taken from the Æquations of the times of the Eclipses of *Jupiter's Satellites*, it seems that Light is propagated in time, spending in its passage from the Sun

to us about seven Minutes of time: And therefore I have chosen to define Rays and Refractions in such general terms as may agree to Light in both cases.

DEFIN. III.

Reflexibility of Rays, is their Disposition to be reflected or turned back into the same Medium from any other Medium upon whose Surface they fall. And Rays are more or less reflexible, which are turned back more or less easily. As if Light pass out of a Glass into Air, and by being inclined more and more to the common Surface of the Glass and Air, begins at length to be totally reflected by that Surface; those sorts of Rays which at like Incidences are reflected most copiously, or by inclining the Rays begin soonest to be totally reflected, are most reflexible.

DEFIN. IV.

The Angle of Incidence is that Angle, which the Line described by the incident Ray contains with the Perpendicular to the reflecting or refracting Surface at the Point of Incidence.

DEFIN. V.

The Angle of Reflexion or Refraction, is the Angle which the line described by the reflected or refracted Ray containeth with the Perpendicular to the reflecting or refracting Surface at the Point of Incidence.

DEFIN. VI.

The Sines of Incidence, Reflexion, and Refraction, are the Sines of the Angles of Incidence, Reflexion, and Refraction.

DEFIN. VII

The Light whose Rays are all alike Refrangible, I call Simple, Homogeneal and Similar; and that whose Rays are some more Refrangible than others, I call Compound, Heterogeneal and Dissimilar. The former Light I call Homogeneal, not because I would affirm it so in all respects, but because the

Rays which agree in Refrangibility, agree at least in all those their other Properties which I consider in the following Discourse.

DEFIN. VIII.

The Colours of Homogeneal Lights, I call Primary, Homogeneal and Simple; and those of Heterogeneal Lights, Heterogeneal and Compound. For these are always compounded of the colours of Homogeneal Lights; as will appear in the following Discourse.

AXIOMS.

AX. I.

The Angles of Reflexion and Refraction, lie in one and the same Plane with the Angle of Incidence.

AX. II.

The Angle of Reflexion is equal to the Angle of Incidence.

AX. III.

If the refracted Ray be returned directly back to the Point of Incidence, it shall be refracted into the Line before described by the incident Ray.

AX. IV.

Refraction out of the rarer Medium into the denser, is made towards the Perpendicular; that is, so that the Angle of Refraction be less than the Angle of Incidence.

AX. V.

The Sine of Incidence is either accurately or very nearly in a given Ratio to the Sine of Refraction.

Whence if that Proportion be known in any one Inclination of the incident Ray, 'tis known in all the Inclinations, and thereby the Refraction in all cases of Incidence on the same refracting Body may be determined. Thus if the Refraction be made out of Air into Water, the Sine of Incidence of the red Light is to the Sine of its Refraction as 4 to 3. If out of Air into Glass, the Sines are as 17 to 11. In Light of other Colours the Sines have other Proportions: but the difference is so little that it need seldom be considered.

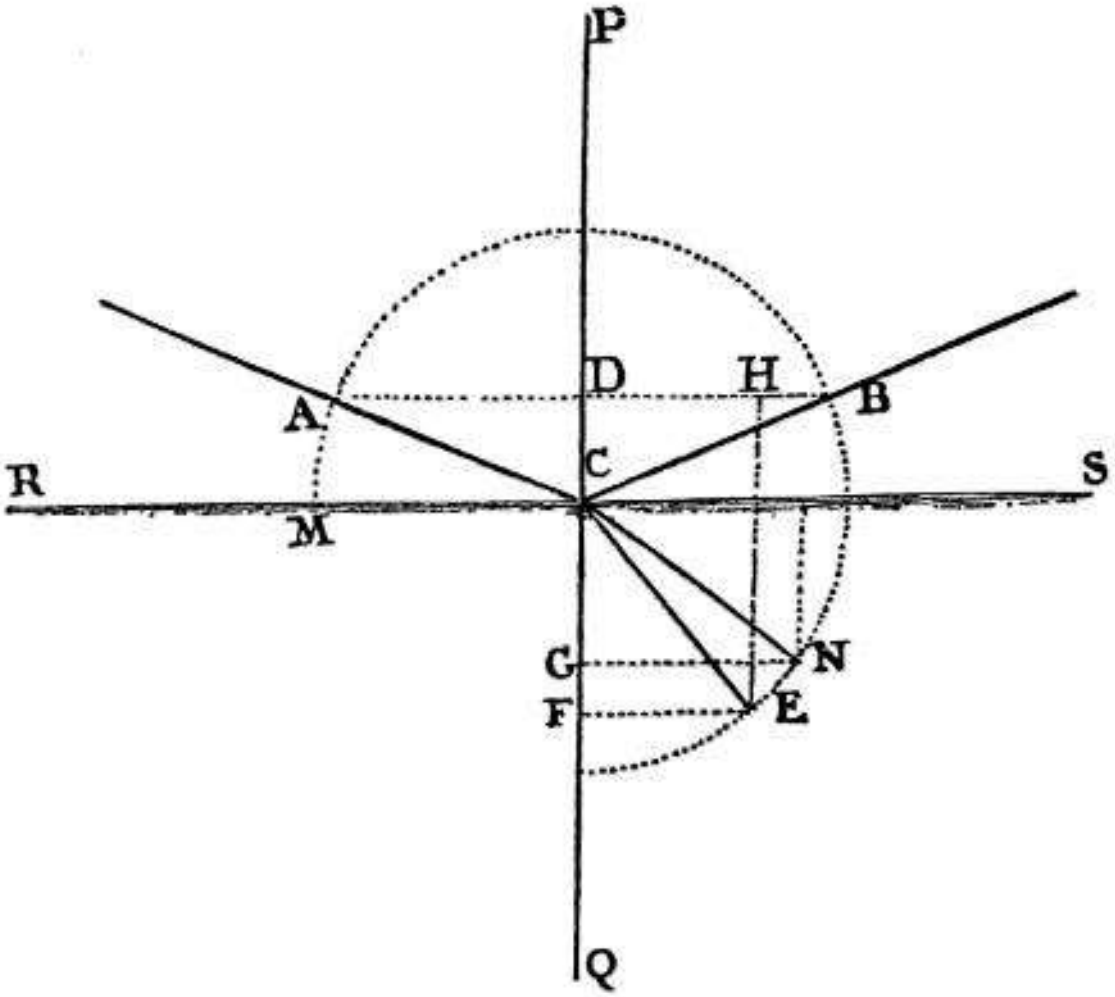


Fig. 1

Suppose therefore, that RS [in *Fig.* 1.] represents the Surface of stagnating Water, and that C is the point of Incidence in which any Ray coming in the Air from A in the Line AC is reflected or refracted, and I would know whither this Ray shall go after Reflexion or Refraction: I erect

upon the Surface of the Water from the point of Incidence the Perpendicular CP and produce it downwards to Q, and conclude by the first Axiom, that the Ray after Reflexion and Refraction, shall be found somewhere in the Plane of the Angle of Incidence ACP produced. I let fall therefore upon the Perpendicular CP the Sine of Incidence AD; and if the reflected Ray be desired, I produce AD to B so that DB be equal to AD, and draw CB. For this Line CB shall be the reflected Ray; the Angle of Reflexion BCP and its Sine BD being equal to the Angle and Sine of Incidence, as they ought to be by the second Axiom, But if the refracted Ray be desired, I produce AD to H, so that DH may be to AD as the Sine of Refraction to the Sine of Incidence, that is, (if the Light be red) as 3 to 4; and about the Center C and in the Plane ACP with the Radius CA describing a Circle ABE, I draw a parallel to the Perpendicular CPQ, the Line HE cutting the Circumference in E, and joining CE, this Line CE shall be the Line of the refracted Ray. For if EF be let fall perpendicularly on the Line PQ, this Line EF shall be the Sine of Refraction of the Ray CE, the Angle of Refraction being ECQ; and this Sine EF is equal to DH, and consequently in Proportion to the Sine of Incidence AD as 3 to 4.

In like manner, if there be a Prism of Glass (that is, a Glass bounded with two Equal and Parallel Triangular ends, and three plain and well polished Sides, which meet in three Parallel Lines running from the three Angles of one end to the three Angles of the other end) and if the Refraction of the Light in passing cross this Prism be desired: Let ACB [in *Fig.* 2.] represent a Plane cutting this Prism transversly to its three Parallel lines or edges there where the Light passeth through it, and let DE be the Ray incident upon the first side of the Prism AC where the Light goes into the Glass; and by putting the Proportion of the Sine of Incidence to the Sine of Refraction as 17 to 11 find EF the first refracted Ray. Then taking this Ray for the Incident Ray upon the second side of the Glass BC where the Light goes out, find the next refracted Ray FG by putting the Proportion of the Sine of Incidence to the Sine of Refraction as 11 to 17. For if the Sine of Incidence out of Air into Glass be to the Sine of Refraction as 17 to 11, the Sine of Incidence out of Glass into Air must on the contrary be to the Sine of Refraction as 11 to 17, by the third Axiom.

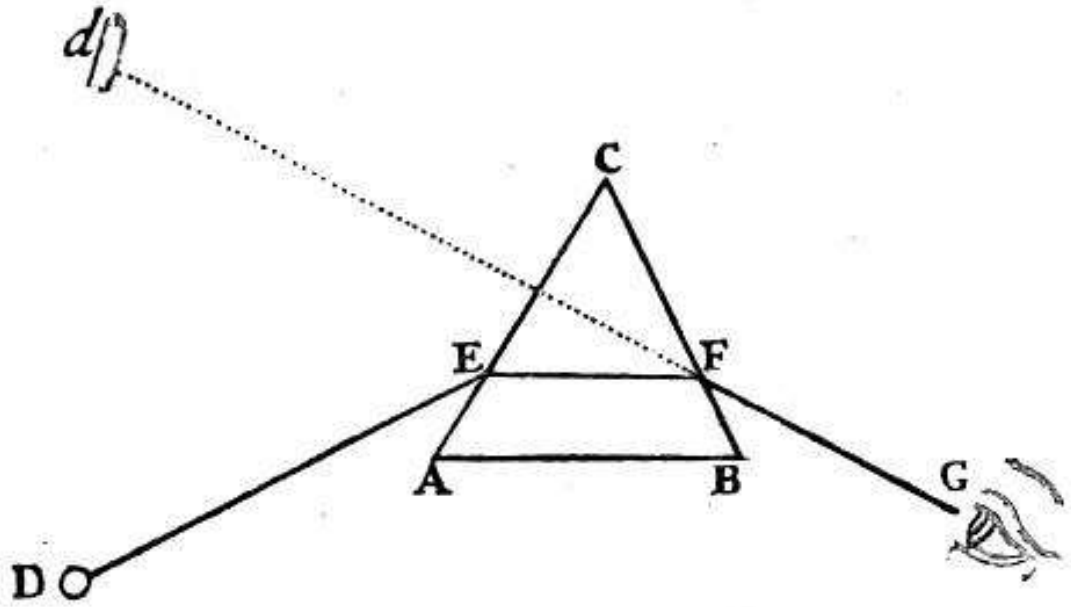


Fig. 2.

Much after the same manner, if ACBD [in *Fig.* 3.] represent a Glass spherically convex on both sides (usually called a *Lens*, such as is a Burning-glass, or Spectacle-glass, or an Object-glass of a Telescope) and it be required to know how Light falling upon it from any lucid point Q shall be refracted, let QM represent a Ray falling upon any point M of its first spherical Surface ACB, and by erecting a Perpendicular to the Glass at the point M, find the first refracted Ray MN by the Proportion of the Sines 17 to 11. Let that Ray in going out of the Glass be incident upon N, and then find the second refracted Ray N*q* by the Proportion of the Sines 11 to 17. And after the same manner may the Refraction be found when the Lens is convex on one side and plane or concave on the other, or concave on both sides.

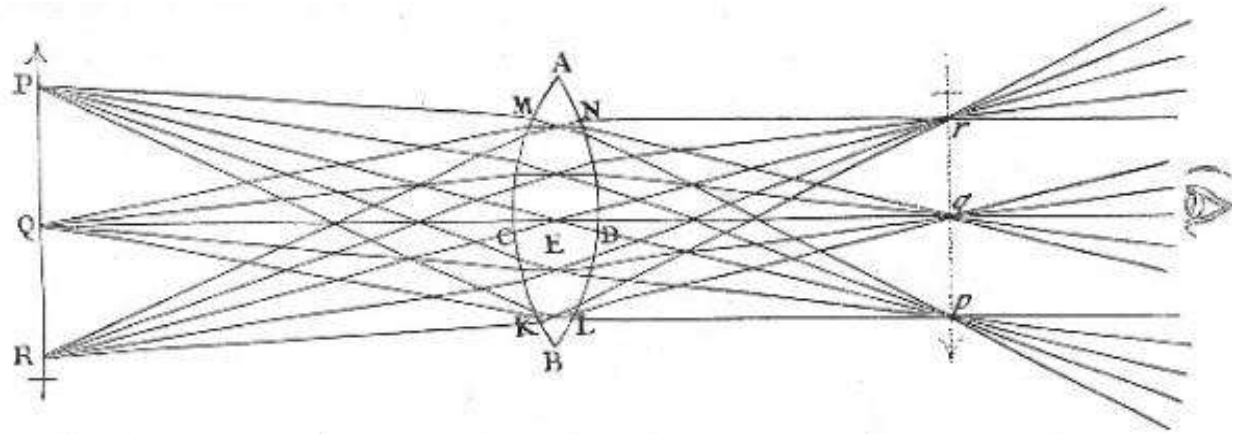


Fig. 3.

AX. VI.

Homogeneal Rays which flow from several Points of any Object, and fall perpendicularly or almost perpendicularly on any reflecting or refracting Plane or spherical Surface, shall afterwards diverge from so many other Points, or be parallel to so many other Lines, or converge to so many other Points, either accurately or without any sensible Error. And the same thing will happen, if the Rays be reflected or refracted successively by two or three or more Plane or Spherical Surfaces.

The Point from which Rays diverge or to which they converge may be called their *Focus*. And the Focus of the incident Rays being given, that of the reflected or refracted ones may be found by finding the Refraction of any two Rays, as above; or more readily thus.

Cas. 1. Let ACB [in *Fig.* 4.] be a reflecting or refracting Plane, and Q the Focus of the incident Rays, and Q*q*C a Perpendicular to that Plane. And if this Perpendicular be produced to *q*, so that *q*C be equal to QC, the Point *q* shall be the Focus of the reflected Rays: Or if *q*C be taken on the same side of the Plane with QC, and in proportion to QC as the Sine of Incidence to the Sine of Refraction, the Point *q* shall be the Focus of the refracted Rays.

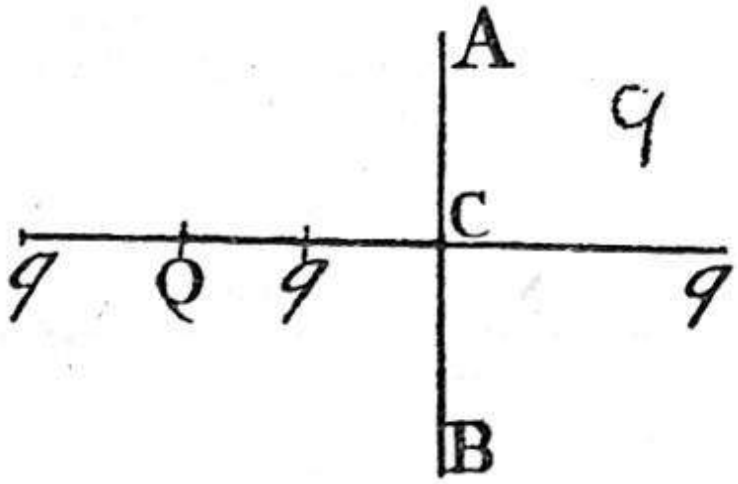


Fig. 4.

Cas. 2. Let ACB [in *Fig.* 5.] be the reflecting Surface of any Sphere whose Centre is E. Bisect any Radius thereof, (suppose EC) in T, and if in that Radius on the same side the Point T you take the Points Q and *q*, so that TQ, TE, and T*q*, be continual Proportionals, and the Point Q be the Focus of the incident Rays, the Point *q* shall be the Focus of the reflected ones.

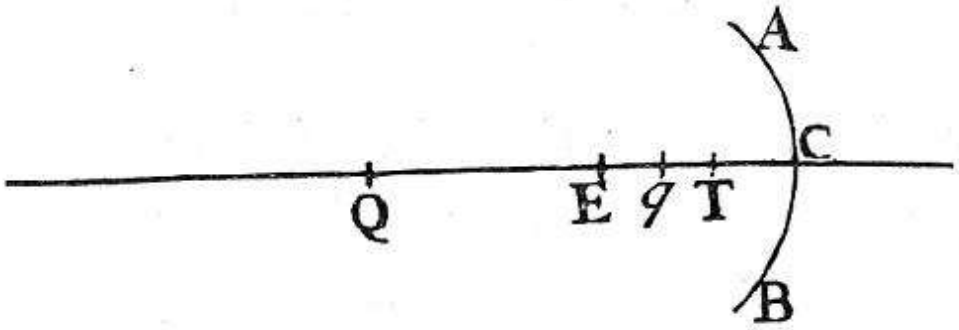


Fig. 5.

Cas. 3. Let ACB [in *Fig.* 6.] be the refracting Surface of any Sphere whose Centre is E. In any Radius thereof EC produced both ways take ET and C*t* equal to one another and severally in such Proportion to that Radius as the lesser of the Sines of Incidence and Refraction hath to the difference of those Sines. And then if in the same Line you find any two Points Q and *q*, so that TQ be to ET as E*t* to *tq*, taking *tq* the contrary way from *t* which TQ lieth from T, and if the Point Q be the Focus of any incident Rays, the Point *q* shall be the Focus of the refracted ones.

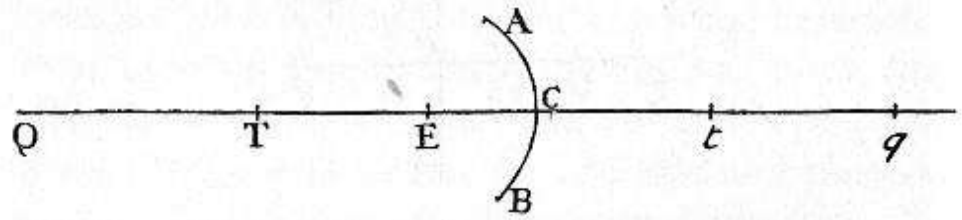


Fig. 6.

And by the same means the Focus of the Rays after two or more Reflexions or Refractions may be found.

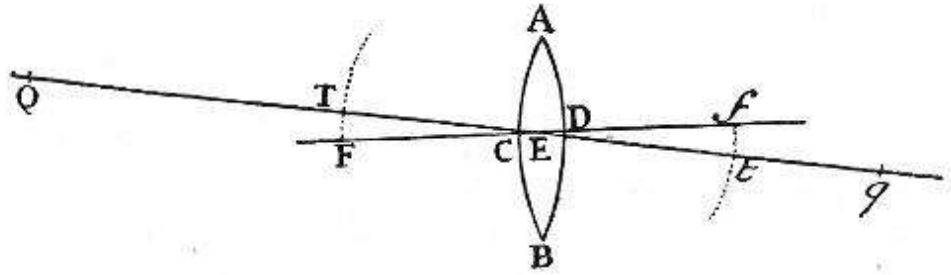


Fig. 7.

Cas. 4. Let ACBD [in *Fig.* 7.] be any refracting Lens, spherically Convex or Concave or Plane on either side, and let CD be its Axis (that is, the Line which cuts both its Surfaces perpendicularly, and passes through the Centres of the Spheres,) and in this Axis produced let F and *f* be the Foci of the refracted Rays found as above, when the incident Rays on both sides the Lens are parallel to the same Axis; and upon the Diameter F*f* bisected in E, describe a Circle. Suppose now that any Point Q be the Focus of any incident Rays. Draw QE cutting the said Circle in T and *t*, and therein take *tq* in such proportion to *t*E as *t*E or TE hath to TQ. Let *tq* lie the contrary way from *t* which TQ doth from T, and *q* shall be the Focus of the refracted Rays without any sensible Error, provided the Point Q be not so remote from the Axis, nor the Lens so broad as to make any of the Rays fall too obliquely on the refracting Surfaces.[A]

And by the like Operations may the reflecting or refracting Surfaces be found when the two Foci are given, and thereby a Lens be formed, which shall make the Rays flow towards or from what Place you please.[B]

So then the Meaning of this Axiom is, that if Rays fall upon any Plane or Spherical Surface or Lens, and before their Incidence flow from or towards any Point Q, they shall after Reflexion or Refraction flow from or towards the Point *q* found by the foregoing Rules. And if the incident Rays flow from or towards several points Q, the reflected or refracted Rays shall flow from or towards so many other Points *q* found by the same Rules. Whether the reflected and refracted Rays flow from or towards the Point *q* is easily

known by the situation of that Point. For if that Point be on the same side of the reflecting or refracting Surface or Lens with the Point Q, and the incident Rays flow from the Point Q, the reflected flow towards the Point *q* and the refracted from it; and if the incident Rays flow towards Q, the reflected flow from *q*, and the refracted towards it. And the contrary happens when *q* is on the other side of the Surface.

AX. VII.

Wherever the Rays which come from all the Points of any Object meet again in so many Points after they have been made to converge by Reflection or Refraction, there they will make a Picture of the Object upon any white Body on which they fall.

So if PR [in *Fig.* 3.] represent any Object without Doors, and AB be a Lens placed at a hole in the Window-shut of a dark Chamber, whereby the Rays that come from any Point Q of that Object are made to converge and meet again in the Point *q*; and if a Sheet of white Paper be held at *q* for the Light there to fall upon it, the Picture of that Object PR will appear upon the Paper in its proper shape and Colours. For as the Light which comes from the Point Q goes to the Point *q*, so the Light which comes from other Points P and R of the Object, will go to so many other correspondent Points *p* and *r* (as is manifest by the sixth Axiom;) so that every Point of the Object shall illuminate a correspondent Point of the Picture, and thereby make a Picture like the Object in Shape and Colour, this only excepted, that the Picture shall be inverted. And this is the Reason of that vulgar Experiment of casting the Species of Objects from abroad upon a Wall or Sheet of white Paper in a dark Room.

In like manner, when a Man views any Object PQR, [in *Fig.* 8.] the Light which comes from the several Points of the Object is so refracted by the transparent skins and humours of the Eye, (that is, by the outward coat EFG, called the *Tunica Cornea*, and by the crystalline humour AB which is beyond the Pupil *mk*) as to converge and meet again in so many Points in the bottom of the Eye, and there to paint the Picture of the Object upon that skin (called the *Tunica Retina*) with which the bottom of the Eye is covered. For Anatomists, when they have taken off from the bottom of the Eye that outward and most thick Coat called the *Dura Mater*, can then see through the

thinner Coats, the Pictures of Objects lively painted thereon. And these Pictures, propagated by Motion along the Fibres of the Optick Nerves into the Brain, are the cause of Vision. For accordingly as these Pictures are perfect or imperfect, the Object is seen perfectly or imperfectly. If the Eye be tinged with any colour (as in the Disease of the *Jaundice*) so as to tinge the Pictures in the bottom of the Eye with that Colour, then all Objects appear tinged with the same Colour. If the Humours of the Eye by old Age decay, so as by shrinking to make the *Cornea* and Coat of the *Crystalline Humour* grow flatter than before, the Light will not be refracted enough, and for want of a sufficient Refraction will not converge to the bottom of the Eye but to some place beyond it, and by consequence paint in the bottom of the Eye a confused Picture, and according to the Indistinctness of this Picture the Object will appear confused. This is the reason of the decay of sight in old Men, and shews why their Sight is mended by Spectacles. For those Convex glasses supply the defect of plumpness in the Eye, and by increasing the Refraction make the Rays converge sooner, so as to convene distinctly at the bottom of the Eye if the Glass have a due degree of convexity. And the contrary happens in short-sighted Men whose Eyes are too plump. For the Refraction being now too great, the Rays converge and convene in the Eyes before they come at the bottom; and therefore the Picture made in the bottom and the Vision caused thereby will not be distinct, unless the Object be brought so near the Eye as that the place where the converging Rays convene may be removed to the bottom, or that the plumpness of the Eye be taken off and the Refractions diminished by a Concave-glass of a due degree of Concavity, or lastly that by Age the Eye grow flatter till it come to a due Figure: For short-sighted Men see remote Objects best in Old Age, and therefore they are accounted to have the most lasting Eyes.

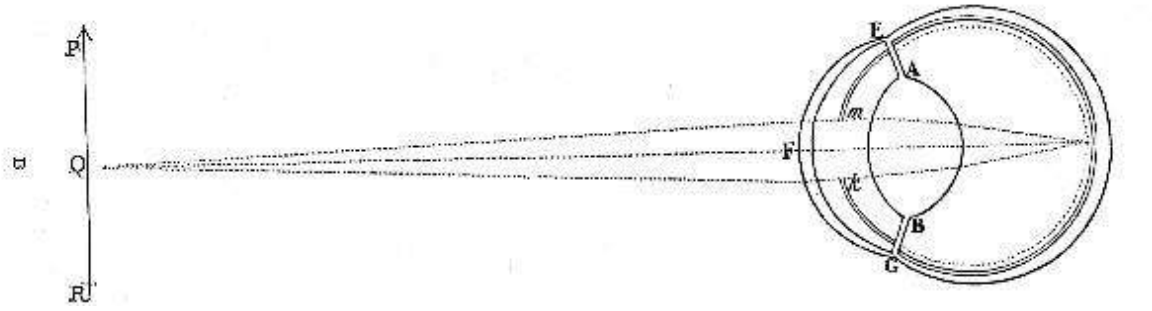


Fig. 8.

AX. VIII.

An Object seen by Reflexion or Refraction, appears in that place from whence the Rays after their last Reflexion or Refraction diverge in falling on the Spectator's Eye.

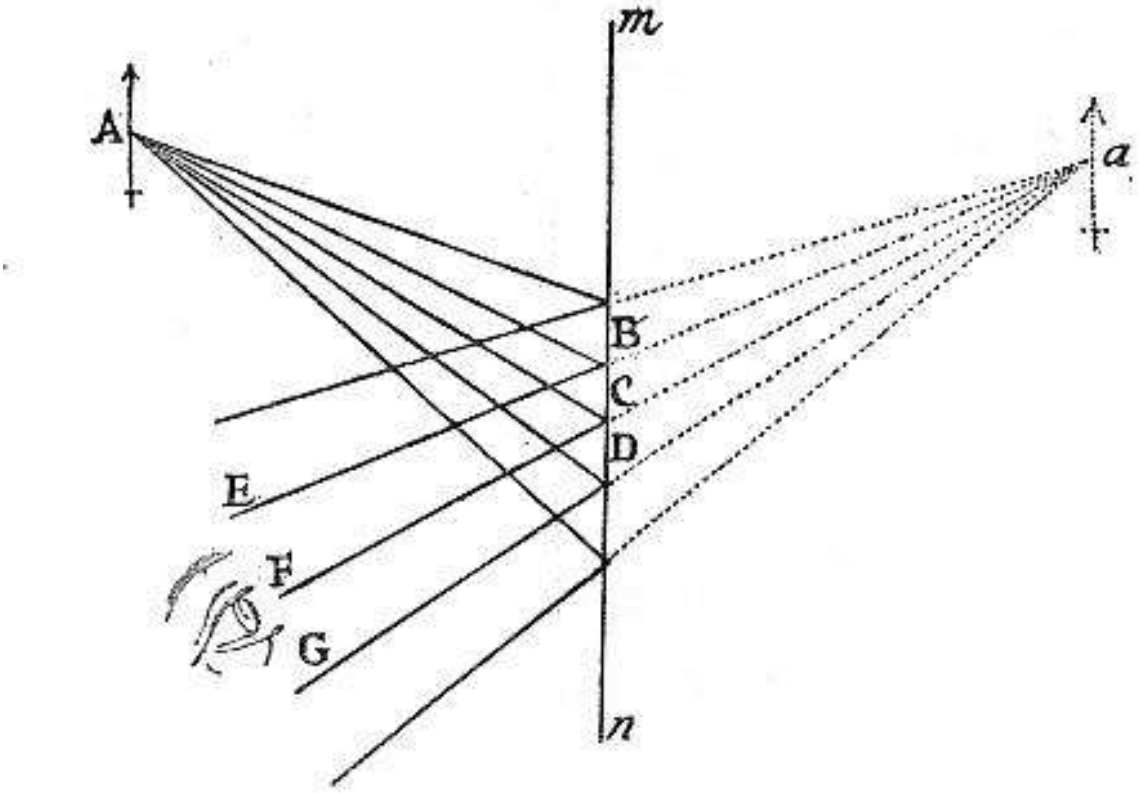


Fig. 9.

If the Object A [in Fig. 9.] be seen by Reflexion of a Looking-glass *mn*, it shall appear, not in its proper place A, but behind the Glass at *a*, from whence any Rays AB, AC, AD, which flow from one and the same Point of the Object, do after their Reflexion made in the Points B, C, D, diverge in going from the Glass to E, F, G, where they are incident on the Spectator's Eyes. For these Rays do make the same Picture in the bottom of the Eyes as if they had come from the Object really placed at *a* without the Interposition of the Looking-glass; and all Vision is made according to the place and shape of that Picture.

In like manner the Object D [in Fig. 2.] seen through a Prism, appears not in its proper place D, but is thence translated to some other place *d* situated in the last refracted Ray FG drawn backward from F to *d*.

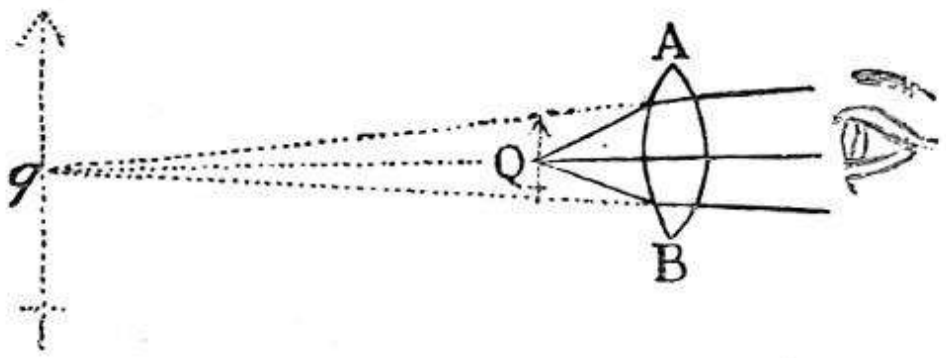


Fig. 10.

And so the Object Q [in Fig. 10.] seen through the Lens AB, appears at the place *q* from whence the Rays diverge in passing from the Lens to the Eye. Now it is to be noted, that the Image of the Object at *q* is so much bigger or lesser than the Object it self at Q, as the distance of the Image at *q* from the Lens AB is bigger or less than the distance of the Object at Q from the same Lens. And if the Object be seen through two or more such Convex or Concave-glasses, every Glass shall make a new Image, and the Object shall appear in the place of the bigness of the last Image. Which consideration unfolds the Theory of Microscopes and Telescopes. For that Theory consists in almost nothing else than the describing such Glasses as shall make the last Image of any Object as distinct and large and luminous as it can conveniently be made.

I have now given in Axioms and their Explications the sum of what hath hitherto been treated of in Opticks. For what hath been generally agreed on I content my self to assume under the notion of Principles, in order to what I have farther to write. And this may suffice for an Introduction to Readers of quick Wit and good Understanding not yet versed in Opticks: Although those who are already acquainted with this Science, and have handled Glasses, will more readily apprehend what followeth.

FOOTNOTES:

[A] In our Author's *Lectiones Opticæ*, Part I. Sect. IV. Prop 29, 30, there is an elegant Method of determining these *Foci*; not only in spherical Surfaces, but likewise in any other curved Figure whatever: And in Pro, 33, the same thing is done for any Ray lying out of the Axis.

[B] *Ibid.* Pro.

PROPOSITIONS.

PROP. I. Theor. I.

Lights which differ in Colour, differ also in Degrees of Refrangibility.

The Proof by Experiments.

Exper. 1. I took a black oblong stiff Paper terminated by Parallel Sides, and with a Perpendicular right Line drawn cross from one Side to the other, distinguished it into two equal Parts. One of these parts I painted with a red colour and the other with a blue. The Paper was very black, and the Colours intense and thickly laid on, that the Phænomenon might be more conspicuous. This Paper I view'd through a Prism of solid Glass, whose two Sides through which the Light passed to the Eye were plane and well polished, and contained an Angle of about sixty degrees; which Angle I call the refracting Angle of the Prism. And whilst I view'd it, I held it and the Prism before a Window in such manner that the Sides of the Paper were parallel to the Prism, and both those Sides and the Prism were parallel to the Horizon, and the cross Line was also parallel to it: and that the Light which fell from the Window upon the Paper made an Angle with the Paper, equal to that Angle which was made with the same Paper by the Light reflected from it to the Eye. Beyond the Prism was the Wall of the Chamber under the Window covered over with black Cloth, and the Cloth was involved in Darkness that no Light might be reflected from thence, which in passing by the Edges of the Paper to the Eye, might mingle itself with the Light of the Paper, and obscure the Phænomenon thereof. These things being thus ordered, I found that if the refracting Angle of the Prism be turned upwards, so that the Paper may seem to be lifted upwards by the Refraction, its blue half will be lifted higher by the Refraction than its red half. But if the refracting Angle of the Prism be turned downward, so that the Paper may seem to be carried lower by the Refraction, its blue half will be carried something lower thereby than its red half. Wherefore in both Cases the Light which comes from the blue half of the Paper through the Prism to the Eye, does in like Circumstances suffer a greater Refraction than the Light which comes from the red half, and by consequence is more refrangible.

Illustration. In the eleventh Figure, MN represents the Window, and DE the Paper terminated with parallel Sides DJ and HE, and by the transverse Line FG distinguished into two halfs, the one DG of an intensely blue Colour, the other FE of an intensely red. And BAC*cab* represents the Prism whose refracting Planes AB*ba* and AC*ca* meet in the Edge of the refracting Angle A*a*. This Edge A*a* being upward, is parallel both to the Horizon, and to the Parallel-Edges of the Paper DJ and HE, and the transverse Line FG is perpendicular to the Plane of the Window. And *de* represents the Image of the Paper seen by Refraction upwards in such manner, that the blue half DG is carried higher to *dg* than the red half FE is to *fe*, and therefore suffers a greater Refraction. If the Edge of the refracting Angle be turned downward, the Image of the Paper will be refracted downward; suppose to δε, and the blue half will be refracted lower to δγ than the red half is to πε.

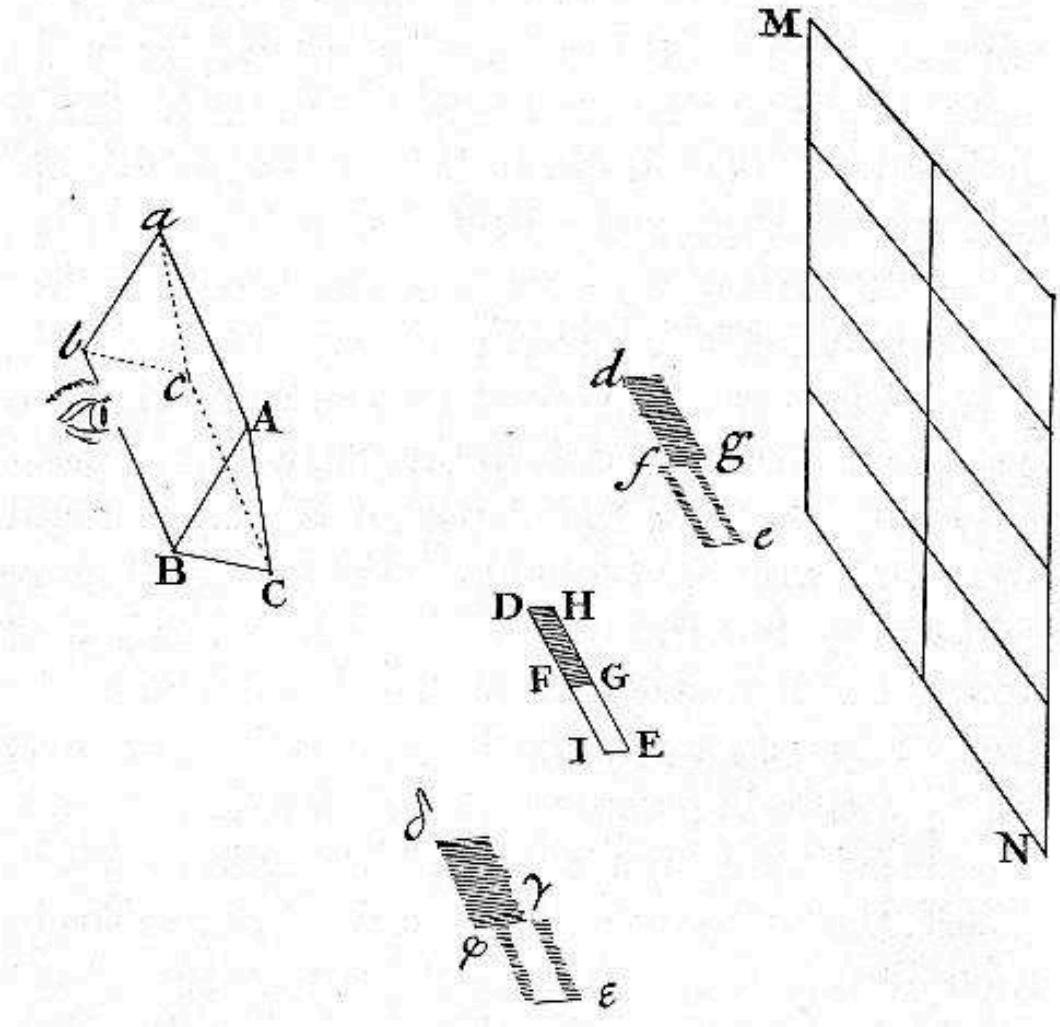


Fig. 11.

Exper. 2. About the aforesaid Paper, whose two halfs were painted over with red and blue, and which was stiff like thin Pasteboard, I lapped several times a slender Thred of very black Silk, in such manner that the several parts of the Thred might appear upon the Colours like so many black Lines drawn over them, or like long and slender dark Shadows cast upon them. I might have drawn black Lines with a Pen, but the Threds were smaller and better defined. This Paper thus coloured and lined I set against a Wall perpendicularly to the Horizon, so that one of the Colours might stand to the Right Hand, and the other to the Left. Close before the Paper, at the Confine of the Colours below, I placed a Candle to illuminate the Paper strongly: For the Experiment was tried in the Night. The Flame of the Candle reached up to the lower edge of the Paper, or a very little higher. Then at the distance of six Feet, and one or two Inches from the Paper upon the Floor I erected a Glass Lens four Inches and a quarter broad, which might collect the Rays coming from the several Points of the Paper, and make them converge towards so many other Points at the same distance of six Feet, and one or two Inches on the other side of the Lens, and so form the Image of the coloured Paper upon a white Paper placed there, after the same manner that a Lens at a Hole in a Window casts the Images of Objects abroad upon a Sheet of white Paper in a dark Room. The aforesaid white Paper, erected perpendicular to the Horizon, and to the Rays which fell upon it from the Lens, I moved sometimes towards the Lens, sometimes from it, to find the Places where the Images of the blue and red Parts of the coloured Paper appeared most distinct. Those Places I easily knew by the Images of the black Lines which I had made by winding the Silk about the Paper. For the Images of those fine and slender Lines (which by reason of their Blackness were like Shadows on the Colours) were confused and scarce visible, unless when the Colours on either side of each Line were terminated most distinctly, Noting therefore, as diligently as I could, the Places where the Images of the red and blue halfs of the coloured Paper appeared most distinct, I found that where the red half of the Paper appeared distinct, the blue half appeared confused, so that the black Lines drawn upon it could scarce be seen; and on the contrary, where the blue half appeared most distinct, the red half appeared confused, so that the black Lines upon it were scarce visible. And between the two Places where these Images appeared distinct there was the distance of an Inch and a half; the distance of the white

Paper from the Lens, when the Image of the red half of the coloured Paper appeared most distinct, being greater by an Inch and an half than the distance of the same white Paper from the Lens, when the Image of the blue half appeared most distinct. In like Incidences therefore of the blue and red upon the Lens, the blue was refracted more by the Lens than the red, so as to converge sooner by an Inch and a half, and therefore is more refrangible.

Illustration. In the twelfth Figure (), DE signifies the coloured Paper, DG the blue half, FE the red half, MN the Lens, HJ the white Paper in that Place where the red half with its black Lines appeared distinct, and *hi* the same Paper in that Place where the blue half appeared distinct. The Place *hi* was nearer to the Lens MN than the Place HJ by an Inch and an half.

Scholium. The same Things succeed, notwithstanding that some of the Circumstances be varied; as in the first Experiment when the Prism and Paper are any ways inclined to the Horizon, and in both when coloured Lines are drawn upon very black Paper. But in the Description of these Experiments, I have set down such Circumstances, by which either the Phænomenon might be render'd more conspicuous, or a Novice might more easily try them, or by which I did try them only. The same Thing, I have often done in the following Experiments: Concerning all which, this one Admonition may suffice. Now from these Experiments it follows not, that all the Light of the blue is more refrangible than all the Light of the red: For both Lights are mixed of Rays differently refrangible, so that in the red there are some Rays not less refrangible than those of the blue, and in the blue there are some Rays not more refrangible than those of the red: But these Rays, in proportion to the whole Light, are but few, and serve to diminish the Event of the Experiment, but are not able to destroy it. For, if the red and blue Colours were more dilute and weak, the distance of the Images would be less than an Inch and a half; and if they were more intense and full, that distance would be greater, as will appear hereafter. These Experiments may suffice for the Colours of Natural Bodies. For in the Colours made by the Refraction of Prisms, this Proposition will appear by the Experiments which are now to follow in the next Proposition.

PROP. II. Theor. II.

The Light of the Sun consists of Rays differently Refrangible.

The Proof by Experiments.

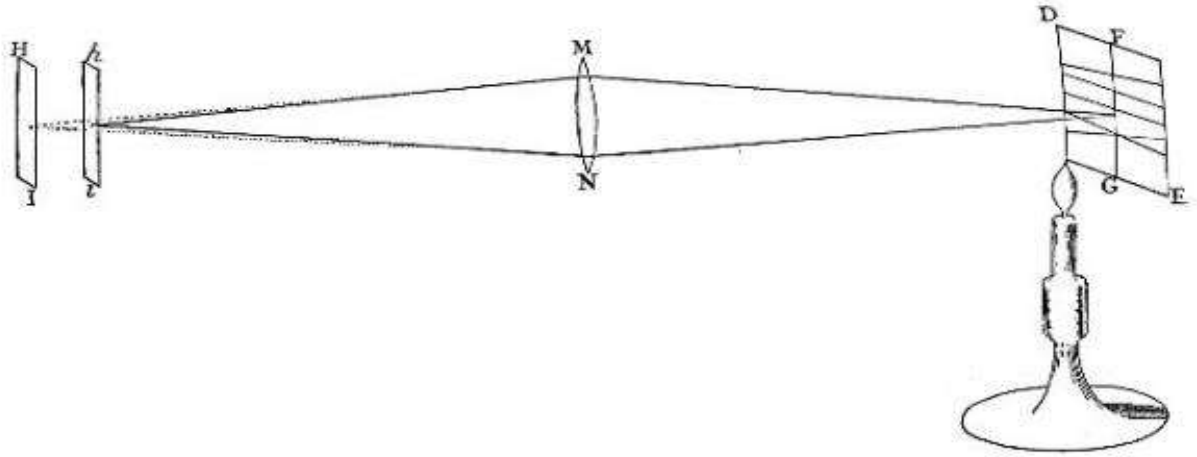


Fig. 12.

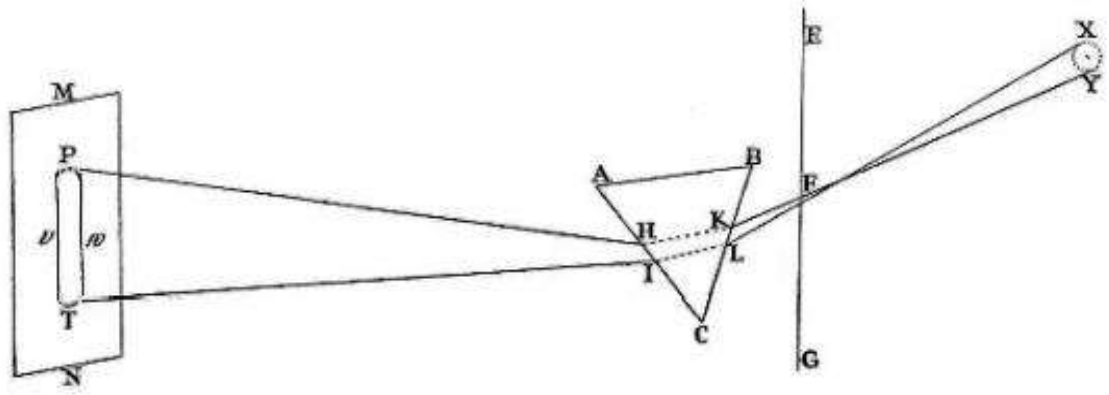


Fig. 13.

Exper. 3.

In a very dark Chamber, at a round Hole, about one third Part of an Inch broad, made in the Shut of a Window, I placed a Glass Prism, whereby the Beam of the Sun's Light, which came in at that Hole, might be refracted upwards toward the opposite Wall of the Chamber, and there form a colour'd Image of the Sun. The Axis of the Prism (that is, the Line passing through the middle of the Prism from one end of it to the other end parallel to the edge of the Refracting Angle) was in this and the following Experiments perpendicular to the incident Rays. About this Axis I turned the Prism slowly, and saw the refracted Light on the Wall, or coloured Image of the Sun, first to descend, and then to ascend. Between the Descent and Ascent, when the Image seemed Stationary, I stopp'd the Prism, and fix'd it in that

Posture, that it should be moved no more. For in that Posture the Refractions of the Light at the two Sides of the refracting Angle, that is, at the Entrance of the Rays into the Prism, and at their going out of it, were equal to one another.[C] So also in other Experiments, as often as I would have the Refractions on both sides the Prism to be equal to one another, I noted the Place where the Image of the Sun formed by the refracted Light stood still between its two contrary Motions, in the common Period of its Progress and Regress; and when the Image fell upon that Place, I made fast the Prism. And in this Posture, as the most convenient, it is to be understood that all the Prisms are placed in the following Experiments, unless where some other Posture is described. The Prism therefore being placed in this Posture, I let the refracted Light fall perpendicularly upon a Sheet of white Paper at the opposite Wall of the Chamber, and observed the Figure and Dimensions of the Solar Image formed on the Paper by that Light. This Image was Oblong and not Oval, but terminated with two Rectilinear and Parallel Sides, and two Semicircular Ends. On its Sides it was bounded pretty distinctly, but on its Ends very confusedly and indistinctly, the Light there decaying and vanishing by degrees. The Breadth of this Image answered to the Sun's Diameter, and was about two Inches and the eighth Part of an Inch, including the Penumbra. For the Image was eighteen Feet and an half distant from the Prism, and at this distance that Breadth, if diminished by the Diameter of the Hole in the Window-shut, that is by a quarter of an Inch, subtended an Angle at the Prism of about half a Degree, which is the Sun's apparent Diameter. But the Length of the Image was about ten Inches and a quarter, and the Length of the Rectilinear Sides about eight Inches; and the refracting Angle of the Prism, whereby so great a Length was made, was 64 degrees. With a less Angle the Length of the Image was less, the Breadth remaining the same. If the Prism was turned about its Axis that way which made the Rays emerge more obliquely out of the second refracting Surface of the Prism, the Image soon became an Inch or two longer, or more; and if the Prism was turned about the contrary way, so as to make the Rays fall more obliquely on the first refracting Surface, the Image soon became an Inch or two shorter. And therefore in trying this Experiment, I was as curious as I could be in placing the Prism by the above-mention'd Rule exactly in such a Posture, that the Refractions of the Rays at their Emergence out of the Prism might be equal to that at their Incidence on it. This Prism had some Veins running

along within the Glass from one end to the other, which scattered some of the Sun's Light irregularly, but had no sensible Effect in increasing the Length of the coloured Spectrum. For I tried the same Experiment with other Prisms with the same Success. And particularly with a Prism which seemed free from such Veins, and whose refracting Angle was 62-1/2 Degrees, I found the Length of the Image 9-3/4 or 10 Inches at the distance of 18-1/2 Feet from the Prism, the Breadth of the Hole in the Window-shut being 1/4 of an Inch, as before. And because it is easy to commit a Mistake in placing the Prism in its due Posture, I repeated the Experiment four or five Times, and always found the Length of the Image that which is set down above. With another Prism of clearer Glass and better Polish, which seemed free from Veins, and whose refracting Angle was 63-1/2 Degrees, the Length of this Image at the same distance of 18-1/2 Feet was also about 10 Inches, or 10-1/8. Beyond these Measures for about a 1/4 or 1/3 of an Inch at either end of the Spectrum the Light of the Clouds seemed to be a little tinged with red and violet, but so very faintly, that I suspected that Tincture might either wholly, or in great Measure arise from some Rays of the Spectrum scattered irregularly by some Inequalities in the Substance and Polish of the Glass, and therefore I did not include it in these Measures. Now the different Magnitude of the hole in the Window-shut, and different thickness of the Prism where the Rays passed through it, and different inclinations of the Prism to the Horizon, made no sensible changes in the length of the Image. Neither did the different matter of the Prisms make any: for in a Vessel made of polished Plates of Glass cemented together in the shape of a Prism and filled with Water, there is the like Success of the Experiment according to the quantity of the Refraction. It is farther to be observed, that the Rays went on in right Lines from the Prism to the Image, and therefore at their very going out of the Prism had all that Inclination to one another from which the length of the Image proceeded, that is, the Inclination of more than two degrees and an half. And yet according to the Laws of Opticks vulgarly received, they could not possibly be so much inclined to one another.[D] For let EG [*Fig.* 13. ()] represent the Window-shut, F the hole made therein through which a beam of the Sun's Light was transmitted into the darkened Chamber, and ABC a Triangular Imaginary Plane whereby the Prism is feigned to be cut transversely through the middle of the Light. Or if you please, let ABC represent the Prism it self, looking directly towards the Spectator's Eye with

its nearer end: And let XY be the Sun, MN the Paper upon which the Solar Image or Spectrum is cast, and PT the Image it self whose sides towards *v* and *w* are Rectilinear and Parallel, and ends towards P and T Semicircular. YKHP and XLJT are two Rays, the first of which comes from the lower part of the Sun to the higher part of the Image, and is refracted in the Prism at K and H, and the latter comes from the higher part of the Sun to the lower part of the Image, and is refracted at L and J. Since the Refractions on both sides the Prism are equal to one another, that is, the Refraction at K equal to the Refraction at J, and the Refraction at L equal to the Refraction at H, so that the Refractions of the incident Rays at K and L taken together, are equal to the Refractions of the emergent Rays at H and J taken together: it follows by adding equal things to equal things, that the Refractions at K and H taken together, are equal to the Refractions at J and L taken together, and therefore the two Rays being equally refracted, have the same Inclination to one another after Refraction which they had before; that is, the Inclination of half a Degree answering to the Sun's Diameter. For so great was the inclination of the Rays to one another before Refraction. So then, the length of the Image PT would by the Rules of Vulgar Opticks subtend an Angle of half a Degree at the Prism, and by Consequence be equal to the breadth *vw*; and therefore the Image would be round. Thus it would be were the two Rays XLJT and YKHP, and all the rest which form the Image P*w*T*v*, alike refrangible. And therefore seeing by Experience it is found that the Image is not round, but about five times longer than broad, the Rays which going to the upper end P of the Image suffer the greatest Refraction, must be more refrangible than those which go to the lower end T, unless the Inequality of Refraction be casual.

This Image or Spectrum PT was coloured, being red at its least refracted end T, and violet at its most refracted end P, and yellow green and blue in the intermediate Spaces. Which agrees with the first Proposition, that Lights which differ in Colour, do also differ in Refrangibility. The length of the Image in the foregoing Experiments, I measured from the faintest and outmost red at one end, to the faintest and outmost blue at the other end, excepting only a little Penumbra, whose breadth scarce exceeded a quarter of an Inch, as was said above.

Exper. 4. In the Sun's Beam which was propagated into the Room through the hole in the Window-shut, at the distance of some Feet from the hole, I

held the Prism in such a Posture, that its Axis might be perpendicular to that Beam. Then I looked through the Prism upon the hole, and turning the Prism to and fro about its Axis, to make the Image of the Hole ascend and descend, when between its two contrary Motions it seemed Stationary, I stopp'd the Prism, that the Refractions of both sides of the refracting Angle might be equal to each other, as in the former Experiment. In this situation of the Prism viewing through it the said Hole, I observed the length of its refracted Image to be many times greater than its breadth, and that the most refracted part thereof appeared violet, the least refracted red, the middle parts blue, green and yellow in order. The same thing happen'd when I removed the Prism out of the Sun's Light, and looked through it upon the hole shining by the Light of the Clouds beyond it. And yet if the Refraction were done regularly according to one certain Proportion of the Sines of Incidence and Refraction as is vulgarly supposed, the refracted Image ought to have appeared round.

So then, by these two Experiments it appears, that in Equal Incidences there is a considerable inequality of Refractions. But whence this inequality arises, whether it be that some of the incident Rays are refracted more, and others less, constantly, or by chance, or that one and the same Ray is by Refraction disturbed, shatter'd, dilated, and as it were split and spread into many diverging Rays, as *Grimaldo* supposes, does not yet appear by these Experiments, but will appear by those that follow.

Exper. 5. Considering therefore, that if in the third Experiment the Image of the Sun should be drawn out into an oblong Form, either by a Dilatation of every Ray, or by any other casual inequality of the Refractions, the same oblong Image would by a second Refraction made sideways be drawn out as much in breadth by the like Dilatation of the Rays, or other casual inequality of the Refractions sideways, I tried what would be the Effects of such a second Refraction. For this end I ordered all things as in the third Experiment, and then placed a second Prism immediately after the first in a cross Position to it, that it might again refract the beam of the Sun's Light which came to it through the first Prism. In the first Prism this beam was refracted upwards, and in the second sideways. And I found that by the Refraction of the second Prism, the breadth of the Image was not increased, but its superior part, which in the first Prism suffered the greater Refraction, and appeared violet and blue, did again in the second Prism suffer a greater

Refraction than its inferior part, which appeared red and yellow, and this without any Dilatation of the Image in breadth.

Illustration. Let S [*Fig.* 14, 15.] represent the Sun, F the hole in the Window, ABC the first Prism, DH the second Prism, Y the round Image of the Sun made by a direct beam of Light when the Prisms are taken away, PT the oblong Image of the Sun made by that beam passing through the first Prism alone, when the second Prism is taken away, and *pt* the Image made by the cross Refractions of both Prisms together. Now if the Rays which tend towards the several Points of the round Image Y were dilated and spread by the Refraction of the first Prism, so that they should not any longer go in single Lines to single Points, but that every Ray being split, shattered, and changed from a Linear Ray to a Superficies of Rays diverging from the Point of Refraction, and lying in the Plane of the Angles of Incidence and Refraction, they should go in those Planes to so many Lines reaching almost from one end of the Image PT to the other, and if that Image should thence become oblong: those Rays and their several parts tending towards the several Points of the Image PT ought to be again dilated and spread sideways by the transverse Refraction of the second Prism, so as to compose a four square Image, such as is represented at πτ. For the better understanding of which, let the Image PT be distinguished into five

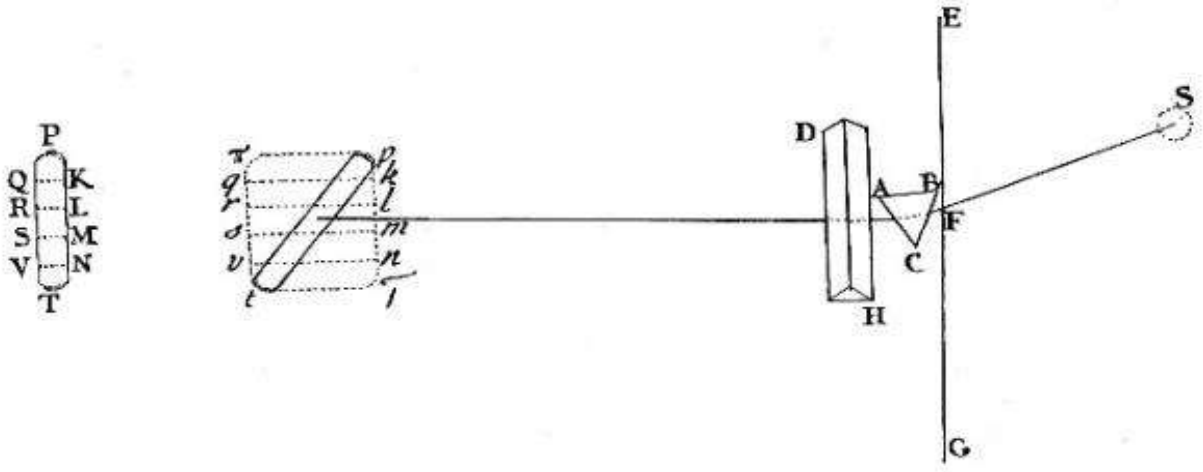


Fig. 14

equal parts PQK, KQRL, LRSM, MSVN, NVT. And by the same irregularity that the orbicular Light Y is by the Refraction of the first Prism dilated and drawn out into a long Image PT, the Light PQK which takes up a space of the same length and breadth with the Light Y ought to be by the

Refraction of the second Prism dilated and drawn out into the long Image *πqkp*, and the Light KQRL into the long Image *kqrl*, and the Lights LRSM, MSVN, NVT, into so many other long Images *lrsm*, *msvn*, *nvtτ*; and all these long Images would compose the four square Images *πτ*. Thus it ought to be were every Ray dilated by Refraction, and spread into a triangular Superficies of Rays diverging from the Point of Refraction. For the second Refraction would spread the Rays one way as much as the first doth another, and so dilate the Image in breadth as much as the first doth in length. And the same thing ought to happen, were some rays casually refracted more than others. But the Event is otherwise. The Image PT was not made broader by the Refraction of the second Prism, but only became oblique, as 'tis represented at *pt*, its upper end P being by the Refraction translated to a greater distance than its lower end T. So then the Light which went towards the upper end P of the Image, was (at equal Incidences) more refracted in the second Prism, than the Light which tended towards the lower end T, that is the blue and violet, than the red and yellow; and therefore was more refrangible. The same Light was by the Refraction of the first Prism translated farther from the place Y to which it tended before Refraction; and therefore suffered as well in the first Prism as in the second a greater Refraction than the rest of the Light, and by consequence was more refrangible than the rest, even before its incidence on the first Prism.

Sometimes I placed a third Prism after the second, and sometimes also a fourth after the third, by all which the Image might be often refracted sideways: but the Rays which were more refracted than the rest in the first Prism were also more refracted in all the rest, and that without any Dilatation of the Image sideways: and therefore those Rays for their constancy of a greater Refraction are deservedly reputed more refrangible.

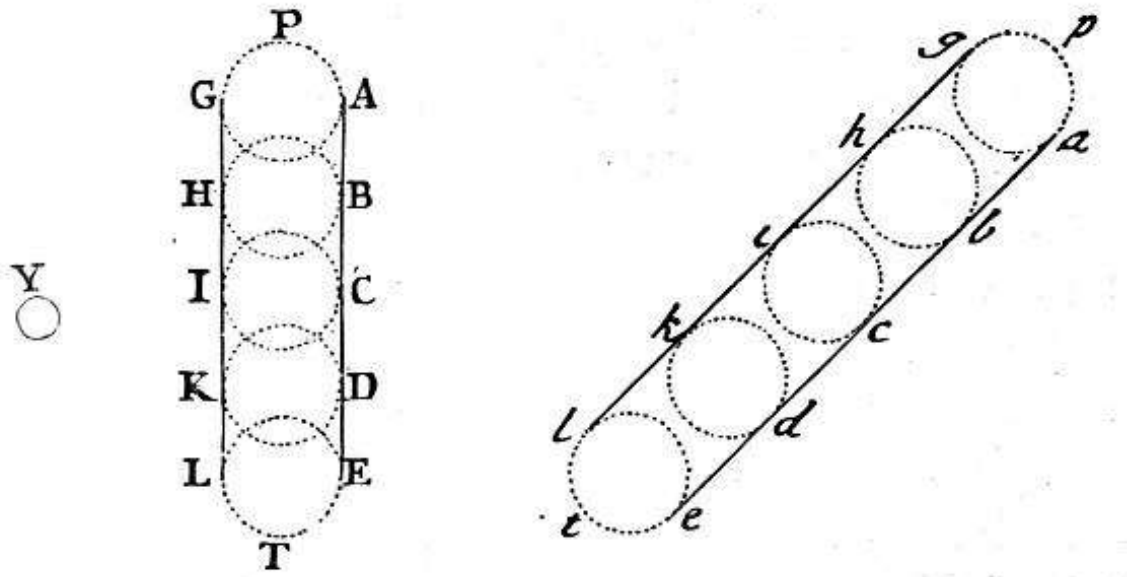


Fig. 15

But that the meaning of this Experiment may more clearly appear, it is to be considered that the Rays which are equally refrangible do fall upon a Circle answering to the Sun's Disque. For this was proved in the third Experiment. By a Circle I understand not here a perfect geometrical Circle, but any orbicular Figure whose length is equal to its breadth, and which, as to Sense, may seem circular. Let therefore AG [in *Fig.* 15.] represent the Circle which all the most refrangible Rays propagated from the whole Disque of the Sun, would illuminate and paint upon the opposite Wall if they were alone; EL the Circle which all the least refrangible Rays would in like manner illuminate and paint if they were alone; BH, CJ, DK, the Circles which so many intermediate sorts of Rays would successively paint upon the Wall, if they were singly propagated from the Sun in successive order, the rest being always intercepted; and conceive that there are other intermediate Circles without Number, which innumerable other intermediate sorts of Rays would successively paint upon the Wall if the Sun should successively emit every sort apart. And seeing the Sun emits all these sorts at once, they must all together illuminate and paint innumerable equal Circles, of all which, being according to their degrees of Refrangibility placed in order in a continual Series, that oblong Spectrum PT is composed which I described in the third Experiment. Now if the Sun's circular Image Y [in *Fig.* 15.] which is made by an unrefracted beam of Light was by any Dilation of the single Rays, or by any other irregularity in the Refraction of the first Prism,

converted into the oblong Spectrum, PT: then ought every Circle AG, BH, CJ, &c. in that Spectrum, by the cross Refraction of the second Prism again dilating or otherwise scattering the Rays as before, to be in like manner drawn out and transformed into an oblong Figure, and thereby the breadth of the Image PT would be now as much augmented as the length of the Image Y was before by the Refraction of the first Prism; and thus by the Refractions of both Prisms together would be formed a four square Figure *pπtτ*, as I described above. Wherefore since the breadth of the Spectrum PT is not increased by the Refraction sideways, it is certain that the Rays are not split or dilated, or otherways irregularly scatter'd by that Refraction, but that every Circle is by a regular and uniform Refraction translated entire into another Place, as the Circle AG by the greatest Refraction into the place *ag*, the Circle BH by a less Refraction into the place *bh*, the Circle CJ by a Refraction still less into the place *ci*, and so of the rest; by which means a new Spectrum *pt* inclined to the former PT is in like manner composed of Circles lying in a right Line; and these Circles must be of the same bigness with the former, because the breadths of all the Spectrums Y, PT and *pt* at equal distances from the Prisms are equal.

I considered farther, that by the breadth of the hole F through which the Light enters into the dark Chamber, there is a Penumbra made in the Circuit of the Spectrum Y, and that Penumbra remains in the rectilinear Sides of the Spectrums PT and *pt*. I placed therefore at that hole a Lens or Object-glass of a Telescope which might cast the Image of the Sun distinctly on Y without any Penumbra at all, and found that the Penumbra of the rectilinear Sides of the oblong Spectrums PT and *pt* was also thereby taken away, so that those Sides appeared as distinctly defined as did the Circumference of the first Image Y. Thus it happens if the Glass of the Prisms be free from Veins, and their sides be accurately plane and well polished without those numberless Waves or Curles which usually arise from Sand-holes a little smoothed in polishing with Putty. If the Glass be only well polished and free from Veins, and the Sides not accurately plane, but a little Convex or Concave, as it frequently happens; yet may the three Spectrums Y, PT and *pt* want Penumbras, but not in equal distances from the Prisms. Now from this want of Penumbras, I knew more certainly that every one of the Circles was refracted according to some most regular, uniform and constant Law. For if there were any irregularity in the Refraction, the right Lines AE and GL,

which all the Circles in the Spectrum PT do touch, could not by that Refraction be translated into the Lines *ae* and *gl* as distinct and straight as they were before, but there would arise in those translated Lines some Penumbra or Crookedness or Undulation, or other sensible Perturbation contrary to what is found by Experience. Whatsoever Penumbra or Perturbation should be made in the Circles by the cross Refraction of the second Prism, all that Penumbra or Perturbation would be conspicuous in the right Lines *ae* and *gl* which touch those Circles. And therefore since there is no such Penumbra or Perturbation in those right Lines, there must be none in the Circles. Since the distance between those Tangents or breadth of the Spectrum is not increased by the Refractions, the Diameters of the Circles are not increased thereby. Since those Tangents continue to be right Lines, every Circle which in the first Prism is more or less refracted, is exactly in the same proportion more or less refracted in the second. And seeing all these things continue to succeed after the same manner when the Rays are again in a third Prism, and again in a fourth refracted sideways, it is evident that the Rays of one and the same Circle, as to their degree of Refrangibility, continue always uniform and homogeneal to one another, and that those of several Circles do differ in degree of Refrangibility, and that in some certain and constant Proportion. Which is the thing I was to prove.

There is yet another Circumstance or two of this Experiment by which it becomes still more plain and convincing. Let the second Prism DH [in *Fig.* 16.] be placed not immediately after the first, but at some distance from it; suppose in the mid-way between it and the Wall on which the oblong Spectrum PT is cast, so that the Light from the first Prism may fall upon it in the form of an oblong Spectrum $\pi\tau$ parallel to this second Prism, and be refracted sideways to form the oblong Spectrum *pt* upon the Wall. And you will find as before, that this Spectrum *pt* is inclined to that Spectrum PT, which the first Prism forms alone without the second; the blue ends P and *p* being farther distant from one another than the red ones T and *t*, and by consequence that the Rays which go to the blue end π of the Image $\pi\tau$, and which therefore suffer the greatest Refraction in the first Prism, are again in the second Prism more refracted than the rest.

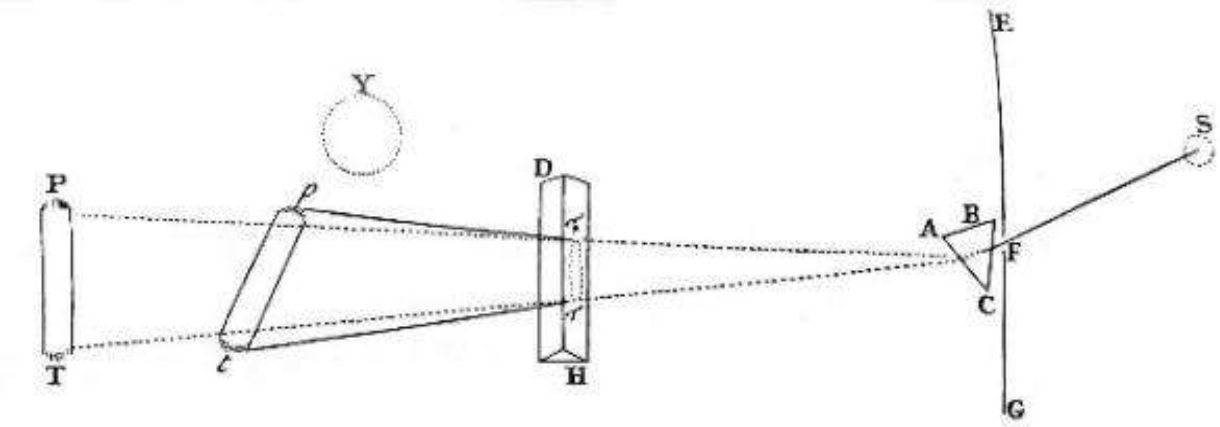


Fig. 16.

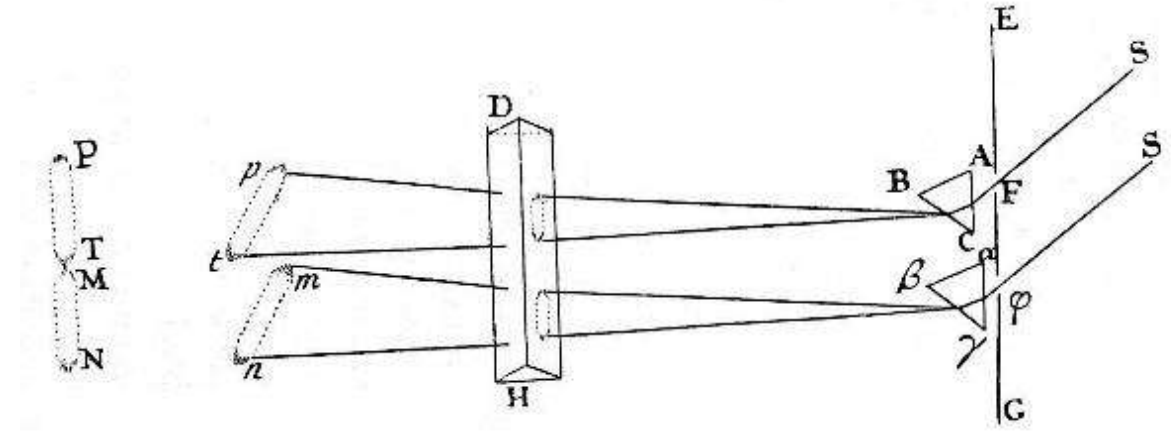


Fig. 17.

The same thing I try'd also by letting the Sun's Light into a dark Room through two little round holes F and φ [in *Fig.* 17.] made in the Window, and with two parallel Prisms ABC and αβγ placed at those holes (one at each) refracting those two beams of Light to the opposite Wall of the Chamber, in such manner that the two colour'd Images PT and MN which they there painted were joined end to end and lay in one straight Line, the red end T of the one touching the blue end M of the other. For if these two refracted Beams were again by a third Prism DH placed cross to the two first, refracted sideways, and the Spectrums thereby translated to some other part of the Wall of the Chamber, suppose the Spectrum PT to *pt* and the Spectrum MN to *mn*, these translated Spectrums *pt* and *mn* would not lie in one straight Line with their ends contiguous as before, but be broken off from one another and become parallel, the blue end *m* of the Image *mn* being by a

greater Refraction translated farther from its former place MT, than the red end *t* of the other Image *pt* from the same place MT; which puts the Proposition past Dispute. And this happens whether the third Prism DH be placed immediately after the two first, or at a great distance from them, so that the Light refracted in the two first Prisms be either white and circular, or coloured and oblong when it falls on the third.

Exper. 6. In the middle of two thin Boards I made round holes a third part of an Inch in diameter, and in the Window-shut a much broader hole being made to let into my darkned Chamber a large Beam of the Sun's Light; I placed a Prism behind the Shut in that beam to refract it towards the opposite Wall, and close behind the Prism I fixed one of the Boards, in such manner that the middle of the refracted Light might pass through the hole made in it, and the rest be intercepted by the Board. Then at the distance of about twelve Feet from the first Board I fixed the other Board in such manner that the middle of the refracted Light which came through the hole in the first Board, and fell upon the opposite Wall, might pass through the hole in this other Board, and the rest being intercepted by the Board might paint upon it the coloured Spectrum of the Sun. And close behind this Board I fixed another Prism to refract the Light which came through the hole. Then I returned speedily to the first Prism, and by turning it slowly to and fro about its Axis, I caused the Image which fell upon the second Board to move up and down upon that Board, that all its parts might successively pass through the hole in that Board and fall upon the Prism behind it. And in the mean time, I noted the places on the opposite Wall to which that Light after its Refraction in the second Prism did pass; and by the difference of the places I found that the Light which being most refracted in the first Prism did go to the blue end of the Image, was again more refracted in the second Prism than the Light which went to the red end of that Image, which proves as well the first Proposition as the second. And this happened whether the Axis of the two Prisms were parallel, or inclined to one another, and to the Horizon in any given Angles.

Illustration. Let F [in *Fig.* 18.] be the wide hole in the Window-shut, through which the Sun shines upon the first Prism ABC, and let the refracted Light fall upon the middle of the Board DE, and the middle part of that Light upon the hole G made in the middle part of that Board. Let this trajected part of that Light fall again upon the middle of the second Board *de*, and there

paint such an oblong coloured Image of the Sun as was described in the third Experiment. By turning the Prism ABC slowly to and fro about its Axis, this Image will be made to move up and down the Board *de*, and by this means all its parts from one end to the other may be made to pass successively through the hole *g* which is made in the middle of that Board. In the mean while another Prism *abc* is to be fixed next after that hole *g*, to refract the trajected Light a second time. And these things being thus ordered, I marked the places M and N of the opposite Wall upon which the refracted Light fell, and found that whilst the two Boards and second Prism remained unmoved, those places by turning the first Prism about its Axis were changed perpetually. For when the lower part of the Light which fell upon the second Board *de* was cast through the hole *g*, it went to a lower place M on the Wall and when the higher part of that Light was cast through the same hole *g*, it went to a higher place N on the Wall, and when any intermediate part of the Light was cast through that hole, it went to some place on the Wall between M and N. The unchanged Position of the holes in the Boards, made the Incidence of the Rays upon the second Prism to be the same in all cases. And yet in that common Incidence some of the Rays were more refracted, and others less. And those were more refracted in this Prism, which by a greater Refraction in the first Prism were more turned out of the way, and therefore for their Constancy of being more refracted are deservedly called more refrangible.

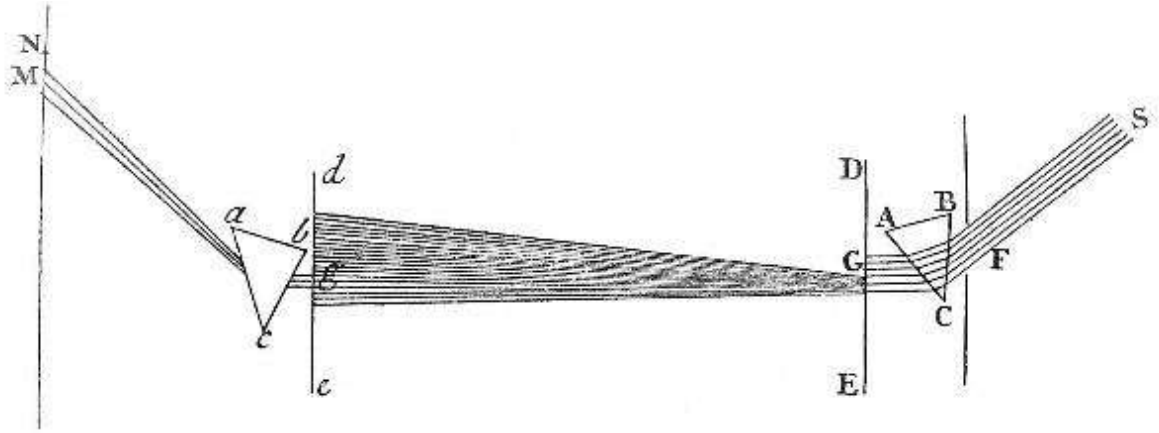


Fig. 18.

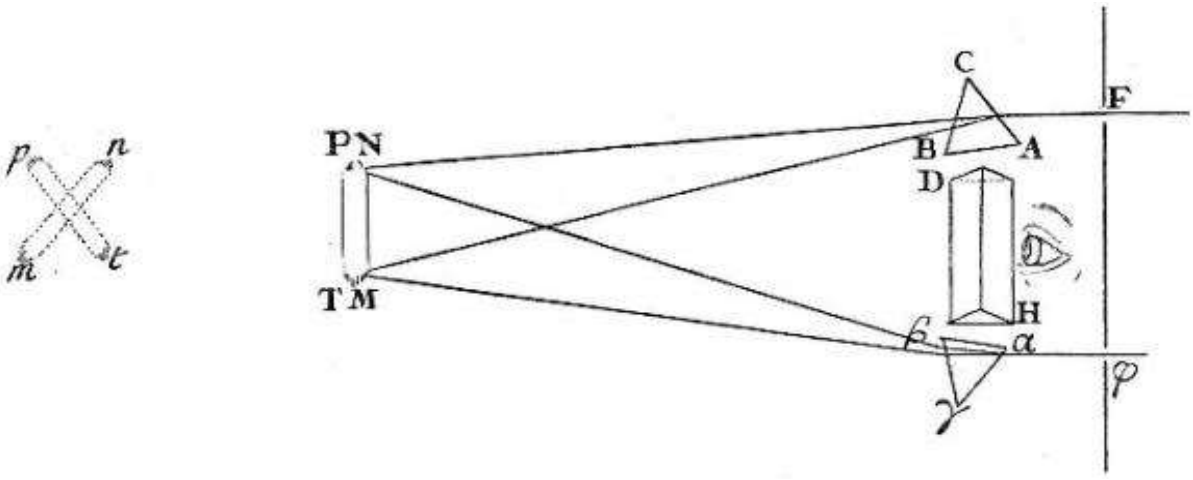


Fig. 20.

Exper. 7. At two holes made near one another in my Window-shut I placed two Prisms, one at each, which might cast upon the opposite Wall (after the manner of the third Experiment) two oblong coloured Images of the Sun. And at a little distance from the Wall I placed a long slender Paper with straight and parallel edges, and ordered the Prisms and Paper so, that the red Colour of one Image might fall directly upon one half of the Paper, and the violet Colour of the other Image upon the other half of the same Paper; so that the Paper appeared of two Colours, red and violet, much after the manner of the painted Paper in the first and second Experiments. Then with a black Cloth I covered the Wall behind the Paper, that no Light might be reflected from it to disturb the Experiment, and viewing the Paper through a third Prism held parallel to it, I saw that half of it which was illuminated by the violet Light to be divided from the other half by a greater Refraction, especially when I went a good way off from the Paper. For when I viewed it too near at hand, the two halfs of the Paper did not appear fully divided from one another, but seemed contiguous at one of their Angles like the painted Paper in the first Experiment. Which also happened when the Paper was too broad.

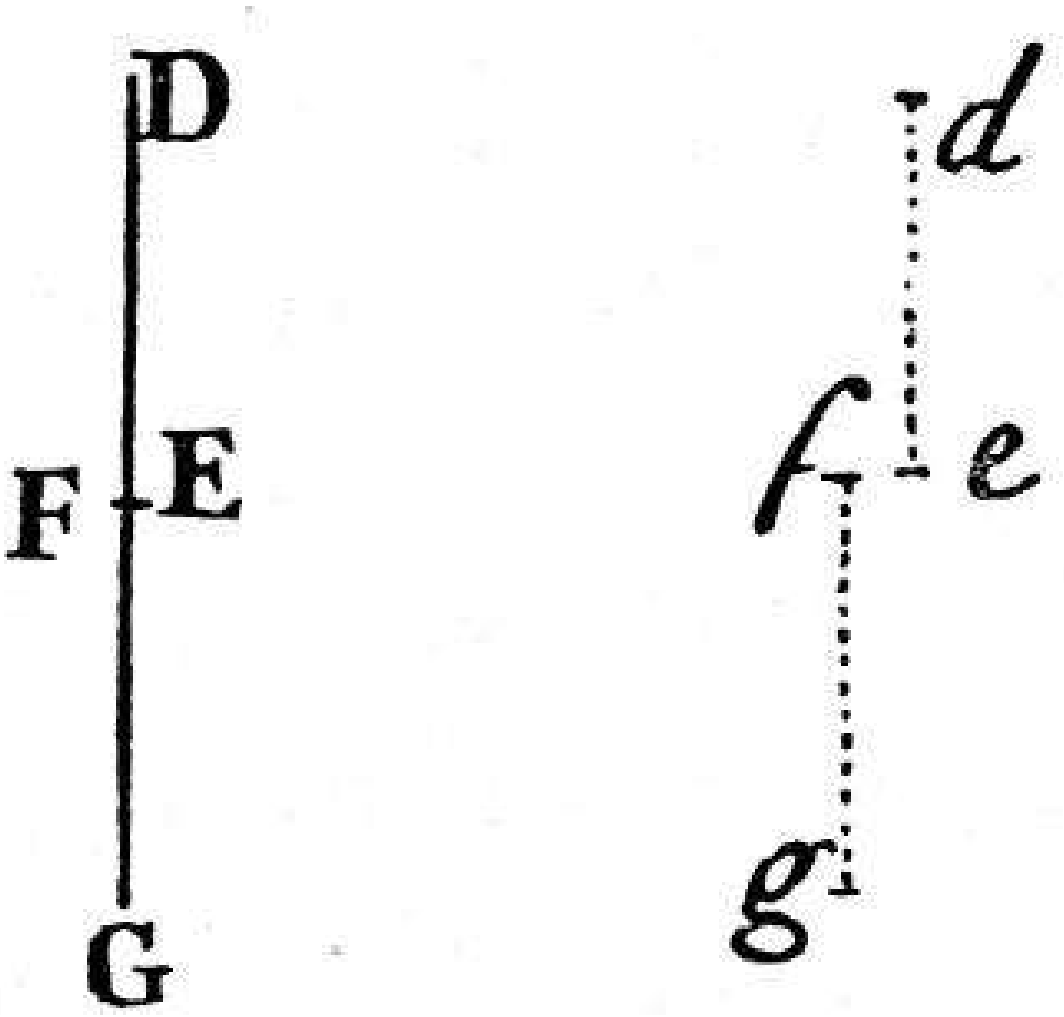


Fig. 19.

Sometimes instead of the Paper I used a white Thred, and this appeared through the Prism divided into two parallel Threds as is represented in the nineteenth Figure, where DG denotes the Thred illuminated with violet Light from D to E and with red Light from F to G, and *defg* are the parts of the Thred seen by Refraction. If one half of the Thred be constantly illuminated with red, and the other half be illuminated with all the Colours successively, (which may be done by causing one of the Prisms to be turned about its Axis whilst the other remains unmoved) this other half in viewing the Thred through the Prism, will appear in a continual right Line with the first half when illuminated with red, and begin to be a little divided from it when illuminated with Orange, and remove farther from it when illuminated with yellow, and still farther when with green, and farther when with blue, and go yet farther off when illuminated with Indigo, and farthest when with deep

violet. Which plainly shews, that the Lights of several Colours are more and more refrangible one than another, in this Order of their Colours, red, orange, yellow, green, blue, indigo, deep violet; and so proves as well the first Proposition as the second.

I caused also the coloured Spectrums PT [in *Fig.* 17.] and MN made in a dark Chamber by the Refractions of two Prisms to lie in a Right Line end to end, as was described above in the fifth Experiment, and viewing them through a third Prism held parallel to their Length, they appeared no longer in a Right Line, but became broken from one another, as they are represented at *pt* and *mn*, the violet end *m* of the Spectrum *mn* being by a greater Refraction translated farther from its former Place MT than the red end *t* of the other Spectrum *pt*.

I farther caused those two Spectrums PT [in *Fig.* 20.] and MN to become co-incident in an inverted Order of their Colours, the red end of each falling on the violet end of the other, as they are represented in the oblong Figure PTMN; and then viewing them through a Prism DH held parallel to their Length, they appeared not co-incident, as when view'd with the naked Eye, but in the form of two distinct Spectrums *pt* and *mn* crossing one another in the middle after the manner of the Letter X. Which shews that the red of the one Spectrum and violet of the other, which were co-incident at PN and MT, being parted from one another by a greater Refraction of the violet to *p* and *m* than of the red to *n* and *t*, do differ in degrees of Refrangibility.

I illuminated also a little Circular Piece of white Paper all over with the Lights of both Prisms intermixed, and when it was illuminated with the red of one Spectrum, and deep violet of the other, so as by the Mixture of those Colours to appear all over purple, I viewed the Paper, first at a less distance, and then at a greater, through a third Prism; and as I went from the Paper, the refracted Image thereof became more and more divided by the unequal Refraction of the two mixed Colours, and at length parted into two distinct Images, a red one and a violet one, whereof the violet was farthest from the Paper, and therefore suffered the greatest Refraction. And when that Prism at the Window, which cast the violet on the Paper was taken away, the violet Image disappeared; but when the other Prism was taken away the red vanished; which shews, that these two Images were nothing else than the Lights of the two Prisms, which had been intermixed on the purple Paper, but were parted again by their unequal Refractions made in the third Prism,

through which the Paper was view'd. This also was observable, that if one of the Prisms at the Window, suppose that which cast the violet on the Paper, was turned about its Axis to make all the Colours in this order, violet, indigo, blue, green, yellow, orange, red, fall successively on the Paper from that Prism, the violet Image changed Colour accordingly, turning successively to indigo, blue, green, yellow and red, and in changing Colour came nearer and nearer to the red Image made by the other Prism, until when it was also red both Images became fully co-incident.

I placed also two Paper Circles very near one another, the one in the red Light of one Prism, and the other in the violet Light of the other. The Circles were each of them an Inch in diameter, and behind them the Wall was dark, that the Experiment might not be disturbed by any Light coming from thence. These Circles thus illuminated, I viewed through a Prism, so held, that the Refraction might be made towards the red Circle, and as I went from them they came nearer and nearer together, and at length became co-incident; and afterwards when I went still farther off, they parted again in a contrary Order, the violet by a greater Refraction being carried beyond the red.

Exper. 8. In Summer, when the Sun's Light uses to be strongest, I placed a Prism at the Hole of the Window-shut, as in the third Experiment, yet so that its Axis might be parallel to the Axis of the World, and at the opposite Wall in the Sun's refracted Light, I placed an open Book. Then going six Feet and two Inches from the Book, I placed there the above-mentioned Lens, by which the Light reflected from the Book might be made to converge and meet again at the distance of six Feet and two Inches behind the Lens, and there paint the Species of the Book upon a Sheet of white Paper much after the manner of the second Experiment. The Book and Lens being made fast, I noted the Place where the Paper was, when the Letters of the Book, illuminated by the fullest red Light of the Solar Image falling upon it, did cast their Species on that Paper most distinctly: And then I stay'd till by the Motion of the Sun, and consequent Motion of his Image on the Book, all the Colours from that red to the middle of the blue pass'd over those Letters; and when those Letters were illuminated by that blue, I noted again the Place of the Paper when they cast their Species most distinctly upon it: And I found that this last Place of the Paper was nearer to the Lens than its former Place by about two Inches and an half, or two and three quarters. So much sooner

therefore did the Light in the violet end of the Image by a greater Refraction converge and meet, than the Light in the red end. But in trying this, the Chamber was as dark as I could make it. For, if these Colours be diluted and weakned by the Mixture of any adventitious Light, the distance between the Places of the Paper will not be so great. This distance in the second Experiment, where the Colours of natural Bodies were made use of, was but an Inch and an half, by reason of the Imperfection of those Colours. Here in the Colours of the Prism, which are manifestly more full, intense, and lively than those of natural Bodies, the distance is two Inches and three quarters. And were the Colours still more full, I question not but that the distance would be considerably greater. For the coloured Light of the Prism, by the interfering of the Circles described in the second Figure of the fifth Experiment, and also by the Light of the very bright Clouds next the Sun's Body intermixing with these Colours, and by the Light scattered by the Inequalities in the Polish of the Prism, was so very much compounded, that the Species which those faint and dark Colours, the indigo and violet, cast upon the Paper were not distinct enough to be well observed.

Exper. 9. A Prism, whose two Angles at its Base were equal to one another, and half right ones, and the third a right one, I placed in a Beam of the Sun's Light let into a dark Chamber through a Hole in the Window-shut, as in the third Experiment. And turning the Prism slowly about its Axis, until all the Light which went through one of its Angles, and was refracted by it began to be reflected by its Base, at which till then it went out of the Glass, I observed that those Rays which had suffered the greatest Refraction were sooner reflected than the rest. I conceived therefore, that those Rays of the reflected Light, which were most refrangible, did first of all by a total Reflexion become more copious in that Light than the rest, and that afterwards the rest also, by a total Reflexion, became as copious as these. To try this, I made the reflected Light pass through another Prism, and being refracted by it to fall afterwards upon a Sheet of white Paper placed at some distance behind it, and there by that Refraction to paint the usual Colours of the Prism. And then causing the first Prism to be turned about its Axis as above, I observed that when those Rays, which in this Prism had suffered the greatest Refraction, and appeared of a blue and violet Colour began to be totally reflected, the blue and violet Light on the Paper, which was most refracted in the second Prism, received a sensible Increase above that of the

red and yellow, which was least refracted; and afterwards, when the rest of the Light which was green, yellow, and red, began to be totally reflected in the first Prism, the Light of those Colours on the Paper received as great an Increase as the violet and blue had done before. Whence 'tis manifest, that the Beam of Light reflected by the Base of the Prism, being augmented first by the more refrangible Rays, and afterwards by the less refrangible ones, is compounded of Rays differently refrangible. And that all such reflected Light is of the same Nature with the Sun's Light before its Incidence on the Base of the Prism, no Man ever doubted; it being generally allowed, that Light by such Reflexions suffers no Alteration in its Modifications and Properties. I do not here take Notice of any Refractions made in the sides of the first Prism, because the Light enters it perpendicularly at the first side, and goes out perpendicularly at the second side, and therefore suffers none. So then, the Sun's incident Light being of the same Temper and Constitution with his emergent Light, and the last being compounded of Rays differently refrangible, the first must be in like manner compounded.

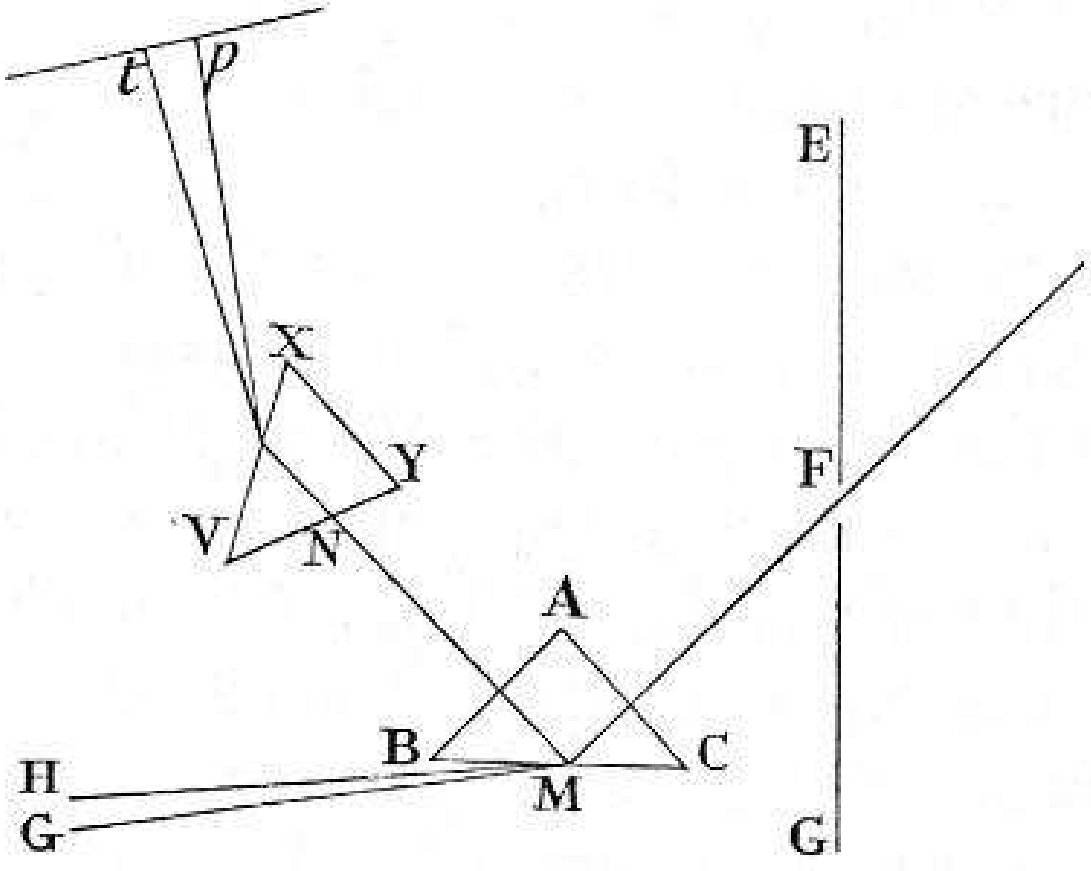


Fig. 21.

Illustration. In the twenty-first Figure, ABC is the first Prism, BC its Base, B and C its equal Angles at the Base, each of 45 Degrees, A its rectangular Vertex, FM a beam of the Sun's Light let into a dark Room through a hole F one third part of an Inch broad, M its Incidence on the Base of the Prism, MG a less refracted Ray, MH a more refracted Ray, MN the beam of Light reflected from the Base, VXY the second Prism by which this beam in passing through it is refracted, N*t* the less refracted Light of this beam, and N*p* the more refracted part thereof. When the first Prism ABC is turned about its Axis according to the order of the Letters ABC, the Rays MH emerge more and more obliquely out of that Prism, and at length after their most oblique Emergence are reflected towards N, and going on to *p* do increase the Number of the Rays N*p*. Afterwards by continuing the Motion of the first Prism, the Rays MG are also reflected to N and increase the number of the Rays N*t*. And therefore the Light MN admits into its Composition, first the more refrangible Rays, and then the less refrangible Rays, and yet after this Composition is of the same Nature with the Sun's immediate Light FM, the Reflexion of the specular Base BC causing no Alteration therein.

Exper. 10. Two Prisms, which were alike in Shape, I tied so together, that their Axis and opposite Sides being parallel, they composed a Parallelopiped. And, the Sun shining into my dark Chamber through a little hole in the Window-shut, I placed that Parallelopiped in his beam at some distance from the hole, in such a Posture, that the Axes of the Prisms might be perpendicular to the incident Rays, and that those Rays being incident upon the first Side of one Prism, might go on through the two contiguous Sides of both Prisms, and emerge out of the last Side of the second Prism. This Side being parallel to the first Side of the first Prism, caused the emerging Light to be parallel to the incident. Then, beyond these two Prisms I placed a third, which might refract that emergent Light, and by that Refraction cast the usual Colours of the Prism upon the opposite Wall, or upon a sheet of white Paper held at a convenient Distance behind the Prism for that refracted Light to fall upon it. After this I turned the Parallelopiped about its Axis, and found that when the contiguous Sides of the two Prisms became so oblique to the incident Rays, that those Rays began all of them to be reflected, those Rays which in the third Prism had suffered the greatest Refraction, and painted the Paper with violet and blue, were first of all by a total Reflexion taken out of

the transmitted Light, the rest remaining and on the Paper painting their Colours of green, yellow, orange and red, as before; and afterwards by continuing the Motion of the two Prisms, the rest of the Rays also by a total Reflexion vanished in order, according to their degrees of Refrangibility. The Light therefore which emerged out of the two Prisms is compounded of Rays differently refrangible, seeing the more refrangible Rays may be taken out of it, while the less refrangible remain. But this Light being trajected only through the parallel Superficies of the two Prisms, if it suffer'd any change by the Refraction of one Superficies it lost that Impression by the contrary Refraction of the other Superficies, and so being restor'd to its pristine Constitution, became of the same Nature and Condition as at first before its Incidence on those Prisms; and therefore, before its Incidence, was as much compounded of Rays differently refrangible, as afterwards.

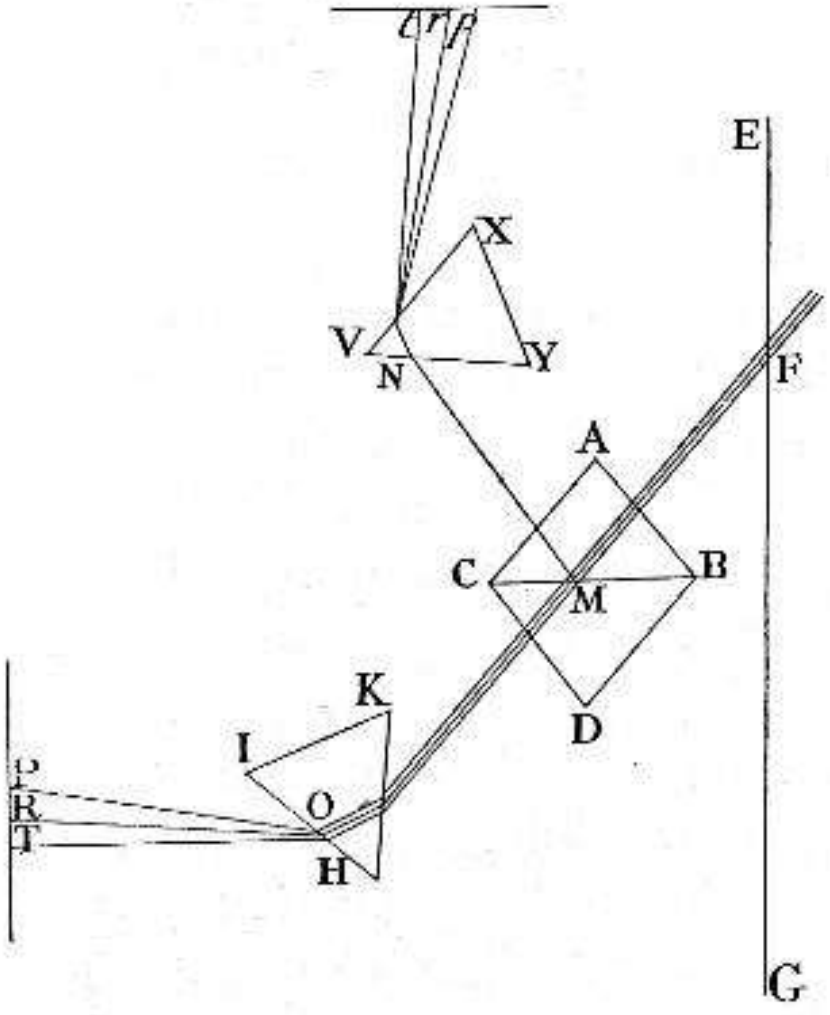


Fig. 22.

Illustration. In the twenty second Figure ABC and BCD are the two Prisms tied together in the form of a Parallelopiped, their Sides BC and CB being contiguous, and their Sides AB and CD parallel. And HJK is the third Prism, by which the Sun's Light propagated through the hole F into the dark Chamber, and there passing through those sides of the Prisms AB, BC, CB and CD, is refracted at O to the white Paper PT, falling there partly upon P by a greater Refraction, partly upon T by a less Refraction, and partly upon R and other intermediate places by intermediate Refractions. By turning the Parallelopiped ACBD about its Axis, according to the order of the Letters A, C, D, B, at length when the contiguous Planes BC and CB become sufficiently oblique to the Rays FM, which are incident upon them at M, there will vanish totally out of the refracted Light OPT, first of all the most refracted Rays OP, (the rest OR and OT remaining as before) then the Rays OR and other intermediate ones, and lastly, the least refracted Rays OT. For when the Plane BC becomes sufficiently oblique to the Rays incident upon it, those Rays will begin to be totally reflected by it towards N; and first the most refrangible Rays will be totally reflected (as was explained in the preceding Experiment) and by Consequence must first disappear at P, and afterwards the rest as they are in order totally reflected to N, they must disappear in the same order at R and T. So then the Rays which at O suffer the greatest Refraction, may be taken out of the Light MO whilst the rest of the Rays remain in it, and therefore that Light MO is compounded of Rays differently refrangible. And because the Planes AB and CD are parallel, and therefore by equal and contrary Refractions destroy one anothers Effects, the incident Light FM must be of the same Kind and Nature with the emergent Light MO, and therefore doth also consist of Rays differently refrangible. These two Lights FM and MO, before the most refrangible Rays are separated out of the emergent Light MO, agree in Colour, and in all other Properties so far as my Observation reaches, and therefore are deservedly reputed of the same Nature and Constitution, and by Consequence the one is compounded as well as the other. But after the most refrangible Rays begin to be totally reflected, and thereby separated out of the emergent Light MO, that Light changes its Colour from white to a dilute and faint yellow, a pretty good orange, a very full red successively, and then totally vanishes. For after the most refrangible Rays which paint the Paper at P with a purple Colour, are by a total Reflexion taken out of the beam of Light MO, the rest of the

Colours which appear on the Paper at R and T being mix'd in the Light MO compound there a faint yellow, and after the blue and part of the green which appear on the Paper between P and R are taken away, the rest which appear between R and T (that is the yellow, orange, red and a little green) being mixed in the beam MO compound there an orange; and when all the Rays are by Reflexion taken out of the beam MO, except the least refrangible, which at T appear of a full red, their Colour is the same in that beam MO as afterwards at T, the Refraction of the Prism HJK serving only to separate the differently refrangible Rays, without making any Alteration in their Colours, as shall be more fully proved hereafter. All which confirms as well the first Proposition as the second.

Scholium. If this Experiment and the former be conjoined and made one by applying a fourth Prism VXY [in *Fig.* 22.] to refract the reflected beam MN towards *tp*, the Conclusion will be clearer. For then the Light N*p* which in the fourth Prism is more refracted, will become fuller and stronger when the Light OP, which in the third Prism HJK is more refracted, vanishes at P; and afterwards when the less refracted Light OT vanishes at T, the less refracted Light N*t* will become increased whilst the more refracted Light at *p* receives no farther increase. And as the trajected beam MO in vanishing is always of such a Colour as ought to result from the mixture of the Colours which fall upon the Paper PT, so is the reflected beam MN always of such a Colour as ought to result from the mixture of the Colours which fall upon the Paper *pt*. For when the most refrangible Rays are by a total Reflexion taken out of the beam MO, and leave that beam of an orange Colour, the Excess of those Rays in the reflected Light, does not only make the violet, indigo and blue at *p* more full, but also makes the beam MN change from the yellowish Colour of the Sun's Light, to a pale white inclining to blue, and afterward recover its yellowish Colour again, so soon as all the rest of the transmitted Light MOT is reflected.

Now seeing that in all this variety of Experiments, whether the Trial be made in Light reflected, and that either from natural Bodies, as in the first and second Experiment, or specular, as in the ninth; or in Light refracted, and that either before the unequally refracted Rays are by diverging separated from one another, and losing their whiteness which they have altogether, appear severally of several Colours, as in the fifth Experiment; or after they are separated from one another, and appear colour'd as in the sixth, seventh,

and eighth Experiments; or in Light trajected through parallel Superficies, destroying each others Effects, as in the tenth Experiment; there are always found Rays, which at equal Incidences on the same Medium suffer unequal Refractions, and that without any splitting or dilating of single Rays, or contingence in the inequality of the Refractions, as is proved in the fifth and sixth Experiments. And seeing the Rays which differ in Refrangibility may be parted and sorted from one another, and that either by Refraction as in the third Experiment, or by Reflexion as in the tenth, and then the several sorts apart at equal Incidences suffer unequal Refractions, and those sorts are more refracted than others after Separation, which were more refracted before it, as in the sixth and following Experiments, and if the Sun's Light be trajected through three or more cross Prisms successively, those Rays which in the first Prism are refracted more than others, are in all the following Prisms refracted more than others in the same Rate and Proportion, as appears by the fifth Experiment; it's manifest that the Sun's Light is an heterogeneous Mixture of Rays, some of which are constantly more refrangible than others, as was proposed.

PROP. III. Theor. III.

The Sun's Light consists of Rays differing in Reflexibility, and those Rays are more reflexible than others which are more refrangible.

This is manifest by the ninth and tenth Experiments: For in the ninth Experiment, by turning the Prism about its Axis, until the Rays within it which in going out into the Air were refracted by its Base, became so oblique to that Base, as to begin to be totally reflected thereby; those Rays became first of all totally reflected, which before at equal Incidences with the rest had suffered the greatest Refraction. And the same thing happens in the Reflexion made by the common Base of the two Prisms in the tenth Experiment.

PROP. IV. Prob. I.

To separate from one another the heterogeneous Rays of compound Light.

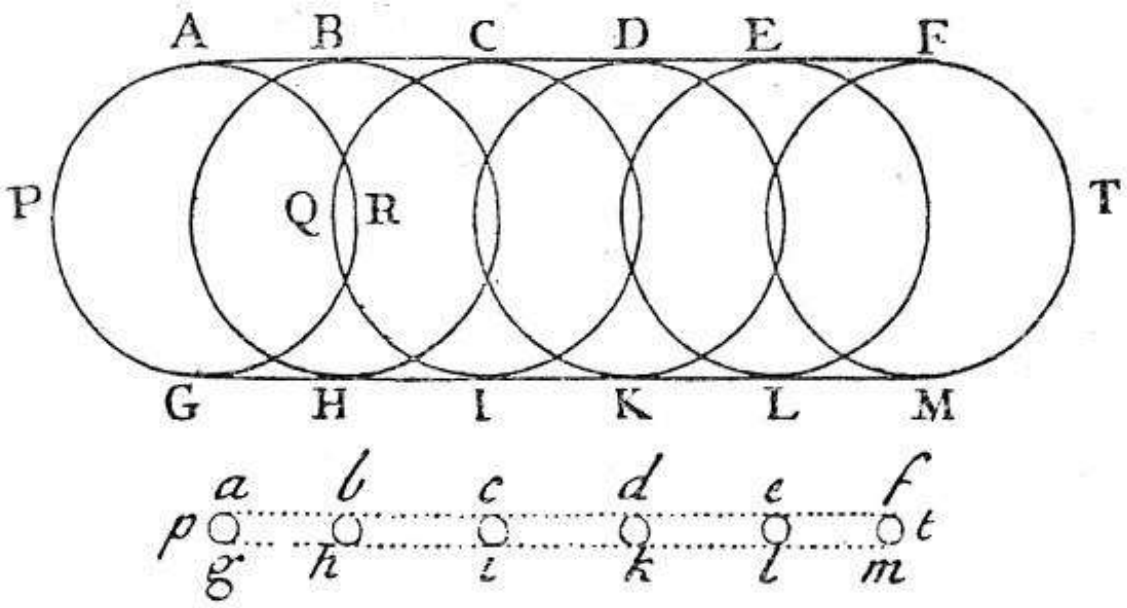


Fig. 23.

The heterogeneous Rays are in some measure separated from one another by the Refraction of the Prism in the third Experiment, and in the fifth Experiment, by taking away the Penumbra from the rectilinear sides of the coloured Image, that Separation in those very rectilinear sides or straight edges of the Image becomes perfect. But in all places between those rectilinear edges, those innumerable Circles there described, which are severally illuminated by homogeneal Rays, by interfering with one another, and being every where commix'd, do render the Light sufficiently compound. But if these Circles, whilst their Centers keep their Distances and Positions, could be made less in Diameter, their interfering one with another, and by Consequence the Mixture of the heterogeneous Rays would be proportionally diminish'd. In the twenty third Figure let AG, BH, CJ, DK, EL, FM be the Circles which so many sorts of Rays flowing from the same disque of the Sun, do in the third Experiment illuminate; of all which and innumerable other intermediate ones lying in a continual Series between the two rectilinear and parallel edges of the Sun's oblong Image PT, that Image is compos'd, as was explained in the fifth Experiment. And let *ag*, *bh*, *ci*, *dk*, *el*, *fm* be so many less Circles lying in a like continual Series between two parallel right Lines *af* and *gm* with the same distances between their Centers, and illuminated by the same sorts of Rays, that is the Circle *ag* with the same sort by which the corresponding Circle AG was illuminated, and the Circle *bh* with the same sort by which the corresponding Circle BH was

illuminated, and the rest of the Circles *ci*, *dk*, *el*, *fm* respectively, with the same sorts of Rays by which the several corresponding Circles CJ, DK, EL, FM were illuminated. In the Figure PT composed of the greater Circles, three of those Circles AG, BH, CJ, are so expanded into one another, that the three sorts of Rays by which those Circles are illuminated, together with other innumerable sorts of intermediate Rays, are mixed at QR in the middle of the Circle BH. And the like Mixture happens throughout almost the whole length of the Figure PT. But in the Figure *pt* composed of the less Circles, the three less Circles *ag*, *bh*, *ci*, which answer to those three greater, do not extend into one another; nor are there any where mingled so much as any two of the three sorts of Rays by which those Circles are illuminated, and which in the Figure PT are all of them intermingled at BH.

Now he that shall thus consider it, will easily understand that the Mixture is diminished in the same Proportion with the Diameters of the Circles. If the Diameters of the Circles whilst their Centers remain the same, be made three times less than before, the Mixture will be also three times less; if ten times less, the Mixture will be ten times less, and so of other Proportions. That is, the Mixture of the Rays in the greater Figure PT will be to their Mixture in the less *pt*, as the Latitude of the greater Figure is to the Latitude of the less. For the Latitudes of these Figures are equal to the Diameters of their Circles. And hence it easily follows, that the Mixture of the Rays in the refracted Spectrum *pt* is to the Mixture of the Rays in the direct and immediate Light of the Sun, as the breadth of that Spectrum is to the difference between the length and breadth of the same Spectrum.

So then, if we would diminish the Mixture of the Rays, we are to diminish the Diameters of the Circles. Now these would be diminished if the Sun's Diameter to which they answer could be made less than it is, or (which comes to the same Purpose) if without Doors, at a great distance from the Prism towards the Sun, some opake Body were placed, with a round hole in the middle of it, to intercept all the Sun's Light, excepting so much as coming from the middle of his Body could pass through that Hole to the Prism. For so the Circles AG, BH, and the rest, would not any longer answer to the whole Disque of the Sun, but only to that Part of it which could be seen from the Prism through that Hole, that it is to the apparent Magnitude of that Hole view'd from the Prism. But that these Circles may answer more distinctly to that Hole, a Lens is to be placed by the Prism to cast the Image

of the Hole, (that is, every one of the Circles AG, BH, &c.) distinctly upon the Paper at PT, after such a manner, as by a Lens placed at a Window, the Species of Objects abroad are cast distinctly upon a Paper within the Room, and the rectilinear Sides of the oblong Solar Image in the fifth Experiment became distinct without any Penumbra. If this be done, it will not be necessary to place that Hole very far off, no not beyond the Window. And therefore instead of that Hole, I used the Hole in the Window-shut, as follows.

Exper. 11. In the Sun's Light let into my darken'd Chamber through a small round Hole in my Window-shut, at about ten or twelve Feet from the Window, I placed a Lens, by which the Image of the Hole might be distinctly cast upon a Sheet of white Paper, placed at the distance of six, eight, ten, or twelve Feet from the Lens. For, according to the difference of the Lenses I used various distances, which I think not worth the while to describe. Then immediately after the Lens I placed a Prism, by which the trajected Light might be refracted either upwards or sideways, and thereby the round Image, which the Lens alone did cast upon the Paper might be drawn out into a long one with Parallel Sides, as in the third Experiment. This oblong Image I let fall upon another Paper at about the same distance from the Prism as before, moving the Paper either towards the Prism or from it, until I found the just distance where the Rectilinear Sides of the Image became most distinct. For in this Case, the Circular Images of the Hole, which compose that Image after the same manner that the Circles *ag*, *bh*, *ci*, &c. do the Figure *pt* [in *Fig.* 23.] were terminated most distinctly without any Penumbra, and therefore extended into one another the least that they could, and by consequence the Mixture of the heterogeneous Rays was now the least of all. By this means I used to form an oblong Image (such as is *pt*) [in *Fig.* 23, and 24.] of Circular Images of the Hole, (such as are *ag*, *bh*, *ci*, &c.) and by using a greater or less Hole in the Window-shut, I made the Circular Images *ag*, *bh*, *ci*, &c. of which it was formed, to become greater or less at pleasure, and thereby the Mixture of the Rays in the Image *pt* to be as much, or as little as I desired.

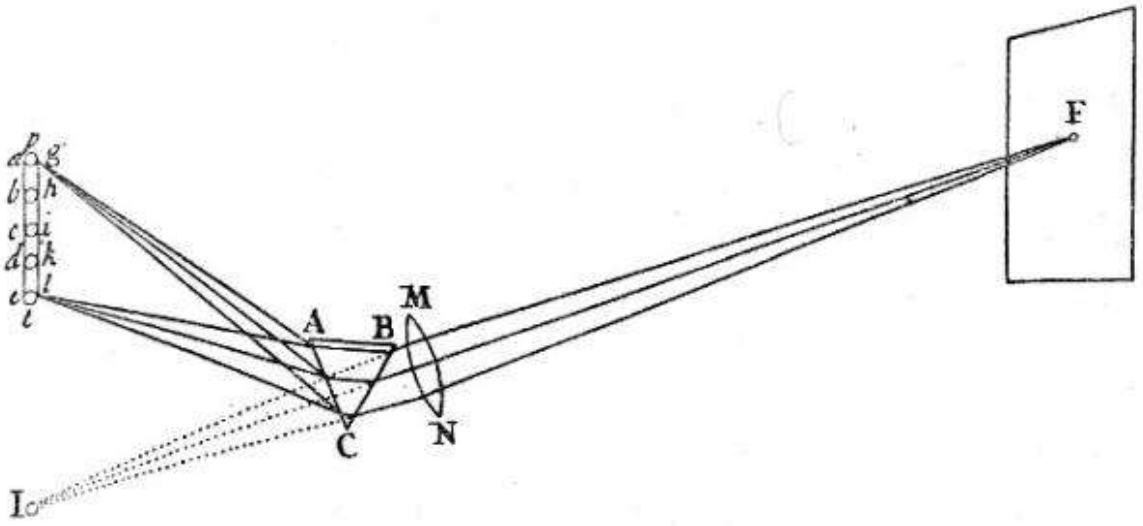


Fig. 24.

Illustration. In the twenty-fourth Figure, F represents the Circular Hole in the Window-shut, MN the Lens, whereby the Image or Species of that Hole is cast distinctly upon a Paper at J, ABC the Prism, whereby the Rays are at their emerging out of the Lens refracted from J towards another Paper at *pt*, and the round Image at J is turned into an oblong Image *pt* falling on that other Paper. This Image *pt* consists of Circles placed one after another in a Rectilinear Order, as was sufficiently explained in the fifth Experiment; and these Circles are equal to the Circle J, and consequently answer in magnitude to the Hole F; and therefore by diminishing that Hole they may be at pleasure diminished, whilst their Centers remain in their Places. By this means I made the Breadth of the Image *pt* to be forty times, and sometimes sixty or seventy times less than its Length. As for instance, if the Breadth of the Hole F be one tenth of an Inch, and MF the distance of the Lens from the Hole be 12 Feet; and if *p*B or *p*M the distance of the Image *pt* from the Prism or Lens be 10 Feet, and the refracting Angle of the Prism be 62 Degrees, the Breadth of the Image *pt* will be one twelfth of an Inch, and the Length about six Inches, and therefore the Length to the Breadth as 72 to 1, and by consequence the Light of this Image 71 times less compound than the Sun's direct Light. And Light thus far simple and homogeneal, is sufficient for trying all the Experiments in this Book about simple Light. For the Composition of heterogeneal Rays is in this Light so little, that it is scarce to be discovered and perceiv'd by Sense, except perhaps in the indigo and violet. For these being dark Colours do easily suffer a sensible Allay by that

little scattering Light which uses to be refracted irregularly by the Inequalities of the Prism.

Yet instead of the Circular Hole F, 'tis better to substitute an oblong Hole shaped like a long Parallelogram with its Length parallel to the Prism ABC. For if this Hole be an Inch or two long, and but a tenth or twentieth Part of an Inch broad, or narrower; the Light of the Image *pt* will be as simple as before, or simpler, and the Image will become much broader, and therefore more fit to have Experiments try'd in its Light than before.

Instead of this Parallelogram Hole may be substituted a triangular one of equal Sides, whose Base, for instance, is about the tenth Part of an Inch, and its Height an Inch or more. For by this means, if the Axis of the Prism be parallel to the Perpendicular of the Triangle, the Image *pt* [in *Fig.* 25.] will now be form'd of equicrural Triangles *ag*, *bh*, *ci*, *dk*, *el*, *fm*, &c. and innumerable other intermediate ones answering to the triangular Hole in Shape and Bigness, and lying one after another in a continual Series between two Parallel Lines *af* and *gm*. These Triangles are a little intermingled at their Bases, but not at their Vertices; and therefore the Light on the brighter Side *af* of the Image, where the Bases of the Triangles are, is a little compounded, but on the darker Side *gm* is altogether uncompounded, and in all Places between the Sides the Composition is proportional to the distances of the Places from that obscurer Side *gm*. And having a Spectrum *pt* of such a Composition, we may try Experiments either in its stronger and less simple Light near the Side *af*, or in its weaker and simpler Light near the other Side *gm*, as it shall seem most convenient.

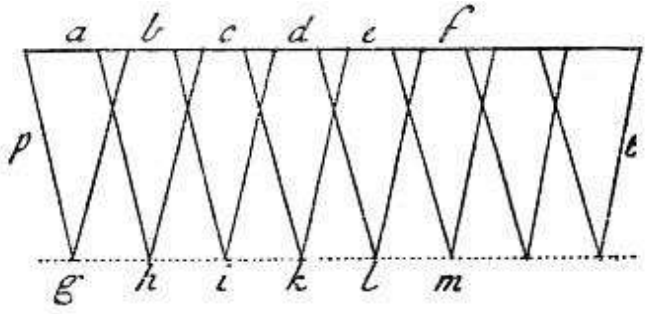


Fig. 25.

But in making Experiments of this kind, the Chamber ought to be made as dark as can be, lest any Foreign Light mingle it self with the Light of the Spectrum *pt*, and render it compound; especially if we would try Experiments in the more simple Light next the Side *gm* of the Spectrum; which being fainter, will have a less proportion to the Foreign Light; and so

by the mixture of that Light be more troubled, and made more compound. The Lens also ought to be good, such as may serve for optical Uses, and the Prism ought to have a large Angle, suppose of 65 or 70 Degrees, and to be well wrought, being made of Glass free from Bubbles and Veins, with its Sides not a little convex or concave, as usually happens, but truly plane, and its Polish elaborate, as in working Optick-glasses, and not such as is usually wrought with Putty, whereby the edges of the Sand-holes being worn away, there are left all over the Glass a numberless Company of very little convex polite Risings like Waves. The edges also of the Prism and Lens, so far as they may make any irregular Refraction, must be covered with a black Paper glewed on. And all the Light of the Sun's Beam let into the Chamber, which is useless and unprofitable to the Experiment, ought to be intercepted with black Paper, or other black Obstacles. For otherwise the useless Light being reflected every way in the Chamber, will mix with the oblong Spectrum, and help to disturb it. In trying these Things, so much diligence is not altogether necessary, but it will promote the Success of the Experiments, and by a very scrupulous Examiner of Things deserves to be apply'd. It's difficult to get Glass Prisms fit for this Purpose, and therefore I used sometimes prismatick Vessels made with pieces of broken Looking-glasses, and filled with Rain Water. And to increase the Refraction, I sometimes impregnated the Water strongly with *Saccharum Saturni*.

PROP. V. Theor. IV.

Homogeneal Light is refracted regularly without any Dilatation splitting or shattering of the Rays, and the confused Vision of Objects seen through refracting Bodies by heterogeneal Light arises from the different Refrangibility of several sorts of Rays.

The first Part of this Proposition has been already sufficiently proved in the fifth Experiment, and will farther appear by the Experiments which follow.

Exper. 12. In the middle of a black Paper I made a round Hole about a fifth or sixth Part of an Inch in diameter. Upon this Paper I caused the Spectrum of homogeneal Light described in the former Proposition, so to fall, that some part of the Light might pass through the Hole of the Paper. This transmitted part of the Light I refracted with a Prism placed behind the

Paper, and letting this refracted Light fall perpendicularly upon a white Paper two or three Feet distant from the Prism, I found that the Spectrum formed on the Paper by this Light was not oblong, as when 'tis made (in the third Experiment) by refracting the Sun's compound Light, but was (so far as I could judge by my Eye) perfectly circular, the Length being no greater than the Breadth. Which shews, that this Light is refracted regularly without any Dilatation of the Rays.

Exper. 13. In the homogeneal Light I placed a Paper Circle of a quarter of an Inch in diameter, and in the Sun's unrefracted heterogeneal white Light I placed another Paper Circle of the same Bigness. And going from the Papers to the distance of some Feet, I viewed both Circles through a Prism. The Circle illuminated by the Sun's heterogeneal Light appeared very oblong, as in the fourth Experiment, the Length being many times greater than the Breadth; but the other Circle, illuminated with homogeneal Light, appeared circular and distinctly defined, as when 'tis view'd with the naked Eye. Which proves the whole Proposition.

Exper. 14. In the homogeneal Light I placed Flies, and such-like minute Objects, and viewing them through a Prism, I saw their Parts as distinctly defined, as if I had viewed them with the naked Eye. The same Objects placed in the Sun's unrefracted heterogeneal Light, which was white, I viewed also through a Prism, and saw them most confusedly defined, so that I could not distinguish their smaller Parts from one another. I placed also the Letters of a small print, one while in the homogeneal Light, and then in the heterogeneal, and viewing them through a Prism, they appeared in the latter Case so confused and indistinct, that I could not read them; but in the former they appeared so distinct, that I could read readily, and thought I saw them as distinct, as when I view'd them with my naked Eye. In both Cases I view'd the same Objects, through the same Prism at the same distance from me, and in the same Situation. There was no difference, but in the Light by which the Objects were illuminated, and which in one Case was simple, and in the other compound; and therefore, the distinct Vision in the former Case, and confused in the latter, could arise from nothing else than from that difference of the Lights. Which proves the whole Proposition.

And in these three Experiments it is farther very remarkable, that the Colour of homogeneal Light was never changed by the Refraction.

PROP. VI. Theor. V.

The Sine of Incidence of every Ray considered apart, is to its Sine of Refraction in a given Ratio.

That every Ray consider'd apart, is constant to it self in some degree of Refrangibility, is sufficiently manifest out of what has been said. Those Rays, which in the first Refraction, are at equal Incidences most refracted, are also in the following Refractions at equal Incidences most refracted; and so of the least refrangible, and the rest which have any mean Degree of Refrangibility, as is manifest by the fifth, sixth, seventh, eighth, and ninth Experiments. And those which the first Time at like Incidences are equally refracted, are again at like Incidences equally and uniformly refracted, and that whether they be refracted before they be separated from one another, as in the fifth Experiment, or whether they be refracted apart, as in the twelfth, thirteenth and fourteenth Experiments. The Refraction therefore of every Ray apart is regular, and what Rule that Refraction observes we are now to shew.[E]

The late Writers in Opticks teach, that the Sines of Incidence are in a given Proportion to the Sines of Refraction, as was explained in the fifth Axiom, and some by Instruments fitted for measuring of Refractions, or otherwise experimentally examining this Proportion, do acquaint us that they have found it accurate. But whilst they, not understanding the different Refrangibility of several Rays, conceived them all to be refracted according to one and the same Proportion, 'tis to be presumed that they adapted their Measures only to the middle of the refracted Light; so that from their Measures we may conclude only that the Rays which have a mean Degree of Refrangibility, that is, those which when separated from the rest appear green, are refracted according to a given Proportion of their Sines. And therefore we are now to shew, that the like given Proportions obtain in all the rest. That it should be so is very reasonable, Nature being ever conformable to her self; but an experimental Proof is desired. And such a Proof will be had, if we can shew that the Sines of Refraction of Rays differently refrangible are one to another in a given Proportion when their Sines of Incidence are equal. For, if the Sines of Refraction of all the Rays are in given Proportions to the Sine of Refractions of a Ray which has a mean Degree of Refrangibility, and this Sine is in a given Proportion to the equal

Sines of Incidence, those other Sines of Refraction will also be in given Proportions to the equal Sines of Incidence. Now, when the Sines of Incidence are equal, it will appear by the following Experiment, that the Sines of Refraction are in a given Proportion to one another.

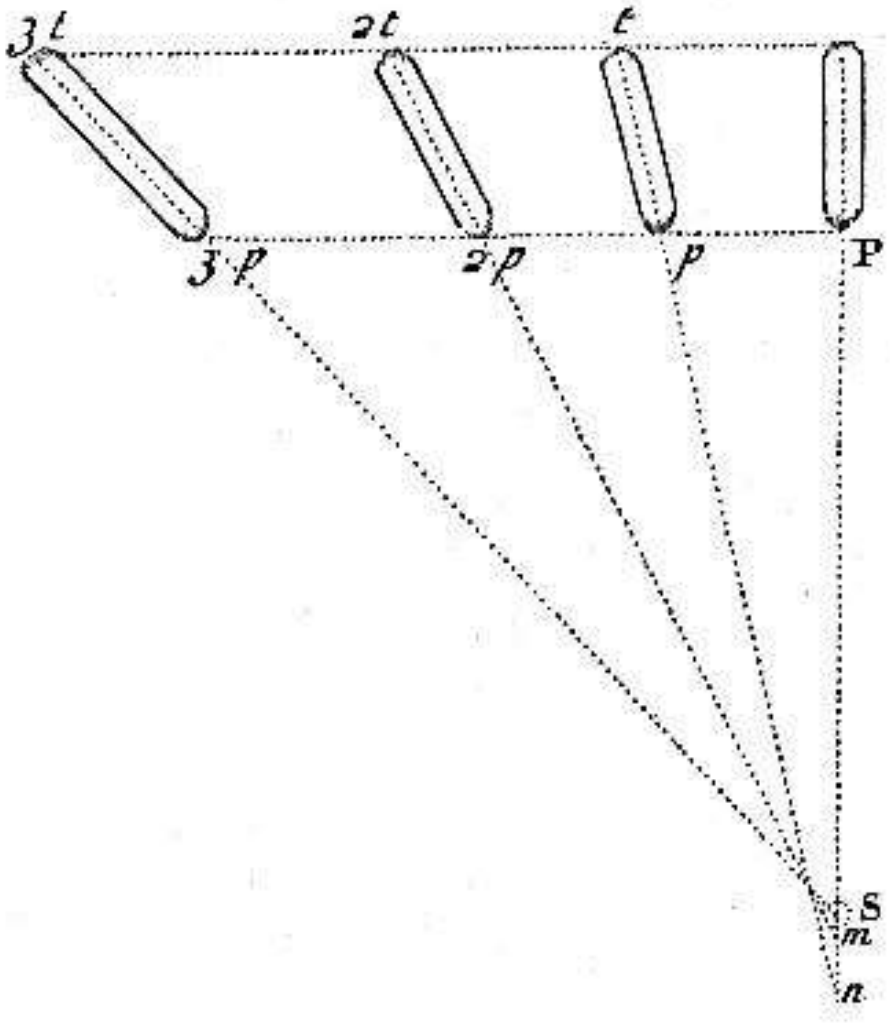


Fig. 26.

Exper. 15. The Sun shining into a dark Chamber through a little round Hole in the Window-shut, let S [in *Fig.* 26.] represent his round white Image painted on the opposite Wall by his direct Light, PT his oblong coloured Image made by refracting that Light with a Prism placed at the Window; and *pt*, or *2p 2t*, *3p 3t*, his oblong colour'd Image made by refracting again the same Light sideways with a second Prism placed immediately after the first in a cross Position to it, as was explained in the fifth Experiment; that is to say, *pt* when the Refraction of the second Prism is small, *2p 2t* when its Refraction is greater, and *3p 3t* when it is greatest. For such will be the diversity of the Refractions, if the refracting Angle of the second Prism be of

various Magnitudes; suppose of fifteen or twenty Degrees to make the Image *pt*, of thirty or forty to make the Image *2p 2t*, and of sixty to make the Image *3p 3t*. But for want of solid Glass Prisms with Angles of convenient Bignesses, there may be Vessels made of polished Plates of Glass cemented together in the form of Prisms and filled with Water. These things being thus ordered, I observed that all the solar Images or coloured Spectrums PT, *pt*, *2p 2t*, *3p 3t* did very nearly converge to the place S on which the direct Light of the Sun fell and painted his white round Image when the Prisms were taken away. The Axis of the Spectrum PT, that is the Line drawn through the middle of it parallel to its rectilinear Sides, did when produced pass exactly through the middle of that white round Image S. And when the Refraction of the second Prism was equal to the Refraction of the first, the refracting Angles of them both being about 60 Degrees, the Axis of the Spectrum *3p 3t* made by that Refraction, did when produced pass also through the middle of the same white round Image S. But when the Refraction of the second Prism was less than that of the first, the produced Axes of the Spectrums *tp* or *2t 2p* made by that Refraction did cut the produced Axis of the Spectrum TP in the points *m* and *n*, a little beyond the Center of that white round Image S. Whence the proportion of the Line 3*t*T to the Line 3*p*P was a little greater than the Proportion of 2*t*T or 2*p*P, and this Proportion a little greater than that of *t*T to *p*P. Now when the Light of the Spectrum PT falls perpendicularly upon the Wall, those Lines 3*t*T, 3*p*P, and 2*t*T, and 2*p*P, and *t*T, *p*P, are the Tangents of the Refractions, and therefore by this Experiment the Proportions of the Tangents of the Refractions are obtained, from whence the Proportions of the Sines being derived, they come out equal, so far as by viewing the Spectrums, and using some mathematical Reasoning I could estimate. For I did not make an accurate Computation. So then the Proposition holds true in every Ray apart, so far as appears by Experiment. And that it is accurately true, may be demonstrated upon this Supposition. *That Bodies refract Light by acting upon its Rays in Lines perpendicular to their Surfaces.* But in order to this Demonstration, I must distinguish the Motion of every Ray into two Motions, the one perpendicular to the refracting Surface, the other parallel to it, and concerning the perpendicular Motion lay down the following Proposition.

If any Motion or moving thing whatsoever be incident with any Velocity on any broad and thin space terminated on both sides by two parallel Planes,

and in its Passage through that space be urged perpendicularly towards the farther Plane by any force which at given distances from the Plane is of given Quantities; the perpendicular velocity of that Motion or Thing, at its emerging out of that space, shall be always equal to the square Root of the sum of the square of the perpendicular velocity of that Motion or Thing at its Incidence on that space; and of the square of the perpendicular velocity which that Motion or Thing would have at its Emergence, if at its Incidence its perpendicular velocity was infinitely little.

And the same Proposition holds true of any Motion or Thing perpendicularly retarded in its passage through that space, if instead of the sum of the two Squares you take their difference. The Demonstration Mathematicians will easily find out, and therefore I shall not trouble the Reader with it.

Suppose now that a Ray coming most obliquely in the Line MC [in *Fig.* 1.] be refracted at C by the Plane RS into the Line CN, and if it be required to find the Line CE, into which any other Ray AC shall be refracted; let MC, AD, be the Sines of Incidence of the two Rays, and NG, EF, their Sines of Refraction, and let the equal Motions of the incident Rays be represented by the equal Lines MC and AC, and the Motion MC being considered as parallel to the refracting Plane, let the other Motion AC be distinguished into two Motions AD and DC, one of which AD is parallel, and the other DC perpendicular to the refracting Surface. In like manner, let the Motions of the emerging Rays be distinguish'd into two, whereof the perpendicular ones are MC/NG × CG and AD/EF × CF. And if the force of the refracting Plane begins to act upon the Rays either in that Plane or at a certain distance from it on the one side, and ends at a certain distance from it on the other side, and in all places between those two limits acts upon the Rays in Lines perpendicular to that refracting Plane, and the Actions upon the Rays at equal distances from the refracting Plane be equal, and at unequal ones either equal or unequal according to any rate whatever; that Motion of the Ray which is parallel to the refracting Plane, will suffer no Alteration by that Force; and that Motion which is perpendicular to it will be altered according to the rule of the foregoing Proposition. If therefore for the perpendicular velocity of the emerging Ray CN you write MC/NG × CG as above, then the perpendicular velocity of any other emerging Ray CE which was AD/EF × CF, will be equal to the square Root of CDq + (*MCq/NGq* × CGq). And by

squaring these Equals, and adding to them the Equals AD*q* and MC*q* - CD*q*, and dividing the Sums by the Equals CF*q* + EF*q* and CG*q* + NG*q*, you will have *MCq/NGq* equal to *ADq/EFq*. Whence AD, the Sine of Incidence, is to EF the Sine of Refraction, as MC to NG, that is, in a given *ratio*. And this Demonstration being general, without determining what Light is, or by what kind of Force it is refracted, or assuming any thing farther than that the refracting Body acts upon the Rays in Lines perpendicular to its Surface; I take it to be a very convincing Argument of the full truth of this Proposition.

So then, if the *ratio* of the Sines of Incidence and Refraction of any sort of Rays be found in any one case, 'tis given in all cases; and this may be readily found by the Method in the following Proposition.

PROP. VII. Theor. VI.

The Perfection of Telescopes is impeded by the different Refrangibility of the Rays of Light.

The Imperfection of Telescopes is vulgarly attributed to the spherical Figures of the Glasses, and therefore Mathematicians have propounded to figure them by the conical Sections. To shew that they are mistaken, I have inserted this Proposition; the truth of which will appear by the measure of the Refractions of the several sorts of Rays; and these measures I thus determine.

In the third Experiment of this first Part, where the refracting Angle of the Prism was 62-1/2 Degrees, the half of that Angle 31 deg. 15 min. is the Angle of Incidence of the Rays at their going out of the Glass into the Air[F]; and the Sine of this Angle is 5188, the Radius being 10000. When the Axis of this Prism was parallel to the Horizon, and the Refraction of the Rays at their Incidence on this Prism equal to that at their Emergence out of it, I observed with a Quadrant the Angle which the mean refrangible Rays, (that is those which went to the middle of the Sun's coloured Image) made with the Horizon, and by this Angle and the Sun's altitude observed at the same time, I found the Angle which the emergent Rays contained with the incident to be 44 deg. and 40 min. and the half of this Angle added to the Angle of Incidence 31 deg. 15 min. makes the Angle of Refraction, which is therefore 53 deg. 35 min. and its Sine 8047. These are the Sines of Incidence and Refraction of the mean refrangible Rays, and their Proportion in round

Numbers is 20 to 31. This Glass was of a Colour inclining to green. The last of the Prisms mentioned in the third Experiment was of clear white Glass. Its refracting Angle 63-1/2 Degrees. The Angle which the emergent Rays contained, with the incident 45 deg. 50 min. The Sine of half the first Angle 5262. The Sine of half the Sum of the Angles 8157. And their Proportion in round Numbers 20 to 31, as before.

From the Length of the Image, which was about 9-3/4 or 10 Inches, subduct its Breadth, which was 2-1/8 Inches, and the Remainder 7-3/4 Inches would be the Length of the Image were the Sun but a Point, and therefore subtends the Angle which the most and least refrangible Rays, when incident on the Prism in the same Lines, do contain with one another after their Emergence. Whence this Angle is 2 deg. 0′. 7′′. For the distance between the Image and the Prism where this Angle is made, was 18-1/2 Feet, and at that distance the Chord 7-3/4 Inches subtends an Angle of 2 deg. 0′. 7 ′′. Now half this Angle is the Angle which these emergent Rays contain with the emergent mean refrangible Rays, and a quarter thereof, that is 30′. 2′′. may be accounted the Angle which they would contain with the same emergent mean refrangible Rays, were they co-incident to them within the Glass, and suffered no other Refraction than that at their Emergence. For, if two equal Refractions, the one at the Incidence of the Rays on the Prism, the other at their Emergence, make half the Angle 2 deg. 0′. 7′′. then one of those Refractions will make about a quarter of that Angle, and this quarter added to, and subducted from the Angle of Refraction of the mean refrangible Rays, which was 53 deg. 35′, gives the Angles of Refraction of the most and least refrangible Rays 54 deg. 5′ 2′′, and 53 deg. 4′ 58′′, whose Sines are 8099 and 7995, the common Angle of Incidence being 31 deg. 15′, and its Sine 5188; and these Sines in the least round Numbers are in proportion to one another, as 78 and 77 to 50.

Now, if you subduct the common Sine of Incidence 50 from the Sines of Refraction 77 and 78, the Remainders 27 and 28 shew, that in small Refractions the Refraction of the least refrangible Rays is to the Refraction of the most refrangible ones, as 27 to 28 very nearly, and that the difference of the Refractions of the least refrangible and most refrangible Rays is about the 27-1/2th Part of the whole Refraction of the mean refrangible Rays.

Whence they that are skilled in Opticks will easily understand,[G] that the Breadth of the least circular Space, into which Object-glasses of Telescopes

can collect all sorts of Parallel Rays, is about the 27-1/2th Part of half the Aperture of the Glass, or 55th Part of the whole Aperture; and that the Focus of the most refrangible Rays is nearer to the Object-glass than the Focus of the least refrangible ones, by about the 27-1/2th Part of the distance between the Object-glass and the Focus of the mean refrangible ones.

And if Rays of all sorts, flowing from any one lucid Point in the Axis of any convex Lens, be made by the Refraction of the Lens to converge to Points not too remote from the Lens, the Focus of the most refrangible Rays shall be nearer to the Lens than the Focus of the least refrangible ones, by a distance which is to the 27-1/2th Part of the distance of the Focus of the mean refrangible Rays from the Lens, as the distance between that Focus and the lucid Point, from whence the Rays flow, is to the distance between that lucid Point and the Lens very nearly.

Now to examine whether the Difference between the Refractions, which the most refrangible and the least refrangible Rays flowing from the same Point suffer in the Object-glasses of Telescopes and such-like Glasses, be so great as is here described, I contrived the following Experiment.

Exper. 16. The Lens which I used in the second and eighth Experiments, being placed six Feet and an Inch distant from any Object, collected the Species of that Object by the mean refrangible Rays at the distance of six Feet and an Inch from the Lens on the other side. And therefore by the foregoing Rule, it ought to collect the Species of that Object by the least refrangible Rays at the distance of six Feet and 3-2/3 Inches from the Lens, and by the most refrangible ones at the distance of five Feet and 10-1/3 Inches from it: So that between the two Places, where these least and most refrangible Rays collect the Species, there may be the distance of about 5-1/3 Inches. For by that Rule, as six Feet and an Inch (the distance of the Lens from the lucid Object) is to twelve Feet and two Inches (the distance of the lucid Object from the Focus of the mean refrangible Rays) that is, as One is to Two; so is the 27-1/2th Part of six Feet and an Inch (the distance between the Lens and the same Focus) to the distance between the Focus of the most refrangible Rays and the Focus of the least refrangible ones, which is therefore 5-17/55 Inches, that is very nearly 5-1/3 Inches. Now to know whether this Measure was true, I repeated the second and eighth Experiment with coloured Light, which was less compounded than that I there made use of: For I now separated the heterogeneous Rays from one another by the

Method I described in the eleventh Experiment, so as to make a coloured Spectrum about twelve or fifteen Times longer than broad. This Spectrum I cast on a printed Book, and placing the above-mentioned Lens at the distance of six Feet and an Inch from this Spectrum to collect the Species of the illuminated Letters at the same distance on the other side, I found that the Species of the Letters illuminated with blue were nearer to the Lens than those illuminated with deep red by about three Inches, or three and a quarter; but the Species of the Letters illuminated with indigo and violet appeared so confused and indistinct, that I could not read them: Whereupon viewing the Prism, I found it was full of Veins running from one end of the Glass to the other; so that the Refraction could not be regular. I took another Prism therefore which was free from Veins, and instead of the Letters I used two or three Parallel black Lines a little broader than the Strokes of the Letters, and casting the Colours upon these Lines in such manner, that the Lines ran along the Colours from one end of the Spectrum to the other, I found that the Focus where the indigo, or confine of this Colour and violet cast the Species of the black Lines most distinctly, to be about four Inches, or 4-1/4 nearer to the Lens than the Focus, where the deepest red cast the Species of the same black Lines most distinctly. The violet was so faint and dark, that I could not discern the Species of the Lines distinctly by that Colour; and therefore considering that the Prism was made of a dark coloured Glass inclining to green, I took another Prism of clear white Glass; but the Spectrum of Colours which this Prism made had long white Streams of faint Light shooting out from both ends of the Colours, which made me conclude that something was amiss; and viewing the Prism, I found two or three little Bubbles in the Glass, which refracted the Light irregularly. Wherefore I covered that Part of the Glass with black Paper, and letting the Light pass through another Part of it which was free from such Bubbles, the Spectrum of Colours became free from those irregular Streams of Light, and was now such as I desired. But still I found the violet so dark and faint, that I could scarce see the Species of the Lines by the violet, and not at all by the deepest Part of it, which was next the end of the Spectrum. I suspected therefore, that this faint and dark Colour might be allayed by that scattering Light which was refracted, and reflected irregularly, partly by some very small Bubbles in the Glasses, and partly by the Inequalities of their Polish; which Light, tho' it was but little, yet it being of a white Colour, might suffice to affect the Sense

so strongly as to disturb the Phænomena of that weak and dark Colour the violet, and therefore I tried, as in the 12th, 13th, and 14th Experiments, whether the Light of this Colour did not consist of a sensible Mixture of heterogeneous Rays, but found it did not. Nor did the Refractions cause any other sensible Colour than violet to emerge out of this Light, as they would have done out of white Light, and by consequence out of this violet Light had it been sensibly compounded with white Light. And therefore I concluded, that the reason why I could not see the Species of the Lines distinctly by this Colour, was only the Darkness of this Colour, and Thinness of its Light, and its distance from the Axis of the Lens; I divided therefore those Parallel black Lines into equal Parts, by which I might readily know the distances of the Colours in the Spectrum from one another, and noted the distances of the Lens from the Foci of such Colours, as cast the Species of the Lines distinctly, and then considered whether the difference of those distances bear such proportion to 5-1/3 Inches, the greatest Difference of the distances, which the Foci of the deepest red and violet ought to have from the Lens, as the distance of the observed Colours from one another in the Spectrum bear to the greatest distance of the deepest red and violet measured in the Rectilinear Sides of the Spectrum, that is, to the Length of those Sides, or Excess of the Length of the Spectrum above its Breadth. And my Observations were as follows.

When I observed and compared the deepest sensible red, and the Colour in the Confine of green and blue, which at the Rectilinear Sides of the Spectrum was distant from it half the Length of those Sides, the Focus where the Confine of green and blue cast the Species of the Lines distinctly on the Paper, was nearer to the Lens than the Focus, where the red cast those Lines distinctly on it by about 2-1/2 or 2-3/4 Inches. For sometimes the Measures were a little greater, sometimes a little less, but seldom varied from one another above 1/3 of an Inch. For it was very difficult to define the Places of the Foci, without some little Errors. Now, if the Colours distant half the Length of the Image, (measured at its Rectilinear Sides) give 2-1/2 or 2-3/4 Difference of the distances of their Foci from the Lens, then the Colours distant the whole Length ought to give 5 or 5-1/2 Inches difference of those distances.

But here it’s to be noted, that I could not see the red to the full end of the Spectrum, but only to the Center of the Semicircle which bounded that end,

or a little farther; and therefore I compared this red not with that Colour which was exactly in the middle of the Spectrum, or Confine of green and blue, but with that which verged a little more to the blue than to the green: And as I reckoned the whole Length of the Colours not to be the whole Length of the Spectrum, but the Length of its Rectilinear Sides, so compleating the semicircular Ends into Circles, when either of the observed Colours fell within those Circles, I measured the distance of that Colour from the semicircular End of the Spectrum, and subducting half this distance from the measured distance of the two Colours, I took the Remainder for their corrected distance; and in these Observations set down this corrected distance for the difference of the distances of their Foci from the Lens. For, as the Length of the Rectilinear Sides of the Spectrum would be the whole Length of all the Colours, were the Circles of which (as we shewed) that Spectrum consists contracted and reduced to Physical Points, so in that Case this corrected distance would be the real distance of the two observed Colours.

When therefore I farther observed the deepest sensible red, and that blue whose corrected distance from it was 7/12 Parts of the Length of the Rectilinear Sides of the Spectrum, the difference of the distances of their Foci from the Lens was about 3-1/4 Inches, and as 7 to 12, so is 3-1/4 to 5-4/7.

When I observed the deepest sensible red, and that indigo whose corrected distance was 8/12 or 2/3 of the Length of the Rectilinear Sides of the Spectrum, the difference of the distances of their Foci from the Lens, was about 3-2/3 Inches, and as 2 to 3, so is 3-2/3 to 5-1/2.

When I observed the deepest sensible red, and that deep indigo whose corrected distance from one another was 9/12 or 3/4 of the Length of the Rectilinear Sides of the Spectrum, the difference of the distances of their Foci from the Lens was about 4 Inches; and as 3 to 4, so is 4 to 5-1/3.

When I observed the deepest sensible red, and that Part of the violet next the indigo, whose corrected distance from the red was 10/12 or 5/6 of the Length of the Rectilinear Sides of the Spectrum, the difference of the distances of their Foci from the Lens was about 4-1/2 Inches, and as 5 to 6, so is 4-1/2 to 5-2/5. For sometimes, when the Lens was advantageously placed, so that its Axis respected the blue, and all Things else were well ordered, and the Sun shone clear, and I held my Eye very near to the Paper

on which the Lens cast the Species of the Lines, I could see pretty distinctly the Species of those Lines by that Part of the violet which was next the indigo; and sometimes I could see them by above half the violet, For in making these Experiments I had observed, that the Species of those Colours only appear distinct, which were in or near the Axis of the Lens: So that if the blue or indigo were in the Axis, I could see their Species distinctly; and then the red appeared much less distinct than before. Wherefore I contrived to make the Spectrum of Colours shorter than before, so that both its Ends might be nearer to the Axis of the Lens. And now its Length was about 2-1/2 Inches, and Breadth about 1/5 or 1/6 of an Inch. Also instead of the black Lines on which the Spectrum was cast, I made one black Line broader than those, that I might see its Species more easily; and this Line I divided by short cross Lines into equal Parts, for measuring the distances of the observed Colours. And now I could sometimes see the Species of this Line with its Divisions almost as far as the Center of the semicircular violet End of the Spectrum, and made these farther Observations.

When I observed the deepest sensible red, and that Part of the violet, whose corrected distance from it was about 8/9 Parts of the Rectilinear Sides of the Spectrum, the Difference of the distances of the Foci of those Colours from the Lens, was one time 4-2/3, another time 4-3/4, another time 4-7/8 Inches; and as 8 to 9, so are 4-2/3, 4-3/4, 4-7/8, to 5-1/4, 5-11/32, 5-31/64 respectively.

When I observed the deepest sensible red, and deepest sensible violet, (the corrected distance of which Colours, when all Things were ordered to the best Advantage, and the Sun shone very clear, was about 11/12 or 15/16 Parts of the Length of the Rectilinear Sides of the coloured Spectrum) I found the Difference of the distances of their Foci from the Lens sometimes 4-3/4 sometimes 5-1/4, and for the most part 5 Inches or thereabouts; and as 11 to 12, or 15 to 16, so is five Inches to 5-2/2 or 5-1/3 Inches.

And by this Progression of Experiments I satisfied my self, that had the Light at the very Ends of the Spectrum been strong enough to make the Species of the black Lines appear plainly on the Paper, the Focus of the deepest violet would have been found nearer to the Lens, than the Focus of the deepest red, by about 5-1/3 Inches at least. And this is a farther Evidence, that the Sines of Incidence and Refraction of the several sorts of Rays, hold

the same Proportion to one another in the smallest Refractions which they do in the greatest.

My Progress in making this nice and troublesome Experiment I have set down more at large, that they that shall try it after me may be aware of the Circumspection requisite to make it succeed well. And if they cannot make it succeed so well as I did, they may notwithstanding collect by the Proportion of the distance of the Colours of the Spectrum, to the Difference of the distances of their Foci from the Lens, what would be the Success in the more distant Colours by a better trial. And yet, if they use a broader Lens than I did, and fix it to a long strait Staff, by means of which it may be readily and truly directed to the Colour whose Focus is desired, I question not but the Experiment will succeed better with them than it did with me. For I directed the Axis as nearly as I could to the middle of the Colours, and then the faint Ends of the Spectrum being remote from the Axis, cast their Species less distinctly on the Paper than they would have done, had the Axis been successively directed to them.

Now by what has been said, it's certain that the Rays which differ in Refrangibility do not converge to the same Focus; but if they flow from a lucid Point, as far from the Lens on one side as their Foci are on the other, the Focus of the most refrangible Rays shall be nearer to the Lens than that of the least refrangible, by above the fourteenth Part of the whole distance; and if they flow from a lucid Point, so very remote from the Lens, that before their Incidence they may be accounted parallel, the Focus of the most refrangible Rays shall be nearer to the Lens than the Focus of the least refrangible, by about the 27th or 28th Part of their whole distance from it. And the Diameter of the Circle in the middle Space between those two Foci which they illuminate, when they fall there on any Plane, perpendicular to the Axis (which Circle is the least into which they can all be gathered) is about the 55th Part of the Diameter of the Aperture of the Glass. So that 'tis a wonder, that Telescopes represent Objects so distinct as they do. But were all the Rays of Light equally refrangible, the Error arising only from the Sphericalness of the Figures of Glasses would be many hundred times less. For, if the Object-glass of a Telescope be Plano-convex, and the Plane side be turned towards the Object, and the Diameter of the Sphere, whereof this Glass is a Segment, be called D, and the Semi-diameter of the Aperture of the Glass be called S, and the Sine of Incidence out of Glass into Air, be to

the Sine of Refraction as I to R; the Rays which come parallel to the Axis of the Glass, shall in the Place where the Image of the Object is most distinctly made, be scattered all over a little Circle, whose Diameter is *(Rq/Iq)* × *(S cub./D quad.)* very nearly,[H] as I gather by computing the Errors of the Rays by the Method of infinite Series, and rejecting the Terms, whose Quantities are inconsiderable. As for instance, if the Sine of Incidence I, be to the Sine of Refraction R, as 20 to 31, and if D the Diameter of the Sphere, to which the Convex-side of the Glass is ground, be 100 Feet or 1200 Inches, and S the Semi-diameter of the Aperture be two Inches, the Diameter of the little Circle, (that is (*Rq* × *S cub.)/(Iq* × *D quad.*)) will be (31 × 31 × 8)/(20 × 20 × 1200 × 1200) (or 961/72000000) Parts of an Inch. But the Diameter of the little Circle, through which these Rays are scattered by unequal Refrangibility, will be about the 55th Part of the Aperture of the Object-glass, which here is four Inches. And therefore, the Error arising from the Spherical Figure of the Glass, is to the Error arising from the different Refrangibility of the Rays, as 961/72000000 to 4/55, that is as 1 to 5449; and therefore being in comparison so very little, deserves not to be considered.

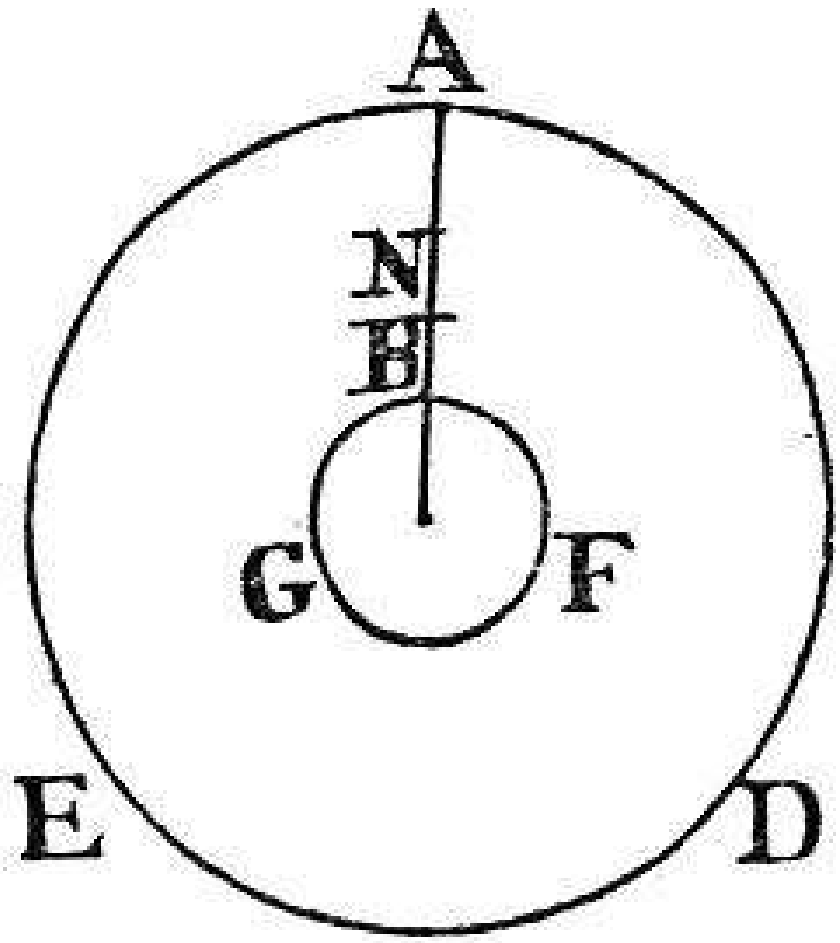


Fig. 27.

But you will say, if the Errors caused by the different Refrangibility be so very great, how comes it to pass, that Objects appear through Telescopes so distinct as they do? I answer, 'tis because the erring Rays are not scattered uniformly over all that Circular Space, but collected infinitely more densely in the Center than in any other Part of the Circle, and in the Way from the Center to the Circumference, grow continually rarer and rarer, so as at the Circumference to become infinitely rare; and by reason of their Rarity are not strong enough to be visible, unless in the Center and very near it. Let ADE [in *Fig.* 27.] represent one of those Circles described with the Center C, and Semi-diameter AC, and let BFG be a smaller Circle concentrick to the former, cutting with its Circumference the Diameter AC in B, and bisect AC in N; and by my reckoning, the Density of the Light in any Place B, will be to its Density in N, as AB to BC; and the whole Light within the lesser Circle BFG, will be to the whole Light within the greater AED, as the Excess of the

Square of AC above the Square of AB, is to the Square of AC. As if BC be the fifth Part of AC, the Light will be four times denser in B than in N, and the whole Light within the less Circle, will be to the whole Light within the greater, as nine to twenty-five. Whence it's evident, that the Light within the less Circle, must strike the Sense much more strongly, than that faint and dilated Light round about between it and the Circumference of the greater.

But it's farther to be noted, that the most luminous of the Prismatick Colours are the yellow and orange. These affect the Senses more strongly than all the rest together, and next to these in strength are the red and green. The blue compared with these is a faint and dark Colour, and the indigo and violet are much darker and fainter, so that these compared with the stronger Colours are little to be regarded. The Images of Objects are therefore to be placed, not in the Focus of the mean refrangible Rays, which are in the Confine of green and blue, but in the Focus of those Rays which are in the middle of the orange and yellow; there where the Colour is most luminous and fulgent, that is in the brightest yellow, that yellow which inclines more to orange than to green. And by the Refraction of these Rays (whose Sines of Incidence and Refraction in Glass are as 17 and 11) the Refraction of Glass and Crystal for Optical Uses is to be measured. Let us therefore place the Image of the Object in the Focus of these Rays, and all the yellow and orange will fall within a Circle, whose Diameter is about the 250th Part of the Diameter of the Aperture of the Glass. And if you add the brighter half of the red, (that half which is next the orange) and the brighter half of the green, (that half which is next the yellow) about three fifth Parts of the Light of these two Colours will fall within the same Circle, and two fifth Parts will fall without it round about; and that which falls without will be spread through almost as much more space as that which falls within, and so in the gross be almost three times rarer. Of the other half of the red and green, (that is of the deep dark red and willow green) about one quarter will fall within this Circle, and three quarters without, and that which falls without will be spread through about four or five times more space than that which falls within; and so in the gross be rarer, and if compared with the whole Light within it, will be about 25 times rarer than all that taken in the gross; or rather more than 30 or 40 times rarer, because the deep red in the end of the Spectrum of Colours made by a Prism is very thin and rare, and the willow green is something rarer than the orange and yellow. The Light of these

Colours therefore being so very much rarer than that within the Circle, will scarce affect the Sense, especially since the deep red and willow green of this Light, are much darker Colours than the rest. And for the same reason the blue and violet being much darker Colours than these, and much more rarified, may be neglected. For the dense and bright Light of the Circle, will obscure the rare and weak Light of these dark Colours round about it, and render them almost insensible. The sensible Image of a lucid Point is therefore scarce broader than a Circle, whose Diameter is the 250th Part of the Diameter of the Aperture of the Object-glass of a good Telescope, or not much broader, if you except a faint and dark misty Light round about it, which a Spectator will scarce regard. And therefore in a Telescope, whose Aperture is four Inches, and Length an hundred Feet, it exceeds not 2″ 45‴, or 3″. And in a Telescope whose Aperture is two Inches, and Length 20 or 30 Feet, it may be 5″ or 6″, and scarce above. And this answers well to Experience: For some Astronomers have found the Diameters of the fix'd Stars, in Telescopes of between 20 and 60 Feet in length, to be about 5″ or 6 ″, or at most 8″ or 10″ in diameter. But if the Eye-Glass be tincted faintly with the Smoak of a Lamp or Torch, to obscure the Light of the Star, the fainter Light in the Circumference of the Star ceases to be visible, and the Star (if the Glass be sufficiently soiled with Smoak) appears something more like a mathematical Point. And for the same Reason, the enormous Part of the Light in the Circumference of every lucid Point ought to be less discernible in shorter Telescopes than in longer, because the shorter transmit less Light to the Eye.

Now, that the fix'd Stars, by reason of their immense Distance, appear like Points, unless so far as their Light is dilated by Refraction, may appear from hence; that when the Moon passes over them and eclipses them, their Light vanishes, not gradually like that of the Planets, but all at once; and in the end of the Eclipse it returns into Sight all at once, or certainly in less time than the second of a Minute; the Refraction of the Moon's Atmosphere a little protracting the time in which the Light of the Star first vanishes, and afterwards returns into Sight.

Now, if we suppose the sensible Image of a lucid Point, to be even 250 times narrower than the Aperture of the Glass; yet this Image would be still much greater than if it were only from the spherical Figure of the Glass. For were it not for the different Refrangibility of the Rays, its breadth in an 100

Foot Telescope whose aperture is 4 Inches, would be but 961/72000000 parts of an Inch, as is manifest by the foregoing Computation. And therefore in this case the greatest Errors arising from the spherical Figure of the Glass, would be to the greatest sensible Errors arising from the different Refrangibility of the Rays as 961/72000000 to 4/250 at most, that is only as 1 to 1200. And this sufficiently shews that it is not the spherical Figures of Glasses, but the different Refrangibility of the Rays which hinders the perfection of Telescopes.

There is another Argument by which it may appear that the different Refrangibility of Rays, is the true cause of the imperfection of Telescopes. For the Errors of the Rays arising from the spherical Figures of Object-glasses, are as the Cubes of the Apertures of the Object Glasses; and thence to make Telescopes of various Lengths magnify with equal distinctness, the Apertures of the Object-glasses, and the Charges or magnifying Powers ought to be as the Cubes of the square Roots of their lengths; which doth not answer to Experience. But the Errors of the Rays arising from the different Refrangibility, are as the Apertures of the Object-glasses; and thence to make Telescopes of various lengths, magnify with equal distinctness, their Apertures and Charges ought to be as the square Roots of their lengths; and this answers to Experience, as is well known. For Instance, a Telescope of 64 Feet in length, with an Aperture of 2-2/3 Inches, magnifies about 120 times, with as much distinctness as one of a Foot in length, with 1/3 of an Inch aperture, magnifies 15 times.

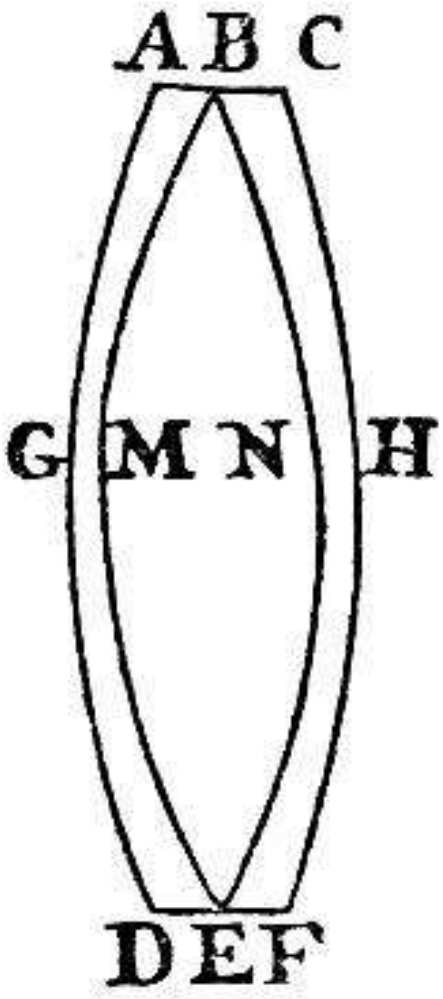


Fig. 28.

Now were it not for this different Refrangibility of Rays, Telescopes might be brought to a greater perfection than we have yet describ'd, by composing the Object-glass of two Glasses with Water between them. Let ADFC [in *Fig.* 28.] represent the Object-glass composed of two Glasses ABED and BEFC, alike convex on the outsides AGD and CHF, and alike concave on the insides BME, BNE, with Water in the concavity BMEN. Let the Sine of Incidence out of Glass into Air be as I to R, and out of Water into Air, as K to R, and by consequence out of Glass into Water, as I to K: and let the Diameter of the Sphere to which the convex sides AGD and CHF are ground be D, and the Diameter of the Sphere to which the concave sides BME and BNE, are ground be to D, as the Cube Root of KK — KI to the Cube Root of RK — RI: and the Refractions on the concave sides of the Glasses, will very much correct the Errors of the Refractions on the convex sides, so far as they arise from the sphericalness of the Figure. And by this

means might Telescopes be brought to sufficient perfection, were it not for the different Refrangibility of several sorts of Rays. But by reason of this different Refrangibility, I do not yet see any other means of improving Telescopes by Refractions alone, than that of increasing their lengths, for which end the late Contrivance of *Hugenius* seems well accommodated. For very long Tubes are cumbersome, and scarce to be readily managed, and by reason of their length are very apt to bend, and shake by bending, so as to cause a continual trembling in the Objects, whereby it becomes difficult to see them distinctly: whereas by his Contrivance the Glasses are readily manageable, and the Object-glass being fix'd upon a strong upright Pole becomes more steady.

Seeing therefore the Improvement of Telescopes of given lengths by Refractions is desperate; I contrived heretofore a Perspective by Reflexion, using instead of an Object-glass a concave Metal. The diameter of the Sphere to which the Metal was ground concave was about 25 *English* Inches, and by consequence the length of the Instrument about six Inches and a quarter. The Eyeglass was Plano-convex, and the diameter of the Sphere to which the convex side was ground was about 1/5 of an Inch, or a little less, and by consequence it magnified between 30 and 40 times. By another way of measuring I found that it magnified about 35 times. The concave Metal bore an Aperture of an Inch and a third part; but the Aperture was limited not by an opake Circle, covering the Limb of the Metal round about, but by an opake Circle placed between the Eyeglass and the Eye, and perforated in the middle with a little round hole for the Rays to pass through to the Eye. For this Circle by being placed here, stopp'd much of the erroneous Light, which otherwise would have disturbed the Vision. By comparing it with a pretty good Perspective of four Feet in length, made with a concave Eyeglass, I could read at a greater distance with my own Instrument than with the Glass. Yet Objects appeared much darker in it than in the Glass, and that partly because more Light was lost by Reflexion in the Metal, than by Refraction in the Glass, and partly because my Instrument was overcharged. Had it magnified but 30 or 25 times, it would have made the Object appear more brisk and pleasant. Two of these I made about 16 Years ago, and have one of them still by me, by which I can prove the truth of what I write. Yet it is not so good as at the first. For the concave has been divers times tarnished and cleared again, by rubbing it with very soft Leather. When I made these an

Artist in *London* undertook to imitate it; but using another way of polishing them than I did, he fell much short of what I had attained to, as I afterwards understood by discoursing the Under-workman he had employed. The Polish I used was in this manner. I had two round Copper Plates, each six Inches in Diameter, the one convex, the other concave, ground very true to one another. On the convex I ground the Object-Metal or Concave which was to be polish'd, 'till it had taken the Figure of the Convex and was ready for a Polish. Then I pitched over the convex very thinly, by dropping melted Pitch upon it, and warming it to keep the Pitch soft, whilst I ground it with the concave Copper wetted to make it spread eavenly all over the convex. Thus by working it well I made it as thin as a Groat, and after the convex was cold I ground it again to give it as true a Figure as I could. Then I took Putty which I had made very fine by washing it from all its grosser Particles, and laying a little of this upon the Pitch, I ground it upon the Pitch with the concave Copper, till it had done making a Noise; and then upon the Pitch I ground the Object-Metal with a brisk motion, for about two or three Minutes of time, leaning hard upon it. Then I put fresh Putty upon the Pitch, and ground it again till it had done making a noise, and afterwards ground the Object-Metal upon it as before. And this Work I repeated till the Metal was polished, grinding it the last time with all my strength for a good while together, and frequently breathing upon the Pitch, to keep it moist without laying on any more fresh Putty. The Object-Metal was two Inches broad, and about one third part of an Inch thick, to keep it from bending. I had two of these Metals, and when I had polished them both, I tried which was best, and ground the other again, to see if I could make it better than that which I kept. And thus by many Trials I learn'd the way of polishing, till I made those two reflecting Perspectives I spake of above. For this Art of polishing will be better learn'd by repeated Practice than by my Description. Before I ground the Object-Metal on the Pitch, I always ground the Putty on it with the concave Copper, till it had done making a noise, because if the Particles of the Putty were not by this means made to stick fast in the Pitch, they would by rolling up and down grate and fret the Object-Metal and fill it full of little holes.

But because Metal is more difficult to polish than Glass, and is afterwards very apt to be spoiled by tarnishing, and reflects not so much Light as Glass quicksilver'd over does: I would propound to use instead of the Metal, a

Glass ground concave on the foreside, and as much convex on the backside, and quicksilver'd over on the convex side. The Glass must be every where of the same thickness exactly. Otherwise it will make Objects look colour'd and indistinct. By such a Glass I tried about five or six Years ago to make a reflecting Telescope of four Feet in length to magnify about 150 times, and I satisfied my self that there wants nothing but a good Artist to bring the Design to perfection. For the Glass being wrought by one of our *London* Artists after such a manner as they grind Glasses for Telescopes, though it seemed as well wrought as the Object-glasses use to be, yet when it was quicksilver'd, the Reflexion discovered innumerable Inequalities all over the Glass. And by reason of these Inequalities, Objects appeared indistinct in this Instrument. For the Errors of reflected Rays caused by any Inequality of the Glass, are about six times greater than the Errors of refracted Rays caused by the like Inequalities. Yet by this Experiment I satisfied my self that the Reflexion on the concave side of the Glass, which I feared would disturb the Vision, did no sensible prejudice to it, and by consequence that nothing is wanting to perfect these Telescopes, but good Workmen who can grind and polish Glasses truly spherical. An Object-glass of a fourteen Foot Telescope, made by an Artificer at *London*, I once mended considerably, by grinding it on Pitch with Putty, and leaning very easily on it in the grinding, lest the Putty should scratch it. Whether this way may not do well enough for polishing these reflecting Glasses, I have not yet tried. But he that shall try either this or any other way of polishing which he may think better, may do well to make his Glasses ready for polishing, by grinding them without that Violence, wherewith our *London* Workmen press their Glasses in grinding. For by such violent pressure, Glasses are apt to bend a little in the grinding, and such bending will certainly spoil their Figure. To recommend therefore the consideration of these reflecting Glasses to such Artists as are curious in figuring Glasses, I shall describe this optical Instrument in the following Proposition.

PROP. VIII. Prob. II.

To shorten Telescopes.

Let ABCD [in *Fig.* 29.] represent a Glass spherically concave on the foreside AB, and as much convex on the backside CD, so that it be every

where of an equal thickness. Let it not be thicker on one side than on the other, lest it make Objects appear colour'd and indistinct, and let it be very truly wrought and quicksilver'd over on the backside; and set in the Tube VXYZ which must be very black within. Let EFG represent a Prism of Glass or Crystal placed near the other end of the Tube, in the middle of it, by means of a handle of Brass or Iron FGK, to the end of which made flat it is cemented. Let this Prism be rectangular at E, and let the other two Angles at F and G be accurately equal to each other, and by consequence equal to half right ones, and let the plane sides FE and GE be square, and by consequence the third side FG a rectangular Parallelogram, whose length is to its breadth in a subduplicate proportion of two to one. Let it be so placed in the Tube, that the Axis of the Speculum may pass through the middle of the square side EF perpendicularly and by consequence through the middle of the side FG at an Angle of 45 Degrees, and let the side EF be turned towards the Speculum, and the distance of this Prism from the Speculum be such that the Rays of the Light PQ, RS, &c. which are incident upon the Speculum in Lines parallel to the Axis thereof, may enter the Prism at the side EF, and be reflected by the side FG, and thence go out of it through the side GE, to the Point T, which must be the common Focus of the Speculum ABDC, and of a Plano-convex Eyeglass H, through which those Rays must pass to the Eye. And let the Rays at their coming out of the Glass pass through a small round hole, or aperture made in a little plate of Lead, Brass, or Silver, wherewith the Glass is to be covered, which hole must be no bigger than is necessary for Light enough to pass through. For so it will render the Object distinct, the Plate in which 'tis made intercepting all the erroneous part of the Light which comes from the verges of the Speculum AB. Such an Instrument well made, if it be six Foot long, (reckoning the length from the Speculum to the Prism, and thence to the Focus T) will bear an aperture of six Inches at the Speculum, and magnify between two and three hundred times. But the hole H here limits the aperture with more advantage, than if the aperture was placed at the Speculum. If the Instrument be made longer or shorter, the aperture must be in proportion as the Cube of the square-square Root of the length, and the magnifying as the aperture. But it's convenient that the Speculum be an Inch or two broader than the aperture at the least, and that the Glass of the Speculum be thick, that it bend not in the working. The Prism EFG must be no bigger than is necessary, and its back side FG must

not be quicksilver'd over. For without quicksilver it will reflect all the Light incident on it from the Speculum.

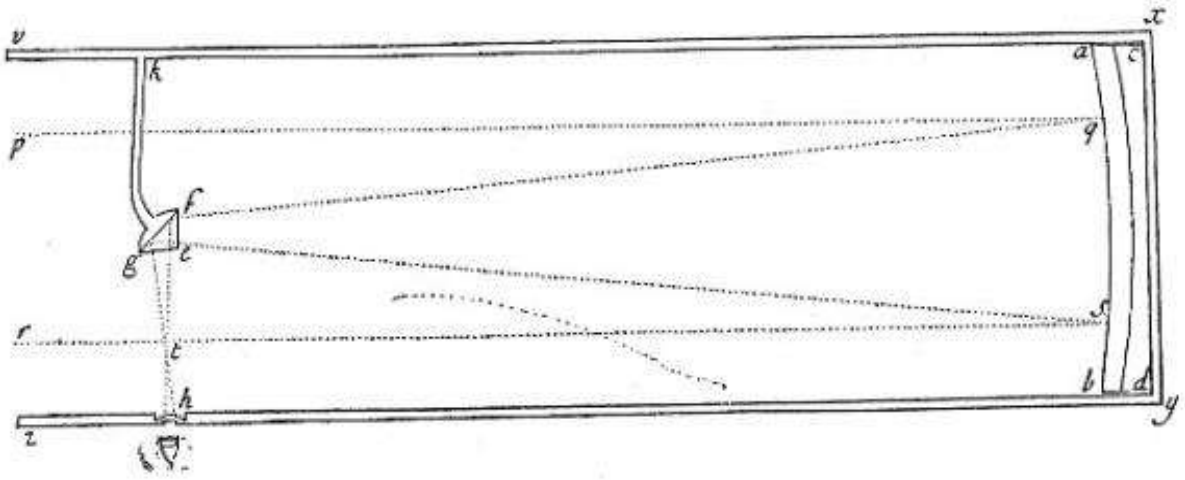


Fig. 29.

In this Instrument the Object will be inverted, but may be erected by making the square sides FF and EG of the Prism EFG not plane but spherically convex, that the Rays may cross as well before they come at it as afterwards between it and the Eye-glass. If it be desired that the Instrument bear a larger aperture, that may be also done by composing the Speculum of two Glasses with Water between them.

If the Theory of making Telescopes could at length be fully brought into Practice, yet there would be certain Bounds beyond which Telescopes could not perform. For the Air through which we look upon the Stars, is in a perpetual Tremor; as may be seen by the tremulous Motion of Shadows cast from high Towers, and by the twinkling of the fix'd Stars. But these Stars do not twinkle when viewed through Telescopes which have large apertures. For the Rays of Light which pass through divers parts of the aperture, tremble each of them apart, and by means of their various and sometimes contrary Tremors, fall at one and the same time upon different points in the bottom of the Eye, and their trembling Motions are too quick and confused to be perceived severally. And all these illuminated Points constitute one broad lucid Point, composed of those many trembling Points confusedly and insensibly mixed with one another by very short and swift Tremors, and thereby cause the Star to appear broader than it is, and without any trembling of the whole. Long Telescopes may cause Objects to appear brighter and larger than short ones can do, but they cannot be so formed as to take away that confusion of the Rays which arises from the Tremors of the Atmosphere. The only Remedy is a most serene and quiet Air, such as may perhaps be found on the tops of the highest Mountains above the grosser Clouds.

FOOTNOTES:

[C] *See our* Author's Lectiones Opticæ § 10. *Sect. II. § 29. and Sect. III. Pro.*

[D] See our Author's *Lectiones Opticæ*, Part. I. Sect. 1. §5.

[E] *This is very fully treated of in our* Author's Lect. Optic. *Part* I. *Sect.* II.

[F] *See our* Author's Lect. Optic. Part I. Sect. II. § 29.

[G] *This is demonstrated in our* Author's Lect. Optic. *Part* I. *Sect.* IV. *Pro*.

[H] *How to do this, is shewn in our* Author's Lect. Optic. *Part* I. *Sect.* IV. *Pro*.

PART II.

PROP. I. Theor. I.

The Phænomena of Colours in refracted or reflected Light are not caused by new Modifications of the Light variously impress'd, according to the various Terminations of the Light and Shadow.

The Proof by Experiments.

Exper. 1. For if the Sun shine into a very dark Chamber through an oblong hole F, [in *Fig.* 1.] whose breadth is the sixth or eighth part of an Inch, or something less; and his beam FH do afterwards pass first through a very large Prism ABC, distant about 20 Feet from the hole, and parallel to it, and then (with its white part) through an oblong hole H, whose breadth is about the fortieth or sixtieth part of an Inch, and which is made in a black opake Body GI, and placed at the distance of two or three Feet from the Prism, in a parallel Situation both to the Prism and to the former hole, and if this white Light thus transmitted through the hole H, fall afterwards upon a white Paper *pt*, placed after that hole H, at the distance of three or four Feet from it, and there paint the usual Colours of the Prism, suppose red at *t*, yellow at *s*, green at *r*, blue at *q*, and violet at *p*; you may with an Iron Wire, or any such like slender opake Body, whose breadth is about the tenth part of an Inch, by intercepting the Rays at *k*, *l*, *m*, *n* or *o*, take away any one of the Colours at *t*, *s*, *r*, *q* or *p*, whilst the other Colours remain upon the Paper as before; or with an Obstacle something bigger you may take away any two, or three, or four Colours together, the rest remaining: So that any one of the Colours as well as violet may become outmost in the Confine of the Shadow towards *p*, and any one of them as well as red may become outmost in the Confine of the Shadow towards *t*, and any one of them may also border upon the Shadow made within the Colours by the Obstacle R intercepting some intermediate part of the Light; and, lastly, any one of them by being left alone, may border upon the Shadow on either hand. All the Colours have themselves indifferently to any Confines of Shadow, and therefore the differences of these Colours from one another, do not arise from the different Confines of Shadow, whereby Light is variously modified, as has hitherto been the Opinion of Philosophers. In trying these things 'tis to be observed, that by

how much the holes F and H are narrower, and the Intervals between them and the Prism greater, and the Chamber darker, by so much the better doth the Experiment succeed; provided the Light be not so far diminished, but that the Colours at *pt* be sufficiently visible. To procure a Prism of solid Glass large enough for this Experiment will be difficult, and therefore a prismatick Vessel must be made of polish'd Glass Plates cemented together, and filled with salt Water or clear Oil.

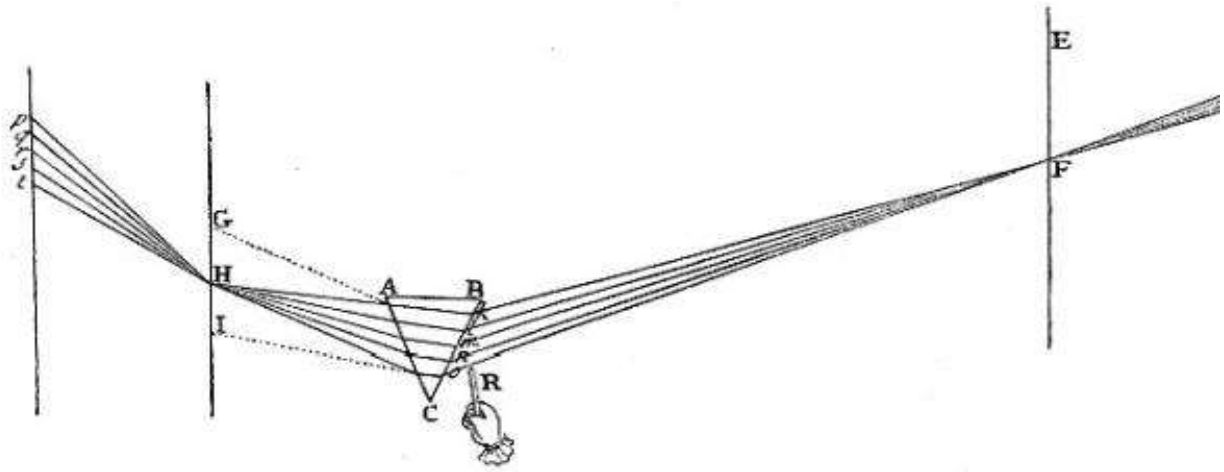


Fig. 1.

Exper. 2. The Sun's Light let into a dark Chamber through the round hole F, [in *Fig.* 2.] half an Inch wide, passed first through the Prism ABC placed at the hole, and then through a Lens PT something more than four Inches broad, and about eight Feet distant from the Prism, and thence converged to O the Focus of the Lens distant from it about three Feet, and there fell upon a white Paper DE. If that Paper was perpendicular to that Light incident upon it, as 'tis represented in the posture DE, all the Colours upon it at O appeared white. But if the Paper being turned about an Axis parallel to the Prism, became very much inclined to the Light, as 'tis represented in the Positions *de* and *δε*; the same Light in the one case appeared yellow and red, in the other blue. Here one and the same part of the Light in one and the same place, according to the various Inclinations of the Paper, appeared in one case white, in another yellow or red, in a third blue, whilst the Confine of Light and shadow, and the Refractions of the Prism in all these cases remained the same.

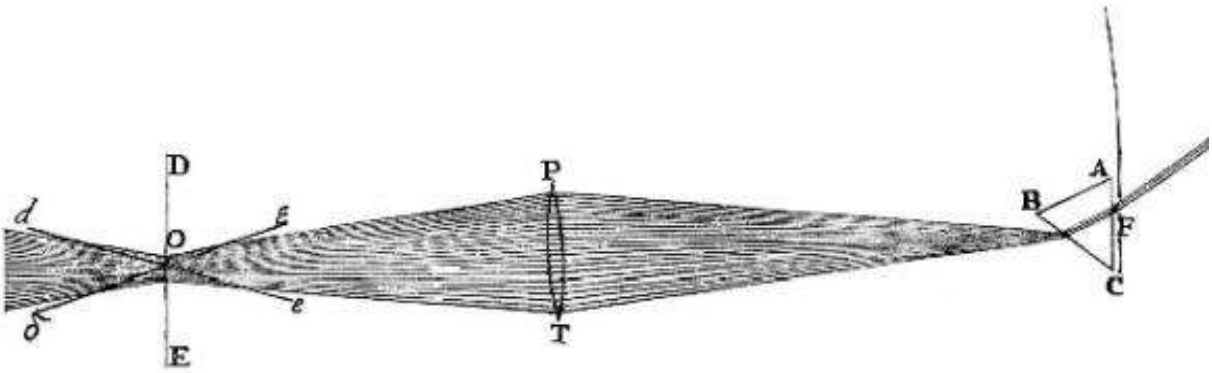


Fig. 2.

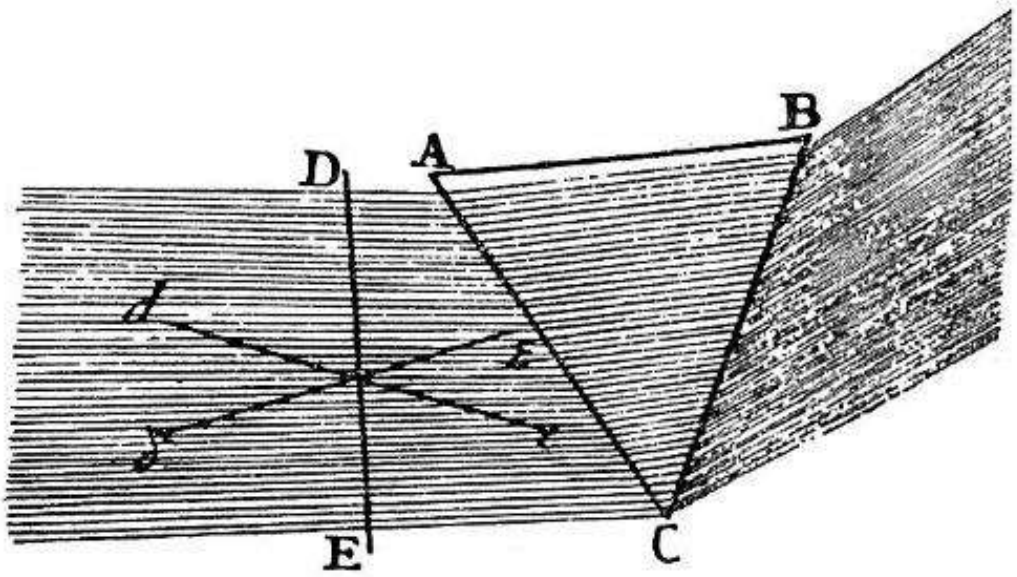


Fig. 3.

Exper. 3. Such another Experiment may be more easily tried as follows. Let a broad beam of the Sun's Light coming into a dark Chamber through a hole in the Window-shut be refracted by a large Prism ABC, [in *Fig.* 3.] whose refracting Angle C is more than 60 Degrees, and so soon as it comes out of the Prism, let it fall upon the white Paper DE glewed upon a stiff Plane; and this Light, when the Paper is perpendicular to it, as 'tis represented in DE, will appear perfectly white upon the Paper; but when the Paper is very much inclin'd to it in such a manner as to keep always parallel to the Axis of the Prism, the whiteness of the whole Light upon the Paper will according to the inclination of the Paper this way or that way, change

either into yellow and red, as in the posture *de*, or into blue and violet, as in the posture δε. And if the Light before it fall upon the Paper be twice refracted the same way by two parallel Prisms, these Colours will become the more conspicuous. Here all the middle parts of the broad beam of white Light which fell upon the Paper, did without any Confine of Shadow to modify it, become colour'd all over with one uniform Colour, the Colour being always the same in the middle of the Paper as at the edges, and this Colour changed according to the various Obliquity of the reflecting Paper, without any change in the Refractions or Shadow, or in the Light which fell upon the Paper. And therefore these Colours are to be derived from some other Cause than the new Modifications of Light by Refractions and Shadows.

If it be asked, what then is their Cause? I answer, That the Paper in the posture *de*, being more oblique to the more refrangible Rays than to the less refrangible ones, is more strongly illuminated by the latter than by the former, and therefore the less refrangible Rays are predominant in the reflected Light. And where-ever they are predominant in any Light, they tinge it with red or yellow, as may in some measure appear by the first Proposition of the first Part of this Book, and will more fully appear hereafter. And the contrary happens in the posture of the Paper δε, the more refrangible Rays being then predominant which always tinge Light with blues and violets.

Exper. 4. The Colours of Bubbles with which Children play are various, and change their Situation variously, without any respect to any Confine or Shadow. If such a Bubble be cover'd with a concave Glass, to keep it from being agitated by any Wind or Motion of the Air, the Colours will slowly and regularly change their situation, even whilst the Eye and the Bubble, and all Bodies which emit any Light, or cast any Shadow, remain unmoved. And therefore their Colours arise from some regular Cause which depends not on any Confine of Shadow. What this Cause is will be shewed in the next Book.

To these Experiments may be added the tenth Experiment of the first Part of this first Book, where the Sun's Light in a dark Room being trajected through the parallel Superficies of two Prisms tied together in the form of a Parallelopipede, became totally of one uniform yellow or red Colour, at its emerging out of the Prisms. Here, in the production of these Colours, the Confine of Shadow can have nothing to do. For the Light changes from

white to yellow, orange and red successively, without any alteration of the Confine of Shadow: And at both edges of the emerging Light where the contrary Confines of Shadow ought to produce different Effects, the Colour is one and the same, whether it be white, yellow, orange or red: And in the middle of the emerging Light, where there is no Confine of Shadow at all, the Colour is the very same as at the edges, the whole Light at its very first Emergence being of one uniform Colour, whether white, yellow, orange or red, and going on thence perpetually without any change of Colour, such as the Confine of Shadow is vulgarly supposed to work in refracted Light after its Emergence. Neither can these Colours arise from any new Modifications of the Light by Refractions, because they change successively from white to yellow, orange and red, while the Refractions remain the same, and also because the Refractions are made contrary ways by parallel Superficies which destroy one another's Effects. They arise not therefore from any Modifications of Light made by Refractions and Shadows, but have some other Cause. What that Cause is we shewed above in this tenth Experiment, and need not here repeat it.

There is yet another material Circumstance of this Experiment. For this emerging Light being by a third Prism HIK [in *Fig.* 22. *Part* I.][I] refracted towards the Paper PT, and there painting the usual Colours of the Prism, red, yellow, green, blue, violet: If these Colours arose from the Refractions of that Prism modifying the Light, they would not be in the Light before its Incidence on that Prism. And yet in that Experiment we found, that when by turning the two first Prisms about their common Axis all the Colours were made to vanish but the red; the Light which makes that red being left alone, appeared of the very same red Colour before its Incidence on the third Prism. And in general we find by other Experiments, that when the Rays which differ in Refrangibility are separated from one another, and any one Sort of them is considered apart, the Colour of the Light which they compose cannot be changed by any Refraction or Reflexion whatever, as it ought to be were Colours nothing else than Modifications of Light caused by Refractions, and Reflexions, and Shadows. This Unchangeableness of Colour I am now to describe in the following Proposition.

PROP. II. Theor. II.

All homogeneal Light has its proper Colour answering to its Degree of Refrangibility, and that Colour cannot be changed by Reflexions and Refractions.

In the Experiments of the fourth Proposition of the first Part of this first Book, when I had separated the heterogeneous Rays from one another, the Spectrum *pt* formed by the separated Rays, did in the Progress from its End *p*, on which the most refrangible Rays fell, unto its other End *t*, on which the least refrangible Rays fell, appear tinged with this Series of Colours, violet, indigo, blue, green, yellow, orange, red, together with all their intermediate Degrees in a continual Succession perpetually varying. So that there appeared as many Degrees of Colours, as there were sorts of Rays differing in Refrangibility.

Exper. 5. Now, that these Colours could not be changed by Refraction, I knew by refracting with a Prism sometimes one very little Part of this Light, sometimes another very little Part, as is described in the twelfth Experiment of the first Part of this Book. For by this Refraction the Colour of the Light was never changed in the least. If any Part of the red Light was refracted, it remained totally of the same red Colour as before. No orange, no yellow, no green or blue, no other new Colour was produced by that Refraction. Neither did the Colour any ways change by repeated Refractions, but continued always the same red entirely as at first. The like Constancy and Immutability I found also in the blue, green, and other Colours. So also, if I looked through a Prism upon any Body illuminated with any part of this homogeneal Light, as in the fourteenth Experiment of the first Part of this Book is described; I could not perceive any new Colour generated this way. All Bodies illuminated with compound Light appear through Prisms confused, (as was said above) and tinged with various new Colours, but those illuminated with homogeneal Light appeared through Prisms neither less distinct, nor otherwise colour'd, than when viewed with the naked Eyes. Their Colours were not in the least changed by the Refraction of the interposed Prism. I speak here of a sensible Change of Colour: For the Light which I here call homogeneal, being not absolutely homogeneal, there ought to arise some little Change of Colour from its Heterogeneity. But, if that Heterogeneity was so little as it might be made by the said Experiments of the fourth Proposition, that Change was not sensible, and therefore in Experiments, where Sense is Judge, ought to be accounted none at all.

Exper. 6. And as these Colours were not changeable by Refractions, so neither were they by Reflexions. For all white, grey, red, yellow, green, blue, violet Bodies, as Paper, Ashes, red Lead, Orpiment, Indico Bise, Gold, Silver, Copper, Grass, blue Flowers, Violets, Bubbles of Water tinged with various Colours, Peacock's Feathers, the Tincture of *Lignum Nephriticum*, and such-like, in red homogeneal Light appeared totally red, in blue Light totally blue, in green Light totally green, and so of other Colours. In the homogeneal Light of any Colour they all appeared totally of that same Colour, with this only Difference, that some of them reflected that Light more strongly, others more faintly. I never yet found any Body, which by reflecting homogeneal Light could sensibly change its Colour.

From all which it is manifest, that if the Sun's Light consisted of but one sort of Rays, there would be but one Colour in the whole World, nor would it be possible to produce any new Colour by Reflexions and Refractions, and by consequence that the variety of Colours depends upon the Composition of Light.

DEFINITION.

The homogeneal Light and Rays which appear red, or rather make Objects appear so, I call Rubrifick or Red-making; those which make Objects appear yellow, green, blue, and violet, I call Yellow-making, Green-making, Blue-making, Violet-making, and so of the rest. And if at any time I speak of Light and Rays as coloured or endued with Colours, I would be understood to speak not philosophically and properly, but grossly, and accordingly to such Conceptions as vulgar People in seeing all these Experiments would be apt to frame. For the Rays to speak properly are not coloured. In them there is nothing else than a certain Power and Disposition to stir up a Sensation of this or that Colour. For as Sound in a Bell or musical String, or other sounding Body, is nothing but a trembling Motion, and in the Air nothing but that Motion propagated from the Object, and in the Sensorium 'tis a Sense of that Motion under the Form of Sound; so Colours in the Object are nothing but a Disposition to reflect this or that sort of Rays more copiously than the rest; in the Rays they are nothing but their Dispositions to propagate this or that Motion into the Sensorium, and in the Sensorium they are Sensations of those Motions under the Forms of Colours.

PROP. III. Prob. I.

To define the Refrangibility of the several sorts of homogeneal Light answering to the several Colours.

For determining this Problem I made the following Experiment.[J]

Exper. 7. When I had caused the Rectilinear Sides AF, GM, [in *Fig.* 4.] of the Spectrum of Colours made by the Prism to be distinctly defined, as in the fifth Experiment of the first Part of this Book is described, there were found in it all the homogeneal Colours in the same Order and Situation one among another as in the Spectrum of simple Light, described in the fourth Proposition of that Part. For the Circles of which the Spectrum of compound Light PT is composed, and which in the middle Parts of the Spectrum interfere, and are intermix'd with one another, are not intermix'd in their outmost Parts where they touch those Rectilinear Sides AF and GM. And therefore, in those Rectilinear Sides when distinctly defined, there is no new Colour generated by Refraction. I observed also, that if any where between the two outmost Circles TMF and PGA a Right Line, as γδ, was cross to the Spectrum, so as both Ends to fall perpendicularly upon its Rectilinear Sides, there appeared one and the same Colour, and degree of Colour from one End of this Line to the other. I delineated therefore in a Paper the Perimeter of the Spectrum FAP GMT, and in trying the third Experiment of the first Part of this Book, I held the Paper so that the Spectrum might fall upon this delineated Figure, and agree with it exactly, whilst an Assistant, whose Eyes for distinguishing Colours were more critical than mine, did by Right Lines αβ, γδ, εζ, &c. drawn cross the Spectrum, note the Confines of the Colours, that is of the red MαβF, of the orange αγδβ, of the yellow γεζδ, of the green ηθζ, of the blue ηικθ, of the indico ιλμκ, and of the violet λGAμ. And this Operation being divers times repeated both in the same, and in several Papers, I found that the Observations agreed well enough with one another, and that the Rectilinear Sides MG and FA were by the said cross Lines divided after the manner of a Musical Chord. Let GM be produced to X, that MX may be equal to GM, and conceive GX, λX, ιX, ηX, εX, γX, αX, MX, to be in proportion to one another, as the Numbers, 1, 8/9, 5/6, 3/4, 2/3, 3/5, 9/16, 1/2, and so to represent the Chords of the Key, and of a Tone, a third Minor, a fourth, a fifth, a sixth Major, a seventh and an eighth above that Key: And the Intervals Mα, αγ, γε, εη, ηι, ιλ, and λG, will be the Spaces

which the several Colours (red, orange, yellow, green, blue, indigo, violet) take up.

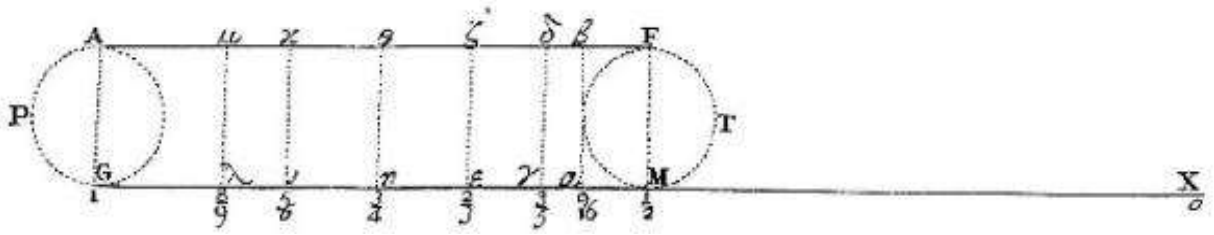


Fig. 4.

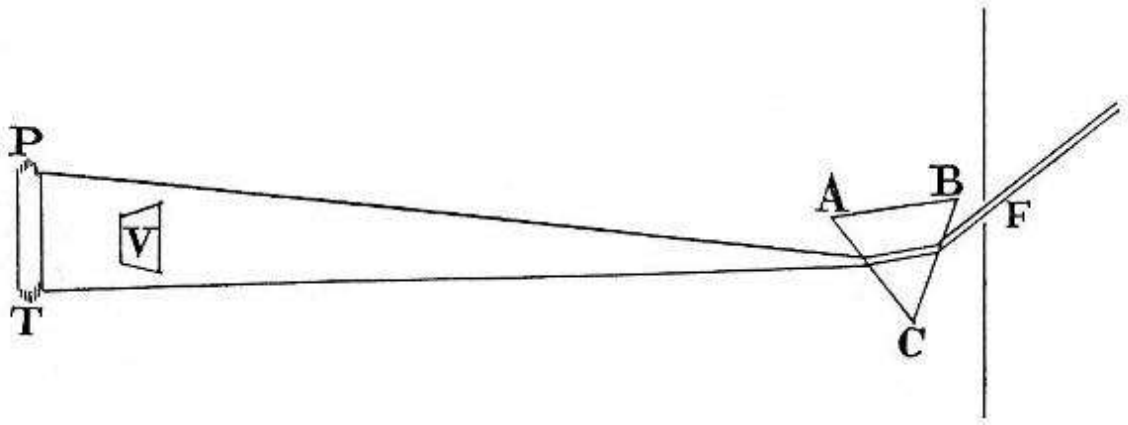


Fig. 5.

Now these Intervals or Spaces subtending the Differences of the Refractions of the Rays going to the Limits of those Colours, that is, to the Points M, α, γ, ε, η, ι, λ, G, may without any sensible Error be accounted proportional to the Differences of the Sines of Refraction of those Rays having one common Sine of Incidence, and therefore since the common Sine of Incidence of the most and least refrangible Rays out of Glass into Air was (by a Method described above) found in proportion to their Sines of Refraction, as 50 to 77 and 78, divide the Difference between the Sines of Refraction 77 and 78, as the Line GM is divided by those Intervals, and you will have 77, 77-1/8, 77-1/5, 77-1/3, 77-1/2, 77-2/3, 77-7/9, 78, the Sines of Refraction of those Rays out of Glass into Air, their common Sine of Incidence being 50. So then the Sines of the Incidences of all the red-making Rays out of Glass into Air, were to the Sines of their Refractions, not greater than 50 to 77, nor less than 50 to 77-1/8, but they varied from one another according to all intermediate Proportions. And the Sines of the Incidences of

the green-making Rays were to the Sines of their Refractions in all Proportions from that of 50 to 77-1/3, unto that of 50 to 77-1/2. And by the like Limits above-mentioned were the Refractions of the Rays belonging to the rest of the Colours defined, the Sines of the red-making Rays extending from 77 to 77-1/8, those of the orange-making from 77-1/8 to 77-1/5, those of the yellow-making from 77-1/5 to 77-1/3, those of the green-making from 77-1/3 to 77-1/2, those of the blue-making from 77-1/2 to 77-2/3, those of the indigo-making from 77-2/3 to 77-7/9, and those of the violet from 77-7/9, to 78.

These are the Laws of the Refractions made out of Glass into Air, and thence by the third Axiom of the first Part of this Book, the Laws of the Refractions made out of Air into Glass are easily derived.

Exper. 8. I found moreover, that when Light goes out of Air through several contiguous refracting Mediums as through Water and Glass, and thence goes out again into Air, whether the refracting Superficies be parallel or inclin'd to one another, that Light as often as by contrary Refractions 'tis so corrected, that it emergeth in Lines parallel to those in which it was incident, continues ever after to be white. But if the emergent Rays be inclined to the incident, the Whiteness of the emerging Light will by degrees in passing on from the Place of Emergence, become tinged in its Edges with Colours. This I try'd by refracting Light with Prisms of Glass placed within a Prismatick Vessel of Water. Now those Colours argue a diverging and separation of the heterogeneous Rays from one another by means of their unequal Refractions, as in what follows will more fully appear. And, on the contrary, the permanent whiteness argues, that in like Incidences of the Rays there is no such separation of the emerging Rays, and by consequence no inequality of their whole Refractions. Whence I seem to gather the two following Theorems.

1. The Excesses of the Sines of Refraction of several sorts of Rays above their common Sine of Incidence when the Refractions are made out of divers denser Mediums immediately into one and the same rarer Medium, suppose of Air, are to one another in a given Proportion.

2. The Proportion of the Sine of Incidence to the Sine of Refraction of one and the same sort of Rays out of one Medium into another, is composed of the Proportion of the Sine of Incidence to the Sine of Refraction out of the first Medium into any third Medium, and of the Proportion of the Sine of

Incidence to the Sine of Refraction out of that third Medium into the second Medium.

By the first Theorem the Refractions of the Rays of every sort made out of any Medium into Air are known by having the Refraction of the Rays of any one sort. As for instance, if the Refractions of the Rays of every sort out of Rain-water into Air be desired, let the common Sine of Incidence out of Glass into Air be subducted from the Sines of Refraction, and the Excesses will be 27, 27-1/8, 27-1/5, 27-1/3, 27-1/2, 27-2/3, 27-7/9, 28. Suppose now that the Sine of Incidence of the least refrangible Rays be to their Sine of Refraction out of Rain-water into Air as 3 to 4, and say as 1 the difference of those Sines is to 3 the Sine of Incidence, so is 27 the least of the Excesses above-mentioned to a fourth Number 81; and 81 will be the common Sine of Incidence out of Rain-water into Air, to which Sine if you add all the above-mentioned Excesses, you will have the desired Sines of the Refractions 108, 108-1/8, 108-1/5, 108-1/3, 108-1/2, 108-2/3, 108-7/9, 109.

By the latter Theorem the Refraction out of one Medium into another is gathered as often as you have the Refractions out of them both into any third Medium. As if the Sine of Incidence of any Ray out of Glass into Air be to its Sine of Refraction, as 20 to 31, and the Sine of Incidence of the same Ray out of Air into Water, be to its Sine of Refraction as 4 to 3; the Sine of Incidence of that Ray out of Glass into Water will be to its Sine of Refraction as 20 to 31 and 4 to 3 jointly, that is, as the Factum of 20 and 4 to the Factum of 31 and 3, or as 80 to 93.

And these Theorems being admitted into Opticks, there would be scope enough of handling that Science voluminously after a new manner,[K] not only by teaching those things which tend to the perfection of Vision, but also by determining mathematically all kinds of Phænomena of Colours which could be produced by Refractions. For to do this, there is nothing else requisite than to find out the Separations of heterogeneous Rays, and their various Mixtures and Proportions in every Mixture. By this way of arguing I invented almost all the Phænomena described in these Books, beside some others less necessary to the Argument; and by the successes I met with in the Trials, I dare promise, that to him who shall argue truly, and then try all things with good Glasses and sufficient Circumspection, the expected Event will not be wanting. But he is first to know what Colours will arise from any others mix’d in any assigned Proportion.

PROP. IV. Theor. III.

Colours may be produced by Composition which shall be like to the Colours of homogeneal Light as to the Appearance of Colour, but not as to the Immutability of Colour and Constitution of Light. And those Colours by how much they are more compounded by so much are they less full and intense, and by too much Composition they maybe diluted and weaken'd till they cease, and the Mixture becomes white or grey. There may be also Colours produced by Composition, which are not fully like any of the Colours of homogeneal Light.

For a Mixture of homogeneal red and yellow compounds an Orange, like in appearance of Colour to that orange which in the series of unmixed prismatick Colours lies between them; but the Light of one orange is homogeneal as to Refrangibility, and that of the other is heterogeneal, and the Colour of the one, if viewed through a Prism, remains unchanged, that of the other is changed and resolved into its component Colours red and yellow. And after the same manner other neighbouring homogeneal Colours may compound new Colours, like the intermediate homogeneal ones, as yellow and green, the Colour between them both, and afterwards, if blue be added, there will be made a green the middle Colour of the three which enter the Composition. For the yellow and blue on either hand, if they are equal in quantity they draw the intermediate green equally towards themselves in Composition, and so keep it as it were in Æquilibrion, that it verge not more to the yellow on the one hand, and to the blue on the other, but by their mix'd Actions remain still a middle Colour. To this mix'd green there may be farther added some red and violet, and yet the green will not presently cease, but only grow less full and vivid, and by increasing the red and violet, it will grow more and more dilute, until by the prevalence of the added Colours it be overcome and turned into whiteness, or some other Colour. So if to the Colour of any homogeneal Light, the Sun's white Light composed of all sorts of Rays be added, that Colour will not vanish or change its Species, but be diluted, and by adding more and more white it will be diluted more and more perpetually. Lastly, If red and violet be mingled, there will be generated according to their various Proportions various Purples, such as are not like in appearance to the Colour of any homogeneal Light, and of these Purples mix'd with yellow and blue may be made other new Colours.

PROP. V. Theor. IV.

Whiteness and all grey Colours between white and black, may be compounded of Colours, and the whiteness of the Sun's Light is compounded of all the primary Colours mix'd in a due Proportion.

The Proof by Experiments.

Exper. 9. The Sun shining into a dark Chamber through a little round hole in the Window-shut, and his Light being there refracted by a Prism to cast his coloured Image PT [in *Fig.* 5.] upon the opposite Wall: I held a white Paper V to that image in such manner that it might be illuminated by the colour'd Light reflected from thence, and yet not intercept any part of that Light in its passage from the Prism to the Spectrum. And I found that when the Paper was held nearer to any Colour than to the rest, it appeared of that Colour to which it approached nearest; but when it was equally or almost equally distant from all the Colours, so that it might be equally illuminated by them all it appeared white. And in this last situation of the Paper, if some Colours were intercepted, the Paper lost its white Colour, and appeared of the Colour of the rest of the Light which was not intercepted. So then the Paper was illuminated with Lights of various Colours, namely, red, yellow, green, blue and violet, and every part of the Light retained its proper Colour, until it was incident on the Paper, and became reflected thence to the Eye; so that if it had been either alone (the rest of the Light being intercepted) or if it had abounded most, and been predominant in the Light reflected from the Paper, it would have tinged the Paper with its own Colour; and yet being mixed with the rest of the Colours in a due proportion, it made the Paper look white, and therefore by a Composition with the rest produced that Colour. The several parts of the coloured Light reflected from the Spectrum, whilst they are propagated from thence through the Air, do perpetually retain their proper Colours, because wherever they fall upon the Eyes of any Spectator, they make the several parts of the Spectrum to appear under their proper Colours. They retain therefore their proper Colours when they fall upon the Paper V, and so by the confusion and perfect mixture of those Colours compound the whiteness of the Light reflected from thence.

Exper. 10. Let that Spectrum or solar Image PT [in *Fig.* 6.] fall now upon the Lens MN above four Inches broad, and about six Feet distant from the Prism ABC and so figured that it may cause the coloured Light which

divergeth from the Prism to converge and meet again at its Focus G, about six or eight Feet distant from the Lens, and there to fall perpendicularly upon a white Paper DE. And if you move this Paper to and fro, you will perceive that near the Lens, as at *de*, the whole solar Image (suppose at *pt*) will appear upon it intensely coloured after the manner above-explained, and that by receding from the Lens those Colours will perpetually come towards one another, and by mixing more and more dilute one another continually, until at length the Paper come to the Focus G, where by a perfect mixture they will wholly vanish and be converted into whiteness, the whole Light appearing now upon the Paper like a little white Circle. And afterwards by receding farther from the Lens, the Rays which before converged will now cross one another in the Focus G, and diverge from thence, and thereby make the Colours to appear again, but yet in a contrary order; suppose at δε, where the red *t* is now above which before was below, and the violet *p* is below which before was above.

Let us now stop the Paper at the Focus G, where the Light appears totally white and circular, and let us consider its whiteness. I say, that this is composed of the converging Colours. For if any of those Colours be intercepted at the Lens, the whiteness will cease and degenerate into that Colour which ariseth from the composition of the other Colours which are not intercepted. And then if the intercepted Colours be let pass and fall upon that compound Colour, they mix with it, and by their mixture restore the whiteness. So if the violet, blue and green be intercepted, the remaining yellow, orange and red will compound upon the Paper an orange, and then if the intercepted Colours be let pass, they will fall upon this compounded orange, and together with it decompound a white. So also if the red and violet be intercepted, the remaining yellow, green and blue, will compound a green upon the Paper, and then the red and violet being let pass will fall upon this green, and together with it decompound a white. And that in this Composition of white the several Rays do not suffer any Change in their colorific Qualities by acting upon one another, but are only mixed, and by a mixture of their Colours produce white, may farther appear by these Arguments.

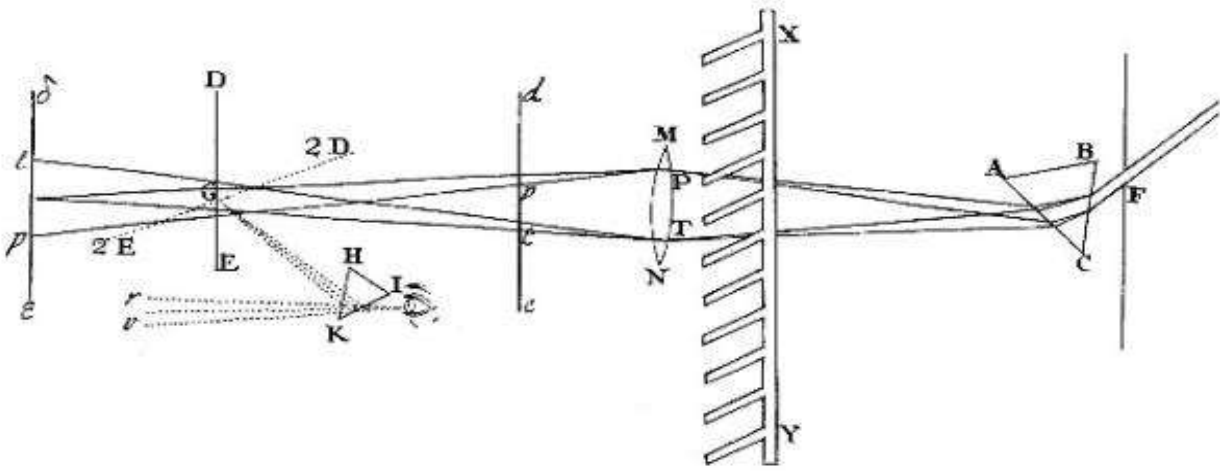


Fig. 6.

If the Paper be placed beyond the Focus G, suppose at δε, and then the red Colour at the Lens be alternately intercepted, and let pass again, the violet Colour on the Paper will not suffer any Change thereby, as it ought to do if the several sorts of Rays acted upon one another in the Focus G, where they cross. Neither will the red upon the Paper be changed by any alternate stopping, and letting pass the violet which crosseth it.

And if the Paper be placed at the Focus G, and the white round Image at G be viewed through the Prism HIK, and by the Refraction of that Prism be translated to the place *rv*, and there appear tinged with various Colours, namely, the violet at *v* and red at *r*, and others between, and then the red Colours at the Lens be often stopp'd and let pass by turns, the red at *r* will accordingly disappear, and return as often, but the violet at *v* will not thereby suffer any Change. And so by stopping and letting pass alternately the blue at the Lens, the blue at *v* will accordingly disappear and return, without any Change made in the red at *r*. The red therefore depends on one sort of Rays, and the blue on another sort, which in the Focus G where they are commix'd, do not act on one another. And there is the same Reason of the other Colours.

I considered farther, that when the most refrangible Rays P*p*, and the least refrangible ones T*t*, are by converging inclined to one another, the Paper, if held very oblique to those Rays in the Focus G, might reflect one sort of them more copiously than the other sort, and by that Means the reflected Light would be tinged in that Focus with the Colour of the predominant

Rays, provided those Rays severally retained their Colours, or colorific Qualities in the Composition of White made by them in that Focus. But if they did not retain them in that White, but became all of them severally endued there with a Disposition to strike the Sense with the Perception of White, then they could never lose their Whiteness by such Reflexions. I inclined therefore the Paper to the Rays very obliquely, as in the second Experiment of this second Part of the first Book, that the most refrangible Rays, might be more copiously reflected than the rest, and the Whiteness at Length changed successively into blue, indigo, and violet. Then I inclined it the contrary Way, that the least refrangible Rays might be more copious in the reflected Light than the rest, and the Whiteness turned successively to yellow, orange, and red.

Lastly, I made an Instrument XY in fashion of a Comb, whose Teeth being in number sixteen, were about an Inch and a half broad, and the Intervals of the Teeth about two Inches wide. Then by interposing successively the Teeth of this Instrument near the Lens, I intercepted Part of the Colours by the interposed Tooth, whilst the rest of them went on through the Interval of the Teeth to the Paper DE, and there painted a round Solar Image. But the Paper I had first placed so, that the Image might appear white as often as the Comb was taken away; and then the Comb being as was said interposed, that Whiteness by reason of the intercepted Part of the Colours at the Lens did always change into the Colour compounded of those Colours which were not intercepted, and that Colour was by the Motion of the Comb perpetually varied so, that in the passing of every Tooth over the Lens all these Colours, red, yellow, green, blue, and purple, did always succeed one another. I caused therefore all the Teeth to pass successively over the Lens, and when the Motion was slow, there appeared a perpetual Succession of the Colours upon the Paper: But if I so much accelerated the Motion, that the Colours by reason of their quick Succession could not be distinguished from one another, the Appearance of the single Colours ceased. There was no red, no yellow, no green, no blue, nor purple to be seen any longer, but from a Confusion of them all there arose one uniform white Colour. Of the Light which now by the Mixture of all the Colours appeared white, there was no Part really white. One Part was red, another yellow, a third green, a fourth blue, a fifth purple, and every Part retains its proper Colour till it strike the Sensorium. If the Impressions follow one another slowly, so that they may be

severally perceived, there is made a distinct Sensation of all the Colours one after another in a continual Succession. But if the Impressions follow one another so quickly, that they cannot be severally perceived, there ariseth out of them all one common Sensation, which is neither of this Colour alone nor of that alone, but hath it self indifferently to ‘em all, and this is a Sensation of Whiteness. By the Quickness of the Successions, the Impressions of the several Colours are confounded in the Sensorium, and out of that Confusion ariseth a mix’d Sensation. If a burning Coal be nimbly moved round in a Circle with Gyrations continually repeated, the whole Circle will appear like Fire; the reason of which is, that the Sensation of the Coal in the several Places of that Circle remains impress’d on the Sensorium, until the Coal return again to the same Place. And so in a quick Consecution of the Colours the Impression of every Colour remains in the Sensorium, until a Revolution of all the Colours be compleated, and that first Colour return again. The Impressions therefore of all the successive Colours are at once in the Sensorium, and jointly stir up a Sensation of them all; and so it is manifest by this Experiment, that the commix’d Impressions of all the Colours do stir up and beget a Sensation of white, that is, that Whiteness is compounded of all the Colours.

And if the Comb be now taken away, that all the Colours may at once pass from the Lens to the Paper, and be there intermixed, and together reflected thence to the Spectator’s Eyes; their Impressions on the Sensorium being now more subtilly and perfectly commixed there, ought much more to stir up a Sensation of Whiteness.

You may instead of the Lens use two Prisms HIK and LMN, which by refracting the coloured Light the contrary Way to that of the first Refraction, may make the diverging Rays converge and meet again in G, as you see represented in the seventh Figure. For where they meet and mix, they will compose a white Light, as when a Lens is used.

Exper. 11. Let the Sun’s coloured Image PT [in *Fig.* 8.] fall upon the Wall of a dark Chamber, as in the third Experiment of the first Book, and let the same be viewed through a Prism *abc*, held parallel to the Prism ABC, by whose Refraction that Image was made, and let it now appear lower than before, suppose in the Place S over-against the red Colour T. And if you go near to the Image PT, the Spectrum S will appear oblong and coloured like the Image PT; but if you recede from it, the Colours of the spectrum S will

be contracted more and more, and at length vanish, that Spectrum S becoming perfectly round and white; and if you recede yet farther, the Colours will emerge again, but in a contrary Order. Now that Spectrum S appears white in that Case, when the Rays of several sorts which converge from the several Parts of the Image PT, to the Prism *abc*, are so refracted unequally by it, that in their Passage from the Prism to the Eye they may diverge from one and the same Point of the Spectrum S, and so fall afterwards upon one and the same Point in the bottom of the Eye, and there be mingled.

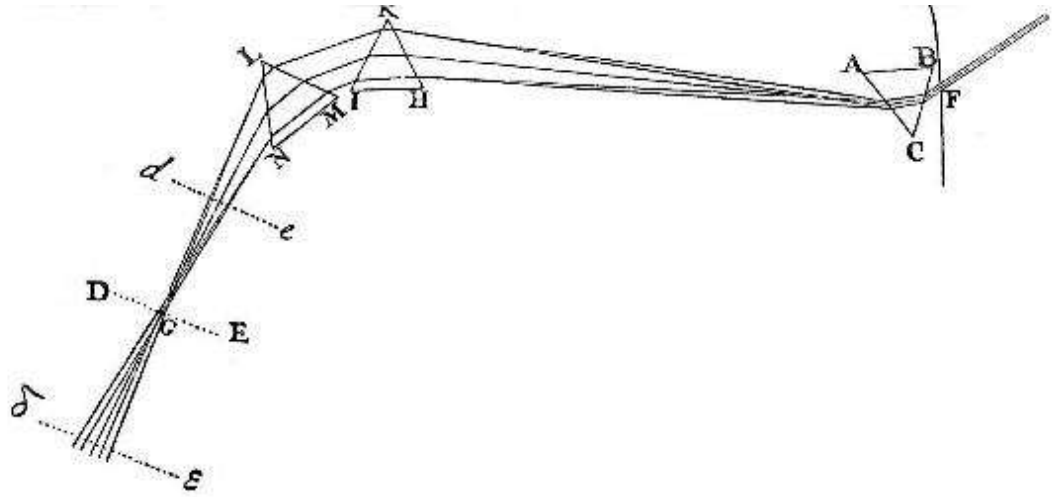


Fig. 7.

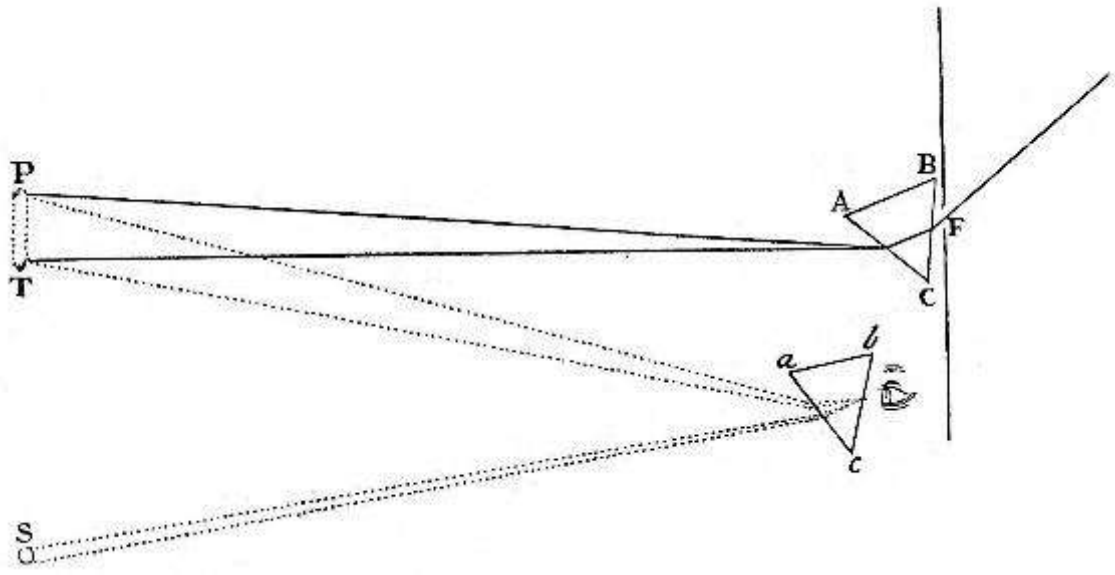


Fig. 8.

And farther, if the Comb be here made use of, by whose Teeth the Colours at the Image PT may be successively intercepted; the Spectrum S, when the Comb is moved slowly, will be perpetually tinged with successive Colours: But when by accelerating the Motion of the Comb, the Succession of the Colours is so quick that they cannot be severally seen, that Spectrum S, by a confused and mix'd Sensation of them all, will appear white.

Exper. 12. The Sun shining through a large Prism ABC [in *Fig.* 9.] upon a Comb XY, placed immediately behind the Prism, his Light which passed through the Interstices of the Teeth fell upon a white Paper DE. The Breadths of the Teeth were equal to their Interstices, and seven Teeth together with their Interstices took up an Inch in Breadth. Now, when the Paper was about two or three Inches distant from the Comb, the Light which passed through its several Interstices painted so many Ranges of Colours, *kl*, *mn*, *op*, *qr*, &c. which were parallel to one another, and contiguous, and without any Mixture of white. And these Ranges of Colours, if the Comb was moved continually up and down with a reciprocal Motion, ascended and descended in the Paper, and when the Motion of the Comb was so quick, that the Colours could not be distinguished from one another, the whole Paper by their Confusion and Mixture in the Sensorium appeared white.

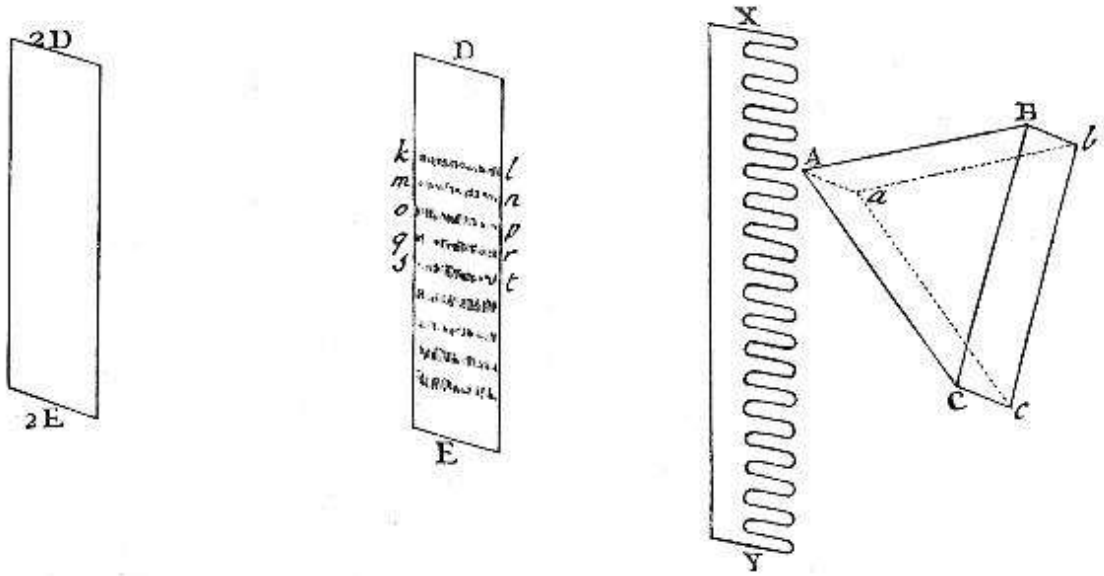


Fig. 9.

Let the Comb now rest, and let the Paper be removed farther from the Prism, and the several Ranges of Colours will be dilated and expanded into one another more and more, and by mixing their Colours will dilute one another, and at length, when the distance of the Paper from the Comb is about a Foot, or a little more (suppose in the Place 2D 2E) they will so far dilute one another, as to become white.

With any Obstacle, let all the Light be now stopp'd which passes through any one Interval of the Teeth, so that the Range of Colours which comes from thence may be taken away, and you will see the Light of the rest of the Ranges to be expanded into the Place of the Range taken away, and there to be coloured. Let the intercepted Range pass on as before, and its Colours falling upon the Colours of the other Ranges, and mixing with them, will restore the Whiteness.

Let the Paper 2D 2E be now very much inclined to the Rays, so that the most refrangible Rays may be more copiously reflected than the rest, and the white Colour of the Paper through the Excess of those Rays will be changed into blue and violet. Let the Paper be as much inclined the contrary way, that the least refrangible Rays may be now more copiously reflected than the rest, and by their Excess the Whiteness will be changed into yellow and red. The several Rays therefore in that white Light do retain their colorific Qualities, by which those of any sort, whenever they become more copious than the rest, do by their Excess and Predominance cause their proper Colour to appear.

And by the same way of arguing, applied to the third Experiment of this second Part of the first Book, it may be concluded, that the white Colour of all refracted Light at its very first Emergence, where it appears as white as before its Incidence, is compounded of various Colours.

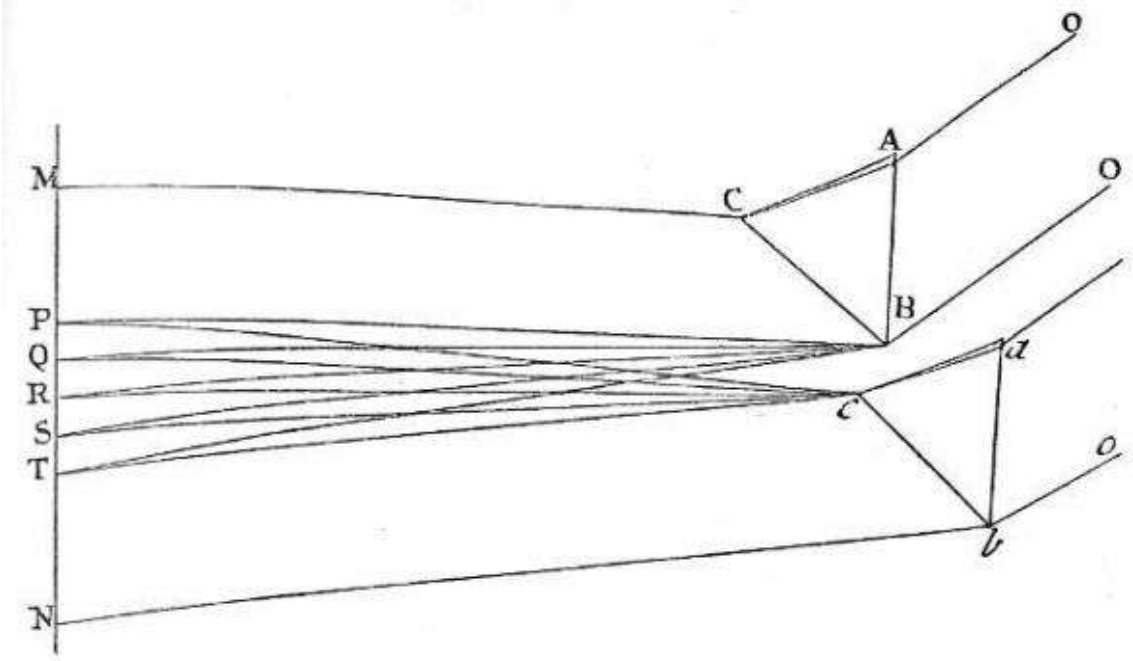


Fig. 10.

Exper. 13. In the foregoing Experiment the several Intervals of the Teeth of the Comb do the Office of so many Prisms, every Interval producing the Phænomenon of one Prism. Whence instead of those Intervals using several Prisms, I try'd to compound Whiteness by mixing their Colours, and did it by using only three Prisms, as also by using only two as follows. Let two Prisms ABC and *abc*, [in *Fig.* 10.] whose refracting Angles B and *b* are equal, be so placed parallel to one another, that the refracting Angle B of the one may touch the Angle *c* at the Base of the other, and their Planes CB and *cb*, at which the Rays emerge, may lie in Directum. Then let the Light trajected through them fall upon the Paper MN, distant about 8 or 12 Inches from the Prisms. And the Colours generated by the interior Limits B and *c* of the two Prisms, will be mingled at PT, and there compound white. For if either Prism be taken away, the Colours made by the other will appear in that Place PT, and when the Prism is restored to its Place again, so that its Colours may there fall upon the Colours of the other, the Mixture of them both will restore the Whiteness.

This Experiment succeeds also, as I have tried, when the Angle *b* of the lower Prism, is a little greater than the Angle B of the upper, and between the interior Angles B and *c*, there intercedes some Space B*c*, as is represented in the Figure, and the refracting Planes BC and *bc*, are neither in Directum, nor parallel to one another. For there is nothing more requisite to the Success of

this Experiment, than that the Rays of all sorts may be uniformly mixed upon the Paper in the Place PT. If the most refrangible Rays coming from the superior Prism take up all the Space from M to P, the Rays of the same sort which come from the inferior Prism ought to begin at P, and take up all the rest of the Space from thence towards N. If the least refrangible Rays coming from the superior Prism take up the Space MT, the Rays of the same kind which come from the other Prism ought to begin at T, and take up the remaining Space TN. If one sort of the Rays which have intermediate Degrees of Refrangibility, and come from the superior Prism be extended through the Space MQ, and another sort of those Rays through the Space MR, and a third sort of them through the Space MS, the same sorts of Rays coming from the lower Prism, ought to illuminate the remaining Spaces QN, RN, SN, respectively. And the same is to be understood of all the other sorts of Rays. For thus the Rays of every sort will be scattered uniformly and evenly through the whole Space MN, and so being every where mix'd in the same Proportion, they must every where produce the same Colour. And therefore, since by this Mixture they produce white in the Exterior Spaces MP and TN, they must also produce white in the Interior Space PT. This is the reason of the Composition by which Whiteness was produced in this Experiment, and by what other way soever I made the like Composition, the Result was Whiteness.

Lastly, If with the Teeth of a Comb of a due Size, the coloured Lights of the two Prisms which fall upon the Space PT be alternately intercepted, that Space PT, when the Motion of the Comb is slow, will always appear coloured, but by accelerating the Motion of the Comb so much that the successive Colours cannot be distinguished from one another, it will appear white.

Exper. 14. Hitherto I have produced Whiteness by mixing the Colours of Prisms. If now the Colours of natural Bodies are to be mingled, let Water a little thicken'd with Soap be agitated to raise a Froth, and after that Froth has stood a little, there will appear to one that shall view it intently various Colours every where in the Surfaces of the several Bubbles; but to one that shall go so far off, that he cannot distinguish the Colours from one another, the whole Froth will grow white with a perfect Whiteness.

Exper. 15. Lastly, In attempting to compound a white, by mixing the coloured Powders which Painters use, I consider'd that all colour'd Powders

do suppress and stop in them a very considerable Part of the Light by which they are illuminated. For they become colour'd by reflecting the Light of their own Colours more copiously, and that of all other Colours more sparingly, and yet they do not reflect the Light of their own Colours so copiously as white Bodies do. If red Lead, for instance, and a white Paper, be placed in the red Light of the colour'd Spectrum made in a dark Chamber by the Refraction of a Prism, as is described in the third Experiment of the first Part of this Book; the Paper will appear more lucid than the red Lead, and therefore reflects the red-making Rays more copiously than red Lead doth. And if they be held in the Light of any other Colour, the Light reflected by the Paper will exceed the Light reflected by the red Lead in a much greater Proportion. And the like happens in Powders of other Colours. And therefore by mixing such Powders, we are not to expect a strong and full White, such as is that of Paper, but some dusky obscure one, such as might arise from a Mixture of Light and Darkness, or from white and black, that is, a grey, or dun, or russet brown, such as are the Colours of a Man's Nail, of a Mouse, of Ashes, of ordinary Stones, of Mortar, of Dust and Dirt in High-ways, and the like. And such a dark white I have often produced by mixing colour'd Powders. For thus one Part of red Lead, and five Parts of *Viride Æris*, composed a dun Colour like that of a Mouse. For these two Colours were severally so compounded of others, that in both together were a Mixture of all Colours; and there was less red Lead used than *Viride Æris*, because of the Fulness of its Colour. Again, one Part of red Lead, and four Parts of blue Bise, composed a dun Colour verging a little to purple, and by adding to this a certain Mixture of Orpiment and *Viride Æris* in a due Proportion, the Mixture lost its purple Tincture, and became perfectly dun. But the Experiment succeeded best without Minium thus. To Orpiment I added by little and little a certain full bright purple, which Painters use, until the Orpiment ceased to be yellow, and became of a pale red. Then I diluted that red by adding a little *Viride Æris*, and a little more blue Bise than *Viride Æris*, until it became of such a grey or pale white, as verged to no one of the Colours more than to another. For thus it became of a Colour equal in Whiteness to that of Ashes, or of Wood newly cut, or of a Man's Skin. The Orpiment reflected more Light than did any other of the Powders, and therefore conduced more to the Whiteness of the compounded Colour than they. To assign the Proportions accurately may be difficult, by reason of the

different Goodness of Powders of the same kind. Accordingly, as the Colour of any Powder is more or less full and luminous, it ought to be used in a less or greater Proportion.

Now, considering that these grey and dun Colours may be also produced by mixing Whites and Blacks, and by consequence differ from perfect Whites, not in Species of Colours, but only in degree of Luminousness, it is manifest that there is nothing more requisite to make them perfectly white than to increase their Light sufficiently; and, on the contrary, if by increasing their Light they can be brought to perfect Whiteness, it will thence also follow, that they are of the same Species of Colour with the best Whites, and differ from them only in the Quantity of Light. And this I tried as follows. I took the third of the above-mention'd grey Mixtures, (that which was compounded of Orpiment, Purple, Bise, and *Viride Æris*) and rubbed it thickly upon the Floor of my Chamber, where the Sun shone upon it through the opened Casement; and by it, in the shadow, I laid a Piece of white Paper of the same Bigness. Then going from them to the distance of 12 or 18 Feet, so that I could not discern the Unevenness of the Surface of the Powder, nor the little Shadows let fall from the gritty Particles thereof; the Powder appeared intensely white, so as to transcend even the Paper it self in Whiteness, especially if the Paper were a little shaded from the Light of the Clouds, and then the Paper compared with the Powder appeared of such a grey Colour as the Powder had done before. But by laying the Paper where the Sun shines through the Glass of the Window, or by shutting the Window that the Sun might shine through the Glass upon the Powder, and by such other fit Means of increasing or decreasing the Lights wherewith the Powder and Paper were illuminated, the Light wherewith the Powder is illuminated may be made stronger in such a due Proportion than the Light wherewith the Paper is illuminated, that they shall both appear exactly alike in Whiteness. For when I was trying this, a Friend coming to visit me, I stopp'd him at the Door, and before I told him what the Colours were, or what I was doing; I asked him, Which of the two Whites were the best, and wherein they differed? And after he had at that distance viewed them well, he answer'd, that they were both good Whites, and that he could not say which was best, nor wherein their Colours differed. Now, if you consider, that this White of the Powder in the Sun-shine was compounded of the Colours which the component Powders (Orpiment, Purple, Bise, and *Viride Æris*) have in the

same Sun-shine, you must acknowledge by this Experiment, as well as by the former, that perfect Whiteness may be compounded of Colours.

From what has been said it is also evident, that the Whiteness of the Sun's Light is compounded of all the Colours wherewith the several sorts of Rays whereof that Light consists, when by their several Refrangibilities they are separated from one another, do tinge Paper or any other white Body whereon they fall. For those Colours (by *Prop.* II. *Part* 2.) are unchangeable, and whenever all those Rays with those their Colours are mix'd again, they reproduce the same white Light as before.

PROP. VI. Prob. II.

In a mixture of Primary Colours, the Quantity and Quality of each being given, to know the Colour of the Compound.

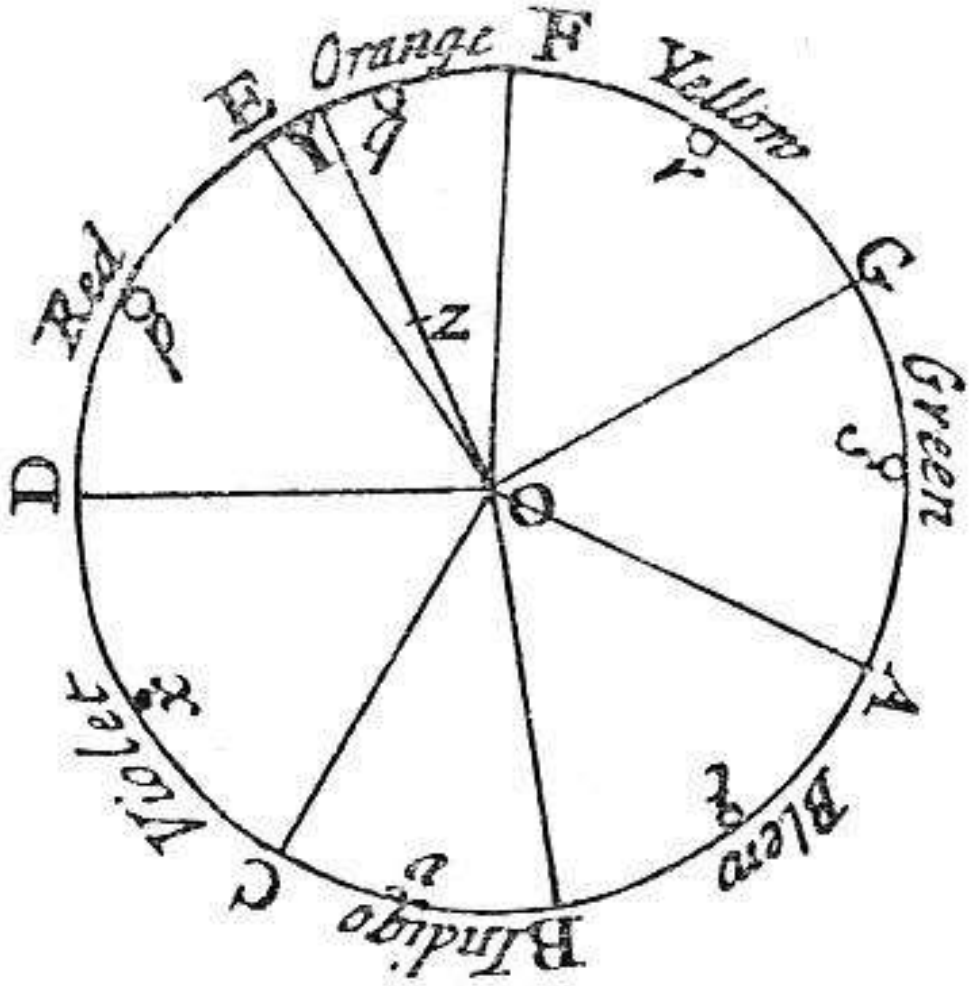


Fig. 11.

With the Center O [in *Fig.* 11.] and Radius OD describe a Circle ADF, and distinguish its Circumference into seven Parts DE, EF, FG, GA, AB, BC, CD, proportional to the seven Musical Tones or Intervals of the eight Sounds, *Sol*, *la*, *fa*, *sol*, *la*, *mi*, *fa*, *sol*, contained in an eight, that is, proportional to the Number 1/9, 1/16, 1/10, 1/9, 1/16, 1/16, 1/9. Let the first Part DE represent a red Colour, the second EF orange, the third FG yellow, the fourth CA green, the fifth AB blue, the sixth BC indigo, and the seventh CD violet. And conceive that these are all the Colours of uncompounded Light gradually passing into one another, as they do when made by Prisms; the Circumference DEFGABCD, representing the whole Series of Colours from one end of the Sun's colour'd Image to the other, so that from D to E be all degrees of red, at E the mean Colour between red and orange, from E to F all degrees of orange, at F the mean between orange and yellow, from F to G all degrees of yellow, and so on. Let *p* be the Center of Gravity of the Arch DE, and *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *x*, the Centers of Gravity of the Arches EF, FG, GA, AB, BC, and CD respectively, and about those Centers of Gravity let Circles proportional to the Number of Rays of each Colour in the given Mixture be describ'd: that is, the Circle *p* proportional to the Number of the red-making Rays in the Mixture, the Circle *q* proportional to the Number of the orange-making Rays in the Mixture, and so of the rest. Find the common Center of Gravity of all those Circles, *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *x*. Let that Center be Z; and from the Center of the Circle ADF, through Z to the Circumference, drawing the Right Line OY, the Place of the Point Y in the Circumference shall shew the Colour arising from the Composition of all the Colours in the given Mixture, and the Line OZ shall be proportional to the Fulness or Intenseness of the Colour, that is, to its distance from Whiteness. As if Y fall in the middle between F and G, the compounded Colour shall be the best yellow; if Y verge from the middle towards F or G, the compound Colour shall accordingly be a yellow, verging towards orange or green. If Z fall upon the Circumference, the Colour shall be intense and florid in the highest Degree; if it fall in the mid-way between the Circumference and Center, it shall be but half so intense, that is, it shall be such a Colour as would be made by diluting the intensest yellow with an equal quantity of whiteness; and if it fall upon the center O, the Colour shall have lost all its intenseness, and become a white. But it is to be noted, That if the point Z fall in or near the line OD, the main ingredients being the red and violet, the Colour

compounded shall not be any of the prismatick Colours, but a purple, inclining to red or violet, accordingly as the point Z lieth on the side of the line DO towards E or towards C, and in general the compounded violet is more bright and more fiery than the uncompounded. Also if only two of the primary Colours which in the circle are opposite to one another be mixed in an equal proportion, the point Z shall fall upon the center O, and yet the Colour compounded of those two shall not be perfectly white, but some faint anonymous Colour. For I could never yet by mixing only two primary Colours produce a perfect white. Whether it may be compounded of a mixture of three taken at equal distances in the circumference I do not know, but of four or five I do not much question but it may. But these are Curiosities of little or no moment to the understanding the Phænomena of Nature. For in all whites produced by Nature, there uses to be a mixture of all sorts of Rays, and by consequence a composition of all Colours.

To give an instance of this Rule; suppose a Colour is compounded of these homogeneal Colours, of violet one part, of indigo one part, of blue two parts, of green three parts, of yellow five parts, of orange six parts, and of red ten parts. Proportional to these parts describe the Circles *x*, *v*, *t*, *s*, *r*, *q*, *p*, respectively, that is, so that if the Circle *x* be one, the Circle *v* may be one, the Circle *t* two, the Circle *s* three, and the Circles *r*, *q* and *p*, five, six and ten. Then I find Z the common center of gravity of these Circles, and through Z drawing the Line OY, the Point Y falls upon the circumference between E and F, something nearer to E than to F, and thence I conclude, that the Colour compounded of these Ingredients will be an orange, verging a little more to red than to yellow. Also I find that OZ is a little less than one half of OY, and thence I conclude, that this orange hath a little less than half the fulness or intenseness of an uncompounded orange; that is to say, that it is such an orange as may be made by mixing an homogeneal orange with a good white in the proportion of the Line OZ to the Line ZY, this Proportion being not of the quantities of mixed orange and white Powders, but of the quantities of the Lights reflected from them.

This Rule I conceive accurate enough for practice, though not mathematically accurate; and the truth of it may be sufficiently proved to Sense, by stopping any of the Colours at the Lens in the tenth Experiment of this Book. For the rest of the Colours which are not stopp’d, but pass on to

the Focus of the Lens, will there compound either accurately or very nearly such a Colour, as by this Rule ought to result from their Mixture.

PROP. VII. Theor. V.

All the Colours in the Universe which are made by Light, and depend not on the Power of Imagination, are either the Colours of homogeneal Lights, or compounded of these, and that either accurately or very nearly, according to the Rule of the foregoing Problem.

For it has been proved (in *Pro. Part 2.*) that the changes of Colours made by Refractions do not arise from any new Modifications of the Rays impress'd by those Refractions, and by the various Terminations of Light and Shadow, as has been the constant and general Opinion of Philosophers. It has also been proved that the several Colours of the homogeneal Rays do constantly answer to their degrees of Refrangibility, (*Pro*. *Part* 1. and *Pro*. *Part* 2.) and that their degrees of Refrangibility cannot be changed by Refractions and Reflexions (*Pro*. *Part* 1.) and by consequence that those their Colours are likewise immutable. It has also been proved directly by refracting and reflecting homogeneal Lights apart, that their Colours cannot be changed, (*Pro*. *Part* 2.) It has been proved also, that when the several sorts of Rays are mixed, and in crossing pass through the same space, they do not act on one another so as to change each others colorific qualities. (*Exper.* 10. *Part* 2.) but by mixing their Actions in the Sensorium beget a Sensation differing from what either would do apart, that is a Sensation of a mean Colour between their proper Colours; and particularly when by the concourse and mixtures of all sorts of Rays, a white Colour is produced, the white is a mixture of all the Colours which the Rays would have apart, (*Pro*. *Part* 2.) The Rays in that mixture do not lose or alter their several colorific qualities, but by all their various kinds of Actions mix'd in the Sensorium, beget a Sensation of a middling Colour between all their Colours, which is whiteness. For whiteness is a mean between all Colours, having it self indifferently to them all, so as with equal facility to be tinged with any of them. A red Powder mixed with a little blue, or a blue with a little red, doth not presently lose its Colour, but a white Powder mix'd with any Colour is presently tinged with that Colour, and is equally capable of being tinged with any Colour whatever. It has been shewed also, that as the Sun's Light is

mix'd of all sorts of Rays, so its whiteness is a mixture of the Colours of all sorts of Rays; those Rays having from the beginning their several colorific qualities as well as their several Refrangibilities, and retaining them perpetually unchanged notwithstanding any Refractions or Reflexions they may at any time suffer, and that whenever any sort of the Sun's Rays is by any means (as by Reflexion in *Exper.* 9, and 10. *Part* 1. or by Refraction as happens in all Refractions) separated from the rest, they then manifest their proper Colours. These things have been prov'd, and the sum of all this amounts to the Proposition here to be proved. For if the Sun's Light is mix'd of several sorts of Rays, each of which have originally their several Refrangibilities and colorific Qualities, and notwithstanding their Refractions and Reflexions, and their various Separations or Mixtures, keep those their original Properties perpetually the same without alteration; then all the Colours in the World must be such as constantly ought to arise from the original colorific qualities of the Rays whereof the Lights consist by which those Colours are seen. And therefore if the reason of any Colour whatever be required, we have nothing else to do than to consider how the Rays in the Sun's Light have by Reflexions or Refractions, or other causes, been parted from one another, or mixed together; or otherwise to find out what sorts of Rays are in the Light by which that Colour is made, and in what Proportion; and then by the last Problem to learn the Colour which ought to arise by mixing those Rays (or their Colours) in that proportion. I speak here of Colours so far as they arise from Light. For they appear sometimes by other Causes, as when by the power of Phantasy we see Colours in a Dream, or a Mad-man sees things before him which are not there; or when we see Fire by striking the Eye, or see Colours like the Eye of a Peacock's Feather, by pressing our Eyes in either corner whilst we look the other way. Where these and such like Causes interpose not, the Colour always answers to the sort or sorts of the Rays whereof the Light consists, as I have constantly found in whatever Phænomena of Colours I have hitherto been able to examine. I shall in the following Propositions give instances of this in the Phænomena of chiefest note.

PROP. VIII. Prob. III.

By the discovered Properties of Light to explain the Colours made by Prisms.

Let ABC [in *Fig.* 12.] represent a Prism refracting the Light of the Sun, which comes into a dark Chamber through a hole Fφ almost as broad as the Prism, and let MN represent a white Paper on which the refracted Light is cast, and suppose the most refrangible or deepest violet-making Rays fall upon the Space Pπ, the least refrangible or deepest red-making Rays upon the Space Tτ, the middle sort between the indigo-making and blue-making Rays upon the Space Qχ, the middle sort of the green-making Rays upon the Space R, the middle sort between the yellow-making and orange-making Rays upon the Space Sσ, and other intermediate sorts upon intermediate Spaces. For so the Spaces upon which the several sorts adequately fall will by reason of the different Refrangibility of those sorts be one lower than another. Now if the Paper MN be so near the Prism that the Spaces PT and πτ do not interfere with one another, the distance between them Tπ will be illuminated by all the sorts of Rays in that proportion to one another which they have at their very first coming out of the Prism, and consequently be white. But the Spaces PT and πτ on either hand, will not be illuminated by them all, and therefore will appear coloured. And particularly at P, where the outmost violet-making Rays fall alone, the Colour must be the deepest violet. At Q where the violet-making and indigo-making Rays are mixed, it must be a violet inclining much to indigo. At R where the violet-making, indigo-making, blue-making, and one half of the green-making Rays are mixed, their Colours must (by the construction of the second Problem) compound a middle Colour between indigo and blue. At S where all the Rays are mixed, except the red-making and orange-making, their Colours ought by the same Rule to compound a faint blue, verging more to green than indigo. And in the progress from S to T, this blue will grow more and more faint and dilute, till at T, where all the Colours begin to be mixed, it ends in whiteness.

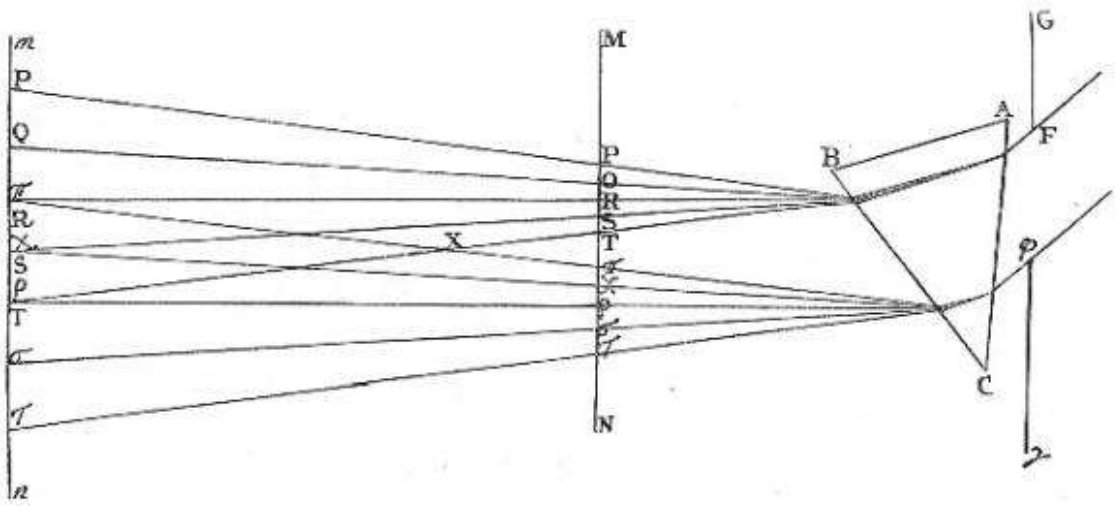


Fig. 12.

So again, on the other side of the white at τ, where the least refrangible or utmost red-making Rays are alone, the Colour must be the deepest red. At σ the mixture of red and orange will compound a red inclining to orange. At ρ the mixture of red, orange, yellow, and one half of the green must compound a middle Colour between orange and yellow. At χ the mixture of all Colours but violet and indigo will compound a faint yellow, verging more to green than to orange. And this yellow will grow more faint and dilute continually in its progress from χ to π, where by a mixture of all sorts of Rays it will become white.

These Colours ought to appear were the Sun's Light perfectly white: But because it inclines to yellow, the Excess of the yellow-making Rays whereby 'tis tinged with that Colour, being mixed with the faint blue between S and T, will draw it to a faint green. And so the Colours in order from P to τ ought to be violet, indigo, blue, very faint green, white, faint yellow, orange, red. Thus it is by the computation: And they that please to view the Colours made by a Prism will find it so in Nature.

These are the Colours on both sides the white when the Paper is held between the Prism and the Point X where the Colours meet, and the interjacent white vanishes. For if the Paper be held still farther off from the Prism, the most refrangible and least refrangible Rays will be wanting in the middle of the Light, and the rest of the Rays which are found there, will by

mixture produce a fuller green than before. Also the yellow and blue will now become less compounded, and by consequence more intense than before. And this also agrees with experience.

And if one look through a Prism upon a white Object encompassed with blackness or darkness, the reason of the Colours arising on the edges is much the same, as will appear to one that shall a little consider it. If a black Object be encompassed with a white one, the Colours which appear through the Prism are to be derived from the Light of the white one, spreading into the Regions of the black, and therefore they appear in a contrary order to that, when a white Object is surrounded with black. And the same is to be understood when an Object is viewed, whose parts are some of them less luminous than others. For in the borders of the more and less luminous Parts, Colours ought always by the same Principles to arise from the Excess of the Light of the more luminous, and to be of the same kind as if the darker parts were black, but yet to be more faint and dilute.

What is said of Colours made by Prisms may be easily applied to Colours made by the Glasses of Telescopes or Microscopes, or by the Humours of the Eye. For if the Object-glass of a Telescope be thicker on one side than on the other, or if one half of the Glass, or one half of the Pupil of the Eye be cover'd with any opake substance; the Object-glass, or that part of it or of the Eye which is not cover'd, may be consider'd as a Wedge with crooked Sides, and every Wedge of Glass or other pellucid Substance has the effect of a Prism in refracting the Light which passes through it.[L]

How the Colours in the ninth and tenth Experiments of the first Part arise from the different Reflexibility of Light, is evident by what was there said. But it is observable in the ninth Experiment, that whilst the Sun's direct Light is yellow, the Excess of the blue-making Rays in the reflected beam of Light MN, suffices only to bring that yellow to a pale white inclining to blue, and not to tinge it with a manifestly blue Colour. To obtain therefore a better blue, I used instead of the yellow Light of the Sun the white Light of the Clouds, by varying a little the Experiment, as follows.

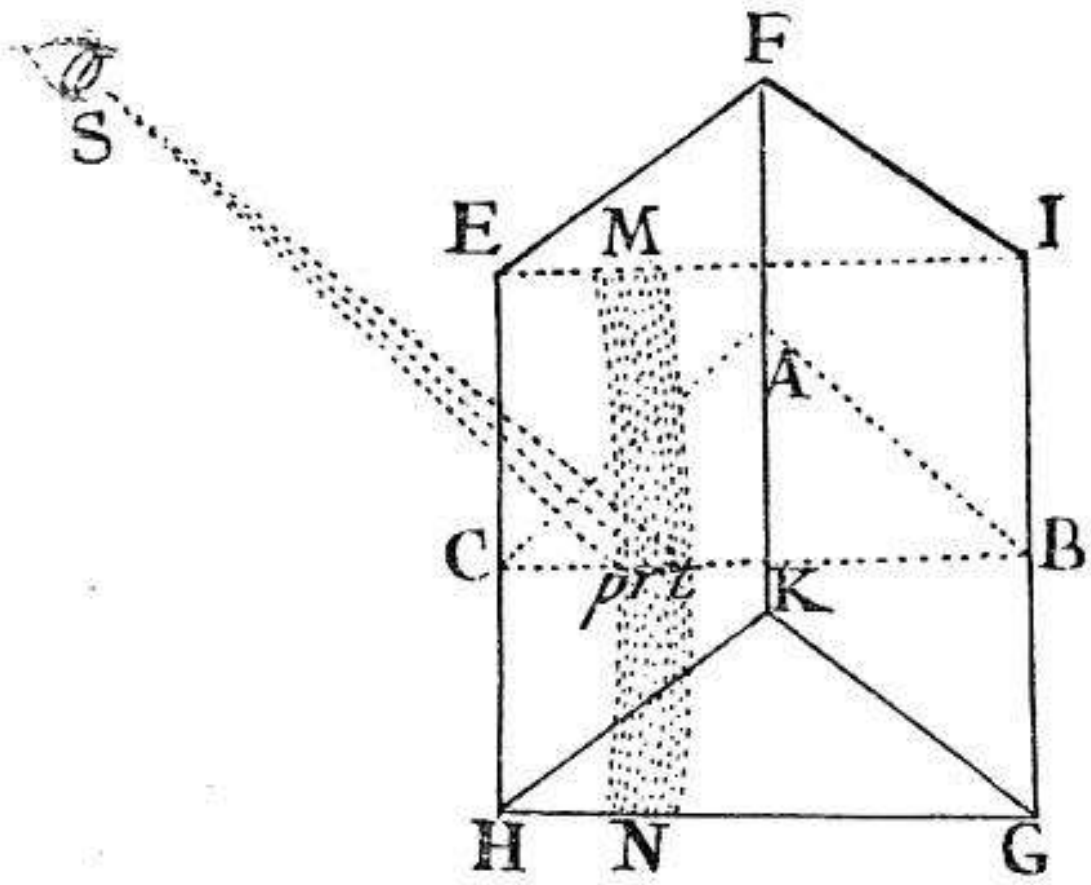


Fig. 13.

Exper. 16 Let HFG [in *Fig.* 13.] represent a Prism in the open Air, and S the Eye of the Spectator, viewing the Clouds by their Light coming into the Prism at the Plane Side FIGK, and reflected in it by its Base HEIG, and thence going out through its Plane Side HEFK to the Eye. And when the Prism and Eye are conveniently placed, so that the Angles of Incidence and Reflexion at the Base may be about 40 Degrees, the Spectator will see a Bow MN of a blue Colour, running from one End of the Base to the other, with the Concave Side towards him, and the Part of the Base IMNG beyond this Bow will be brighter than the other Part EMNH on the other Side of it. This blue Colour MN being made by nothing else than by Reflexion of a specular Superficies, seems so odd a Phænomenon, and so difficult to be explained by the vulgar Hypothesis of Philosophers, that I could not but think it deserved to be taken Notice of. Now for understanding the Reason of it, suppose the Plane ABC to cut the Plane Sides and Base of the Prism perpendicularly. From the Eye to the Line BC, wherein that Plane cuts the Base, draw the

Lines S*p* and S*t*, in the Angles S*pc* 50 degr. 1/9, and S*tc* 49 degr. 1/28, and the Point *p* will be the Limit beyond which none of the most refrangible Rays can pass through the Base of the Prism, and be refracted, whose Incidence is such that they may be reflected to the Eye; and the Point *t* will be the like Limit for the least refrangible Rays, that is, beyond which none of them can pass through the Base, whose Incidence is such that by Reflexion they may come to the Eye. And the Point *r* taken in the middle Way between *p* and *t*, will be the like Limit for the meanly refrangible Rays. And therefore all the least refrangible Rays which fall upon the Base beyond *t*, that is, between *t* and B, and can come from thence to the Eye, will be reflected thither: But on this side *t*, that is, between *t* and *c*, many of these Rays will be transmitted through the Base. And all the most refrangible Rays which fall upon the Base beyond *p*, that is, between, *p* and B, and can by Reflexion come from thence to the Eye, will be reflected thither, but every where between *p* and *c*, many of these Rays will get through the Base, and be refracted; and the same is to be understood of the meanly refrangible Rays on either side of the Point *r*. Whence it follows, that the Base of the Prism must every where between *t* and B, by a total Reflexion of all sorts of Rays to the Eye, look white and bright. And every where between *p* and C, by reason of the Transmission of many Rays of every sort, look more pale, obscure, and dark. But at *r*, and in other Places between *p* and *t*, where all the more refrangible Rays are reflected to the Eye, and many of the less refrangible are transmitted, the Excess of the most refrangible in the reflected Light will tinge that Light with their Colour, which is violet and blue. And this happens by taking the Line C *prt* B any where between the Ends of the Prism HG and EI.

PROP. IX. Prob. IV.

By the discovered Properties of Light to explain the Colours of the Rain-bow.

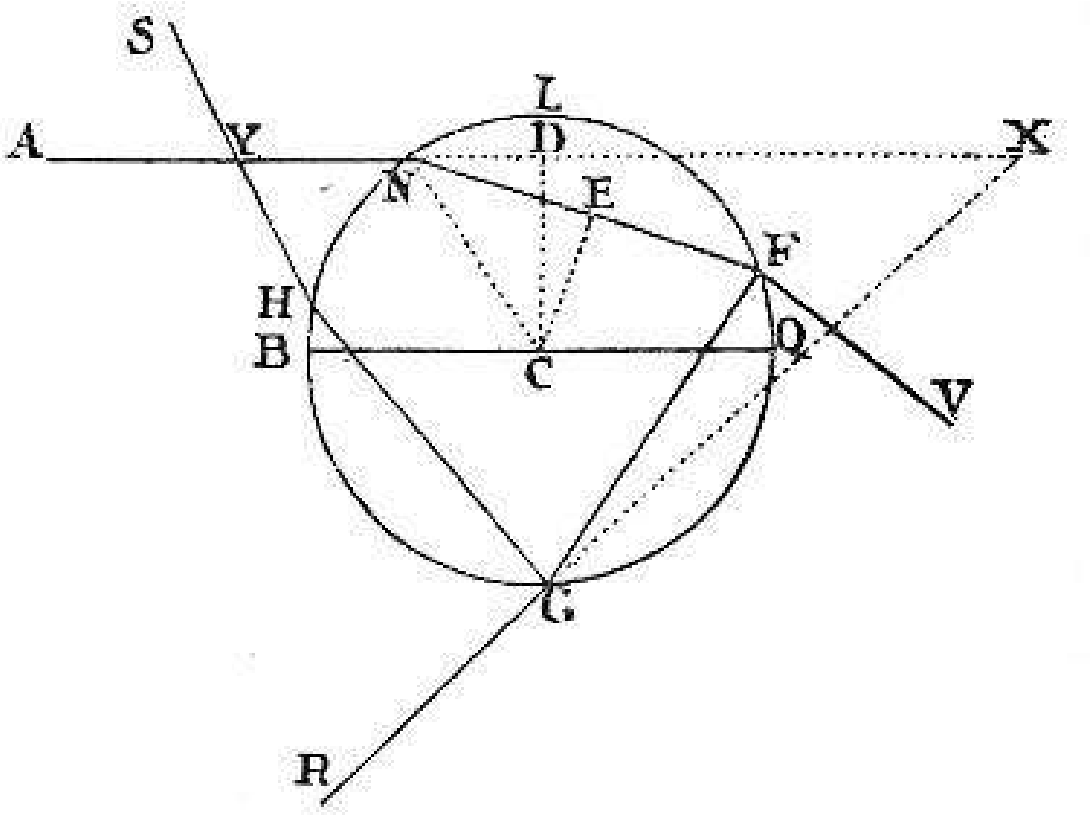


Fig. 14.

This Bow never appears, but where it rains in the Sun-shine, and may be made artificially by spouting up Water which may break aloft, and scatter into Drops, and fall down like Rain. For the Sun shining upon these Drops certainly causes the Bow to appear to a Spectator standing in a due Position to the Rain and Sun. And hence it is now agreed upon, that this Bow is made by Refraction of the Sun's Light in drops of falling Rain. This was understood by some of the Antients, and of late more fully discover'd and explain'd by the famous *Antonius de Dominis* Archbishop of *Spalato*, in his book *De Radiis Visûs & Lucis*, published by his Friend *Bartolus* at *Venice*, in the Year 1611, and written above 20 Years before. For he teaches there how the interior Bow is made in round Drops of Rain by two Refractions of the Sun's Light, and one Reflexion between them, and the exterior by two Refractions, and two sorts of Reflexions between them in each Drop of Water, and proves his Explications by Experiments made with a Phial full of Water, and with Globes of Glass filled with Water, and placed in the Sun to make the Colours of the two Bows appear in them. The same Explication

Des-Cartes hath pursued in his Meteors, and mended that of the exterior Bow. But whilst they understood not the true Origin of Colours, it's necessary to pursue it here a little farther. For understanding therefore how the Bow is made, let a Drop of Rain, or any other spherical transparent Body be represented by the Sphere BNFG, [in *Fig.* 14.] described with the Center C, and Semi-diameter CN. And let AN be one of the Sun's Rays incident upon it at N, and thence refracted to F, where let it either go out of the Sphere by Refraction towards V, or be reflected to G; and at G let it either go out by Refraction to R, or be reflected to H; and at H let it go out by Refraction towards S, cutting the incident Ray in Y. Produce AN and RG, till they meet in X, and upon AX and NF, let fall the Perpendiculars CD and CE, and produce CD till it fall upon the Circumference at L. Parallel to the incident Ray AN draw the Diameter BQ, and let the Sine of Incidence out of Air into Water be to the Sine of Refraction as I to R. Now, if you suppose the Point of Incidence N to move from the Point B, continually till it come to L, the Arch QF will first increase and then decrease, and so will the Angle AXR which the Rays AN and GR contain; and the Arch QF and Angle AXR will be biggest when ND is to CN as √(II - RR) to √(3)RR, in which case NE will be to ND as 2R to I. Also the Angle AYS, which the Rays AN and HS contain will first decrease, and then increase and grow least when ND is to CN as √(II - RR) to √(8)RR, in which case NE will be to ND, as 3R to I. And so the Angle which the next emergent Ray (that is, the emergent Ray after three Reflexions) contains with the incident Ray AN will come to its Limit when ND is to CN as √(II - RR) to √(15)RR, in which case NE will be to ND as 4R to I. And the Angle which the Ray next after that Emergent, that is, the Ray emergent after four Reflexions, contains with the Incident, will come to its Limit, when ND is to CN as √(II - RR) to √(24)RR, in which case NE will be to ND as 5R to I; and so on infinitely, the Numbers 3, 8, 15, 24, &c. being gather'd by continual Addition of the Terms of the arithmetical Progression 3, 5, 7, 9, &c. The Truth of all this Mathematicians will easily examine.[M]

Now it is to be observed, that as when the Sun comes to his Tropicks, Days increase and decrease but a very little for a great while together; so when by increasing the distance CD, these Angles come to their Limits, they vary their quantity but very little for some time together, and therefore a far greater number of the Rays which fall upon all the Points N in the Quadrant BL, shall emerge in the Limits of these Angles, than in any other

Inclinations. And farther it is to be observed, that the Rays which differ in Refrangibility will have different Limits of their Angles of Emergence, and by consequence according to their different Degrees of Refrangibility emerge most copiously in different Angles, and being separated from one another appear each in their proper Colours. And what those Angles are may be easily gather'd from the foregoing Theorem by Computation.

For in the least refrangible Rays the Sines I and R (as was found above) are 108 and 81, and thence by Computation the greatest Angle AXR will be found 42 Degrees and 2 Minutes, and the least Angle AYS, 50 Degrees and 57 Minutes. And in the most refrangible Rays the Sines I and R are 109 and 81, and thence by Computation the greatest Angle AXR will be found 40 Degrees and 17 Minutes, and the least Angle AYS 54 Degrees and 7 Minutes.

Suppose now that O [in *Fig.* 15.] is the Spectator's Eye, and OP a Line drawn parallel to the Sun's Rays and let POE, POF, POG, POH, be Angles of 40 Degr. 17 Min. 42 Degr. 2 Min. 50 Degr. 57 Min. and 54 Degr. 7 Min. respectively, and these Angles turned about their common Side OP, shall with their other Sides OE, OF; OG, OH, describe the Verges of two Rainbows AF, BE and CHDG. For if E, F, G, H, be drops placed any where in the conical Superficies described by OE, OF, OG, OH, and be illuminated by the Sun's Rays SE, SF, SG, SH; the Angle SEO being equal to the Angle POE, or 40 Degr. 17 Min. shall be the greatest Angle in which the most refrangible Rays can after one Reflexion be refracted to the Eye, and therefore all the Drops in the Line OE shall send the most refrangible Rays most copiously to the Eye, and thereby strike the Senses with the deepest violet Colour in that Region. And in like manner the Angle SFO being equal to the Angle POF, or 42 Degr. 2 Min. shall be the greatest in which the least refrangible Rays after one Reflexion can emerge out of the Drops, and therefore those Rays shall come most copiously to the Eye from the Drops in the Line OF, and strike the Senses with the deepest red Colour in that Region. And by the same Argument, the Rays which have intermediate Degrees of Refrangibility shall come most copiously from Drops between E and F, and strike the Senses with the intermediate Colours, in the Order which their Degrees of Refrangibility require, that is in the Progress from E to F, or from the inside of the Bow to the outside in this order, violet, indigo, blue, green, yellow,

orange, red. But the violet, by the mixture of the white Light of the Clouds, will appear faint and incline to purple.

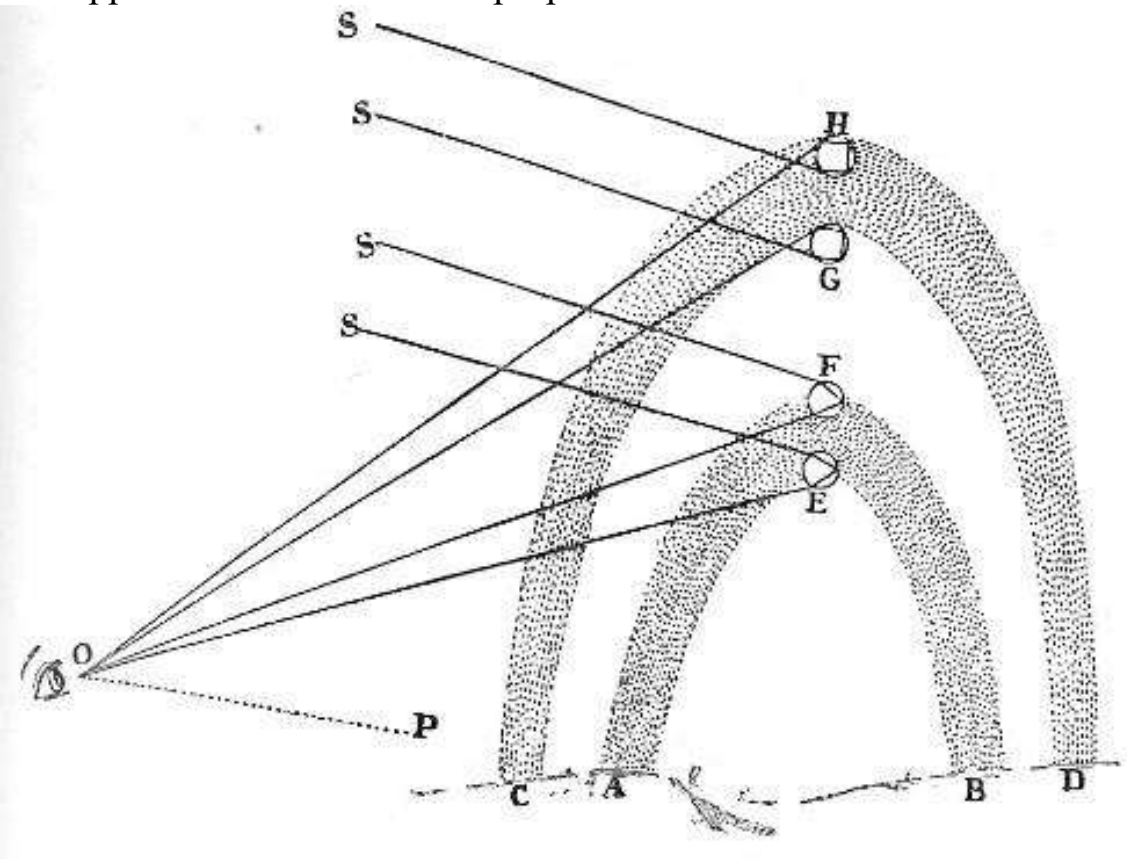


Fig. 15.

Again, the Angle SGO being equal to the Angle POG, or 50 Gr. 51 Min. shall be the least Angle in which the least refrangible Rays can after two Reflexions emerge out of the Drops, and therefore the least refrangible Rays shall come most copiously to the Eye from the Drops in the Line OG, and strike the Sense with the deepest red in that Region. And the Angle SHO being equal to the Angle POH, or 54 Gr. 7 Min. shall be the least Angle, in which the most refrangible Rays after two Reflexions can emerge out of the Drops; and therefore those Rays shall come most copiously to the Eye from the Drops in the Line OH, and strike the Senses with the deepest violet in that Region. And by the same Argument, the Drops in the Regions between G and H shall strike the Sense with the intermediate Colours in the Order which their Degrees of Refrangibility require, that is, in the Progress from G to H, or from the inside of the Bow to the outside in this order, red, orange, yellow, green, blue, indigo, violet. And since these four Lines OE, OF, OG, OH, may be situated any where in the above-mention'd conical Superficies;

what is said of the Drops and Colours in these Lines is to be understood of the Drops and Colours every where in those Superficies.

Thus shall there be made two Bows of Colours, an interior and stronger, by one Reflexion in the Drops, and an exterior and fainter by two; for the Light becomes fainter by every Reflexion. And their Colours shall lie in a contrary Order to one another, the red of both Bows bordering upon the Space GF, which is between the Bows. The Breadth of the interior Bow EOF measured cross the Colours shall be 1 Degr. 45 Min. and the Breadth of the exterior GOH shall be 3 Degr. 10 Min. and the distance between them GOF shall be 8 Gr. 15 Min. the greatest Semi-diameter of the innermost, that is, the Angle POF being 42 Gr. 2 Min. and the least Semi-diameter of the outermost POG, being 50 Gr. 57 Min. These are the Measures of the Bows, as they would be were the Sun but a Point; for by the Breadth of his Body, the Breadth of the Bows will be increased, and their Distance decreased by half a Degree, and so the breadth of the interior Iris will be 2 Degr. 15 Min. that of the exterior 3 Degr. 40 Min. their distance 8 Degr. 25 Min. the greatest Semi-diameter of the interior Bow 42 Degr. 17 Min. and the least of the exterior 50 Degr. 42 Min. And such are the Dimensions of the Bows in the Heavens found to be very nearly, when their Colours appear strong and perfect. For once, by such means as I then had, I measured the greatest Semi-diameter of the interior Iris about 42 Degrees, and the breadth of the red, yellow and green in that Iris 63 or 64 Minutes, besides the outmost faint red obscured by the brightness of the Clouds, for which we may allow 3 or 4 Minutes more. The breadth of the blue was about 40 Minutes more besides the violet, which was so much obscured by the brightness of the Clouds, that I could not measure its breadth. But supposing the breadth of the blue and violet together to equal that of the red, yellow and green together, the whole breadth of this Iris will be about 2-1/4 Degrees, as above. The least distance between this Iris and the exterior Iris was about 8 Degrees and 30 Minutes. The exterior Iris was broader than the interior, but so faint, especially on the blue side, that I could not measure its breadth distinctly. At another time when both Bows appeared more distinct, I measured the breadth of the interior Iris 2 Gr. 10′, and the breadth of the red, yellow and green in the exterior Iris, was to the breadth of the same Colours in the interior as 3 to 2.

This Explication of the Rain-bow is yet farther confirmed by the known Experiment (made by *Antonius de Dominis* and *Des-Cartes*) of hanging up

any where in the Sun-shine a Glass Globe filled with Water, and viewing it in such a posture, that the Rays which come from the Globe to the Eye may contain with the Sun's Rays an Angle of either 42 or 50 Degrees. For if the Angle be about 42 or 43 Degrees, the Spectator (suppose at O) shall see a full red Colour in that side of the Globe opposed to the Sun as 'tis represented at F, and if that Angle become less (suppose by depressing the Globe to E) there will appear other Colours, yellow, green and blue successive in the same side of the Globe. But if the Angle be made about 50 Degrees (suppose by lifting up the Globe to G) there will appear a red Colour in that side of the Globe towards the Sun, and if the Angle be made greater (suppose by lifting up the Globe to H) the red will turn successively to the other Colours, yellow, green and blue. The same thing I have tried, by letting a Globe rest, and raising or depressing the Eye, or otherwise moving it to make the Angle of a just magnitude.

I have heard it represented, that if the Light of a Candle be refracted by a Prism to the Eye; when the blue Colour falls upon the Eye, the Spectator shall see red in the Prism, and when the red falls upon the Eye he shall see blue; and if this were certain, the Colours of the Globe and Rain-bow ought to appear in a contrary order to what we find. But the Colours of the Candle being very faint, the mistake seems to arise from the difficulty of discerning what Colours fall on the Eye. For, on the contrary, I have sometimes had occasion to observe in the Sun's Light refracted by a Prism, that the Spectator always sees that Colour in the Prism which falls upon his Eye. And the same I have found true also in Candle-light. For when the Prism is moved slowly from the Line which is drawn directly from the Candle to the Eye, the red appears first in the Prism and then the blue, and therefore each of them is seen when it falls upon the Eye. For the red passes over the Eye first, and then the blue.

The Light which comes through drops of Rain by two Refractions without any Reflexion, ought to appear strongest at the distance of about 26 Degrees from the Sun, and to decay gradually both ways as the distance from him increases and decreases. And the same is to be understood of Light transmitted through spherical Hail-stones. And if the Hail be a little flatted, as it often is, the Light transmitted may grow so strong at a little less distance than that of 26 Degrees, as to form a Halo about the Sun or Moon; which Halo, as often as the Hail-stones are duly figured may be colour'd, and then

it must be red within by the least refrangible Rays, and blue without by the most refrangible ones, especially if the Hail-stones have opake Globules of Snow in their center to intercept the Light within the Halo (as *Hugenius* has observ'd) and make the inside thereof more distinctly defined than it would otherwise be. For such Hail-stones, though spherical, by terminating the Light by the Snow, may make a Halo red within and colourless without, and darker in the red than without, as Halos used to be. For of those Rays which pass close by the Snow the Rubriform will be least refracted, and so come to the Eye in the directest Lines.

The Light which passes through a drop of Rain after two Refractions, and three or more Reflexions, is scarce strong enough to cause a sensible Bow; but in those Cylinders of Ice by which *Hugenius* explains the *Parhelia*, it may perhaps be sensible.

PROP. X. Prob. V.

By the discovered Properties of Light to explain the permanent Colours of Natural Bodies.

These Colours arise from hence, that some natural Bodies reflect some sorts of Rays, others other sorts more copiously than the rest. Minium reflects the least refrangible or red-making Rays most copiously, and thence appears red. Violets reflect the most refrangible most copiously, and thence have their Colour, and so of other Bodies. Every Body reflects the Rays of its own Colour more copiously than the rest, and from their excess and predominance in the reflected Light has its Colour.

Exper. 17. For if in the homogeneal Lights obtained by the solution of the Problem proposed in the fourth Proposition of the first Part of this Book, you place Bodies of several Colours, you will find, as I have done, that every Body looks most splendid and luminous in the Light of its own Colour. Cinnaber in the homogeneal red Light is most resplendent, in the green Light it is manifestly less resplendent, and in the blue Light still less. Indigo in the violet blue Light is most resplendent, and its splendor is gradually diminish'd, as it is removed thence by degrees through the green and yellow Light to the red. By a Leek the green Light, and next that the blue and yellow which compound green, are more strongly reflected than the other Colours red and violet, and so of the rest. But to make these Experiments the more

manifest, such Bodies ought to be chosen as have the fullest and most vivid Colours, and two of those Bodies are to be compared together. Thus, for instance, if Cinnaber and *ultra*-marine blue, or some other full blue be held together in the red homogeneal Light, they will both appear red, but the Cinnaber will appear of a strongly luminous and resplendent red, and the *ultra*-marine blue of a faint obscure and dark red; and if they be held together in the blue homogeneal Light, they will both appear blue, but the *ultra*-marine will appear of a strongly luminous and resplendent blue, and the Cinnaber of a faint and dark blue. Which puts it out of dispute that the Cinnaber reflects the red Light much more copiously than the *ultra*-marine doth, and the *ultra*-marine reflects the blue Light much more copiously than the Cinnaber doth. The same Experiment may be tried successfully with red Lead and Indigo, or with any other two colour'd Bodies, if due allowance be made for the different strength or weakness of their Colour and Light.

And as the reason of the Colours of natural Bodies is evident by these Experiments, so it is farther confirmed and put past dispute by the two first Experiments of the first Part, whereby 'twas proved in such Bodies that the reflected Lights which differ in Colours do differ also in degrees of Refrangibility. For thence it's certain, that some Bodies reflect the more refrangible, others the less refrangible Rays more copiously.

And that this is not only a true reason of these Colours, but even the only reason, may appear farther from this Consideration, that the Colour of homogeneal Light cannot be changed by the Reflexion of natural Bodies.

For if Bodies by Reflexion cannot in the least change the Colour of any one sort of Rays, they cannot appear colour'd by any other means than by reflecting those which either are of their own Colour, or which by mixture must produce it.

But in trying Experiments of this kind care must be had that the Light be sufficiently homogeneal. For if Bodies be illuminated by the ordinary prismatick Colours, they will appear neither of their own Day-light Colours, nor of the Colour of the Light cast on them, but of some middle Colour between both, as I have found by Experience. Thus red Lead (for instance) illuminated with the ordinary prismatick green will not appear either red or green, but orange or yellow, or between yellow and green, accordingly as the green Light by which 'tis illuminated is more or less compounded. For because red Lead appears red when illuminated with white Light, wherein all

sorts of Rays are equally mix'd, and in the green Light all sorts of Rays are not equally mix'd, the Excess of the yellow-making, green-making and blue-making Rays in the incident green Light, will cause those Rays to abound so much in the reflected Light, as to draw the Colour from red towards their Colour. And because the red Lead reflects the red-making Rays most copiously in proportion to their number, and next after them the orange-making and yellow-making Rays; these Rays in the reflected Light will be more in proportion to the Light than they were in the incident green Light, and thereby will draw the reflected Light from green towards their Colour. And therefore the red Lead will appear neither red nor green, but of a Colour between both.

In transparently colour'd Liquors 'tis observable, that their Colour uses to vary with their thickness. Thus, for instance, a red Liquor in a conical Glass held between the Light and the Eye, looks of a pale and dilute yellow at the bottom where 'tis thin, and a little higher where 'tis thicker grows orange, and where 'tis still thicker becomes red, and where 'tis thickest the red is deepest and darkest. For it is to be conceiv'd that such a Liquor stops the indigo-making and violet-making Rays most easily, the blue-making Rays more difficultly, the green-making Rays still more difficultly, and the red-making most difficultly: And that if the thickness of the Liquor be only so much as suffices to stop a competent number of the violet-making and indigo-making Rays, without diminishing much the number of the rest, the rest must (by *Pro*. *Part* 2.) compound a pale yellow. But if the Liquor be so much thicker as to stop also a great number of the blue-making Rays, and some of the green-making, the rest must compound an orange; and where it is so thick as to stop also a great number of the green-making and a considerable number of the yellow-making, the rest must begin to compound a red, and this red must grow deeper and darker as the yellow-making and orange-making Rays are more and more stopp'd by increasing the thickness of the Liquor, so that few Rays besides the red-making can get through.

Of this kind is an Experiment lately related to me by Mr. *Halley*, who, in diving deep into the Sea in a diving Vessel, found in a clear Sun-shine Day, that when he was sunk many Fathoms deep into the Water the upper part of his Hand on which the Sun shone directly through the Water and through a small Glass Window in the Vessel appeared of a red Colour, like that of a Damask Rose, and the Water below and the under part of his Hand

illuminated by Light reflected from the Water below look'd green. For thence it may be gather'd, that the Sea-Water reflects back the violet and blue-making Rays most easily, and lets the red-making Rays pass most freely and copiously to great Depths. For thereby the Sun's direct Light at all great Depths, by reason of the predominating red-making Rays, must appear red; and the greater the Depth is, the fuller and intenser must that red be. And at such Depths as the violet-making Rays scarce penetrate unto, the blue-making, green-making, and yellow-making Rays being reflected from below more copiously than the red-making ones, must compound a green.

Now, if there be two Liquors of full Colours, suppose a red and blue, and both of them so thick as suffices to make their Colours sufficiently full; though either Liquor be sufficiently transparent apart, yet will you not be able to see through both together. For, if only the red-making Rays pass through one Liquor, and only the blue-making through the other, no Rays can pass through both. This Mr. *Hook* tried casually with Glass Wedges filled with red and blue Liquors, and was surprized at the unexpected Event, the reason of it being then unknown; which makes me trust the more to his Experiment, though I have not tried it my self. But he that would repeat it, must take care the Liquors be of very good and full Colours.

Now, whilst Bodies become coloured by reflecting or transmitting this or that sort of Rays more copiously than the rest, it is to be conceived that they stop and stifle in themselves the Rays which they do not reflect or transmit. For, if Gold be foliated and held between your Eye and the Light, the Light looks of a greenish blue, and therefore massy Gold lets into its Body the blue-making Rays to be reflected to and fro within it till they be stopp'd and stifled, whilst it reflects the yellow-making outwards, and thereby looks yellow. And much after the same manner that Leaf Gold is yellow by reflected, and blue by transmitted Light, and massy Gold is yellow in all Positions of the Eye; there are some Liquors, as the Tincture of *Lignum Nephriticum*, and some sorts of Glass which transmit one sort of Light most copiously, and reflect another sort, and thereby look of several Colours, according to the Position of the Eye to the Light. But, if these Liquors or Glasses were so thick and massy that no Light could get through them, I question not but they would like all other opake Bodies appear of one and the same Colour in all Positions of the Eye, though this I cannot yet affirm by Experience. For all colour'd Bodies, so far as my Observation reaches,

may be seen through if made sufficiently thin, and therefore are in some measure transparent, and differ only in degrees of Transparency from tinged transparent Liquors; these Liquors, as well as those Bodies, by a sufficient Thickness becoming opake. A transparent Body which looks of any Colour by transmitted Light, may also look of the same Colour by reflected Light, the Light of that Colour being reflected by the farther Surface of the Body, or by the Air beyond it. And then the reflected Colour will be diminished, and perhaps cease, by making the Body very thick, and pitching it on the backside to diminish the Reflexion of its farther Surface, so that the Light reflected from the tinging Particles may predominate. In such Cases, the Colour of the reflected Light will be apt to vary from that of the Light transmitted. But whence it is that tinged Bodies and Liquors reflect some sort of Rays, and intromit or transmit other sorts, shall be said in the next Book. In this Proposition I content my self to have put it past dispute, that Bodies have such Properties, and thence appear colour'd.

PROP. XI. Prob. VI.

By mixing colour'd Lights to compound a beam of Light of the same Colour and Nature with a beam of the Sun's direct Light, and therein to experience the Truth of the foregoing Propositions.

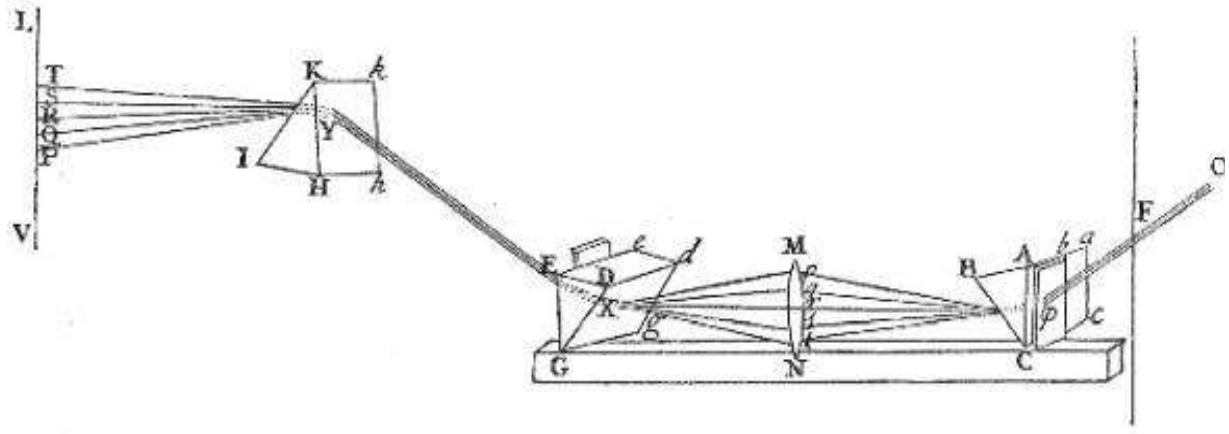


Fig. 16.

Let ABC *abc* [in *Fig.* 16.] represent a Prism, by which the Sun's Light let into a dark Chamber through the Hole F, may be refracted towards the Lens

MN, and paint upon it at *p*, *q*, *r*, *s*, and *t*, the usual Colours violet, blue, green, yellow, and red, and let the diverging Rays by the Refraction of this Lens converge again towards X, and there, by the mixture of all those their Colours, compound a white according to what was shewn above. Then let another Prism DEG *deg*, parallel to the former, be placed at X, to refract that white Light upwards towards Y. Let the refracting Angles of the Prisms, and their distances from the Lens be equal, so that the Rays which converged from the Lens towards X, and without Refraction, would there have crossed and diverged again, may by the Refraction of the second Prism be reduced into Parallelism and diverge no more. For then those Rays will recompose a beam of white Light XY. If the refracting Angle of either Prism be the bigger, that Prism must be so much the nearer to the Lens. You will know when the Prisms and the Lens are well set together, by observing if the beam of Light XY, which comes out of the second Prism be perfectly white to the very edges of the Light, and at all distances from the Prism continue perfectly and totally white like a beam of the Sun's Light. For till this happens, the Position of the Prisms and Lens to one another must be corrected; and then if by the help of a long beam of Wood, as is represented in the Figure, or by a Tube, or some other such Instrument, made for that Purpose, they be made fast in that Situation, you may try all the same Experiments in this compounded beam of Light XY, which have been made in the Sun's direct Light. For this compounded beam of Light has the same appearance, and is endow'd with all the same Properties with a direct beam of the Sun's Light, so far as my Observation reaches. And in trying Experiments in this beam you may by stopping any of the Colours, *p*, *q*, *r*, *s*, and *t*, at the Lens, see how the Colours produced in the Experiments are no other than those which the Rays had at the Lens before they entered the Composition of this Beam: And by consequence, that they arise not from any new Modifications of the Light by Refractions and Reflexions, but from the various Separations and Mixtures of the Rays originally endow'd with their colour-making Qualities.

So, for instance, having with a Lens 4-1/4 Inches broad, and two Prisms on either hand 6-1/4 Feet distant from the Lens, made such a beam of compounded Light; to examine the reason of the Colours made by Prisms, I refracted this compounded beam of Light XY with another Prism HIK *kh*, and thereby cast the usual Prismatick Colours PQRST upon the Paper LV

placed behind. And then by stopping any of the Colours *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, at the Lens, I found that the same Colour would vanish at the Paper. So if the Purple *p* was stopp'd at the Lens, the Purple P upon the Paper would vanish, and the rest of the Colours would remain unalter'd, unless perhaps the blue, so far as some purple latent in it at the Lens might be separated from it by the following Refractions. And so by intercepting the green upon the Lens, the green R upon the Paper would vanish, and so of the rest; which plainly shews, that as the white beam of Light XY was compounded of several Lights variously colour'd at the Lens, so the Colours which afterwards emerge out of it by new Refractions are no other than those of which its Whiteness was compounded. The Refraction of the Prism HIK *kh* generates the Colours PQRST upon the Paper, not by changing the colorific Qualities of the Rays, but by separating the Rays which had the very same colorific Qualities before they enter'd the Composition of the refracted beam of white Light XY. For otherwise the Rays which were of one Colour at the Lens might be of another upon the Paper, contrary to what we find.

So again, to examine the reason of the Colours of natural Bodies, I placed such Bodies in the Beam of Light XY, and found that they all appeared there of those their own Colours which they have in Day-light, and that those Colours depend upon the Rays which had the same Colours at the Lens before they enter'd the Composition of that beam. Thus, for instance, Cinnaber illuminated by this beam appears of the same red Colour as in Day-light; and if at the Lens you intercept the green-making and blue-making Rays, its redness will become more full and lively: But if you there intercept the red-making Rays, it will not any longer appear red, but become yellow or green, or of some other Colour, according to the sorts of Rays which you do not intercept. So Gold in this Light XY appears of the same yellow Colour as in Day-light, but by intercepting at the Lens a due Quantity of the yellow-making Rays it will appear white like Silver (as I have tried) which shews that its yellowness arises from the Excess of the intercepted Rays tinging that Whiteness with their Colour when they are let pass. So the Infusion of *Lignum Nephriticum* (as I have also tried) when held in this beam of Light XY, looks blue by the reflected Part of the Light, and red by the transmitted Part of it, as when 'tis view'd in Day-light; but if you intercept the blue at the Lens the Infusion will lose its reflected blue Colour, whilst its transmitted red remains perfect, and by the loss of some blue-making Rays, wherewith it

was allay'd, becomes more intense and full. And, on the contrary, if the red and orange-making Rays be intercepted at the Lens, the Infusion will lose its transmitted red, whilst its blue will remain and become more full and perfect. Which shews, that the Infusion does not tinge the Rays with blue and red, but only transmits those most copiously which were red-making before, and reflects those most copiously which were blue-making before. And after the same manner may the Reasons of other Phænomena be examined, by trying them in this artificial beam of Light XY.

FOOTNOTES:

[I] See .

[J] *See our* Author's Lect. Optic. *Part* II. *Sect.* II. .

[K] *As is done in our* Author's Lect. Optic. *Part* I. *Sect.* III. *and* IV. *and Part* II. *Sect.* II.

[L] *See our* Author's Lect. Optic. *Part* II. *Sect.* II. *pag.* 269, &c.

[M] *This is demonstrated in our* Author's Lect. Optic. *Part* I. *Sect.* IV. *Pro and* 36.

THE SECOND BOOK OF OPTICKS

PART I.

Observations concerning the Reflexions, Refractions, and Colours of thin transparent Bodies.

It has been observed by others, that transparent Substances, as Glass, Water, Air, &c. when made very thin by being blown into Bubbles, or otherwise formed into Plates, do exhibit various Colours according to their various thinness, altho' at a greater thickness they appear very clear and colourless. In the former Book I forbore to treat of these Colours, because they seemed of a more difficult Consideration, and were not necessary for establishing the Properties of Light there discoursed of. But because they may conduce to farther Discoveries for compleating the Theory of Light, especially as to the constitution of the parts of natural Bodies, on which their Colours or Transparency depend; I have here set down an account of them. To render this Discourse short and distinct, I have first described the principal of my Observations, and then consider'd and made use of them. The Observations are these.

Obs. 1. Compressing two Prisms hard together that their sides (which by chance were a very little convex) might somewhere touch one another: I found the place in which they touched to become absolutely transparent, as if they had there been one continued piece of Glass. For when the Light fell so obliquely on the Air, which in other places was between them, as to be all reflected; it seemed in that place of contact to be wholly transmitted, insomuch that when look'd upon, it appeared like a black or dark spot, by reason that little or no sensible Light was reflected from thence, as from other places; and when looked through it seemed (as it were) a hole in that Air which was formed into a thin Plate, by being compress'd between the Glasses. And through this hole Objects that were beyond might be seen distinctly, which could not at all be seen through other parts of the Glasses where the Air was interjacent. Although the Glasses were a little convex, yet this transparent spot was of a considerable breadth, which breadth seemed principally to proceed from the yielding inwards of the parts of the Glasses,

by reason of their mutual pressure. For by pressing them very hard together it would become much broader than otherwise.

Obs. 2. When the Plate of Air, by turning the Prisms about their common Axis, became so little inclined to the incident Rays, that some of them began to be transmitted, there arose in it many slender Arcs of Colours which at first were shaped almost like the Conchoid, as you see them delineated in the first Figure. And by continuing the Motion of the Prisms, these Arcs increased and bended more and more about the said transparent spot, till they were compleated into Circles or Rings incompassing it, and afterwards continually grew more and more contracted.

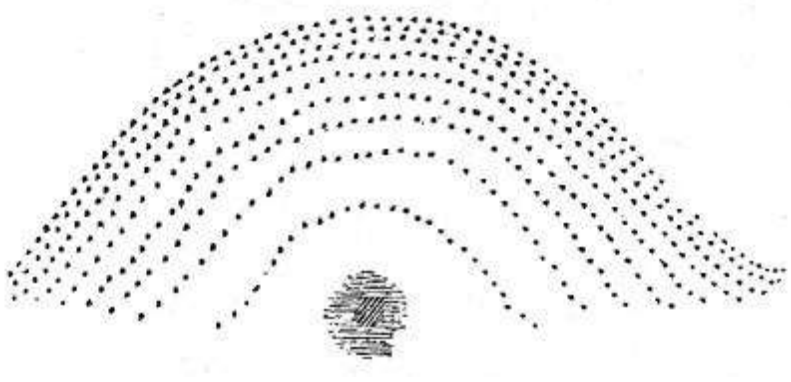


Fig. 1.

These Arcs at their first appearance were of a violet and blue Colour, and between them were white Arcs of Circles, which presently by continuing the Motion of the Prisms became a little tinged in their inward Limbs with red and yellow, and to their outward Limbs the blue was adjacent. So that the order of these Colours from the central dark spot, was at that time white, blue, violet; black, red, orange, yellow, white, blue, violet, &c. But the yellow and red were much fainter than the blue and violet.

The Motion of the Prisms about their Axis being continued, these Colours contracted more and more, shrinking towards the whiteness on either side of it, until they totally vanished into it. And then the Circles in those parts appear'd black and white, without any other Colours intermix'd. But by farther moving the Prisms about, the Colours again emerged out of the whiteness, the violet and blue at its inward Limb, and at its outward Limb the red and yellow. So that now their order from the central Spot was white, yellow, red; black; violet, blue, white, yellow, red, &c. contrary to what it was before.

Obs. 3. When the Rings or some parts of them appeared only black and white, they were very distinct and well defined, and the blackness seemed as intense as that of the central Spot. Also in the Borders of the Rings, where the Colours began to emerge out of the whiteness, they were pretty distinct, which made them visible to a very great multitude. I have sometimes number'd above thirty Successions (reckoning every black and white Ring for one Succession) and seen more of them, which by reason of their smalness I could not number. But in other Positions of the Prisms, at which the Rings appeared of many Colours, I could not distinguish above eight or nine of them, and the Exterior of those were very confused and dilute.

In these two Observations to see the Rings distinct, and without any other Colour than Black and white, I found it necessary to hold my Eye at a good distance from them. For by approaching nearer, although in the same inclination of my Eye to the Plane of the Rings, there emerged a bluish Colour out of the white, which by dilating it self more and more into the black, render'd the Circles less distinct, and left the white a little tinged with red and yellow. I found also by looking through a slit or oblong hole, which was narrower than the pupil of my Eye, and held close to it parallel to the Prisms, I could see the Circles much distincter and visible to a far greater number than otherwise.

Obs. 4. To observe more nicely the order of the Colours which arose out of the white Circles as the Rays became less and less inclined to the Plate of Air; I took two Object-glasses, the one a Plano-convex for a fourteen Foot Telescope, and the other a large double Convex for one of about fifty Foot; and upon this, laying the other with its plane side downwards, I pressed them slowly together, to make the Colours successively emerge in the middle of the Circles, and then slowly lifted the upper Glass from the lower to make them successively vanish again in the same place. The Colour, which by pressing the Glasses together, emerged last in the middle of the other Colours, would upon its first appearance look like a Circle of a Colour almost uniform from the circumference to the center and by compressing the Glasses still more, grow continually broader until a new Colour emerged in its center, and thereby it became a Ring encompassing that new Colour. And by compressing the Glasses still more, the diameter of this Ring would increase, and the breadth of its Orbit or Perimeter decrease until

another new Colour emerged in the center of the last: And so on until a third, a fourth, a fifth, and other following new Colours successively emerged there, and became Rings encompassing the innermost Colour, the last of which was the black Spot. And, on the contrary, by lifting up the upper Glass from the lower, the diameter of the Rings would decrease, and the breadth of their Orbit increase, until their Colours reached successively to the center; and then they being of a considerable breadth, I could more easily discern and distinguish their Species than before. And by this means I observ'd their Succession and Quantity to be as followeth.

Next to the pellucid central Spot made by the contact of the Glasses succeeded blue, white, yellow, and red. The blue was so little in quantity, that I could not discern it in the Circles made by the Prisms, nor could I well distinguish any violet in it, but the yellow and red were pretty copious, and seemed about as much in extent as the white, and four or five times more than the blue. The next Circuit in order of Colours immediately encompassing these were violet, blue, green, yellow, and red: and these were all of them copious and vivid, excepting the green, which was very little in quantity, and seemed much more faint and dilute than the other Colours. Of the other four, the violet was the least in extent, and the blue less than the yellow or red. The third Circuit or Order was purple, blue, green, yellow, and red; in which the purple seemed more reddish than the violet in the former Circuit, and the green was much more conspicuous, being as brisk and copious as any of the other Colours, except the yellow, but the red began to be a little faded, inclining very much to purple. After this succeeded the fourth Circuit of green and red. The green was very copious and lively, inclining on the one side to blue, and on the other side to yellow. But in this fourth Circuit there was neither violet, blue, nor yellow, and the red was very imperfect and dirty. Also the succeeding Colours became more and more imperfect and dilute, till after three or four revolutions they ended in perfect whiteness. Their form, when the Glasses were most compress'd so as to make the black Spot appear in the center, is delineated in the second Figure; where *a*, *b*, *c*, *d*, *e*: *f*, *g*, *h*, *i*, *k*: *l*, *m*, *n*, *o*, *p*: *q*, *r*: *s*, *t*: *v*, *x*: *y*, *z*, denote the Colours reckon'd in order from the center, black, blue, white, yellow, red: violet, blue, green, yellow, red: purple, blue, green, yellow, red: green, red: greenish blue, red: greenish blue, pale red: greenish blue, reddish white.

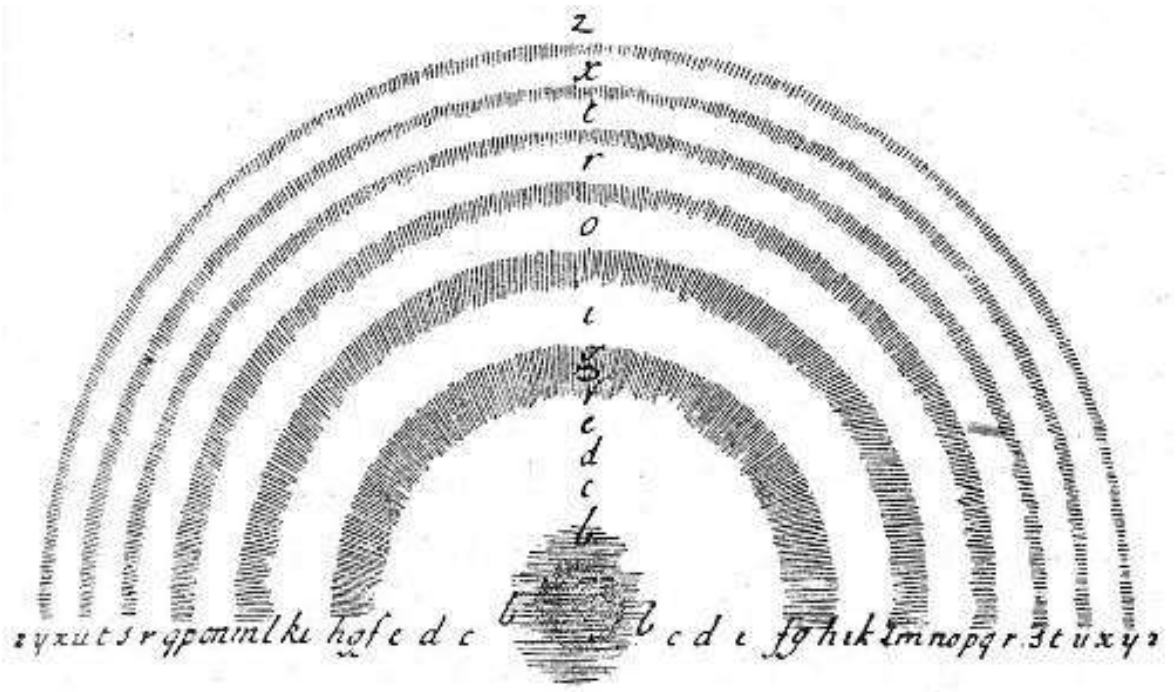


Fig. 2.

Obs. 5. To determine the interval of the Glasses, or thickness of the interjacent Air, by which each Colour was produced, I measured the Diameters of the first six Rings at the most lucid part of their Orbits, and squaring them, I found their Squares to be in the arithmetical Progression of the odd Numbers, 1, 3, 5, 7, 9, 11. And since one of these Glasses was plane, and the other spherical, their Intervals at those Rings must be in the same Progression. I measured also the Diameters of the dark or faint Rings between the more lucid Colours, and found their Squares to be in the arithmetical Progression of the even Numbers, 2, 4, 6, 8, 10, 12. And it being very nice and difficult to take these measures exactly; I repeated them divers times at divers parts of the Glasses, that by their Agreement I might be confirmed in them. And the same method I used in determining some others of the following Observations.

Obs. 6. The Diameter of the sixth Ring at the most lucid part of its Orbit was 58/100 parts of an Inch, and the Diameter of the Sphere on which the double convex Object-glass was ground was about 102 Feet, and hence I gathered the thickness of the Air or Aereal Interval of the Glasses at that Ring. But some time after, suspecting that in making this Observation I had not determined the Diameter of the Sphere with sufficient accurateness, and being uncertain whether the Plano-convex Glass was truly plane, and not

something concave or convex on that side which I accounted plane; and whether I had not pressed the Glasses together, as I often did, to make them touch; (For by pressing such Glasses together their parts easily yield inwards, and the Rings thereby become sensibly broader than they would be, did the Glasses keep their Figures.) I repeated the Experiment, and found the Diameter of the sixth lucid Ring about 55/100 parts of an Inch. I repeated the Experiment also with such an Object-glass of another Telescope as I had at hand. This was a double Convex ground on both sides to one and the same Sphere, and its Focus was distant from it 83-2/5 Inches. And thence, if the Sines of Incidence and Refraction of the bright yellow Light be assumed in proportion as 11 to 17, the Diameter of the Sphere to which the Glass was figured will by computation be found 182 Inches. This Glass I laid upon a flat one, so that the black Spot appeared in the middle of the Rings of Colours without any other Pressure than that of the weight of the Glass. And now measuring the Diameter of the fifth dark Circle as accurately as I could, I found it the fifth part of an Inch precisely. This Measure was taken with the points of a pair of Compasses on the upper Surface on the upper Glass, and my Eye was about eight or nine Inches distance from the Glass, almost perpendicularly over it, and the Glass was 1/6 of an Inch thick, and thence it is easy to collect that the true Diameter of the Ring between the Glasses was greater than its measur'd Diameter above the Glasses in the Proportion of 80 to 79, or thereabouts, and by consequence equal to 16/79 parts of an Inch, and its true Semi-diameter equal to 8/79 parts. Now as the Diameter of the Sphere (182 Inches) is to the Semi-diameter of this fifth dark Ring (8/79 parts of an Inch) so is this Semi-diameter to the thickness of the Air at this fifth dark Ring; which is therefore 32/567931 or 100/1774784. Parts of an Inch; and the fifth Part thereof, *viz.* the 1/88739 Part of an Inch, is the Thickness of the Air at the first of these dark Rings.

The same Experiment I repeated with another double convex Object-glass ground on both sides to one and the same Sphere. Its Focus was distant from it 168-1/2 Inches, and therefore the Diameter of that Sphere was 184 Inches. This Glass being laid upon the same plain Glass, the Diameter of the fifth of the dark Rings, when the black Spot in their Center appear'd plainly without pressing the Glasses, was by the measure of the Compasses upon the upper Glass 121/600 Parts of an Inch, and by

consequence between the Glasses it was 1222/6000: For the upper Glass was 1/8 of an Inch thick, and my Eye was distant from it 8 Inches. And a third proportional to half this from the Diameter of the Sphere is 5/88850 Parts of an Inch. This is therefore the Thickness of the Air at this Ring, and a fifth Part thereof, *viz.* the 1/88850th Part of an Inch is the Thickness thereof at the first of the Rings, as above.

I tried the same Thing, by laying these Object-glasses upon flat Pieces of a broken Looking-glass, and found the same Measures of the Rings: Which makes me rely upon them till they can be determin'd more accurately by Glasses ground to larger Spheres, though in such Glasses greater care must be taken of a true Plane.

These Dimensions were taken, when my Eye was placed almost perpendicularly over the Glasses, being about an Inch, or an Inch and a quarter, distant from the incident Rays, and eight Inches distant from the Glass; so that the Rays were inclined to the Glass in an Angle of about four Degrees. Whence by the following Observation you will understand, that had the Rays been perpendicular to the Glasses, the Thickness of the Air at these Rings would have been less in the Proportion of the Radius to the Secant of four Degrees, that is, of 10000 to 10024. Let the Thicknesses found be therefore diminish'd in this Proportion, and they will become 1/88952 and 1/89063, or (to use the nearest round Number) the 1/89000th Part of an Inch. This is the Thickness of the Air at the darkest Part of the first dark Ring made by perpendicular Rays; and half this Thickness multiplied by the Progression, 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. gives the Thicknesses of the Air at the most luminous Parts of all the brightest Rings, *viz.* 1/178000, 3/178000, 5/178000, 7/178000, &c. their arithmetical Means 2/178000, 4/178000, 6/178000, &c. being its Thicknesses at the darkest Parts of all the dark ones.

Obs. 7. The Rings were least, when my Eye was placed perpendicularly over the Glasses in the Axis of the Rings: And when I view'd them obliquely they became bigger, continually swelling as I removed my Eye farther from the Axis. And partly by measuring the Diameter of the same Circle at several Obliquities of my Eye, partly by other Means, as also by making use of the two Prisms for very great Obliquities, I found its Diameter, and consequently the Thickness of the Air at its Perimeter in all

those Obliquities to be very nearly in the Proportions express'd in this Table.

Angle of Incidence on the Air.	*Angle of Refraction into the Air.*	*Diameter of the Ring.*	*Thickness of the Air.*
Deg. Min.			
00 00			

00 00

10

10

06 26

10 00

10-1/13
10-2/13

12 45

20 00

10-1/3
10-2/3

18 49

30 00

10-3/4
11-1/2

24 30

40 00

11-2/5
13

29 37

50 00

12-1/2
15-1/2

33 58

60 00

14

20

35 47

65 00

15-1/4
23-1/4

37 19

70 00

16-4/5
28-1/4

38 33

75 00

19-1/4
37

39 27

80 00

22-6/7
52-1/4

40 00

85 00

29

84-1/12

40 11

90 00

35

122-1/2

In the two first Columns are express'd the Obliquities of the incident and emergent Rays to the Plate of the Air, that is, their Angles of Incidence and Refraction. In the third Column the Diameter of any colour'd Ring at those Obliquities is expressed in Parts, of which ten constitute that Diameter when the Rays are perpendicular. And in the fourth Column the Thickness of the Air at the Circumference of that Ring is expressed in Parts, of which also ten constitute its Thickness when the Rays are perpendicular.

And from these Measures I seem to gather this Rule: That the Thickness of the Air is proportional to the Secant of an Angle, whose Sine is a certain mean Proportional between the Sines of Incidence and Refraction. And that mean Proportional, so far as by these Measures I can determine it, is the first of an hundred and six arithmetical mean Proportionals between those Sines counted from the bigger Sine, that is, from the Sine of Refraction when the Refraction is made out of the Glass into the Plate of Air, or from the Sine of Incidence when the Refraction is made out of the Plate of Air into the Glass.

Obs. 8. The dark Spot in the middle of the Rings increased also by the Obliquation of the Eye, although almost insensibly. But, if instead of the Object-glasses the Prisms were made use of, its Increase was more manifest when viewed so obliquely that no Colours appear'd about it. It was least when the Rays were incident most obliquely on the interjacent Air, and as the obliquity decreased it increased more and more until the colour'd Rings appear'd, and then decreased again, but not so much as it increased before. And hence it is evident, that the Transparency was not only at the absolute Contact of the Glasses, but also where they had some little Interval. I have sometimes observed the Diameter of that Spot to be between half and two fifth parts of the Diameter of the exterior Circumference of the red in the first Circuit or Revolution of Colours when view'd almost perpendicularly; whereas when view'd obliquely it hath wholly vanish'd and become opake

and white like the other parts of the Glass; whence it may be collected that the Glasses did then scarcely, or not at all, touch one another, and that their Interval at the perimeter of that Spot when view'd perpendicularly was about a fifth or sixth part of their Interval at the circumference of the said red.

Obs. 9. By looking through the two contiguous Object-glasses, I found that the interjacent Air exhibited Rings of Colours, as well by transmitting Light as by reflecting it. The central Spot was now white, and from it the order of the Colours were yellowish red; black, violet, blue, white, yellow, red; violet, blue, green, yellow, red, &c. But these Colours were very faint and dilute, unless when the Light was trajected very obliquely through the Glasses: For by that means they became pretty vivid. Only the first yellowish red, like the blue in the fourth Observation, was so little and faint as scarcely to be discern'd. Comparing the colour'd Rings made by Reflexion, with these made by transmission of the Light; I found that white was opposite to black, red to blue, yellow to violet, and green to a Compound of red and violet. That is, those parts of the Glass were black when looked through, which when looked upon appeared white, and on the contrary. And so those which in one case exhibited blue, did in the other case exhibit red. And the like of the other Colours. The manner you have represented in the third Figure, where AB, CD, are the Surfaces of the Glasses contiguous at E, and the black Lines between them are their Distances in arithmetical Progression, and the Colours written above are seen by reflected Light, and those below by Light transmitted ().

Obs. 10. Wetting the Object-glasses a little at their edges, the Water crept in slowly between them, and the Circles thereby became less and the Colours more faint: Insomuch that as the Water crept along, one half of them at which it first arrived would appear broken off from the other half, and contracted into a less Room. By measuring them I found the Proportions of their Diameters to the Diameters of the like Circles made by Air to be about seven to eight, and consequently the Intervals of the Glasses at like Circles, caused by those two Mediums Water and Air, are as about three to four. Perhaps it may be a general Rule, That if any other Medium more or less dense than Water be compress'd between the Glasses, their Intervals at the Rings caused thereby will be to their Intervals caused by interjacent Air, as the Sines are which measure the Refraction made out of that Medium into Air.

Obs. 11. When the Water was between the Glasses, if I pressed the upper Glass variously at its edges to make the Rings move nimbly from one place to another, a little white Spot would immediately follow the center of them, which upon creeping in of the ambient Water into that place would presently vanish. Its appearance was such as interjacent Air would have caused, and it exhibited the same Colours. But it was not air, for where any Bubbles of Air were in the Water they would not vanish. The Reflexion must have rather been caused by a subtiler Medium, which could recede through the Glasses at the creeping in of the Water.

Obs. 12. These Observations were made in the open Air. But farther to examine the Effects of colour'd Light falling on the Glasses, I darken'd the Room, and view'd them by Reflexion of the Colours of a Prism cast on a Sheet of white Paper, my Eye being so placed that I could see the colour'd Paper by Reflexion in the Glasses, as in a Looking-glass. And by this means the Rings became distincter and visible to a far greater number than in the open Air. I have sometimes seen more than twenty of them, whereas in the open Air I could not discern above eight or nine.

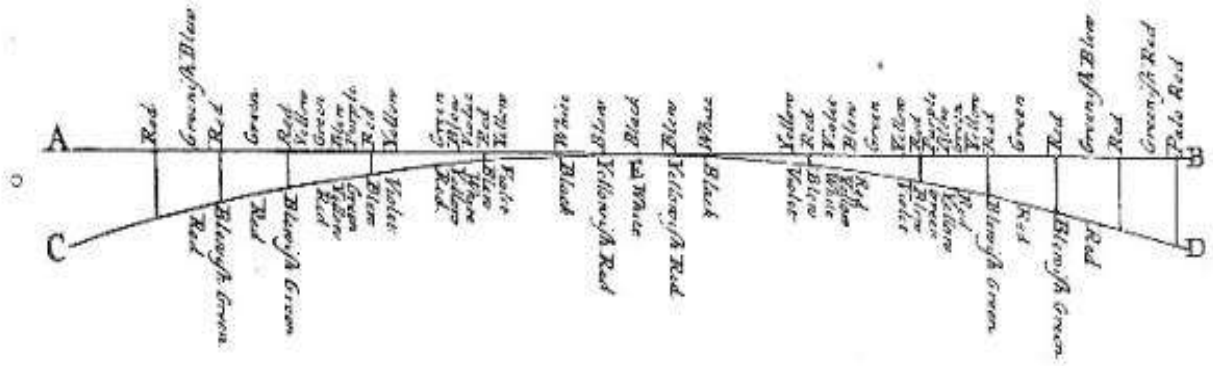


Fig. 3.

Obs. 13. Appointing an Assistant to move the Prism to and fro about its Axis, that all the Colours might successively fall on that part of the Paper which I saw by Reflexion from that part of the Glasses, where the Circles appear'd, so that all the Colours might be successively reflected from the Circles to my Eye, whilst I held it immovable, I found the Circles which the red Light made to be manifestly bigger than those which were made by the blue and violet. And it was very pleasant to see them gradually swell or

contract accordingly as the Colour of the Light was changed. The Interval of the Glasses at any of the Rings when they were made by the utmost red Light, was to their Interval at the same Ring when made by the utmost violet, greater than as 3 to 2, and less than as 13 to 8. By the most of my Observations it was as 14 to 9. And this Proportion seem'd very nearly the same in all Obliquities of my Eye; unless when two Prisms were made use of instead of the Object-glasses. For then at a certain great obliquity of my Eye, the Rings made by the several Colours seem'd equal, and at a greater obliquity those made by the violet would be greater than the same Rings made by the red: the Refraction of the Prism in this case causing the most refrangible Rays to fall more obliquely on that plate of the Air than the least refrangible ones. Thus the Experiment succeeded in the colour'd Light, which was sufficiently strong and copious to make the Rings sensible. And thence it may be gather'd, that if the most refrangible and least refrangible Rays had been copious enough to make the Rings sensible without the mixture of other Rays, the Proportion which here was 14 to 9 would have been a little greater, suppose 14-1/4 or 14-1/3 to 9.

Obs. 14. Whilst the Prism was turn'd about its Axis with an uniform Motion, to make all the several Colours fall successively upon the Object-glasses, and thereby to make the Rings contract and dilate: The Contraction or Dilatation of each Ring thus made by the variation of its Colour was swiftest in the red, and slowest in the violet, and in the intermediate Colours it had intermediate degrees of Celerity. Comparing the quantity of Contraction and Dilatation made by all the degrees of each Colour, I found that it was greatest in the red; less in the yellow, still less in the blue, and least in the violet. And to make as just an Estimation as I could of the Proportions of their Contractions or Dilatations, I observ'd that the whole Contraction or Dilatation of the Diameter of any Ring made by all the degrees of red, was to that of the Diameter of the same Ring made by all the degrees of violet, as about four to three, or five to four, and that when the Light was of the middle Colour between yellow and green, the Diameter of the Ring was very nearly an arithmetical Mean between the greatest Diameter of the same Ring made by the outmost red, and the least Diameter thereof made by the outmost violet: Contrary to what happens in the Colours of the oblong Spectrum made by the Refraction of a Prism, where the red is most contracted, the violet most expanded, and in the midst of all the

Colours is the Confine of green and blue. And hence I seem to collect that the thicknesses of the Air between the Glasses there, where the Ring is successively made by the limits of the five principal Colours (red, yellow, green, blue, violet) in order (that is, by the extreme red, by the limit of red and yellow in the middle of the orange, by the limit of yellow and green, by the limit of green and blue, by the limit of blue and violet in the middle of the indigo, and by the extreme violet) are to one another very nearly as the sixth lengths of a Chord which found the Notes in a sixth Major, *sol*, *la*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*. But it agrees something better with the Observation to say, that the thicknesses of the Air between the Glasses there, where the Rings are successively made by the limits of the seven Colours, red, orange, yellow, green, blue, indigo, violet in order, are to one another as the Cube Roots of the Squares of the eight lengths of a Chord, which found the Notes in an eighth, *sol*, *la*, *fa*, *sol*, *la*, *mi*, *fa*, *sol*; that is, as the Cube Roots of the Squares of the Numbers, 1, 8/9, 5/6, 3/4, 2/3, 3/5, 9/16, 1/2.

Obs. 15. These Rings were not of various Colours like those made in the open Air, but appeared all over of that prismatick Colour only with which they were illuminated. And by projecting the prismatick Colours immediately upon the Glasses, I found that the Light which fell on the dark Spaces which were between the Colour'd Rings was transmitted through the Glasses without any variation of Colour. For on a white Paper placed behind, it would paint Rings of the same Colour with those which were reflected, and of the bigness of their immediate Spaces. And from thence the origin of these Rings is manifest; namely, that the Air between the Glasses, according to its various thickness, is disposed in some places to reflect, and in others to transmit the Light of any one Colour (as you may see represented in the fourth Figure) and in the same place to reflect that of one Colour where it transmits that of another.

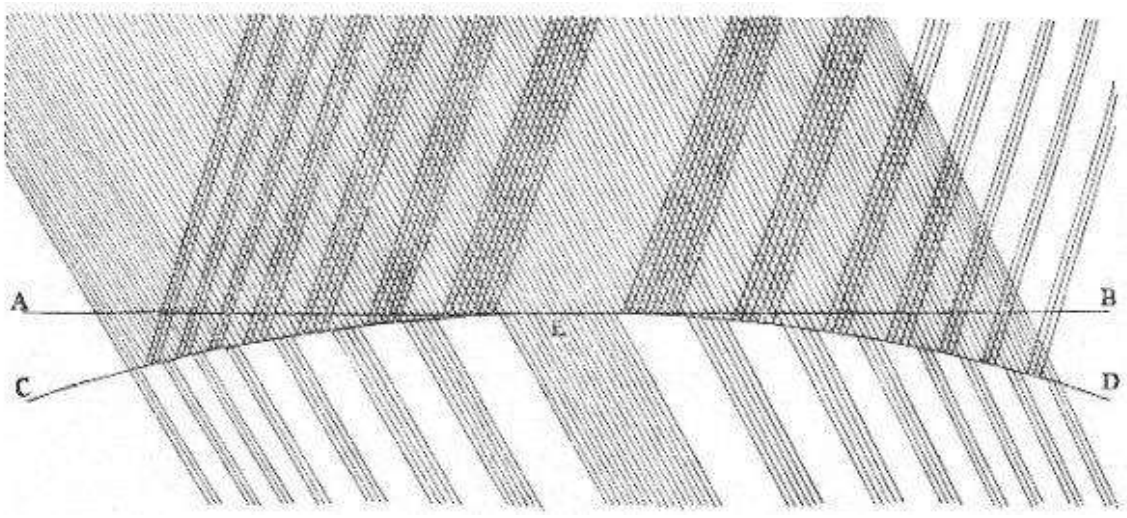


Fig. 4.

Obs. 16. The Squares of the Diameters of these Rings made by any prismatick Colour were in arithmetical Progression, as in the fifth Observation. And the Diameter of the sixth Circle, when made by the citrine yellow, and viewed almost perpendicularly was about 58/100 parts of an Inch, or a little less, agreeable to the sixth Observation.

The precedent Observations were made with a rarer thin Medium, terminated by a denser, such as was Air or Water compress'd between two Glasses. In those that follow are set down the Appearances of a denser Medium thin'd within a rarer, such as are Plates of Muscovy Glass, Bubbles of Water, and some other thin Substances terminated on all sides with air.

Obs. 17. If a Bubble be blown with Water first made tenacious by dissolving a little Soap in it, 'tis a common Observation, that after a while it will appear tinged with a great variety of Colours. To defend these Bubbles from being agitated by the external Air (whereby their Colours are irregularly moved one among another, so that no accurate Observation can be made of them,) as soon as I had blown any of them I cover'd it with a clear Glass, and by that means its Colours emerged in a very regular order, like so many concentrick Rings encompassing the top of the Bubble. And as the Bubble grew thinner by the continual subsiding of the Water, these Rings dilated slowly and overspread the whole Bubble, descending in order to the bottom of it, where they vanish'd successively. In the mean while, after all the Colours were emerged at the top, there grew in the center of the Rings a

small round black Spot, like that in the first Observation, which continually dilated it self till it became sometimes more than 1/2 or 3/4 of an Inch in breadth before the Bubble broke. At first I thought there had been no Light reflected from the Water in that place, but observing it more curiously, I saw within it several smaller round Spots, which appeared much blacker and darker than the rest, whereby I knew that there was some Reflexion at the other places which were not so dark as those Spots. And by farther Tryal I found that I could see the Images of some things (as of a Candle or the Sun) very faintly reflected, not only from the great black Spot, but also from the little darker Spots which were within it.

Besides the aforesaid colour'd Rings there would often appear small Spots of Colours, ascending and descending up and down the sides of the Bubble, by reason of some Inequalities in the subsiding of the Water. And sometimes small black Spots generated at the sides would ascend up to the larger black Spot at the top of the Bubble, and unite with it.

Obs. 18. Because the Colours of these Bubbles were more extended and lively than those of the Air thinn'd between two Glasses, and so more easy to be distinguish'd, I shall here give you a farther description of their order, as they were observ'd in viewing them by Reflexion of the Skies when of a white Colour, whilst a black substance was placed behind the Bubble. And they were these, red, blue; red, blue; red, blue; red, green; red, yellow, green, blue, purple; red, yellow, green, blue, violet; red, yellow, white, blue, black.

The three first Successions of red and blue were very dilute and dirty, especially the first, where the red seem'd in a manner to be white. Among these there was scarce any other Colour sensible besides red and blue, only the blues (and principally the second blue) inclined a little to green.

The fourth red was also dilute and dirty, but not so much as the former three; after that succeeded little or no yellow, but a copious green, which at first inclined a little to yellow, and then became a pretty brisk and good willow green, and afterwards changed to a bluish Colour; but there succeeded neither blue nor violet.

The fifth red at first inclined very much to purple, and afterwards became more bright and brisk, but yet not very pure. This was succeeded with a very bright and intense yellow, which was but little in quantity, and soon chang'd to green: But that green was copious and something more pure, deep and lively, than the former green. After that follow'd an excellent blue of a bright

Sky-colour, and then a purple, which was less in quantity than the blue, and much inclined to red.

The sixth red was at first of a very fair and lively scarlet, and soon after of a brighter Colour, being very pure and brisk, and the best of all the reds. Then after a lively orange follow'd an intense bright and copious yellow, which was also the best of all the yellows, and this changed first to a greenish yellow, and then to a greenish blue; but the green between the yellow and the blue, was very little and dilute, seeming rather a greenish white than a green. The blue which succeeded became very good, and of a very bright Sky-colour, but yet something inferior to the former blue; and the violet was intense and deep with little or no redness in it. And less in quantity than the blue.

In the last red appeared a tincture of scarlet next to violet, which soon changed to a brighter Colour, inclining to an orange; and the yellow which follow'd was at first pretty good and lively, but afterwards it grew more dilute until by degrees it ended in perfect whiteness. And this whiteness, if the Water was very tenacious and well-temper'd, would slowly spread and dilate it self over the greater part of the Bubble; continually growing paler at the top, where at length it would crack in many places, and those cracks, as they dilated, would appear of a pretty good, but yet obscure and dark Sky-colour; the white between the blue Spots diminishing, until it resembled the Threds of an irregular Net-work, and soon after vanish'd, and left all the upper part of the Bubble of the said dark blue Colour. And this Colour, after the aforesaid manner, dilated it self downwards, until sometimes it hath overspread the whole Bubble. In the mean while at the top, which was of a darker blue than the bottom, and appear'd also full of many round blue Spots, something darker than the rest, there would emerge one or more very black Spots, and within those, other Spots of an intenser blackness, which I mention'd in the former Observation; and these continually dilated themselves until the Bubble broke.

If the Water was not very tenacious, the black Spots would break forth in the white, without any sensible intervention of the blue. And sometimes they would break forth within the precedent yellow, or red, or perhaps within the blue of the second order, before the intermediate Colours had time to display themselves.

By this description you may perceive how great an affinity these Colours have with those of Air described in the fourth Observation, although set down in a contrary order, by reason that they begin to appear when the Bubble is thickest, and are most conveniently reckon'd from the lowest and thickest part of the Bubble upwards.

Obs. 19. Viewing in several oblique Positions of my Eye the Rings of Colours emerging on the top of the Bubble, I found that they were sensibly dilated by increasing the obliquity, but yet not so much by far as those made by thinn'd Air in the seventh Observation. For there they were dilated so much as, when view'd most obliquely, to arrive at a part of the Plate more than twelve times thicker than that where they appear'd when viewed perpendicularly; whereas in this case the thickness of the Water, at which they arrived when viewed most obliquely, was to that thickness which exhibited them by perpendicular Rays, something less than as 8 to 5. By the best of my Observations it was between 15 and 15-1/2 to 10; an increase about 24 times less than in the other case.

Sometimes the Bubble would become of an uniform thickness all over, except at the top of it near the black Spot, as I knew, because it would exhibit the same appearance of Colours in all Positions of the Eye. And then the Colours which were seen at its apparent circumference by the obliquest Rays, would be different from those that were seen in other places, by Rays less oblique to it. And divers Spectators might see the same part of it of differing Colours, by viewing it at very differing Obliquities. Now observing how much the Colours at the same places of the Bubble, or at divers places of equal thickness, were varied by the several Obliquities of the Rays; by the assistance of the 4th, 14th, 16th and 18th Observations, as they are hereafter explain'd, I collect the thickness of the Water requisite to exhibit any one and the same Colour, at several Obliquities, to be very nearly in the Proportion expressed in this Table.

Incidence on the Water.
Refraction into the Water.
Thickness of the Water.

Deg. Min.
Deg. Min.

00 00

00 00

10

15 00

11 11

10-1/4

30 00

22 1

10-4/5

45 00

32 2

11-4/5

60 00

40 30

13

75 00

46 25

14-1/2

90 00

48 35

15-1/5

In the two first Columns are express'd the Obliquities of the Rays to the Superficies of the Water, that is, their Angles of Incidence and Refraction. Where I suppose, that the Sines which measure them are in round Numbers, as 3 to 4, though probably the Dissolution of Soap in the Water, may a little alter its refractive Virtue. In the third Column, the Thickness of the Bubble, at which any one Colour is exhibited in those several Obliquities, is express'd in Parts, of which ten constitute its Thickness when the Rays are perpendicular. And the Rule found by the seventh Observation agrees well with these Measures, if duly apply'd; namely, that the Thickness of a Plate of Water requisite to exhibit one and the same Colour at several Obliquities of the Eye, is proportional to the Secant of an Angle, whose Sine is the first of an hundred and six arithmetical mean Proportionals between the Sines of Incidence and Refraction counted from the lesser Sine, that is, from the Sine of Refraction when the Refraction is made out of Air into Water, otherwise from the Sine of Incidence.

I have sometimes observ'd, that the Colours which arise on polish'd Steel by heating it, or on Bell-metal, and some other metalline Substances, when melted and pour'd on the Ground, where they may cool in the open Air, have, like the Colours of Water-bubbles, been a little changed by viewing them at divers Obliquities, and particularly that a deep blue, or violet, when view'd very obliquely, hath been changed to a deep red. But the Changes of these Colours are not so great and sensible as of those made by Water. For the Scoria, or vitrified Part of the Metal, which most Metals when heated or melted do continually protrude, and send out to their Surface, and which by covering the Metals in form of a thin glassy Skin, causes these Colours, is much denser than Water; and I find that the Change made by the Obliquation of the Eye is least in Colours of the densest thin Substances.

Obs. 20. As in the ninth Observation, so here, the Bubble, by transmitted Light, appear'd of a contrary Colour to that, which it exhibited by Reflexion. Thus when the Bubble being look'd on by the Light of the Clouds reflected from it, seemed red at its apparent Circumference, if the Clouds at the same time, or immediately after, were view'd through it, the Colour at its Circumference would be blue. And, on the contrary, when by reflected Light it appeared blue, it would appear red by transmitted Light.

Obs. 21. By wetting very thin Plates of *Muscovy* Glass, whose thinness made the like Colours appear, the Colours became more faint and languid, especially by wetting the Plates on that side opposite to the Eye: But I could not perceive any variation of their Species. So then the thickness of a Plate requisite to produce any Colour, depends only on the density of the Plate, and not on that of the ambient Medium. And hence, by the 10th and 16th Observations, may be known the thickness which Bubbles of Water, or Plates of *Muscovy* Glass, or other Substances, have at any Colour produced by them.

Obs. 22. A thin transparent Body, which is denser than its ambient Medium, exhibits more brisk and vivid Colours than that which is so much rarer; as I have particularly observed in the Air and Glass. For blowing Glass very thin at a Lamp Furnace, those Plates encompassed with Air did exhibit Colours much more vivid than those of Air made thin between two Glasses.

Obs. 23. Comparing the quantity of Light reflected from the several Rings, I found that it was most copious from the first or inmost, and in the exterior Rings became gradually less and less. Also the whiteness of the first Ring was stronger than that reflected from those parts of the thin Medium or Plate which were without the Rings; as I could manifestly perceive by viewing at a distance the Rings made by the two Object-glasses; or by comparing two Bubbles of Water blown at distant Times, in the first of which the Whiteness appear'd, which succeeded all the Colours, and in the other, the Whiteness which preceded them all.

Obs. 24. When the two Object-glasses were lay'd upon one another, so as to make the Rings of the Colours appear, though with my naked Eye I could not discern above eight or nine of those Rings, yet by viewing them through a Prism I have seen a far greater Multitude, insomuch that I could number more than forty, besides many others, that were so very small and

close together, that I could not keep my Eye steady on them severally so as to number them, but by their Extent I have sometimes estimated them to be more than an hundred. And I believe the Experiment may be improved to the Discovery of far greater Numbers. For they seem to be really unlimited, though visible only so far as they can be separated by the Refraction of the Prism, as I shall hereafter explain.

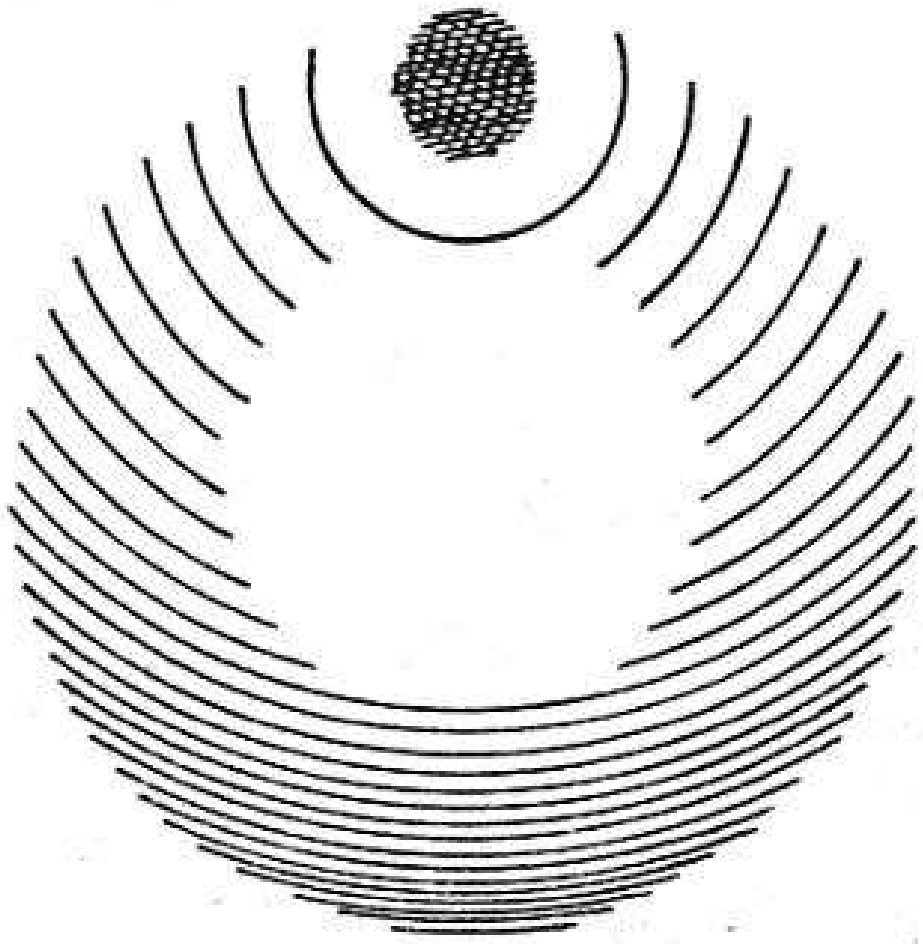


Fig. 5.

But it was but one side of these Rings, namely, that towards which the Refraction was made, which by that Refraction was render'd distinct, and the other side became more confused than when view'd by the naked Eye, insomuch that there I could not discern above one or two, and sometimes none of those Rings, of which I could discern eight or nine with my naked Eye. And their Segments or Arcs, which on the other side appear'd so numerous, for the most part exceeded not the third Part of a Circle. If the

Refraction was very great, or the Prism very distant from the Object-glasses, the middle Part of those Arcs became also confused, so as to disappear and constitute an even Whiteness, whilst on either side their Ends, as also the whole Arcs farthest from the Center, became distincter than before, appearing in the Form as you see them design'd in the fifth Figure.

The Arcs, where they seem'd distinctest, were only white and black successively, without any other Colours intermix'd. But in other Places there appeared Colours, whose Order was inverted by the refraction in such manner, that if I first held the Prism very near the Object-glasses, and then gradually removed it farther off towards my Eye, the Colours of the 2d, 3d, 4th, and following Rings, shrunk towards the white that emerged between them, until they wholly vanish'd into it at the middle of the Arcs, and afterwards emerged again in a contrary Order. But at the Ends of the Arcs they retain'd their Order unchanged.

I have sometimes so lay'd one Object-glass upon the other, that to the naked Eye they have all over seem'd uniformly white, without the least Appearance of any of the colour'd Rings; and yet by viewing them through a Prism, great Multitudes of those Rings have discover'd themselves. And in like manner Plates of *Muscovy* Glass, and Bubbles of Glass blown at a Lamp-Furnace, which were not so thin as to exhibit any Colours to the naked Eye, have through the Prism exhibited a great Variety of them ranged irregularly up and down in the Form of Waves. And so Bubbles of Water, before they began to exhibit their Colours to the naked Eye of a Bystander, have appeared through a Prism, girded about with many parallel and horizontal Rings; to produce which Effect, it was necessary to hold the Prism parallel, or very nearly parallel to the Horizon, and to dispose it so that the Rays might be refracted upwards.

PART II.

Remarks upon the foregoing Observations.

Having given my Observations of these Colours, before I make use of them to unfold the Causes of the Colours of natural Bodies, it is convenient that by the simplest of them, such as are the 2d, 3d, 4th, 9th, 12th, 18th, 20th, and 24th, I first explain the more compounded. And first to shew how the Colours in the fourth and eighteenth Observations are produced, let there be taken in any Right Line from the Point Y, [in *Fig.* 6.] the Lengths YA, YB, YC, YD, YE, YF, YG, YH, in proportion to one another, as the Cube-Roots of the Squares of the Numbers, 1/2, 9/16, 3/5, 2/3, 3/4, 5/6, 8/9, 1, whereby the Lengths of a Musical Chord to sound all the Notes in an eighth are represented; that is, in the Proportion of the Numbers 6300, 6814, 7114, 7631, 8255, 8855, 9243, 10000. And at the Points A, B, C, D, E, F, G, H, let Perpendiculars Aα, Bβ, &c. be erected, by whose Intervals the Extent of the several Colours set underneath against them, is to be represented. Then divide the Line *Aα* in such Proportion as the Numbers 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, &c. set at the Points of Division denote. And through those Divisions from Y draw Lines 1I, 2K, 3L, 5M, 6N, 7O, &c.

Now, if A2 be supposed to represent the Thickness of any thin transparent Body, at which the outmost Violet is most copiously reflected in the first Ring, or Series of Colours, then by the 13th Observation, HK will represent its Thickness, at which the utmost Red is most copiously reflected in the same Series. Also by the 5th and 16th Observations, A6 and HN will denote the Thicknesses at which those extreme Colours are most copiously reflected in the second Series, and A10 and HQ the Thicknesses at which they are most copiously reflected in the third Series, and so on. And the Thickness at which any of the intermediate Colours are reflected most copiously, will, according to the 14th Observation, be defined by the distance of the Line AH from the intermediate parts of the Lines 2K, 6N, 10Q, &c. against which the Names of those Colours are written below.

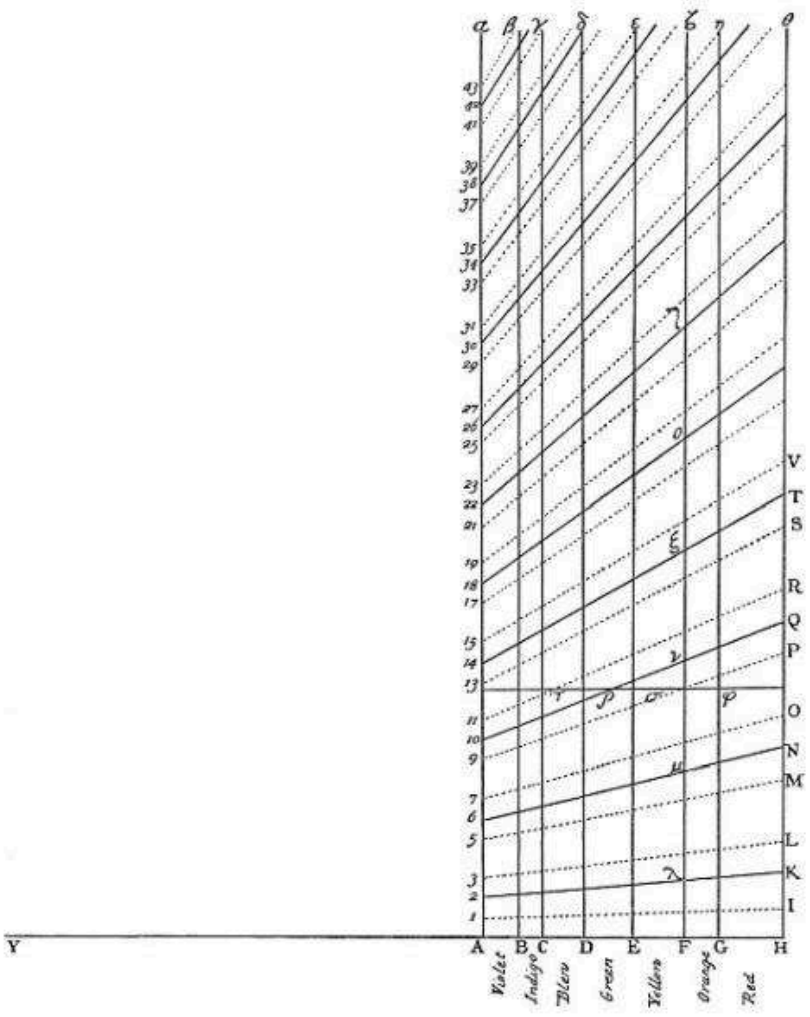


Fig. 6.

But farther, to define the Latitude of these Colours in each Ring or Series, let A1 design the least thickness, and A3 the greatest thickness, at which the extreme violet in the first Series is reflected, and let HI, and HL, design the like limits for the extreme red, and let the intermediate Colours be limited by the intermediate parts of the Lines 1I, and 3L, against which the Names of those Colours are written, and so on: But yet with this caution, that the Reflexions be supposed strongest at the intermediate Spaces, 2K, 6N, 10Q, &c. and from thence to decrease gradually towards these limits, 1I, 3L, 5M, 7O, &c. on either side; where you must not conceive them to be precisely limited, but to decay indefinitely. And whereas I have assign'd the same Latitude to every Series, I did it, because although the Colours in the first Series seem to be a little broader than the rest, by reason of a stronger

Reflexion there, yet that inequality is so insensible as scarcely to be determin'd by Observation.

Now according to this Description, conceiving that the Rays originally of several Colours are by turns reflected at the Spaces 1I, L3, 5M, O7, 9PR11, &c. and transmitted at the Spaces AHI1, 3LM5, 7OP9, &c. it is easy to know what Colour must in the open Air be exhibited at any thickness of a transparent thin Body. For if a Ruler be applied parallel to AH, at that distance from it by which the thickness of the Body is represented, the alternate Spaces 1IL3, 5MO7, &c. which it crosseth will denote the reflected original Colours, of which the Colour exhibited in the open Air is compounded. Thus if the constitution of the green in the third Series of Colours be desired, apply the Ruler as you see at πρσφ, and by its passing through some of the blue at π and yellow at σ, as well as through the green at ρ, you may conclude that the green exhibited at that thickness of the Body is principally constituted of original green, but not without a mixture of some blue and yellow.

By this means you may know how the Colours from the center of the Rings outward ought to succeed in order as they were described in the 4th and 18th Observations. For if you move the Ruler gradually from AH through all distances, having pass'd over the first Space which denotes little or no Reflexion to be made by thinnest Substances, it will first arrive at 1 the violet, and then very quickly at the blue and green, which together with that violet compound blue, and then at the yellow and red, by whose farther addition that blue is converted into whiteness, which whiteness continues during the transit of the edge of the Ruler from I to 3, and after that by the successive deficience of its component Colours, turns first to compound yellow, and then to red, and last of all the red ceaseth at L. Then begin the Colours of the second Series, which succeed in order during the transit of the edge of the Ruler from 5 to O, and are more lively than before, because more expanded and severed. And for the same reason instead of the former white there intercedes between the blue and yellow a mixture of orange, yellow, green, blue and indigo, all which together ought to exhibit a dilute and imperfect green. So the Colours of the third Series all succeed in order; first, the violet, which a little interferes with the red of the second order, and is thereby inclined to a reddish purple; then the blue and green, which are less mix'd with other Colours, and consequently more lively than before,

especially the green: Then follows the yellow, some of which towards the green is distinct and good, but that part of it towards the succeeding red, as also that red is mix'd with the violet and blue of the fourth Series, whereby various degrees of red very much inclining to purple are compounded. This violet and blue, which should succeed this red, being mixed with, and hidden in it, there succeeds a green. And this at first is much inclined to blue, but soon becomes a good green, the only unmix'd and lively Colour in this fourth Series. For as it verges towards the yellow, it begins to interfere with the Colours of the fifth Series, by whose mixture the succeeding yellow and red are very much diluted and made dirty, especially the yellow, which being the weaker Colour is scarce able to shew it self. After this the several Series interfere more and more, and their Colours become more and more intermix'd, till after three or four more revolutions (in which the red and blue predominate by turns) all sorts of Colours are in all places pretty equally blended, and compound an even whiteness.

And since by the 15th Observation the Rays endued with one Colour are transmitted, where those of another Colour are reflected, the reason of the Colours made by the transmitted Light in the 9th and 20th Observations is from hence evident.

If not only the Order and Species of these Colours, but also the precise thickness of the Plate, or thin Body at which they are exhibited, be desired in parts of an Inch, that may be also obtained by assistance of the 6th or 16th Observations. For according to those Observations the thickness of the thinned Air, which between two Glasses exhibited the most luminous parts of the first six Rings were 1/178000, 3/178000, 5/178000, 7/178000, 9/178000, 11/178000 parts of an Inch. Suppose the Light reflected most copiously at these thicknesses be the bright citrine yellow, or confine of yellow and orange, and these thicknesses will be Fλ, Fμ, Fυ, Fξ, Fo, Fτ. And this being known, it is easy to determine what thickness of Air is represented by Gφ, or by any other distance of the Ruler from AH.

But farther, since by the 10th Observation the thickness of Air was to the thickness of Water, which between the same Glasses exhibited the same Colour, as 4 to 3, and by the 21st Observation the Colours of thin Bodies are not varied by varying the ambient Medium; the thickness of a Bubble of Water, exhibiting any Colour, will be 3/4 of the thickness of Air producing the same Colour. And so according to the same 10th and 21st Observations,

the thickness of a Plate of Glass, whose Refraction of the mean refrangible Ray, is measured by the proportion of the Sines 31 to 20, may be 20/31 of the thickness of Air producing the same Colours; and the like of other Mediums. I do not affirm, that this proportion of 20 to 31, holds in all the Rays; for the Sines of other sorts of Rays have other Proportions. But the differences of those Proportions are so little that I do not here consider them. On these Grounds I have composed the following Table, wherein the thickness of Air, Water, and Glass, at which each Colour is most intense and specifick, is expressed in parts of an Inch divided into ten hundred thousand equal parts.

Now if this Table be compared with the 6th Scheme, you will there see the constitution of each Colour, as to its Ingredients, or the original Colours of which it is compounded, and thence be enabled to judge of its Intenseness or Imperfection; which may suffice in explication of the 4th and 18th Observations, unless it be farther desired to delineate the manner how the Colours appear, when the two Object-glasses are laid upon one another. To do which, let there be described a large Arc of a Circle, and a streight Line which may touch that Arc, and parallel to that Tangent several occult Lines, at such distances from it, as the Numbers set against the several Colours in the Table denote. For the Arc, and its Tangent, will represent the Superficies of the Glasses terminating the interjacent Air; and the places where the occult Lines cut the Arc will show at what distances from the center, or Point of contact, each Colour is reflected.

The thickness of colour'd Plates and Particles of

Air.
Water.
Glass.

Their Colours of the first Order,
Very black
1/2
3/8
10/31

Black
1
3/4
20/31

Beginning of Black
2
1-1/2
1-2/7

Blue
2-2/5
1-4/5
1-11/22

White
5-1/4
3-7/8

3-2/5

Yellow
7-1/9
5-1/3
4-3/5

Orange
8
6
5-1/6

Red
9
6-3/4
5-4/5

Of the second order,
Violet
11-1/6

8-3/8
7-1/5

Indigo
12-5/6
9-5/8
8-2/11

Blue
14
10-1/2
9

Green
15-1/8
11-2/3
9-5/7

Yellow
16-2/7
12-1/5
10-2/5

Orange
17-2/9
13
11-1/9

Bright red
18-1/3
13-3/4
11-5/6

Scarlet
19-2/3
14-3/4
12-2/3

Of the third Order,
Indigo
22-1/10
16-4/7
14-1/4

Blue
23-2/5
17-11/20
15-1/10

Green
25-1/5
18-9/10
16-1/4

Yellow
27-1/7
20-1/3
17-1/2

Red
29
21-3/4
18-5/7

Bluish red
32
24
20-2/3

Of the fourth Order,
Green
35-2/7
26-1/2
22-3/4

Yellowish green
36
27
23-2/9

Red
40-1/3
30-1/4
26

Of the fifth Order,
Greenish blue
46
34-1/2

29-2/3

Red
52-1/2
39-3/8
34

Of the sixth Order,
Greenish blue
58-3/4
44
38

Red
65
48-3/4
42

Of the seventh Order,
Greenish blue
71
53-1/4
45-4/5

Ruddy White
77
57-3/4
49-2/3

There are also other Uses of this Table: For by its assistance the thickness of the Bubble in the 19th Observation was determin'd by the Colours which it exhibited. And so the bigness of the parts of natural Bodies may be conjectured by their Colours, as shall be hereafter shewn. Also, if two or more very thin Plates be laid one upon another, so as to compose one Plate equalling them all in thickness, the resulting Colour may be hereby determin'd. For instance, Mr. *Hook* observed, as is mentioned in his *Micrographia*, that a faint yellow Plate of *Muscovy* Glass laid upon a blue one, constituted a very deep purple. The yellow of the first Order is a faint one, and the thickness of the Plate exhibiting it, according to the Table is 4-3/5, to which add 9, the thickness exhibiting blue of the second Order, and the Sum will be 13-3/5, which is the thickness exhibiting the purple of the third Order.

To explain, in the next place, the circumstances of the 2d and 3d Observations; that is, how the Rings of the Colours may (by turning the Prisms about their common Axis the contrary way to that expressed in those Observations) be converted into white and black Rings, and afterwards into Rings of Colours again, the Colours of each Ring lying now in an inverted

order; it must be remember'd, that those Rings of Colours are dilated by the obliquation of the Rays to the Air which intercedes the Glasses, and that according to the Table in the 7th Observation, their Dilatation or Increase of their Diameter is most manifest and speedy when they are obliquest. Now the Rays of yellow being more refracted by the first Superficies of the said Air than those of red, are thereby made more oblique to the second Superficies, at which they are reflected to produce the colour'd Rings, and consequently the yellow Circle in each Ring will be more dilated than the red; and the Excess of its Dilatation will be so much the greater, by how much the greater is the obliquity of the Rays, until at last it become of equal extent with the red of the same Ring. And for the same reason the green, blue and violet, will be also so much dilated by the still greater obliquity of their Rays, as to become all very nearly of equal extent with the red, that is, equally distant from the center of the Rings. And then all the Colours of the same Ring must be coincident, and by their mixture exhibit a white Ring. And these white Rings must have black and dark Rings between them, because they do not spread and interfere with one another, as before. And for that reason also they must become distincter, and visible to far greater numbers. But yet the violet being obliquest will be something more dilated, in proportion to its extent, than the other Colours, and so very apt to appear at the exterior Verges of the white.

Afterwards, by a greater obliquity of the Rays, the violet and blue become more sensibly dilated than the red and yellow, and so being farther removed from the center of the Rings, the Colours must emerge out of the white in an order contrary to that which they had before; the violet and blue at the exterior Limbs of each Ring, and the red and yellow at the interior. And the violet, by reason of the greatest obliquity of its Rays, being in proportion most of all expanded, will soonest appear at the exterior Limb of each white Ring, and become more conspicuous than the rest. And the several Series of Colours belonging to the several Rings, will, by their unfolding and spreading, begin again to interfere, and thereby render the Rings less distinct, and not visible to so great numbers.

If instead of the Prisms the Object-glasses be made use of, the Rings which they exhibit become not white and distinct by the obliquity of the Eye, by reason that the Rays in their passage through that Air which intercedes the Glasses are very nearly parallel to those Lines in which they were first

incident on the Glasses, and consequently the Rays endued with several Colours are not inclined one more than another to that Air, as it happens in the Prisms.

There is yet another circumstance of these Experiments to be consider'd, and that is why the black and white Rings which when view'd at a distance appear distinct, should not only become confused by viewing them near at hand, but also yield a violet Colour at both the edges of every white Ring. And the reason is, that the Rays which enter the Eye at several parts of the Pupil, have several Obliquities to the Glasses, and those which are most oblique, if consider'd apart, would represent the Rings bigger than those which are the least oblique. Whence the breadth of the Perimeter of every white Ring is expanded outwards by the obliquest Rays, and inwards by the least oblique. And this Expansion is so much the greater by how much the greater is the difference of the Obliquity; that is, by how much the Pupil is wider, or the Eye nearer to the Glasses. And the breadth of the violet must be most expanded, because the Rays apt to excite a Sensation of that Colour are most oblique to a second or farther Superficies of the thinn'd Air at which they are reflected, and have also the greatest variation of Obliquity, which makes that Colour soonest emerge out of the edges of the white. And as the breadth of every Ring is thus augmented, the dark Intervals must be diminish'd, until the neighbouring Rings become continuous, and are blended, the exterior first, and then those nearer the center; so that they can no longer be distinguish'd apart, but seem to constitute an even and uniform whiteness.

Among all the Observations there is none accompanied with so odd circumstances as the twenty-fourth. Of those the principal are, that in thin Plates, which to the naked Eye seem of an even and uniform transparent whiteness, without any terminations of Shadows, the Refraction of a Prism should make Rings of Colours appear, whereas it usually makes Objects appear colour'd only there where they are terminated with Shadows, or have parts unequally luminous; and that it should make those Rings exceedingly distinct and white, although it usually renders Objects confused and coloured. The Cause of these things you will understand by considering, that all the Rings of Colours are really in the Plate, when view'd with the naked Eye, although by reason of the great breadth of their Circumferences they so much interfere and are blended together, that they seem to constitute an

uniform whiteness. But when the Rays pass through the Prism to the Eye, the Orbits of the several Colours in every Ring are refracted, some more than others, according to their degrees of Refrangibility: By which means the Colours on one side of the Ring (that is in the circumference on one side of its center), become more unfolded and dilated, and those on the other side more complicated and contracted. And where by a due Refraction they are so much contracted, that the several Rings become narrower than to interfere with one another, they must appear distinct, and also white, if the constituent Colours be so much contracted as to be wholly coincident. But on the other side, where the Orbit of every Ring is made broader by the farther unfolding of its Colours, it must interfere more with other Rings than before, and so become less distinct.

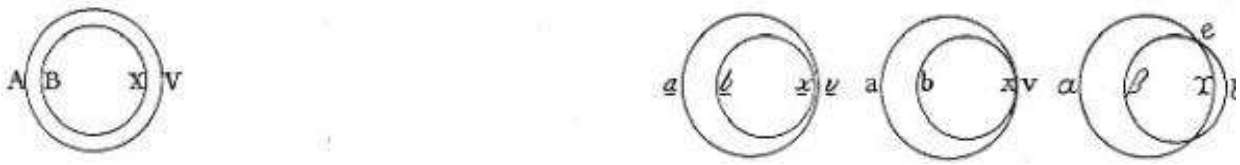


Fig. 7.

To explain this a little farther, suppose the concentrick Circles AV, and BX, [in *Fig.* 7.] represent the red and violet of any Order, which, together with the intermediate Colours, constitute any one of these Rings. Now these being view'd through a Prism, the violet Circle BX, will, by a greater Refraction, be farther translated from its place than the red AV, and so approach nearer to it on that side of the Circles, towards which the Refractions are made. For instance, if the red be translated to *av*, the violet may be translated to *bx*, so as to approach nearer to it at *x* than before; and if the red be farther translated to av, the violet may be so much farther translated to bx as to convene with it at x; and if the red be yet farther translated to αY, the violet may be still so much farther translated to βξ as to pass beyond it at ξ, and convene with it at *e* and *f*. And this being understood not only of the red and violet, but of all the other intermediate Colours, and also of every revolution of those Colours, you will easily perceive how those of the same revolution or order, by their nearness at *xv* and Yξ, and their coincidence at xv, *e* and *f*, ought to constitute pretty distinct Arcs of Circles, especially at xv, or at *e* and *f*; and that they will appear severally at *x*υ and at xv exhibit whiteness by their coincidence, and again appear severally at Yξ, but yet in a contrary order to that which they had before, and still retain

beyond *e* and *f*. But on the other side, at *ab*, ab, or αβ, these Colours must become much more confused by being dilated and spread so as to interfere with those of other Orders. And the same confusion will happen at Yξ between *e* and *f*, if the Refraction be very great, or the Prism very distant from the Object-glasses: In which case no parts of the Rings will be seen, save only two little Arcs at *e* and *f*, whose distance from one another will be augmented by removing the Prism still farther from the Object-glasses: And these little Arcs must be distinctest and whitest at their middle, and at their ends, where they begin to grow confused, they must be colour'd. And the Colours at one end of every Arc must be in a contrary order to those at the other end, by reason that they cross in the intermediate white; namely, their ends, which verge towards Yξ, will be red and yellow on that side next the center, and blue and violet on the other side. But their other ends which verge from Yξ, will on the contrary be blue and violet on that side towards the center, and on the other side red and yellow.

Now as all these things follow from the properties of Light by a mathematical way of reasoning, so the truth of them may be manifested by Experiments. For in a dark Room, by viewing these Rings through a Prism, by reflexion of the several prismatick Colours, which an assistant causes to move to and fro upon a Wall or Paper from whence they are reflected, whilst the Spectator's Eye, the Prism, and the Object-glasses, (as in the 13th Observation,) are placed steady; the Position of the Circles made successively by the several Colours, will be found such, in respect of one another, as I have described in the Figures *abxv*, or abxv, or *αβξY*. And by the same method the truth of the Explications of other Observations may be examined.

By what hath been said, the like Phænomena of Water and thin Plates of Glass may be understood. But in small fragments of those Plates there is this farther observable, that where they lie flat upon a Table, and are turned about their centers whilst they are view'd through a Prism, they will in some postures exhibit Waves of various Colours; and some of them exhibit these Waves in one or two Positions only, but the most of them do in all Positions exhibit them, and make them for the most part appear almost all over the Plates. The reason is, that the Superficies of such Plates are not even, but have many Cavities and Swellings, which, how shallow soever, do a little vary the thickness of the Plate. For at the several sides of those Cavities, for

the Reasons newly described, there ought to be produced Waves in several postures of the Prism. Now though it be but some very small and narrower parts of the Glass, by which these Waves for the most part are caused, yet they may seem to extend themselves over the whole Glass, because from the narrowest of those parts there are Colours of several Orders, that is, of several Rings, confusedly reflected, which by Refraction of the Prism are unfolded, separated, and, according to their degrees of Refraction, dispersed to several places, so as to constitute so many several Waves, as there were divers orders of Colours promiscuously reflected from that part of the Glass.

These are the principal Phænomena of thin Plates or Bubbles, whose Explications depend on the properties of Light, which I have heretofore deliver'd. And these you see do necessarily follow from them, and agree with them, even to their very least circumstances; and not only so, but do very much tend to their proof. Thus, by the 24th Observation it appears, that the Rays of several Colours, made as well by thin Plates or Bubbles, as by Refractions of a Prism, have several degrees of Refrangibility; whereby those of each order, which at the reflexion from the Plate or Bubble are intermix'd with those of other orders, are separated from them by Refraction, and associated together so as to become visible by themselves like Arcs of Circles. For if the Rays were all alike refrangible, 'tis impossible that the whiteness, which to the naked Sense appears uniform, should by Refraction have its parts transposed and ranged into those black and white Arcs.

It appears also that the unequal Refractions of difform Rays proceed not from any contingent irregularities; such as are Veins, an uneven Polish, or fortuitous Position of the Pores of Glass; unequal and casual Motions in the Air or Æther, the spreading, breaking, or dividing the same Ray into many diverging parts; or the like. For, admitting any such irregularities, it would be impossible for Refractions to render those Rings so very distinct, and well defined, as they do in the 24th Observation. It is necessary therefore that every Ray have its proper and constant degree of Refrangibility connate with it, according to which its refraction is ever justly and regularly perform'd; and that several Rays have several of those degrees.

And what is said of their Refrangibility may be also understood of their Reflexibility, that is, of their Dispositions to be reflected, some at a greater, and others at a less thickness of thin Plates or Bubbles; namely, that those Dispositions are also connate with the Rays, and immutable; as may appear

by the 13th, 14th, and 15th Observations, compared with the fourth and eighteenth.

By the Precedent Observations it appears also, that whiteness is a dissimilar mixture of all Colours, and that Light is a mixture of Rays endued with all those Colours. For, considering the multitude of the Rings of Colours in the 3d, 12th, and 24th Observations, it is manifest, that although in the 4th and 18th Observations there appear no more than eight or nine of those Rings, yet there are really a far greater number, which so much interfere and mingle with one another, as after those eight or nine revolutions to dilute one another wholly, and constitute an even and sensibly uniform whiteness. And consequently that whiteness must be allow'd a mixture of all Colours, and the Light which conveys it to the Eye must be a mixture of Rays endued with all those Colours.

But farther; by the 24th Observation it appears, that there is a constant relation between Colours and Refrangibility; the most refrangible Rays being violet, the least refrangible red, and those of intermediate Colours having proportionably intermediate degrees of Refrangibility. And by the 13th, 14th, and 15th Observations, compared with the 4th or 18th there appears to be the same constant relation between Colour and Reflexibility; the violet being in like circumstances reflected at least thicknesses of any thin Plate or Bubble, the red at greatest thicknesses, and the intermediate Colours at intermediate thicknesses. Whence it follows, that the colorifick Dispositions of Rays are also connate with them, and immutable; and by consequence, that all the Productions and Appearances of Colours in the World are derived, not from any physical Change caused in Light by Refraction or Reflexion, but only from the various Mixtures or Separations of Rays, by virtue of their different Refrangibility or Reflexibility. And in this respect the Science of Colours becomes a Speculation as truly mathematical as any other part of Opticks. I mean, so far as they depend on the Nature of Light, and are not produced or alter'd by the Power of Imagination, or by striking or pressing the Eye.

PART III.

Of the permanent Colours of natural Bodies, and the Analogy between them and the Colours of thin transparent Plates.

I am now come to another part of this Design, which is to consider how the Phænomena of thin transparent Plates stand related to those of all other natural Bodies. Of these Bodies I have already told you that they appear of divers Colours, accordingly as they are disposed to reflect most copiously the Rays originally endued with those Colours. But their Constitutions, whereby they reflect some Rays more copiously than others, remain to be discover'd; and these I shall endeavour to manifest in the following Propositions.

Prop. I.

Those Superficies of transparent Bodies reflect the greatest quantity of Light, which have the greatest refracting Power; that is, which intercede Mediums that differ most in their refractive Densities. And in the Confines of equally refracting Mediums there is no Reflexion.

The Analogy between Reflexion and Refraction will appear by considering, that when Light passeth obliquely out of one Medium into another which refracts from the perpendicular, the greater is the difference of their refractive Density, the less Obliquity of Incidence is requisite to cause a total Reflexion. For as the Sines are which measure the Refraction, so is the Sine of Incidence at which the total Reflexion begins, to the Radius of the Circle; and consequently that Angle of Incidence is least where there is the greatest difference of the Sines. Thus in the passing of Light out of Water into Air, where the Refraction is measured by the Ratio of the Sines 3 to 4, the total Reflexion begins when the Angle of Incidence is about 48 Degrees 35 Minutes. In passing out of Glass into Air, where the Refraction is measured by the Ratio of the Sines 20 to 31, the total Reflexion begins when the Angle of Incidence is 40 Degrees 10 Minutes; and so in passing out of Crystal, or more strongly refracting Mediums into Air, there is still a less obliquity requisite to cause a total reflexion. Superficies therefore

which refract most do soonest reflect all the Light which is incident on them, and so must be allowed most strongly reflexive.

But the truth of this Proposition will farther appear by observing, that in the Superficies interceding two transparent Mediums, (such as are Air, Water, Oil, common Glass, Crystal, metalline Glasses, Island Glasses, white transparent Arsenick, Diamonds, &c.) the Reflexion is stronger or weaker accordingly, as the Superficies hath a greater or less refracting Power. For in the Confine of Air and Sal-gem 'tis stronger than in the Confine of Air and Water, and still stronger in the Confine of Air and common Glass or Crystal, and stronger in the Confine of Air and a Diamond. If any of these, and such like transparent Solids, be immerged in Water, its Reflexion becomes, much weaker than before; and still weaker if they be immerged in the more strongly refracting Liquors of well rectified Oil of Vitriol or Spirit of Turpentine. If Water be distinguish'd into two parts by any imaginary Surface, the Reflexion in the Confine of those two parts is none at all. In the Confine of Water and Ice 'tis very little; in that of Water and Oil 'tis something greater; in that of Water and Sal-gem still greater; and in that of Water and Glass, or Crystal or other denser Substances still greater, accordingly as those Mediums differ more or less in their refracting Powers. Hence in the Confine of common Glass and Crystal, there ought to be a weak Reflexion, and a stronger Reflexion in the Confine of common and metalline Glass; though I have not yet tried this. But in the Confine of two Glasses of equal density, there is not any sensible Reflexion; as was shewn in the first Observation. And the same may be understood of the Superficies interceding two Crystals, or two Liquors, or any other Substances in which no Refraction is caused. So then the reason why uniform pellucid Mediums (such as Water, Glass, or Crystal,) have no sensible Reflexion but in their external Superficies, where they are adjacent to other Mediums of a different density, is because all their contiguous parts have one and the same degree of density.

Prop. II.

The least parts of almost all natural Bodies are in some measure transparent: And the Opacity of those Bodies ariseth from the multitude of Reflexions caused in their internal Parts.

That this is so has been observed by others, and will easily be granted by them that have been conversant with Microscopes. And it may be also tried by applying any substance to a hole through which some Light is immitted into a dark Room. For how opake soever that Substance may seem in the open Air, it will by that means appear very manifestly transparent, if it be of a sufficient thinness. Only white metalline Bodies must be excepted, which by reason of their excessive density seem to reflect almost all the Light incident on their first Superficies; unless by solution in Menstruums they be reduced into very small Particles, and then they become transparent.

Prop. III.

Between the parts of opake and colour'd Bodies are many Spaces, either empty, or replenish'd with Mediums of other Densities; as Water between the tinging Corpuscles wherewith any Liquor is impregnated, Air between the aqueous Globules that constitute Clouds or Mists; and for the most part Spaces void of both Air and Water, but yet perhaps not wholly void of all Substance, between the parts of hard Bodies.

The truth of this is evinced by the two precedent Propositions: For by the second Proposition there are many Reflexions made by the internal parts of Bodies, which, by the first Proposition, would not happen if the parts of those Bodies were continued without any such Interstices between them; because Reflexions are caused only in Superficies, which intercede Mediums of a differing density, by *Pro*.

But farther, that this discontinuity of parts is the principal Cause of the opacity of Bodies, will appear by considering, that opake Substances become transparent by filling their Pores with any Substance of equal or almost equal density with their parts. Thus Paper dipped in Water or Oil, the *Oculus Mundi* Stone steep'd in Water, Linnen Cloth oiled or varnish'd, and many other Substances soaked in such Liquors as will intimately pervade their little Pores, become by that means more transparent than otherwise; so, on the contrary, the most transparent Substances, may, by evacuating their Pores, or separating their parts, be render'd sufficiently opake; as Salts or wet Paper, or the *Oculus Mundi* Stone by being dried, Horn by being scraped, Glass by being reduced to Powder, or otherwise flawed; Turpentine by being stirred about with Water till they mix imperfectly, and Water by

being form'd into many small Bubbles, either alone in the form of Froth, or by shaking it together with Oil of Turpentine, or Oil Olive, or with some other convenient Liquor, with which it will not perfectly incorporate. And to the increase of the opacity of these Bodies, it conduces something, that by the 23d Observation the Reflexions of very thin transparent Substances are considerably stronger than those made by the same Substances of a greater thickness.

Prop. IV.

The Parts of Bodies and their Interstices must not be less than of some definite bigness, to render them opake and colour'd.

For the opakest Bodies, if their parts be subtilly divided, (as Metals, by being dissolved in acid Menstruums, &c.) become perfectly transparent. And you may also remember, that in the eighth Observation there was no sensible reflexion at the Superficies of the Object-glasses, where they were very near one another, though they did not absolutely touch. And in the 17th Observation the Reflexion of the Water-bubble where it became thinnest was almost insensible, so as to cause very black Spots to appear on the top of the Bubble, by the want of reflected Light.

On these grounds I perceive it is that Water, Salt, Glass, Stones, and such like Substances, are transparent. For, upon divers Considerations, they seem to be as full of Pores or Interstices between their parts as other Bodies are, but yet their Parts and Interstices to be too small to cause Reflexions in their common Surfaces.

Prop. V.

The transparent parts of Bodies, according to their several sizes, reflect Rays of one Colour, and transmit those of another, on the same grounds that thin Plates or Bubbles do reflect or transmit those Rays. And this I take to be the ground of all their Colours.

For if a thinn'd or plated Body, which being of an even thickness, appears all over of one uniform Colour, should be slit into Threads, or broken into Fragments, of the same thickness with the Plate; I see no reason why every Thread or Fragment should not keep its Colour, and by

consequence why a heap of those Threads or Fragments should not constitute a Mass or Powder of the same Colour, which the Plate exhibited before it was broken. And the parts of all natural Bodies being like so many Fragments of a Plate, must on the same grounds exhibit the same Colours.

Now, that they do so will appear by the affinity of their Properties. The finely colour'd Feathers of some Birds, and particularly those of Peacocks Tails, do, in the very same part of the Feather, appear of several Colours in several Positions of the Eye, after the very same manner that thin Plates were found to do in the 7th and 19th Observations, and therefore their Colours arise from the thinness of the transparent parts of the Feathers; that is, from the slenderness of the very fine Hairs, or *Capillamenta*, which grow out of the sides of the grosser lateral Branches or Fibres of those Feathers. And to the same purpose it is, that the Webs of some Spiders, by being spun very fine, have appeared colour'd, as some have observ'd, and that the colour'd Fibres of some Silks, by varying the Position of the Eye, do vary their Colour. Also the Colours of Silks, Cloths, and other Substances, which Water or Oil can intimately penetrate, become more faint and obscure by being immerged in those Liquors, and recover their Vigor again by being dried; much after the manner declared of thin Bodies in the 10th and 21st Observations. Leaf-Gold, some sorts of painted Glass, the Infusion of *Lignum Nephriticum*, and some other Substances, reflect one Colour, and transmit another; like thin Bodies in the 9th and 20th Observations. And some of those colour'd Powders which Painters use, may have their Colours a little changed, by being very elaborately and finely ground. Where I see not what can be justly pretended for those changes, besides the breaking of their parts into less parts by that contrition, after the same manner that the Colour of a thin Plate is changed by varying its thickness. For which reason also it is that the colour'd Flowers of Plants and Vegetables, by being bruised, usually become more transparent than before, or at least in some degree or other change their Colours. Nor is it much less to my purpose, that, by mixing divers Liquors, very odd and remarkable Productions and Changes of Colours may be effected, of which no cause can be more obvious and rational than that the saline Corpuscles of one Liquor do variously act upon or unite with the tinging Corpuscles of another, so as to make them swell, or shrink, (whereby not only their bulk but their density also may be changed,) or to divide them into smaller Corpuscles, (whereby

a colour'd Liquor may become transparent,) or to make many of them associate into one cluster, whereby two transparent Liquors may compose a colour'd one. For we see how apt those saline Menstruums are to penetrate and dissolve Substances to which they are applied, and some of them to precipitate what others dissolve. In like manner, if we consider the various Phænomena of the Atmosphere, we may observe, that when Vapours are first raised, they hinder not the transparency of the Air, being divided into parts too small to cause any Reflexion in their Superficies. But when in order to compose drops of Rain they begin to coalesce and constitute Globules of all intermediate sizes, those Globules, when they become of convenient size to reflect some Colours and transmit others, may constitute Clouds of various Colours according to their sizes. And I see not what can be rationally conceived in so transparent a Substance as Water for the production of these Colours, besides the various sizes of its fluid and globular Parcels.

Prop. VI.

The parts of Bodies on which their Colours depend, are denser than the Medium which pervades their Interstices.

This will appear by considering, that the Colour of a Body depends not only on the Rays which are incident perpendicularly on its parts, but on those also which are incident at all other Angles. And that according to the 7th Observation, a very little variation of obliquity will change the reflected Colour, where the thin Body or small Particles is rarer than the ambient Medium, insomuch that such a small Particle will at diversly oblique Incidences reflect all sorts of Colours, in so great a variety that the Colour resulting from them all, confusedly reflected from a heap of such Particles, must rather be a white or grey than any other Colour, or at best it must be but a very imperfect and dirty Colour. Whereas if the thin Body or small Particle be much denser than the ambient Medium, the Colours, according to the 19th Observation, are so little changed by the variation of obliquity, that the Rays which are reflected least obliquely may predominate over the rest, so much as to cause a heap of such Particles to appear very intensely of their Colour.

It conduces also something to the confirmation of this Proposition, that, according to the 22d Observation, the Colours exhibited by the denser thin Body within the rarer, are more brisk than those exhibited by the rarer within the denser.

Prop. VII.

The bigness of the component parts of natural Bodies may be conjectured by their Colours.

For since the parts of these Bodies, by *Pro*. do most probably exhibit the same Colours with a Plate of equal thickness, provided they have the same refractive density; and since their parts seem for the most part to have much the same density with Water or Glass, as by many circumstances is obvious to collect; to determine the sizes of those parts, you need only have recourse to the precedent Tables, in which the thickness of Water or Glass exhibiting any Colour is expressed. Thus if it be desired to know the diameter of a Corpuscle, which being of equal density with Glass shall reflect green of the third Order; the Number 16-1/4 shews it to be (16-1/4)/10000 parts of an Inch.

The greatest difficulty is here to know of what Order the Colour of any Body is. And for this end we must have recourse to the 4th and 18th Observations; from whence may be collected these particulars.

Scarlets, and other *reds*, *oranges*, and *yellows*, if they be pure and intense, are most probably of the second order. Those of the first and third order also may be pretty good; only the yellow of the first order is faint, and the orange and red of the third Order have a great Mixture of violet and blue.

There may be good *Greens* of the fourth Order, but the purest are of the third. And of this Order the green of all Vegetables seems to be, partly by reason of the Intenseness of their Colours, and partly because when they wither some of them turn to a greenish yellow, and others to a more perfect yellow or orange, or perhaps to red, passing first through all the aforesaid intermediate Colours. Which Changes seem to be effected by the exhaling of the Moisture which may leave the tinging Corpuscles more dense, and something augmented by the Accretion of the oily and earthy Part of that Moisture. Now the green, without doubt, is of the same Order with those

Colours into which it changeth, because the Changes are gradual, and those Colours, though usually not very full, yet are often too full and lively to be of the fourth Order.

Blues and *Purples* may be either of the second or third Order, but the best are of the third. Thus the Colour of Violets seems to be of that Order, because their Syrup by acid Liquors turns red, and by urinous and alcalizate turns green. For since it is of the Nature of Acids to dissolve or attenuate, and of Alcalies to precipitate or incrassate, if the Purple Colour of the Syrup was of the second Order, an acid Liquor by attenuating its tinging Corpuscles would change it to a red of the first Order, and an Alcali by incrassating them would change it to a green of the second Order; which red and green, especially the green, seem too imperfect to be the Colours produced by these Changes. But if the said Purple be supposed of the third Order, its Change to red of the second, and green of the third, may without any Inconvenience be allow'd.

If there be found any Body of a deeper and less reddish Purple than that of the Violets, its Colour most probably is of the second Order. But yet there being no Body commonly known whose Colour is constantly more deep than theirs, I have made use of their Name to denote the deepest and least reddish Purples, such as manifestly transcend their Colour in purity.

The *blue* of the first Order, though very faint and little, may possibly be the Colour of some Substances; and particularly the azure Colour of the Skies seems to be of this Order. For all Vapours when they begin to condense and coalesce into small Parcels, become first of that Bigness, whereby such an Azure must be reflected before they can constitute Clouds of other Colours. And so this being the first Colour which Vapours begin to reflect, it ought to be the Colour of the finest and most transparent Skies, in which Vapours are not arrived to that Grossness requisite to reflect other Colours, as we find it is by Experience.

Whiteness, if most intense and luminous, is that of the first Order, if less strong and luminous, a Mixture of the Colours of several Orders. Of this last kind is the Whiteness of Froth, Paper, Linnen, and most white Substances; of the former I reckon that of white Metals to be. For whilst the densest of Metals, Gold, if foliated, is transparent, and all Metals become transparent if dissolved in Menstruums or vitrified, the Opacity of white Metals ariseth not from their Density alone. They being less dense than

Gold would be more transparent than it, did not some other Cause concur with their Density to make them opake. And this Cause I take to be such a Bigness of their Particles as fits them to reflect the white of the first order. For, if they be of other Thicknesses they may reflect other Colours, as is manifest by the Colours which appear upon hot Steel in tempering it, and sometimes upon the Surface of melted Metals in the Skin or Scoria which arises upon them in their cooling. And as the white of the first order is the strongest which can be made by Plates of transparent Substances, so it ought to be stronger in the denser Substances of Metals than in the rarer of Air, Water, and Glass. Nor do I see but that metallick Substances of such a Thickness as may fit them to reflect the white of the first order, may, by reason of their great Density (according to the Tenor of the first of these Propositions) reflect all the Light incident upon them, and so be as opake and splendent as it's possible for any Body to be. Gold, or Copper mix'd with less than half their Weight of Silver, or Tin, or Regulus of Antimony, in fusion, or amalgamed with a very little Mercury, become white; which shews both that the Particles of white Metals have much more Superficies, and so are smaller, than those of Gold and Copper, and also that they are so opake as not to suffer the Particles of Gold or Copper to shine through them. Now it is scarce to be doubted but that the Colours of Gold and Copper are of the second and third order, and therefore the Particles of white Metals cannot be much bigger than is requisite to make them reflect the white of the first order. The Volatility of Mercury argues that they are not much bigger, nor may they be much less, lest they lose their Opacity, and become either transparent as they do when attenuated by Vitrification, or by Solution in Menstruums, or black as they do when ground smaller, by rubbing Silver, or Tin, or Lead, upon other Substances to draw black Lines. The first and only Colour which white Metals take by grinding their Particles smaller, is black, and therefore their white ought to be that which borders upon the black Spot in the Center of the Rings of Colours, that is, the white of the first order. But, if you would hence gather the Bigness of metallick Particles, you must allow for their Density. For were Mercury transparent, its Density is such that the Sine of Incidence upon it (by my Computation) would be to the Sine of its Refraction, as 71 to 20, or 7 to 2. And therefore the Thickness of its Particles, that they may exhibit the same Colours with those of Bubbles of Water, ought to be less than the Thickness

of the Skin of those Bubbles in the Proportion of 2 to 7. Whence it's possible, that the Particles of Mercury may be as little as the Particles of some transparent and volatile Fluids, and yet reflect the white of the first order.

Lastly, for the production of *black*, the Corpuscles must be less than any of those which exhibit Colours. For at all greater sizes there is too much Light reflected to constitute this Colour. But if they be supposed a little less than is requisite to reflect the white and very faint blue of the first order, they will, according to the 4th, 8th, 17th and 18th Observations, reflect so very little Light as to appear intensely black, and yet may perhaps variously refract it to and fro within themselves so long, until it happen to be stifled and lost, by which means they will appear black in all positions of the Eye without any transparency. And from hence may be understood why Fire, and the more subtile dissolver Putrefaction, by dividing the Particles of Substances, turn them to black, why small quantities of black Substances impart their Colour very freely and intensely to other Substances to which they are applied; the minute Particles of these, by reason of their very great number, easily overspreading the gross Particles of others; why Glass ground very elaborately with Sand on a Copper Plate, 'till it be well polish'd, makes the Sand, together with what is worn off from the Glass and Copper, become very black: why black Substances do soonest of all others become hot in the Sun's Light and burn, (which Effect may proceed partly from the multitude of Refractions in a little room, and partly from the easy Commotion of so very small Corpuscles;) and why blacks are usually a little inclined to a bluish Colour. For that they are so may be seen by illuminating white Paper by Light reflected from black Substances. For the Paper will usually appear of a bluish white; and the reason is, that black borders in the obscure blue of the order described in the 18th Observation, and therefore reflects more Rays of that Colour than of any other.

In these Descriptions I have been the more particular, because it is not impossible but that Microscopes may at length be improved to the discovery of the Particles of Bodies on which their Colours depend, if they are not already in some measure arrived to that degree of perfection. For if those Instruments are or can be so far improved as with sufficient distinctness to represent Objects five or six hundred times bigger than at a Foot distance they appear to our naked Eyes, I should hope that we might

be able to discover some of the greatest of those Corpuscles. And by one that would magnify three or four thousand times perhaps they might all be discover'd, but those which produce blackness. In the mean while I see nothing material in this Discourse that may rationally be doubted of, excepting this Position: That transparent Corpuscles of the same thickness and density with a Plate, do exhibit the same Colour. And this I would have understood not without some Latitude, as well because those Corpuscles may be of irregular Figures, and many Rays must be obliquely incident on them, and so have a shorter way through them than the length of their Diameters, as because the straitness of the Medium put in on all sides within such Corpuscles may a little alter its Motions or other qualities on which the Reflexion depends. But yet I cannot much suspect the last, because I have observed of some small Plates of Muscovy Glass which were of an even thickness, that through a Microscope they have appeared of the same Colour at their edges and corners where the included Medium was terminated, which they appeared of in other places. However it will add much to our Satisfaction, if those Corpuscles can be discover'd with Microscopes; which if we shall at length attain to, I fear it will be the utmost improvement of this Sense. For it seems impossible to see the more secret and noble Works of Nature within the Corpuscles by reason of their transparency.

Prop. VIII.

The Cause of Reflexion is not the impinging of Light on the solid or impervious parts of Bodies, as is commonly believed.

This will appear by the following Considerations. First, That in the passage of Light out of Glass into Air there is a Reflexion as strong as in its passage out of Air into Glass, or rather a little stronger, and by many degrees stronger than in its passage out of Glass into Water. And it seems not probable that Air should have more strongly reflecting parts than Water or Glass. But if that should possibly be supposed, yet it will avail nothing; for the Reflexion is as strong or stronger when the Air is drawn away from the Glass, (suppose by the Air-Pump invented by *Otto Gueriet*, and improved and made useful by Mr. *Boyle*) as when it is adjacent to it. Secondly, If Light in its passage out of Glass into Air be incident more

obliquely than at an Angle of 40 or 41 Degrees it is wholly reflected, if less obliquely it is in great measure transmitted. Now it is not to be imagined that Light at one degree of obliquity should meet with Pores enough in the Air to transmit the greater part of it, and at another degree of obliquity should meet with nothing but parts to reflect it wholly, especially considering that in its passage out of Air into Glass, how oblique soever be its Incidence, it finds Pores enough in the Glass to transmit a great part of it. If any Man suppose that it is not reflected by the Air, but by the outmost superficial parts of the Glass, there is still the same difficulty: Besides, that such a Supposition is unintelligible, and will also appear to be false by applying Water behind some part of the Glass instead of Air. For so in a convenient obliquity of the Rays, suppose of 45 or 46 Degrees, at which they are all reflected where the Air is adjacent to the Glass, they shall be in great measure transmitted where the Water is adjacent to it; which argues, that their Reflexion or Transmission depends on the constitution of the Air and Water behind the Glass, and not on the striking of the Rays upon the parts of the Glass. Thirdly, If the Colours made by a Prism placed at the entrance of a Beam of Light into a darken'd Room be successively cast on a second Prism placed at a greater distance from the former, in such manner that they are all alike incident upon it, the second Prism may be so inclined to the incident Rays, that those which are of a blue Colour shall be all reflected by it, and yet those of a red Colour pretty copiously transmitted. Now if the Reflexion be caused by the parts of Air or Glass, I would ask, why at the same Obliquity of Incidence the blue should wholly impinge on those parts, so as to be all reflected, and yet the red find Pores enough to be in a great measure transmitted. Fourthly, Where two Glasses touch one another, there is no sensible Reflexion, as was declared in the first Observation; and yet I see no reason why the Rays should not impinge on the parts of Glass, as much when contiguous to other Glass as when contiguous to Air. Fifthly, When the top of a Water-Bubble (in the 17th Observation,) by the continual subsiding and exhaling of the Water grew very thin, there was such a little and almost insensible quantity of Light reflected from it, that it appeared intensely black; whereas round about that black Spot, where the Water was thicker, the Reflexion was so strong as to make the Water seem very white. Nor is it only at the least thickness of thin Plates or Bubbles, that there is no manifest Reflexion, but at many other

thicknesses continually greater and greater. For in the 15th Observation the Rays of the same Colour were by turns transmitted at one thickness, and reflected at another thickness, for an indeterminate number of Successions. And yet in the Superficies of the thinned Body, where it is of any one thickness, there are as many parts for the Rays to impinge on, as where it is of any other thickness. Sixthly, If Reflexion were caused by the parts of reflecting Bodies, it would be impossible for thin Plates or Bubbles, at one and the same place, to reflect the Rays of one Colour, and transmit those of another, as they do according to the 13th and 15th Observations. For it is not to be imagined that at one place the Rays which, for instance, exhibit a blue Colour, should have the fortune to dash upon the parts, and those which exhibit a red to hit upon the Pores of the Body; and then at another place, where the Body is either a little thicker or a little thinner, that on the contrary the blue should hit upon its pores, and the red upon its parts. Lastly, Were the Rays of Light reflected by impinging on the solid parts of Bodies, their Reflexions from polish'd Bodies could not be so regular as they are. For in polishing Glass with Sand, Putty, or Tripoly, it is not to be imagined that those Substances can, by grating and fretting the Glass, bring all its least Particles to an accurate Polish; so that all their Surfaces shall be truly plain or truly spherical, and look all the same way, so as together to compose one even Surface. The smaller the Particles of those Substances are, the smaller will be the Scratches by which they continually fret and wear away the Glass until it be polish'd; but be they never so small they can wear away the Glass no otherwise than by grating and scratching it, and breaking the Protuberances; and therefore polish it no otherwise than by bringing its roughness to a very fine Grain, so that the Scratches and Frettings of the Surface become too small to be visible. And therefore if Light were reflected by impinging upon the solid parts of the Glass, it would be scatter'd as much by the most polish'd Glass as by the roughest. So then it remains a Problem, how Glass polish'd by fretting Substances can reflect Light so regularly as it does. And this Problem is scarce otherwise to be solved, than by saying, that the Reflexion of a Ray is effected, not by a single point of the reflecting Body, but by some power of the Body which is evenly diffused all over its Surface, and by which it acts upon the Ray without immediate Contact. For that the parts of Bodies do act upon Light at a distance shall be shewn hereafter.

Now if Light be reflected, not by impinging on the solid parts of Bodies, but by some other principle; it's probable that as many of its Rays as impinge on the solid parts of Bodies are not reflected but stifled and lost in the Bodies. For otherwise we must allow two sorts of Reflexions. Should all the Rays be reflected which impinge on the internal parts of clear Water or Crystal, those Substances would rather have a cloudy Colour than a clear Transparency. To make Bodies look black, it's necessary that many Rays be stopp'd, retained, and lost in them; and it seems not probable that any Rays can be stopp'd and stifled in them which do not impinge on their parts.

And hence we may understand that Bodies are much more rare and porous than is commonly believed. Water is nineteen times lighter, and by consequence nineteen times rarer than Gold; and Gold is so rare as very readily and without the least opposition to transmit the magnetick Effluvia, and easily to admit Quicksilver into its Pores, and to let Water pass through it. For a concave Sphere of Gold filled with Water, and solder'd up, has, upon pressing the Sphere with great force, let the Water squeeze through it, and stand all over its outside in multitudes of small Drops, like Dew, without bursting or cracking the Body of the Gold, as I have been inform'd by an Eye witness. From all which we may conclude, that Gold has more Pores than solid parts, and by consequence that Water has above forty times more Pores than Parts. And he that shall find out an Hypothesis, by which Water may be so rare, and yet not be capable of compression by force, may doubtless by the same Hypothesis make Gold, and Water, and all other Bodies, as much rarer as he pleases; so that Light may find a ready passage through transparent Substances.

The Magnet acts upon Iron through all dense Bodies not magnetick nor red hot, without any diminution of its Virtue; as for instance, through Gold, Silver, Lead, Glass, Water. The gravitating Power of the Sun is transmitted through the vast Bodies of the Planets without any diminution, so as to act upon all their parts to their very centers with the same Force and according to the same Laws, as if the part upon which it acts were not surrounded with the Body of the Planet, The Rays of Light, whether they be very small Bodies projected, or only Motion or Force propagated, are moved in right Lines; and whenever a Ray of Light is by any Obstacle turned out of its rectilinear way, it will never return into the same rectilinear way, unless perhaps by very great accident. And yet Light is transmitted through

pellucid solid Bodies in right Lines to very great distances. How Bodies can have a sufficient quantity of Pores for producing these Effects is very difficult to conceive, but perhaps not altogether impossible. For the Colours of Bodies arise from the Magnitudes of the Particles which reflect them, as was explained above. Now if we conceive these Particles of Bodies to be so disposed amongst themselves, that the Intervals or empty Spaces between them may be equal in magnitude to them all; and that these Particles may be composed of other Particles much smaller, which have as much empty Space between them as equals all the Magnitudes of these smaller Particles: And that in like manner these smaller Particles are again composed of others much smaller, all which together are equal to all the Pores or empty Spaces between them; and so on perpetually till you come to solid Particles, such as have no Pores or empty Spaces within them: And if in any gross Body there be, for instance, three such degrees of Particles, the least of which are solid; this Body will have seven times more Pores than solid Parts. But if there be four such degrees of Particles, the least of which are solid, the Body will have fifteen times more Pores than solid Parts. If there be five degrees, the Body will have one and thirty times more Pores than solid Parts. If six degrees, the Body will have sixty and three times more Pores than solid Parts. And so on perpetually. And there are other ways of conceiving how Bodies may be exceeding porous. But what is really their inward Frame is not yet known to us.

Prop. IX.

Bodies reflect and refract Light by one and the same power, variously exercised in various Circumstances.

This appears by several Considerations. First, Because when Light goes out of Glass into Air, as obliquely as it can possibly do. If its Incidence be made still more oblique, it becomes totally reflected. For the power of the Glass after it has refracted the Light as obliquely as is possible, if the Incidence be still made more oblique, becomes too strong to let any of its Rays go through, and by consequence causes total Reflexions. Secondly, Because Light is alternately reflected and transmitted by thin Plates of Glass for many Successions, accordingly as the thickness of the Plate increases in an arithmetical Progression. For here the thickness of the Glass

determines whether that Power by which Glass acts upon Light shall cause it to be reflected, or suffer it to be transmitted. And, Thirdly, because those Surfaces of transparent Bodies which have the greatest refracting power, reflect the greatest quantity of Light, as was shewn in the first Proposition.

Prop. X.

If Light be swifter in Bodies than in Vacuo, in the proportion of the Sines which measure the Refraction of the Bodies, the Forces of the Bodies to reflect and refract Light, are very nearly proportional to the densities of the same Bodies; excepting that unctuous and sulphureous Bodies refract more than others of this same density.

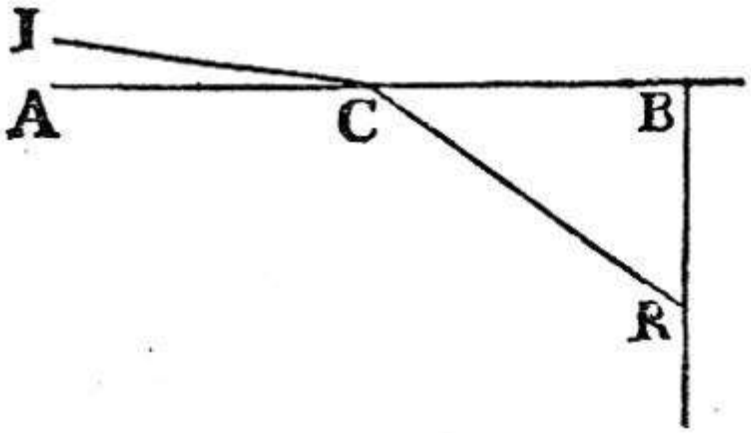


Fig. 8.

Let AB represent the refracting plane Surface of any Body, and IC a Ray incident very obliquely upon the Body in C, so that the Angle ACI may be infinitely little, and let CR be the refracted Ray. From a given Point B perpendicular to the refracting Surface erect BR meeting with the refracting Ray CR in R, and if CR represent the Motion of the refracted Ray, and this Motion be distinguish'd into two Motions CB and BR, whereof CB is parallel to the refracting Plane, and BR perpendicular to it: CB shall represent the Motion of the incident Ray, and BR the Motion generated by the Refraction, as Opticians have of late explain'd.

Now if any Body or Thing, in moving through any Space of a given breadth terminated on both sides by two parallel Planes, be urged forward in all parts of that Space by Forces tending directly forwards towards the last Plane, and before its Incidence on the first Plane, had no Motion towards it, or but an infinitely little one; and if the Forces in all parts of that Space,

between the Planes, be at equal distances from the Planes equal to one another, but at several distances be bigger or less in any given Proportion, the Motion generated by the Forces in the whole passage of the Body or thing through that Space shall be in a subduplicate Proportion of the Forces, as Mathematicians will easily understand. And therefore, if the Space of activity of the refracting Superficies of the Body be consider'd as such a Space, the Motion of the Ray generated by the refracting Force of the Body, during its passage through that Space, that is, the Motion BR, must be in subduplicate Proportion of that refracting Force. I say therefore, that the Square of the Line BR, and by consequence the refracting Force of the Body, is very nearly as the density of the same Body. For this will appear by the following Table, wherein the Proportion of the Sines which measure the Refractions of several Bodies, the Square of BR, supposing CB an unite, the Densities of the Bodies estimated by their Specifick Gravities, and their Refractive Power in respect of their Densities are set down in several Columns.

The refracting Bodies.

The Proportion of the Sines of Incidence and Refraction of yellow Light.

The Square of BR, to which the refracting force of the Body is proportionate.

The density and specifick gravity of the Body.

The refractive Power of the Body in respect of its density.

A Pseudo-Topazius, being a natural, pellucid, brittle, hairy Stone, of a yellow Colour.

23 to 14

1’699

4’27
3979

Air.

3201 to 3200

0’000625

0’0012
5208

Glass of Antimony.

17 to 9

2’568

5’28
4864

A Selenitis.

61 to 41

1’213

2’252
5386

Glass vulgar.

31 to 20

1’4025

2’58
5436

Crystal of the Rock.

25 to 16

1’445

2’65
5450

Island Crystal.

5 to 3

1’778

2’72
6536

Sal Gemmæ.

17 to 11

1’388

2’143
6477

Alume.

35 to 24

1’1267

1’714
6570

Borax.

22 to 15

1’1511

1’714
6716

Niter.

32 to 21

1’345

1’9
7079

Dantzick Vitriol.

303 to 200

1’295

1’715
7551

Oil of Vitriol.

10 to 7

1’041

1’7
6124

Rain Water.

529 to 396

0’7845

1’
7845

Gum Arabick.

31 to 21

1’179

1’375
8574

Spirit of Wine well rectified.

100 to 73

0’8765

0’866
10121

Camphire.

3 to 2

1’25

0’996
12551

Oil Olive.

22 to 15

1’1511

0’913
12607

Linseed Oil.

40 to 27

1’1948

0’932
12819

Spirit of Turpentine.

25 to 17

1’1626

0’874
13222

Amber.

14 to 9

1’42

1’04
13654

A Diamond.

100 to 41

4’949

3’4
14556

The Refraction of the Air in this Table is determin’d by that of the Atmosphere observed by Astronomers. For, if Light pass through many refracting Substances or Mediums gradually denser and denser, and terminated with parallel Surfaces, the Sum of all the Refractions will be equal to the single Refraction which it would have suffer’d in passing immediately out of the first Medium into the last. And this holds true, though the Number of the refracting Substances be increased to Infinity, and the Distances from one another as much decreased, so that the Light may be refracted in every Point of its Passage, and by continual Refractions bent into a Curve-Line. And therefore the whole Refraction of Light in passing through the Atmosphere from the highest and rarest Part thereof down to the lowest and densest Part, must be equal to the Refraction which it would suffer in passing at like Obliquity out of a Vacuum immediately into Air of equal Density with that in the lowest Part of the Atmosphere.

Now, although a Pseudo-Topaz, a Selenitis, Rock Crystal, Island Crystal, Vulgar Glass (that is, Sand melted together) and Glass of Antimony, which are terrestrial stony alcalizate Concretes, and Air which probably arises from such Substances by Fermentation, be Substances very differing from one another in Density, yet by this Table, they have their refractive Powers almost in the same Proportion to one another as their Densities are, excepting that the Refraction of that strange Substance, Island Crystal is a little bigger than the rest. And particularly Air, which is 3500 Times rarer than the Pseudo-Topaz, and 4400 Times rarer than Glass of Antimony, and 2000 Times rarer than the Selenitis, Glass vulgar, or Crystal of the Rock, has notwithstanding its rarity the same refractive Power in respect of its

Density which those very dense Substances have in respect of theirs, excepting so far as those differ from one another.

Again, the Refraction of Camphire, Oil Olive, Linseed Oil, Spirit of Turpentine and Amber, which are fat sulphureous unctuous Bodies, and a Diamond, which probably is an unctuous Substance coagulated, have their refractive Powers in Proportion to one another as their Densities without any considerable Variation. But the refractive Powers of these unctuous Substances are two or three Times greater in respect of their Densities than the refractive Powers of the former Substances in respect of theirs.

Water has a refractive Power in a middle degree between those two sorts of Substances, and probably is of a middle nature. For out of it grow all vegetable and animal Substances, which consist as well of sulphureous fat and inflamable Parts, as of earthy lean and alcalizate ones.

Salts and Vitriols have refractive Powers in a middle degree between those of earthy Substances and Water, and accordingly are composed of those two sorts of Substances. For by distillation and rectification of their Spirits a great Part of them goes into Water, and a great Part remains behind in the form of a dry fix'd Earth capable of Vitrification.

Spirit of Wine has a refractive Power in a middle degree between those of Water and oily Substances, and accordingly seems to be composed of both, united by Fermentation; the Water, by means of some saline Spirits with which 'tis impregnated, dissolving the Oil, and volatizing it by the Action. For Spirit of Wine is inflamable by means of its oily Parts, and being distilled often from Salt of Tartar, grow by every distillation more and more aqueous and phlegmatick. And Chymists observe, that Vegetables (as Lavender, Rue, Marjoram, &c.) distilled *per se*, before fermentation yield Oils without any burning Spirits, but after fermentation yield ardent Spirits without Oils: Which shews, that their Oil is by fermentation converted into Spirit. They find also, that if Oils be poured in a small quantity upon fermentating Vegetables, they distil over after fermentation in the form of Spirits.

So then, by the foregoing Table, all Bodies seem to have their refractive Powers proportional to their Densities, (or very nearly;) excepting so far as they partake more or less of sulphureous oily Particles, and thereby have their refractive Power made greater or less. Whence it seems rational to attribute the refractive Power of all Bodies chiefly, if not wholly, to the

sulphureous Parts with which they abound. For it's probable that all Bodies abound more or less with Sulphurs. And as Light congregated by a Burning-glass acts most upon sulphureous Bodies, to turn them into Fire and Flame; so, since all Action is mutual, Sulphurs ought to act most upon Light. For that the action between Light and Bodies is mutual, may appear from this Consideration; That the densest Bodies which refract and reflect Light most strongly, grow hottest in the Summer Sun, by the action of the refracted or reflected Light.

I have hitherto explain'd the power of Bodies to reflect and refract, and shew'd, that thin transparent Plates, Fibres, and Particles, do, according to their several thicknesses and densities, reflect several sorts of Rays, and thereby appear of several Colours; and by consequence that nothing more is requisite for producing all the Colours of natural Bodies, than the several sizes and densities of their transparent Particles. But whence it is that these Plates, Fibres, and Particles, do, according to their several thicknesses and densities, reflect several sorts of Rays, I have not yet explain'd. To give some insight into this matter, and make way for understanding the next part of this Book, I shall conclude this part with a few more Propositions. Those which preceded respect the nature of Bodies, these the nature of Light: For both must be understood, before the reason of their Actions upon one another can be known. And because the last Proposition depended upon the velocity of Light, I will begin with a Proposition of that kind.

Prop. XI.

Light is propagated from luminous Bodies in time, and spends about seven or eight Minutes of an Hour in passing from the Sun to the Earth.

This was observed first by *Roemer*, and then by others, by means of the Eclipses of the Satellites of *Jupiter*. For these Eclipses, when the Earth is between the Sun and *Jupiter*, happen about seven or eight Minutes sooner than they ought to do by the Tables, and when the Earth is beyond the Sun they happen about seven or eight Minutes later than they ought to do; the reason being, that the Light of the Satellites has farther to go in the latter case than in the former by the Diameter of the Earth's Orbit. Some inequalities of time may arise from the Excentricities of the Orbs of the Satellites; but those cannot answer in all the Satellites, and at all times to

the Position and Distance of the Earth from the Sun. The mean motions of *Jupiter*'s Satellites is also swifter in his descent from his Aphelium to his Perihelium, than in his ascent in the other half of his Orb. But this inequality has no respect to the position of the Earth, and in the three interior Satellites is insensible, as I find by computation from the Theory of their Gravity.

Prop. XII.

Every Ray of Light in its passage through any refracting Surface is put into a certain transient Constitution or State, which in the progress of the Ray returns at equal Intervals, and disposes the Ray at every return to be easily transmitted through the next refracting Surface, and between the returns to be easily reflected by it.

This is manifest by the 5th, 9th, 12th, and 15th Observations. For by those Observations it appears, that one and the same sort of Rays at equal Angles of Incidence on any thin transparent Plate, is alternately reflected and transmitted for many Successions accordingly as the thickness of the Plate increases in arithmetical Progression of the Numbers, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. so that if the first Reflexion (that which makes the first or innermost of the Rings of Colours there described) be made at the thickness 1, the Rays shall be transmitted at the thicknesses 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, &c. and thereby make the central Spot and Rings of Light, which appear by transmission, and be reflected at the thickness 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. and thereby make the Rings which appear by Reflexion. And this alternate Reflexion and Transmission, as I gather by the 24th Observation, continues for above an hundred vicissitudes, and by the Observations in the next part of this Book, for many thousands, being propagated from one Surface of a Glass Plate to the other, though the thickness of the Plate be a quarter of an Inch or above: So that this alternation seems to be propagated from every refracting Surface to all distances without end or limitation.

This alternate Reflexion and Refraction depends on both the Surfaces of every thin Plate, because it depends on their distance. By the 21st Observation, if either Surface of a thin Plate of *Muscovy* Glass be wetted, the Colours caused by the alternate Reflexion and Refraction grow faint, and therefore it depends on them both.

It is therefore perform'd at the second Surface; for if it were perform'd at the first, before the Rays arrive at the second, it would not depend on the second.

It is also influenced by some action or disposition, propagated from the first to the second, because otherwise at the second it would not depend on the first. And this action or disposition, in its propagation, intermits and returns by equal Intervals, because in all its progress it inclines the Ray at one distance from the first Surface to be reflected by the second, at another to be transmitted by it, and that by equal Intervals for innumerable vicissitudes. And because the Ray is disposed to Reflexion at the distances 1, 3, 5, 7, 9, &c. and to Transmission at the distances 0, 2, 4, 6, 8, 10, &c. (for its transmission through the first Surface, is at the distance 0, and it is transmitted through both together, if their distance be infinitely little or much less than 1) the disposition to be transmitted at the distances 2, 4, 6, 8, 10, &c. is to be accounted a return of the same disposition which the Ray first had at the distance 0, that is at its transmission through the first refracting Surface. All which is the thing I would prove.

What kind of action or disposition this is; Whether it consists in a circulating or a vibrating motion of the Ray, or of the Medium, or something else, I do not here enquire. Those that are averse from assenting to any new Discoveries, but such as they can explain by an Hypothesis, may for the present suppose, that as Stones by falling upon Water put the Water into an undulating Motion, and all Bodies by percussion excite vibrations in the Air; so the Rays of Light, by impinging on any refracting or reflecting Surface, excite vibrations in the refracting or reflecting Medium or Substance, and by exciting them agitate the solid parts of the refracting or reflecting Body, and by agitating them cause the Body to grow warm or hot; that the vibrations thus excited are propagated in the refracting or reflecting Medium or Substance, much after the manner that vibrations are propagated in the Air for causing Sound, and move faster than the Rays so as to overtake them; and that when any Ray is in that part of the vibration which conspires with its Motion, it easily breaks through a refracting Surface, but when it is in the contrary part of the vibration which impedes its Motion, it is easily reflected; and, by consequence, that every Ray is successively disposed to be easily reflected, or easily transmitted, by every vibration which overtakes it. But whether this Hypothesis be true or false I do not

here consider. I content my self with the bare Discovery, that the Rays of Light are by some cause or other alternately disposed to be reflected or refracted for many vicissitudes.

DEFINITION.

The returns of the disposition of any Ray to be reflected I will call its Fits of easy Reflexion, *and those of its disposition to be transmitted its* Fits of easy Transmission, *and the space it passes between every return and the next return, the* Interval of its Fits.

Prop. XIII.

The reason why the Surfaces of all thick transparent Bodies reflect part of the Light incident on them, and refract the rest, is, that some Rays at their Incidence are in Fits of easy Reflexion, and others in Fits of easy Transmission.

This may be gather'd from the 24th Observation, where the Light reflected by thin Plates of Air and Glass, which to the naked Eye appear'd evenly white all over the Plate, did through a Prism appear waved with many Successions of Light and Darkness made by alternate Fits of easy Reflexion and easy Transmission, the Prism severing and distinguishing the Waves of which the white reflected Light was composed, as was explain'd above.

And hence Light is in Fits of easy Reflexion and easy Transmission, before its Incidence on transparent Bodies. And probably it is put into such fits at its first emission from luminous Bodies, and continues in them during all its progress. For these Fits are of a lasting nature, as will appear by the next part of this Book.

In this Proposition I suppose the transparent Bodies to be thick; because if the thickness of the Body be much less than the Interval of the Fits of easy Reflexion and Transmission of the Rays, the Body loseth its reflecting power. For if the Rays, which at their entering into the Body are put into Fits of easy Transmission, arrive at the farthest Surface of the Body before they be out of those Fits, they must be transmitted. And this is the reason why Bubbles of Water lose their reflecting power when they grow very thin;

and why all opake Bodies, when reduced into very small parts, become transparent.

Prop. XIV.

Those Surfaces of transparent Bodies, which if the Ray be in a Fit of Refraction do refract it most strongly, if the Ray be in a Fit of Reflexion do reflect it most easily.

For we shewed above, in *Pro*. that the cause of Reflexion is not the impinging of Light on the solid impervious parts of Bodies, but some other power by which those solid parts act on Light at a distance. We shewed also in *Pro*. that Bodies reflect and refract Light by one and the same power, variously exercised in various circumstances; and in *Pro*. that the most strongly refracting Surfaces reflect the most Light: All which compared together evince and rarify both this and the last Proposition.

Prop. XV.

In any one and the same sort of Rays, emerging in any Angle out of any refracting Surface into one and the same Medium, the Interval of the following Fits of easy Reflexion and Transmission are either accurately or very nearly, as the Rectangle of the Secant of the Angle of Refraction, and of the Secant of another Angle, whose Sine is the first of 106 arithmetical mean Proportionals, between the Sines of Incidence and Refraction, counted from the Sine of Refraction.

This is manifest by the 7th and 19th Observations.

Prop. XVI.

In several sorts of Rays emerging in equal Angles out of any refracting Surface into the same Medium, the Intervals of the following Fits of easy Reflexion and easy Transmission are either accurately, or very nearly, as the Cube-Roots of the Squares of the lengths of a Chord, which found the Notes in an Eight, sol, la, fa, sol, la, mi, fa, sol, *with all their intermediate degrees answering to the Colours of those Rays, according to the Analogy described in the seventh Experiment of the second Part of the first Book.*

This is manifest by the 13th and 14th Observations.

Prop. XVII.

If Rays of any sort pass perpendicularly into several Mediums, the Intervals of the Fits of easy Reflexion and Transmission in any one Medium, are to those Intervals in any other, as the Sine of Incidence to the Sine of Refraction, when the Rays pass out of the first of those two Mediums into the second.

This is manifest by the 10th Observation.

Prop. XVIII.

If the Rays which paint the Colour in the Confine of yellow and orange pass perpendicularly out of any Medium into Air, the Intervals of their Fits of easy Reflexion are the 1/89000th part of an Inch. And of the same length are the Intervals of their Fits of easy Transmission.

This is manifest by the 6th Observation. From these Propositions it is easy to collect the Intervals of the Fits of easy Reflexion and easy Transmission of any sort of Rays refracted in any angle into any Medium; and thence to know, whether the Rays shall be reflected or transmitted at their subsequent Incidence upon any other pellucid Medium. Which thing, being useful for understanding the next part of this Book, was here to be set down. And for the same reason I add the two following Propositions.

Prop. XIX.

If any sort of Rays falling on the polite Surface of any pellucid Medium be reflected back, the Fits of easy Reflexion, which they have at the point of Reflexion, shall still continue to return; and the Returns shall be at distances from the point of Reflexion in the arithmetical progression of the Numbers 2, 4, 6, 8, 10, 12, &c. and between these Fits the Rays shall be in Fits of easy Transmission.

For since the Fits of easy Reflexion and easy Transmission are of a returning nature, there is no reason why these Fits, which continued till the Ray arrived at the reflecting Medium, and there inclined the Ray to Reflexion, should there cease. And if the Ray at the point of Reflexion was in a Fit of easy Reflexion, the progression of the distances of these Fits

from that point must begin from 0, and so be of the Numbers 0, 2, 4, 6, 8, &c. And therefore the progression of the distances of the intermediate Fits of easy Transmission, reckon'd from the same point, must be in the progression of the odd Numbers 1, 3, 5, 7, 9, &c. contrary to what happens when the Fits are propagated from points of Refraction.

Prop. XX.

The Intervals of the Fits of easy Reflexion and easy Transmission, propagated from points of Reflexion into any Medium, are equal to the Intervals of the like Fits, which the same Rays would have, if refracted into the same Medium in Angles of Refraction equal to their Angles of Reflexion.

For when Light is reflected by the second Surface of thin Plates, it goes out afterwards freely at the first Surface to make the Rings of Colours which appear by Reflexion; and, by the freedom of its egress, makes the Colours of these Rings more vivid and strong than those which appear on the other side of the Plates by the transmitted Light. The reflected Rays are therefore in Fits of easy Transmission at their egress; which would not always happen, if the Intervals of the Fits within the Plate after Reflexion were not equal, both in length and number, to their Intervals before it. And this confirms also the proportions set down in the former Proposition. For if the Rays both in going in and out at the first Surface be in Fits of easy Transmission, and the Intervals and Numbers of those Fits between the first and second Surface, before and after Reflexion, be equal, the distances of the Fits of easy Transmission from either Surface, must be in the same progression after Reflexion as before; that is, from the first Surface which transmitted them in the progression of the even Numbers 0, 2, 4, 6, 8, &c. and from the second which reflected them, in that of the odd Numbers 1, 3, 5, 7, &c. But these two Propositions will become much more evident by the Observations in the following part of this Book.

PART IV.

Observations concerning the Reflexions and Colours of thick transparent polish'd Plates.

There is no Glass or Speculum how well soever polished, but, besides the Light which it refracts or reflects regularly, scatters every way irregularly a faint Light, by means of which the polish'd Surface, when illuminated in a dark room by a beam of the Sun's Light, may be easily seen in all positions of the Eye. There are certain Phænomena of this scatter'd Light, which when I first observed them, seem'd very strange and surprizing to me. My Observations were as follows.

Obs. 1. The Sun shining into my darken'd Chamber through a hole one third of an Inch wide, I let the intromitted beam of Light fall perpendicularly upon a Glass Speculum ground concave on one side and convex on the other, to a Sphere of five Feet and eleven Inches Radius, and Quick-silver'd over on the convex side. And holding a white opake Chart, or a Quire of Paper at the center of the Spheres to which the Speculum was ground, that is, at the distance of about five Feet and eleven Inches from the Speculum, in such manner, that the beam of Light might pass through a little hole made in the middle of the Chart to the Speculum, and thence be reflected back to the same hole: I observed upon the Chart four or five concentric Irises or Rings of Colours, like Rain-bows, encompassing the hole much after the manner that those, which in the fourth and following Observations of the first part of this Book appear'd between the Object-glasses, encompassed the black Spot, but yet larger and fainter than those. These Rings as they grew larger and larger became diluter and fainter, so that the fifth was scarce visible. Yet sometimes, when the Sun shone very clear, there appear'd faint Lineaments of a sixth and seventh. If the distance of the Chart from the Speculum was much greater or much less than that of six Feet, the Rings became dilute and vanish'd. And if the distance of the Speculum from the Window was much greater than that of six Feet, the reflected beam of Light would be so broad at the distance of six Feet from the Speculum where the Rings appear'd, as to obscure one or two of the innermost Rings. And therefore I usually placed the Speculum at about six

Feet from the Window; so that its Focus might there fall in with the center of its concavity at the Rings upon the Chart. And this Posture is always to be understood in the following Observations where no other is express'd.

Obs. 2. The Colours of these Rain-bows succeeded one another from the center outwards, in the same form and order with those which were made in the ninth Observation of the first Part of this Book by Light not reflected, but transmitted through the two Object-glasses. For, first, there was in their common center a white round Spot of faint Light, something broader than the reflected beam of Light, which beam sometimes fell upon the middle of the Spot, and sometimes by a little inclination of the Speculum receded from the middle, and left the Spot white to the center.

This white Spot was immediately encompassed with a dark grey or russet, and that dark grey with the Colours of the first Iris; which Colours on the inside next the dark grey were a little violet and indigo, and next to that a blue, which on the outside grew pale, and then succeeded a little greenish yellow, and after that a brighter yellow, and then on the outward edge of the Iris a red which on the outside inclined to purple.

This Iris was immediately encompassed with a second, whose Colours were in order from the inside outwards, purple, blue, green, yellow, light red, a red mix'd with purple.

Then immediately follow'd the Colours of the third Iris, which were in order outwards a green inclining to purple, a good green, and a red more bright than that of the former Iris.

The fourth and fifth Iris seem'd of a bluish green within, and red without, but so faintly that it was difficult to discern the Colours.

Obs. 3. Measuring the Diameters of these Rings upon the Chart as accurately as I could, I found them also in the same proportion to one another with the Rings made by Light transmitted through the two Object-glasses. For the Diameters of the four first of the bright Rings measured between the brightest parts of their Orbits, at the distance of six Feet from the Speculum were 1-11/16, 2-3/8, 2-11/12, 3-3/8 Inches, whose Squares are in arithmetical progression of the numbers 1, 2, 3, 4. If the white circular Spot in the middle be reckon'd amongst the Rings, and its central Light, where it seems to be most luminous, be put equipollent to an infinitely little Ring; the Squares of the Diameters of the Rings will be in the progression 0, 1, 2, 3, 4, &c. I measured also the Diameters of the dark

Circles between these luminous ones, and found their Squares in the progression of the numbers 1/2, 1-1/2, 2-1/2, 3-1/2, &c. the Diameters of the first four at the distance of six Feet from the Speculum, being 1-3/16, 2-1/16, 2-2/3, 3-3/20 Inches. If the distance of the Chart from the Speculum was increased or diminished, the Diameters of the Circles were increased or diminished proportionally.

Obs. 4. By the analogy between these Rings and those described in the Observations of the first Part of this Book, I suspected that there were many more of them which spread into one another, and by interfering mix'd their Colours, and diluted one another so that they could not be seen apart. I viewed them therefore through a Prism, as I did those in the 24th Observation of the first Part of this Book. And when the Prism was so placed as by refracting the Light of their mix'd Colours to separate them, and distinguish the Rings from one another, as it did those in that Observation, I could then see them distincter than before, and easily number eight or nine of them, and sometimes twelve or thirteen. And had not their Light been so very faint, I question not but that I might have seen many more.

Obs. 5. Placing a Prism at the Window to refract the intromitted beam of Light, and cast the oblong Spectrum of Colours on the Speculum: I covered the Speculum with a black Paper which had in the middle of it a hole to let any one of the Colours pass through to the Speculum, whilst the rest were intercepted by the Paper. And now I found Rings of that Colour only which fell upon the Speculum. If the Speculum was illuminated with red, the Rings were totally red with dark Intervals, if with blue they were totally blue, and so of the other Colours. And when they were illuminated with any one Colour, the Squares of their Diameters measured between their most luminous Parts, were in the arithmetical Progression of the Numbers, 0, 1, 2, 3, 4 and the Squares of the Diameters of their dark Intervals in the Progression of the intermediate Numbers 1/2, 1-1/2, 2-1/2, 3-1/2. But if the Colour was varied, they varied their Magnitude. In the red they were largest, in the indigo and violet least, and in the intermediate Colours yellow, green, and blue, they were of several intermediate Bignesses answering to the Colour, that is, greater in yellow than in green, and greater in green than in blue. And hence I knew, that when the Speculum was illuminated with white Light, the red and yellow on the outside of the Rings

were produced by the least refrangible Rays, and the blue and violet by the most refrangible, and that the Colours of each Ring spread into the Colours of the neighbouring Rings on either side, after the manner explain'd in the first and second Part of this Book, and by mixing diluted one another so that they could not be distinguish'd, unless near the Center where they were least mix'd. For in this Observation I could see the Rings more distinctly, and to a greater Number than before, being able in the yellow Light to number eight or nine of them, besides a faint shadow of a tenth. To satisfy my self how much the Colours of the several Rings spread into one another, I measured the Diameters of the second and third Rings, and found them when made by the Confine of the red and orange to be to the same Diameters when made by the Confine of blue and indigo, as 9 to 8, or thereabouts. For it was hard to determine this Proportion accurately. Also the Circles made successively by the red, yellow, and green, differ'd more from one another than those made successively by the green, blue, and indigo. For the Circle made by the violet was too dark to be seen. To carry on the Computation, let us therefore suppose that the Differences of the Diameters of the Circles made by the outmost red, the Confine of red and orange, the Confine of orange and yellow, the Confine of yellow and green, the Confine of green and blue, the Confine of blue and indigo, the Confine of indigo and violet, and outmost violet, are in proportion as the Differences of the Lengths of a Monochord which sound the Tones in an Eight; *sol*, *la*, *fa*, *sol*, *la*, *mi*, *fa*, *sol*, that is, as the Numbers 1/9, 1/18, 1/12, 1/12, 2/27, 1/27, 1/18. And if the Diameter of the Circle made by the Confine of red and orange be 9A, and that of the Circle made by the Confine of blue and indigo be 8A as above; their difference 9A-8A will be to the difference of the Diameters of the Circles made by the outmost red, and by the Confine of red and orange, as 1/18 + 1/12 + 1/12 + 2/27 to 1/9, that is as 8/27 to 1/9, or 8 to 3, and to the difference of the Circles made by the outmost violet, and by the Confine of blue and indigo, as 1/18 + 1/12 + 1/12 + 2/27 to 1/27 + 1/18, that is, as 8/27 to 5/54, or as 16 to 5. And therefore these differences will be 3/8A and 5/16A. Add the first to 9A and subduct the last from 8A, and you will have the Diameters of the Circles made by the least and most refrangible Rays 75/8A and ((61-1/2)/8)A. These diameters are therefore to one another as 75 to 61-1/2 or 50 to 41, and their Squares as 2500 to 1681, that is, as 3 to 2 very nearly. Which proportion differs not much from the

proportion of the Diameters of the Circles made by the outmost red and outmost violet, in the 13th Observation of the first part of this Book.

Obs. 6. Placing my Eye where these Rings appear'd plainest, I saw the Speculum tinged all over with Waves of Colours, (red, yellow, green, blue;) like those which in the Observations of the first part of this Book appeared between the Object-glasses, and upon Bubbles of Water, but much larger. And after the manner of those, they were of various magnitudes in various Positions of the Eye, swelling and shrinking as I moved my Eye this way and that way. They were formed like Arcs of concentrick Circles, as those were; and when my Eye was over against the center of the concavity of the Speculum, (that is, 5 Feet and 10 Inches distant from the Speculum,) their common center was in a right Line with that center of concavity, and with the hole in the Window. But in other postures of my Eye their center had other positions. They appear'd by the Light of the Clouds propagated to the Speculum through the hole in the Window; and when the Sun shone through that hole upon the Speculum, his Light upon it was of the Colour of the Ring whereon it fell, but by its splendor obscured the Rings made by the Light of the Clouds, unless when the Speculum was removed to a great distance from the Window, so that his Light upon it might be broad and faint. By varying the position of my Eye, and moving it nearer to or farther from the direct beam of the Sun's Light, the Colour of the Sun's reflected Light constantly varied upon the Speculum, as it did upon my Eye, the same Colour always appearing to a Bystander upon my Eye which to me appear'd upon the Speculum. And thence I knew that the Rings of Colours upon the Chart were made by these reflected Colours, propagated thither from the Speculum in several Angles, and that their production depended not upon the termination of Light and Shadow.

Obs. 7. By the Analogy of all these Phænomena with those of the like Rings of Colours described in the first part of this Book, it seemed to me that these Colours were produced by this thick Plate of Glass, much after the manner that those were produced by very thin Plates. For, upon trial, I found that if the Quick-silver were rubb'd off from the backside of the Speculum, the Glass alone would cause the same Rings of Colours, but much more faint than before; and therefore the Phænomenon depends not upon the Quick-silver, unless so far as the Quick-silver by increasing the Reflexion of the backside of the Glass increases the Light of the Rings of

Colours. I found also that a Speculum of Metal without Glass made some Years since for optical uses, and very well wrought, produced none of those Rings; and thence I understood that these Rings arise not from one specular Surface alone, but depend upon the two Surfaces of the Plate of Glass whereof the Speculum was made, and upon the thickness of the Glass between them. For as in the 7th and 19th Observations of the first part of this Book a thin Plate of Air, Water, or Glass of an even thickness appeared of one Colour when the Rays were perpendicular to it, of another when they were a little oblique, of another when more oblique, of another when still more oblique, and so on; so here, in the sixth Observation, the Light which emerged out of the Glass in several Obliquities, made the Glass appear of several Colours, and being propagated in those Obliquities to the Chart, there painted Rings of those Colours. And as the reason why a thin Plate appeared of several Colours in several Obliquities of the Rays, was, that the Rays of one and the same sort are reflected by the thin Plate at one obliquity and transmitted at another, and those of other sorts transmitted where these are reflected, and reflected where these are transmitted: So the reason why the thick Plate of Glass whereof the Speculum was made did appear of various Colours in various Obliquities, and in those Obliquities propagated those Colours to the Chart, was, that the Rays of one and the same sort did at one Obliquity emerge out of the Glass, at another did not emerge, but were reflected back towards the Quick-silver by the hither Surface of the Glass, and accordingly as the Obliquity became greater and greater, emerged and were reflected alternately for many Successions; and that in one and the same Obliquity the Rays of one sort were reflected, and those of another transmitted. This is manifest by the fifth Observation of this part of this Book. For in that Observation, when the Speculum was illuminated by any one of the prismatick Colours, that Light made many Rings of the same Colour upon the Chart with dark Intervals, and therefore at its emergence out of the Speculum was alternately transmitted and not transmitted from the Speculum to the Chart for many Successions, according to the various Obliquities of its Emergence. And when the Colour cast on the Speculum by the Prism was varied, the Rings became of the Colour cast on it, and varied their bigness with their Colour, and therefore the Light was now alternately transmitted and not transmitted from the Speculum to the Chart at other Obliquities than before. It seemed to me

therefore that these Rings were of one and the same original with those of thin Plates, but yet with this difference, that those of thin Plates are made by the alternate Reflexions and Transmissions of the Rays at the second Surface of the Plate, after one passage through it; but here the Rays go twice through the Plate before they are alternately reflected and transmitted. First, they go through it from the first Surface to the Quick-silver, and then return through it from the Quick-silver to the first Surface, and there are either transmitted to the Chart or reflected back to the Quick-silver, accordingly as they are in their Fits of easy Reflexion or Transmission when they arrive at that Surface. For the Intervals of the Fits of the Rays which fall perpendicularly on the Speculum, and are reflected back in the same perpendicular Lines, by reason of the equality of these Angles and Lines, are of the same length and number within the Glass after Reflexion as before, by the 19th Proposition of the third part of this Book. And therefore since all the Rays that enter through the first Surface are in their Fits of easy Transmission at their entrance, and as many of these as are reflected by the second are in their Fits of easy Reflexion there, all these must be again in their Fits of easy Transmission at their return to the first, and by consequence there go out of the Glass to the Chart, and form upon it the white Spot of Light in the center of the Rings. For the reason holds good in all sorts of Rays, and therefore all sorts must go out promiscuously to that Spot, and by their mixture cause it to be white. But the Intervals of the Fits of those Rays which are reflected more obliquely than they enter, must be greater after Reflexion than before, by the 15th and 20th Propositions. And thence it may happen that the Rays at their return to the first Surface, may in certain Obliquities be in Fits of easy Reflexion, and return back to the Quick-silver, and in other intermediate Obliquities be again in Fits of easy Transmission, and so go out to the Chart, and paint on it the Rings of Colours about the white Spot. And because the Intervals of the Fits at equal obliquities are greater and fewer in the less refrangible Rays, and less and more numerous in the more refrangible, therefore the less refrangible at equal obliquities shall make fewer Rings than the more refrangible, and the Rings made by those shall be larger than the like number of Rings made by these; that is, the red Rings shall be larger than the yellow, the yellow than the green, the green than the blue, and the blue than the violet, as they were really found to be in the fifth Observation. And therefore the first Ring of

all Colours encompassing the white Spot of Light shall be red without any violet within, and yellow, and green, and blue in the middle, as it was found in the second Observation; and these Colours in the second Ring, and those that follow, shall be more expanded, till they spread into one another, and blend one another by interfering.

These seem to be the reasons of these Rings in general; and this put me upon observing the thickness of the Glass, and considering whether the dimensions and proportions of the Rings may be truly derived from it by computation.

Obs. 8. I measured therefore the thickness of this concavo-convex Plate of Glass, and found it every where 1/4 of an Inch precisely. Now, by the sixth Observation of the first Part of this Book, a thin Plate of Air transmits the brightest Light of the first Ring, that is, the bright yellow, when its thickness is the 1/89000th part of an Inch; and by the tenth Observation of the same Part, a thin Plate of Glass transmits the same Light of the same Ring, when its thickness is less in proportion of the Sine of Refraction to the Sine of Incidence, that is, when its thickness is the 11/1513000th or 1/137545th part of an Inch, supposing the Sines are as 11 to 17. And if this thickness be doubled, it transmits the same bright Light of the second Ring; if tripled, it transmits that of the third, and so on; the bright yellow Light in all these cases being in its Fits of Transmission. And therefore if its thickness be multiplied 34386 times, so as to become 1/4 of an Inch, it transmits the same bright Light of the 34386th Ring. Suppose this be the bright yellow Light transmitted perpendicularly from the reflecting convex side of the Glass through the concave side to the white Spot in the center of the Rings of Colours on the Chart: And by a Rule in the 7th and 19th Observations in the first Part of this Book, and by the 15th and 20th Propositions of the third Part of this Book, if the Rays be made oblique to the Glass, the thickness of the Glass requisite to transmit the same bright Light of the same Ring in any obliquity, is to this thickness of 1/4 of an Inch, as the Secant of a certain Angle to the Radius, the Sine of which Angle is the first of an hundred and six arithmetical Means between the Sines of Incidence and Refraction, counted from the Sine of Incidence when the Refraction is made out of any plated Body into any Medium encompassing it; that is, in this case, out of Glass into Air. Now if the thickness of the Glass be increased by degrees, so as to bear to its first

thickness, (*viz.* that of a quarter of an Inch,) the Proportions which 34386 (the number of Fits of the perpendicular Rays in going through the Glass towards the white Spot in the center of the Rings,) hath to 34385, 34384, 34383, and 34382, (the numbers of the Fits of the oblique Rays in going through the Glass towards the first, second, third, and fourth Rings of Colours,) and if the first thickness be divided into 100000000 equal parts, the increased thicknesses will be 100002908, 100005816, 100008725, and 100011633, and the Angles of which these thicknesses are Secants will be 26′ 13′′, 37′ 5′′, 45′ 6′′, and 52′ 26′′, the Radius being 100000000; and the Sines of these Angles are 762, 1079, 1321, and 1525, and the proportional Sines of Refraction 1172, 1659, 2031, and 2345, the Radius being 100000. For since the Sines of Incidence out of Glass into Air are to the Sines of Refraction as 11 to 17, and to the above-mentioned Secants as 11 to the first of 106 arithmetical Means between 11 and 17, that is, as 11 to 11-6/106, those Secants will be to the Sines of Refraction as 11-6/106, to 17, and by this Analogy will give these Sines. So then, if the obliquities of the Rays to the concave Surface of the Glass be such that the Sines of their Refraction in passing out of the Glass through that Surface into the Air be 1172, 1659, 2031, 2345, the bright Light of the 34386th Ring shall emerge at the thicknesses of the Glass, which are to 1/4 of an Inch as 34386 to 34385, 34384, 34383, 34382, respectively. And therefore, if the thickness in all these Cases be 1/4 of an Inch (as it is in the Glass of which the Speculum was made) the bright Light of the 34385th Ring shall emerge where the Sine of Refraction is 1172, and that of the 34384th, 34383th, and 34382th Ring where the Sine is 1659, 2031, and 2345 respectively. And in these Angles of Refraction the Light of these Rings shall be propagated from the Speculum to the Chart, and there paint Rings about the white central round Spot of Light which we said was the Light of the 34386th Ring. And the Semidiameters of these Rings shall subtend the Angles of Refraction made at the Concave-Surface of the Speculum, and by consequence their Diameters shall be to the distance of the Chart from the Speculum as those Sines of Refraction doubled are to the Radius, that is, as 1172, 1659, 2031, and 2345, doubled are to 100000. And therefore, if the distance of the Chart from the Concave-Surface of the Speculum be six Feet (as it was in the third of these Observations) the Diameters of the Rings of this bright yellow Light upon the Chart shall be 1’688, 2’389, 2’925, 3’375 Inches: For these

Diameters are to six Feet, as the above-mention'd Sines doubled are to the Radius. Now, these Diameters of the bright yellow Rings, thus found by Computation are the very same with those found in the third of these Observations by measuring them, *viz.* with 1-11/16, 2-3/8, 2-11/12, and 3-3/8 Inches, and therefore the Theory of deriving these Rings from the thickness of the Plate of Glass of which the Speculum was made, and from the Obliquity of the emerging Rays agrees with the Observation. In this Computation I have equalled the Diameters of the bright Rings made by Light of all Colours, to the Diameters of the Rings made by the bright yellow. For this yellow makes the brightest Part of the Rings of all Colours. If you desire the Diameters of the Rings made by the Light of any other unmix'd Colour, you may find them readily by putting them to the Diameters of the bright yellow ones in a subduplicate Proportion of the Intervals of the Fits of the Rays of those Colours when equally inclined to the refracting or reflecting Surface which caused those Fits, that is, by putting the Diameters of the Rings made by the Rays in the Extremities and Limits of the seven Colours, red, orange, yellow, green, blue, indigo, violet, proportional to the Cube-roots of the Numbers, 1, 8/9, 5/6, 3/4, 2/3, 3/5, 9/16, 1/2, which express the Lengths of a Monochord sounding the Notes in an Eighth: For by this means the Diameters of the Rings of these Colours will be found pretty nearly in the same Proportion to one another, which they ought to have by the fifth of these Observations.

And thus I satisfy'd my self, that these Rings were of the same kind and Original with those of thin Plates, and by consequence that the Fits or alternate Dispositions of the Rays to be reflected and transmitted are propagated to great distances from every reflecting and refracting Surface. But yet to put the matter out of doubt, I added the following Observation.

Obs. 9. If these Rings thus depend on the thickness of the Plate of Glass, their Diameters at equal distances from several Speculums made of such concavo-convex Plates of Glass as are ground on the same Sphere, ought to be reciprocally in a subduplicate Proportion of the thicknesses of the Plates of Glass. And if this Proportion be found true by experience it will amount to a demonstration that these Rings (like those formed in thin Plates) do depend on the thickness of the Glass. I procured therefore another concavo-convex Plate of Glass ground on both sides to the same Sphere with the former Plate. Its thickness was 5/62 Parts of an Inch; and the Diameters of

the three first bright Rings measured between the brightest Parts of their Orbits at the distance of six Feet from the Glass were 3·4-1/6·5-1/8· Inches. Now, the thickness of the other Glass being 1/4 of an Inch was to the thickness of this Glass as 1/4 to 5/62, that is as 31 to 10, or 310000000 to 100000000, and the Roots of these Numbers are 17607 and 10000, and in the Proportion of the first of these Roots to the second are the Diameters of the bright Rings made in this Observation by the thinner Glass, 3·4-1/6·5-1/8, to the Diameters of the same Rings made in the third of these Observations by the thicker Glass 1-11/16, 2-3/8. 2-11/12, that is, the Diameters of the Rings are reciprocally in a subduplicate Proportion of the thicknesses of the Plates of Glass.

So then in Plates of Glass which are alike concave on one side, and alike convex on the other side, and alike quick-silver'd on the convex sides, and differ in nothing but their thickness, the Diameters of the Rings are reciprocally in a subduplicate Proportion of the thicknesses of the Plates. And this shews sufficiently that the Rings depend on both the Surfaces of the Glass. They depend on the convex Surface, because they are more luminous when that Surface is quick-silver'd over than when it is without Quick-silver. They depend also upon the concave Surface, because without that Surface a Speculum makes them not. They depend on both Surfaces, and on the distances between them, because their bigness is varied by varying only that distance. And this dependence is of the same kind with that which the Colours of thin Plates have on the distance of the Surfaces of those Plates, because the bigness of the Rings, and their Proportion to one another, and the variation of their bigness arising from the variation of the thickness of the Glass, and the Orders of their Colours, is such as ought to result from the Propositions in the end of the third Part of this Book, derived from the Phænomena of the Colours of thin Plates set down in the first Part.

There are yet other Phænomena of these Rings of Colours, but such as follow from the same Propositions, and therefore confirm both the Truth of those Propositions, and the Analogy between these Rings and the Rings of Colours made by very thin Plates. I shall subjoin some of them.

Obs. 10. When the beam of the Sun's Light was reflected back from the Speculum not directly to the hole in the Window, but to a place a little distant from it, the common center of that Spot, and of all the Rings of

Colours fell in the middle way between the beam of the incident Light, and the beam of the reflected Light, and by consequence in the center of the spherical concavity of the Speculum, whenever the Chart on which the Rings of Colours fell was placed at that center. And as the beam of reflected Light by inclining the Speculum receded more and more from the beam of incident Light and from the common center of the colour'd Rings between them, those Rings grew bigger and bigger, and so also did the white round Spot, and new Rings of Colours emerged successively out of their common center, and the white Spot became a white Ring encompassing them; and the incident and reflected beams of Light always fell upon the opposite parts of this white Ring, illuminating its Perimeter like two mock Suns in the opposite parts of an Iris. So then the Diameter of this Ring, measured from the middle of its Light on one side to the middle of its Light on the other side, was always equal to the distance between the middle of the incident beam of Light, and the middle of the reflected beam measured at the Chart on which the Rings appeared: And the Rays which form'd this Ring were reflected by the Speculum in Angles equal to their Angles of Incidence, and by consequence to their Angles of Refraction at their entrance into the Glass, but yet their Angles of Reflexion were not in the same Planes with their Angles of Incidence.

Obs. 11. The Colours of the new Rings were in a contrary order to those of the former, and arose after this manner. The white round Spot of Light in the middle of the Rings continued white to the center till the distance of the incident and reflected beams at the Chart was about 7/8 parts of an Inch, and then it began to grow dark in the middle. And when that distance was about 1-3/16 of an Inch, the white Spot was become a Ring encompassing a dark round Spot which in the middle inclined to violet and indigo. And the luminous Rings encompassing it were grown equal to those dark ones which in the four first Observations encompassed them, that is to say, the white Spot was grown a white Ring equal to the first of those dark Rings, and the first of those luminous Rings was now grown equal to the second of those dark ones, and the second of those luminous ones to the third of those dark ones, and so on. For the Diameters of the luminous Rings were now 1-3/16, 2-1/16, 2-2/3, 3-3/20, &c. Inches.

When the distance between the incident and reflected beams of Light became a little bigger, there emerged out of the middle of the dark Spot

after the indigo a blue, and then out of that blue a pale green, and soon after a yellow and red. And when the Colour at the center was brightest, being between yellow and red, the bright Rings were grown equal to those Rings which in the four first Observations next encompassed them; that is to say, the white Spot in the middle of those Rings was now become a white Ring equal to the first of those bright Rings, and the first of those bright ones was now become equal to the second of those, and so on. For the Diameters of the white Ring, and of the other luminous Rings encompassing it, were now 1-11/16, 2-3/8, 2-11/12, 3-3/8, &c. or thereabouts.

When the distance of the two beams of Light at the Chart was a little more increased, there emerged out of the middle in order after the red, a purple, a blue, a green, a yellow, and a red inclining much to purple, and when the Colour was brightest being between yellow and red, the former indigo, blue, green, yellow and red, were become an Iris or Ring of Colours equal to the first of those luminous Rings which appeared in the four first Observations, and the white Ring which was now become the second of the luminous Rings was grown equal to the second of those, and the first of those which was now become the third Ring was become equal to the third of those, and so on. For their Diameters were 1-11/16, 2-3/8, 2-11/12, 3-3/8 Inches, the distance of the two beams of Light, and the Diameter of the white Ring being 2-3/8 Inches.

When these two beams became more distant there emerged out of the middle of the purplish red, first a darker round Spot, and then out of the middle of that Spot a brighter. And now the former Colours (purple, blue, green, yellow, and purplish red) were become a Ring equal to the first of the bright Rings mentioned in the four first Observations, and the Rings about this Ring were grown equal to the Rings about that respectively; the distance between the two beams of Light and the Diameter of the white Ring (which was now become the third Ring) being about 3 Inches.

The Colours of the Rings in the middle began now to grow very dilute, and if the distance between the two Beams was increased half an Inch, or an Inch more, they vanish'd whilst the white Ring, with one or two of the Rings next it on either side, continued still visible. But if the distance of the two beams of Light was still more increased, these also vanished: For the Light which coming from several parts of the hole in the Window fell upon the Speculum in several Angles of Incidence, made Rings of several

bignesses, which diluted and blotted out one another, as I knew by intercepting some part of that Light. For if I intercepted that part which was nearest to the Axis of the Speculum the Rings would be less, if the other part which was remotest from it they would be bigger.

Obs. 12. When the Colours of the Prism were cast successively on the Speculum, that Ring which in the two last Observations was white, was of the same bigness in all the Colours, but the Rings without it were greater in the green than in the blue, and still greater in the yellow, and greatest in the red. And, on the contrary, the Rings within that white Circle were less in the green than in the blue, and still less in the yellow, and least in the red. For the Angles of Reflexion of those Rays which made this Ring, being equal to their Angles of Incidence, the Fits of every reflected Ray within the Glass after Reflexion are equal in length and number to the Fits of the same Ray within the Glass before its Incidence on the reflecting Surface. And therefore since all the Rays of all sorts at their entrance into the Glass were in a Fit of Transmission, they were also in a Fit of Transmission at their returning to the same Surface after Reflexion; and by consequence were transmitted, and went out to the white Ring on the Chart. This is the reason why that Ring was of the same bigness in all the Colours, and why in a mixture of all it appears white. But in Rays which are reflected in other Angles, the Intervals of the Fits of the least refrangible being greatest, make the Rings of their Colour in their progress from this white Ring, either outwards or inwards, increase or decrease by the greatest steps; so that the Rings of this Colour without are greatest, and within least. And this is the reason why in the last Observation, when the Speculum was illuminated with white Light, the exterior Rings made by all Colours appeared red without and blue within, and the interior blue without and red within.

These are the Phænomena of thick convexo-concave Plates of Glass, which are every where of the same thickness. There are yet other Phænomena when these Plates are a little thicker on one side than on the other, and others when the Plates are more or less concave than convex, or plano-convex, or double-convex. For in all these cases the Plates make Rings of Colours, but after various manners; all which, so far as I have yet observed, follow from the Propositions in the end of the third part of this Book, and so conspire to confirm the truth of those Propositions. But the Phænomena are too various, and the Calculations whereby they follow from

those Propositions too intricate to be here prosecuted. I content my self with having prosecuted this kind of Phænomena so far as to discover their Cause, and by discovering it to ratify the Propositions in the third Part of this Book.

Obs. 13. As Light reflected by a Lens quick-silver'd on the backside makes the Rings of Colours above described, so it ought to make the like Rings of Colours in passing through a drop of Water. At the first Reflexion of the Rays within the drop, some Colours ought to be transmitted, as in the case of a Lens, and others to be reflected back to the Eye. For instance, if the Diameter of a small drop or globule of Water be about the 500th part of an Inch, so that a red-making Ray in passing through the middle of this globule has 250 Fits of easy Transmission within the globule, and that all the red-making Rays which are at a certain distance from this middle Ray round about it have 249 Fits within the globule, and all the like Rays at a certain farther distance round about it have 248 Fits, and all those at a certain farther distance 247 Fits, and so on; these concentrick Circles of Rays after their transmission, falling on a white Paper, will make concentrick Rings of red upon the Paper, supposing the Light which passes through one single globule, strong enough to be sensible. And, in like manner, the Rays of other Colours will make Rings of other Colours. Suppose now that in a fair Day the Sun shines through a thin Cloud of such globules of Water or Hail, and that the globules are all of the same bigness; and the Sun seen through this Cloud shall appear encompassed with the like concentrick Rings of Colours, and the Diameter of the first Ring of red shall be 7-1/4 Degrees, that of the second 10-1/4 Degrees, that of the third 12 Degrees 33 Minutes. And accordingly as the Globules of Water are bigger or less, the Rings shall be less or bigger. This is the Theory, and Experience answers it. For in *June* 1692, I saw by reflexion in a Vessel of stagnating Water three Halos, Crowns, or Rings of Colours about the Sun, like three little Rain-bows, concentrick to his Body. The Colours of the first or innermost Crown were blue next the Sun, red without, and white in the middle between the blue and red. Those of the second Crown were purple and blue within, and pale red without, and green in the middle. And those of the third were pale blue within, and pale red without; these Crowns enclosed one another immediately, so that their Colours proceeded in this continual order from the Sun outward: blue, white, red; purple, blue, green, pale yellow and red; pale blue, pale red. The Diameter of the second Crown

measured from the middle of the yellow and red on one side of the Sun, to the middle of the same Colour on the other side was 9-1/3 Degrees, or thereabouts. The Diameters of the first and third I had not time to measure, but that of the first seemed to be about five or six Degrees, and that of the third about twelve. The like Crowns appear sometimes about the Moon; for in the beginning of the Year 1664, *Febr.* 19th at Night, I saw two such Crowns about her. The Diameter of the first or innermost was about three Degrees, and that of the second about five Degrees and an half. Next about the Moon was a Circle of white, and next about that the inner Crown, which was of a bluish green within next the white, and of a yellow and red without, and next about these Colours were blue and green on the inside of the outward Crown, and red on the outside of it. At the same time there appear'd a Halo about 22 Degrees 35′ distant from the center of the Moon. It was elliptical, and its long Diameter was perpendicular to the Horizon, verging below farthest from the Moon. I am told that the Moon has sometimes three or more concentrick Crowns of Colours encompassing one another next about her Body. The more equal the globules of Water or Ice are to one another, the more Crowns of Colours will appear, and the Colours will be the more lively. The Halo at the distance of 22-1/2 Degrees from the Moon is of another sort. By its being oval and remoter from the Moon below than above, I conclude, that it was made by Refraction in some sort of Hail or Snow floating in the Air in an horizontal posture, the refracting Angle being about 58 or 60 Degrees.

THE THIRD BOOK OF OPTICKS

PART I.

Observations concerning the Inflexions of the Rays of Light, and the Colours made thereby.

Grimaldo has inform'd us, that if a beam of the Sun's Light be let into a dark Room through a very small hole, the Shadows of things in this Light will be larger than they ought to be if the Rays went on by the Bodies in straight Lines, and that these Shadows have three parallel Fringes, Bands or Ranks of colour'd Light adjacent to them. But if the Hole be enlarged the Fringes grow broad and run into one another, so that they cannot be distinguish'd. These broad Shadows and Fringes have been reckon'd by some to proceed from the ordinary refraction of the Air, but without due examination of the Matter. For the circumstances of the Phænomenon, so far as I have observed them, are as follows.

Obs. 1. I made in a piece of Lead a small Hole with a Pin, whose breadth was the 42d part of an Inch. For 21 of those Pins laid together took up the breadth of half an Inch. Through this Hole I let into my darken'd Chamber a beam of the Sun's Light, and found that the Shadows of Hairs, Thred, Pins, Straws, and such like slender Substances placed in this beam of Light, were considerably broader than they ought to be, if the Rays of Light passed on by these Bodies in right Lines. And particularly a Hair of a Man's Head, whose breadth was but the 280th part of an Inch, being held in this Light, at the distance of about twelve Feet from the Hole, did cast a Shadow which at the distance of four Inches from the Hair was the sixtieth part of an Inch broad, that is, above four times broader than the Hair, and at the distance of two Feet from the Hair was about the eight and twentieth part of an Inch broad, that is, ten times broader than the Hair, and at the distance of ten Feet was the eighth part of an Inch broad, that is 35 times broader.

Nor is it material whether the Hair be encompassed with Air, or with any other pellucid Substance. For I wetted a polish'd Plate of Glass, and laid the Hair in the Water upon the Glass, and then laying another polish'd Plate of Glass upon it, so that the Water might fill up the space between the Glasses, I held them in the aforesaid beam of Light, so that the Light might pass through them perpendicularly, and the Shadow of the Hair was at the same

distances as big as before. The Shadows of Scratches made in polish'd Plates of Glass were also much broader than they ought to be, and the Veins in polish'd Plates of Glass did also cast the like broad Shadows. And therefore the great breadth of these Shadows proceeds from some other cause than the Refraction of the Air.

Let the Circle X [in *Fig.* 1.] represent the middle of the Hair; ADG, BEH, CFI, three Rays passing by one side of the Hair at several distances; KNQ, LOR, MPS, three other Rays passing by the other side of the Hair at the like distances; D, E, F, and N, O, P, the places where the Rays are bent in their passage by the Hair; G, H, I, and Q, R, S, the places where the Rays fall on a Paper GQ; IS the breadth of the Shadow of the Hair cast on the Paper, and TI, VS, two Rays passing to the Points I and S without bending when the Hair is taken away. And it's manifest that all the Light between these two Rays TI and VS is bent in passing by the Hair, and turned aside from the Shadow IS, because if any part of this Light were not bent it would fall on the Paper within the Shadow, and there illuminate the Paper, contrary to experience. And because when the Paper is at a great distance from the Hair, the Shadow is broad, and therefore the Rays TI and VS are at a great distance from one another, it follows that the Hair acts upon the Rays of Light at a good distance in their passing by it. But the Action is strongest on the Rays which pass by at least distances, and grows weaker and weaker accordingly as the Rays pass by at distances greater and greater, as is represented in the Scheme: For thence it comes to pass, that the Shadow of the Hair is much broader in proportion to the distance of the Paper from the Hair, when the Paper is nearer the Hair, than when it is at a great distance from it.

Obs. 2. The Shadows of all Bodies (Metals, Stones, Glass, Wood, Horn, Ice, &c.) in this Light were border'd with three Parallel Fringes or Bands of colour'd Light, whereof that which was contiguous to the Shadow was broadest and most luminous, and that which was remotest from it was narrowest, and so faint, as not easily to be visible. It was difficult to distinguish the Colours, unless when the Light fell very obliquely upon a smooth Paper, or some other smooth white Body, so as to make them appear much broader than they would otherwise do. And then the Colours were plainly visible in this Order: The first or innermost Fringe was violet and deep blue next the Shadow, and then light blue, green, and yellow in the middle, and red without. The second Fringe was almost contiguous to the

first, and the third to the second, and both were blue within, and yellow and red without, but their Colours were very faint, especially those of the third. The Colours therefore proceeded in this order from the Shadow; violet, indigo, pale blue, green, yellow, red; blue, yellow, red; pale blue, pale yellow and red. The Shadows made by Scratches and Bubbles in polish'd Plates of Glass were border'd with the like Fringes of colour'd Light. And if Plates of Looking-glass sloop'd off near the edges with a Diamond-cut, be held in the same beam of Light, the Light which passes through the parallel Planes of the Glass will be border'd with the like Fringes of Colours where those Planes meet with the Diamond-cut, and by this means there will sometimes appear four or five Fringes of Colours. Let AB, CD [in *Fig.* 2.] represent the parallel Planes of a Looking-glass, and BD the Plane of the Diamond-cut, making at B a very obtuse Angle with the Plane AB. And let all the Light between the Rays ENI and FBM pass directly through the parallel Planes of the Glass, and fall upon the Paper between I and M, and all the Light between the Rays GO and HD be refracted by the oblique Plane of the Diamond-cut BD, and fall upon the Paper between K and L; and the Light which passes directly through the parallel Planes of the Glass, and falls upon the Paper between I and M, will be border'd with three or more Fringes at M.

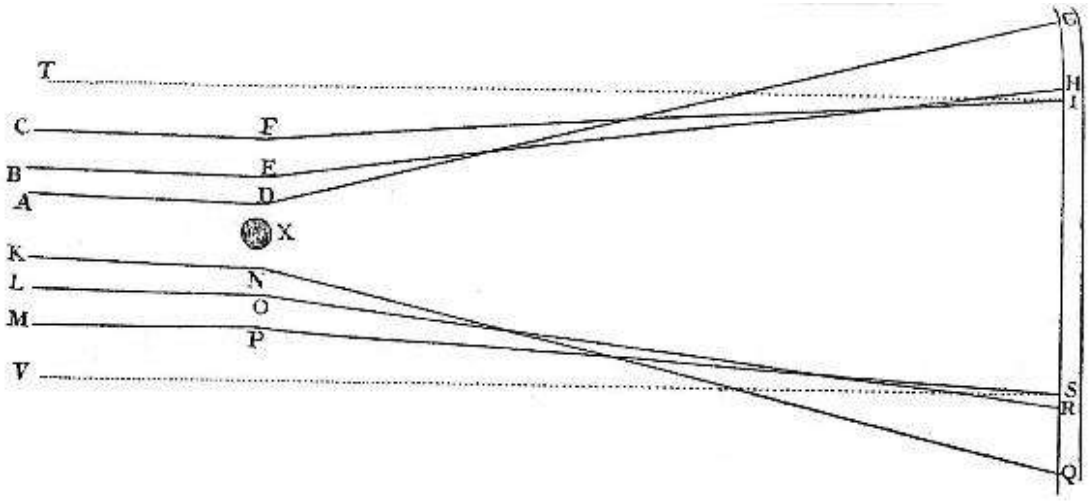


Fig. 1.

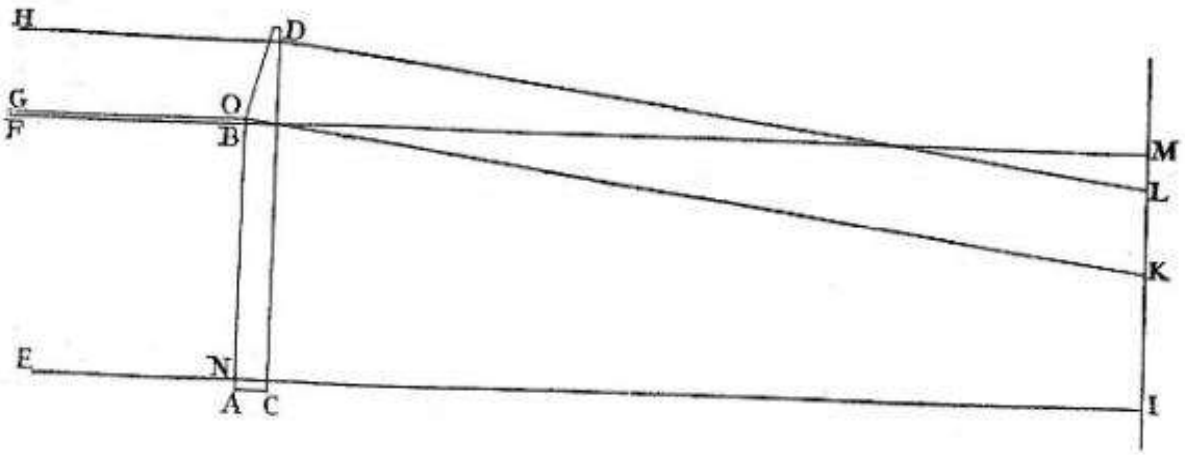


Fig. 2.

So by looking on the Sun through a Feather or black Ribband held close to the Eye, several Rain-bows will appear; the Shadows which the Fibres or Threds cast on the *Tunica Retina*, being border'd with the like Fringes of Colours.

Obs. 3. When the Hair was twelve Feet distant from this Hole, and its Shadow fell obliquely upon a flat white Scale of Inches and Parts of an Inch placed half a Foot beyond it, and also when the Shadow fell perpendicularly upon the same Scale placed nine Feet beyond it; I measured the breadth of the Shadow and Fringes as accurately as I could, and found them in Parts of an Inch as follows.

At the Distance of

half a Foot

Nine Feet

The breadth of the Shadow
1/54
1/9

The breadth between the Middles of the brightest Light of the innermost Fringes on either side the Shadow
1/38 or 1/39
7/50

The breadth between the Middles of the brightest Light of the middlemost Fringes on either side the Shadow
1/23-1/2
4/17

The breadth between the Middles of the brightest Light of the outmost Fringes on either side the Shadow
1/18 or 1/18-1/2
3/10

The distance between the Middles of the brightest Light of the first and second Fringes
1/120
1/21

The distance between the Middles of the brightest Light of the second and third Fringes
1/170
1/31

The breadth of the luminous Part (green, white, yellow, and red) of the first Fringe
1/170
1/32

The breadth of the darker Space between the first and second Fringes
1/240

1/45

The breadth of the luminous Part of the second Fringe
1/290
1/55

The breadth of the darker Space between the second and third Fringes
1/340
1/63

These Measures I took by letting the Shadow of the Hair, at half a Foot distance, fall so obliquely on the Scale, as to appear twelve times broader than when it fell perpendicularly on it at the same distance, and setting down in this Table the twelfth part of the Measures I then took.

Obs. 4. When the Shadow and Fringes were cast obliquely upon a smooth white Body, and that Body was removed farther and farther from the Hair, the first Fringe began to appear and look brighter than the rest of the Light at the distance of less than a quarter of an Inch from the Hair, and the dark Line or Shadow between that and the second Fringe began to appear at a less distance from the Hair than that of the third part of an Inch. The second Fringe began to appear at a distance from the Hair of less than half an Inch, and the Shadow between that and the third Fringe at a distance less than an inch, and the third Fringe at a distance less than three Inches. At greater distances they became much more sensible, but kept very nearly the same proportion of their breadths and intervals which they had at their first appearing. For the distance between the middle of the first, and middle of the second Fringe, was to the distance between the middle of the second and middle of the third Fringe, as three to two, or ten to seven. And the last of these two distances was equal to the breadth of the bright Light or luminous part of the first Fringe. And this breadth was to the breadth of the bright Light of the second Fringe as seven to four, and to the dark Interval of the first and second Fringe as three to two, and to the like dark Interval between the second and third as two to one. For the breadths of the Fringes seem'd

to be in the progression of the Numbers 1, √(1/3), √(1/5), and their Intervals to be in the same progression with them; that is, the Fringes and their Intervals together to be in the continual progression of the Numbers 1, √(1/2), √(1/3), √(1/4), √(1/5), or thereabouts. And these Proportions held the same very nearly at all distances from the Hair; the dark Intervals of the Fringes being as broad in proportion to the breadth of the Fringes at their first appearance as afterwards at great distances from the Hair, though not so dark and distinct.

Obs. 5. The Sun shining into my darken'd Chamber through a hole a quarter of an Inch broad, I placed at the distance of two or three Feet from the Hole a Sheet of Pasteboard, which was black'd all over on both sides, and in the middle of it had a hole about three quarters of an Inch square for the Light to pass through. And behind the hole I fasten'd to the Pasteboard with Pitch the blade of a sharp Knife, to intercept some part of the Light which passed through the hole. The Planes of the Pasteboard and blade of the Knife were parallel to one another, and perpendicular to the Rays. And when they were so placed that none of the Sun's Light fell on the Pasteboard, but all of it passed through the hole to the Knife, and there part of it fell upon the blade of the Knife, and part of it passed by its edge; I let this part of the Light which passed by, fall on a white Paper two or three Feet beyond the Knife, and there saw two streams of faint Light shoot out both ways from the beam of Light into the shadow, like the Tails of Comets. But because the Sun's direct Light by its brightness upon the Paper obscured these faint streams, so that I could scarce see them, I made a little hole in the midst of the Paper for that Light to pass through and fall on a black Cloth behind it; and then I saw the two streams plainly. They were like one another, and pretty nearly equal in length, and breadth, and quantity of Light. Their Light at that end next the Sun's direct Light was pretty strong for the space of about a quarter of an Inch, or half an Inch, and in all its progress from that direct Light decreased gradually till it became insensible. The whole length of either of these streams measured upon the paper at the distance of three Feet from the Knife was about six or eight Inches; so that it subtended an Angle at the edge of the Knife of about 10 or 12, or at most 14 Degrees. Yet sometimes I thought I saw it shoot three or four Degrees farther, but with a Light so very faint that I could scarce perceive it, and suspected it might (in some measure at least) arise from

some other cause than the two streams did. For placing my Eye in that Light beyond the end of that stream which was behind the Knife, and looking towards the Knife, I could see a line of Light upon its edge, and that not only when my Eye was in the line of the Streams, but also when it was without that line either towards the point of the Knife, or towards the handle. This line of Light appear'd contiguous to the edge of the Knife, and was narrower than the Light of the innermost Fringe, and narrowest when my Eye was farthest from the direct Light, and therefore seem'd to pass between the Light of that Fringe and the edge of the Knife, and that which passed nearest the edge to be most bent, though not all of it.

Obs. 6. I placed another Knife by this, so that their edges might be parallel, and look towards one another, and that the beam of Light might fall upon both the Knives, and some part of it pass between their edges. And when the distance of their edges was about the 400th part of an Inch, the stream parted in the middle, and left a Shadow between the two parts. This Shadow was so black and dark that all the Light which passed between the Knives seem'd to be bent, and turn'd aside to the one hand or to the other. And as the Knives still approach'd one another the Shadow grew broader, and the streams shorter at their inward ends which were next the Shadow, until upon the contact of the Knives the whole Light vanish'd, leaving its place to the Shadow.

And hence I gather that the Light which is least bent, and goes to the inward ends of the streams, passes by the edges of the Knives at the greatest distance, and this distance when the Shadow begins to appear between the streams, is about the 800th part of an Inch. And the Light which passes by the edges of the Knives at distances still less and less, is more and more bent, and goes to those parts of the streams which are farther and farther from the direct Light; because when the Knives approach one another till they touch, those parts of the streams vanish last which are farthest from the direct Light.

Obs. 7. In the fifth Observation the Fringes did not appear, but by reason of the breadth of the hole in the Window became so broad as to run into one another, and by joining, to make one continued Light in the beginning of the streams. But in the sixth, as the Knives approached one another, a little before the Shadow appeared between the two streams, the Fringes began to appear on the inner ends of the Streams on either side of the direct Light;

three on one side made by the edge of one Knife, and three on the other side made by the edge of the other Knife. They were distinctest when the Knives were placed at the greatest distance from the hole in the Window, and still became more distinct by making the hole less, insomuch that I could sometimes see a faint lineament of a fourth Fringe beyond the three above mention'd. And as the Knives continually approach'd one another, the Fringes grew distincter and larger, until they vanish'd. The outmost Fringe vanish'd first, and the middlemost next, and the innermost last. And after they were all vanish'd, and the line of Light which was in the middle between them was grown very broad, enlarging it self on both sides into the streams of Light described in the fifth Observation, the above-mention'd Shadow began to appear in the middle of this line, and divide it along the middle into two lines of Light, and increased until the whole Light vanish'd. This enlargement of the Fringes was so great that the Rays which go to the innermost Fringe seem'd to be bent above twenty times more when this Fringe was ready to vanish, than when one of the Knives was taken away.

And from this and the former Observation compared, I gather, that the Light of the first Fringe passed by the edge of the Knife at a distance greater than the 800th part of an Inch, and the Light of the second Fringe passed by the edge of the Knife at a greater distance than the Light of the first Fringe did, and that of the third at a greater distance than that of the second, and that of the streams of Light described in the fifth and sixth Observations passed by the edges of the Knives at less distances than that of any of the Fringes.

Obs. 8. I caused the edges of two Knives to be ground truly strait, and pricking their points into a Board so that their edges might look towards one another, and meeting near their points contain a rectilinear Angle, I fasten'd their Handles together with Pitch to make this Angle invariable. The distance of the edges of the Knives from one another at the distance of four Inches from the angular Point, where the edges of the Knives met, was the eighth part of an Inch; and therefore the Angle contain'd by the edges was about one Degree 54: The Knives thus fix'd together I placed in a beam of the Sun's Light, let into my darken'd Chamber through a Hole the 42d Part of an Inch wide, at the distance of 10 or 15 Feet from the Hole, and let the Light which passed between their edges fall very obliquely upon a smooth white Ruler at the distance of half an Inch, or an Inch from the Knives, and

there saw the Fringes by the two edges of the Knives run along the edges of the Shadows of the Knives in Lines parallel to those edges without growing sensibly broader, till they met in Angles equal to the Angle contained by the edges of the Knives, and where they met and joined they ended without crossing one another. But if the Ruler was held at a much greater distance from the Knives, the Fringes where they were farther from the Place of their Meeting, were a little narrower, and became something broader and broader as they approach'd nearer and nearer to one another, and after they met they cross'd one another, and then became much broader than before.

Whence I gather that the distances at which the Fringes pass by the Knives are not increased nor alter'd by the approach of the Knives, but the Angles in which the Rays are there bent are much increased by that approach; and that the Knife which is nearest any Ray determines which way the Ray shall be bent, and the other Knife increases the bent.

Obs. 9. When the Rays fell very obliquely upon the Ruler at the distance of the third Part of an Inch from the Knives, the dark Line between the first and second Fringe of the Shadow of one Knife, and the dark Line between the first and second Fringe of the Shadow of the other knife met with one another, at the distance of the fifth Part of an Inch from the end of the Light which passed between the Knives at the concourse of their edges. And therefore the distance of the edges of the Knives at the meeting of these dark Lines was the 160th Part of an Inch. For as four Inches to the eighth Part of an Inch, so is any Length of the edges of the Knives measured from the point of their concourse to the distance of the edges of the Knives at the end of that Length, and so is the fifth Part of an Inch to the 160th Part. So then the dark Lines above-mention'd meet in the middle of the Light which passes between the Knives where they are distant the 160th Part of an Inch, and the one half of that Light passes by the edge of one Knife at a distance not greater than the 320th Part of an Inch, and falling upon the Paper makes the Fringes of the Shadow of that Knife, and the other half passes by the edge of the other Knife, at a distance not greater than the 320th Part of an Inch, and falling upon the Paper makes the Fringes of the Shadow of the other Knife. But if the Paper be held at a distance from the Knives greater than the third Part of an Inch, the dark Lines above-mention'd meet at a greater distance than the fifth Part of an Inch from the end of the Light which passed between the Knives at the concourse of their edges; and

therefore the Light which falls upon the Paper where those dark Lines meet passes between the Knives where the edges are distant above the 160th part of an Inch.

For at another time, when the two Knives were distant eight Feet and five Inches from the little hole in the Window, made with a small Pin as above, the Light which fell upon the Paper where the aforesaid dark lines met, passed between the Knives, where the distance between their edges was as in the following Table, when the distance of the Paper from the Knives was also as follows.

Distances of the Paper from the Knives in Inches.	Distances between the edges of the Knives in millesimal parts of an Inch.
1-1/2.	0’012
3-1/3.	0’020
8-3/5.	0’034
32.	0’057
96.	0’081
131.	0’087

And hence I gather, that the Light which makes the Fringes upon the Paper is not the same Light at all distances of the Paper from the Knives, but when the Paper is held near the Knives, the Fringes are made by Light which passes by the edges of the Knives at a less distance, and is more bent than when the Paper is held at a greater distance from the Knives.

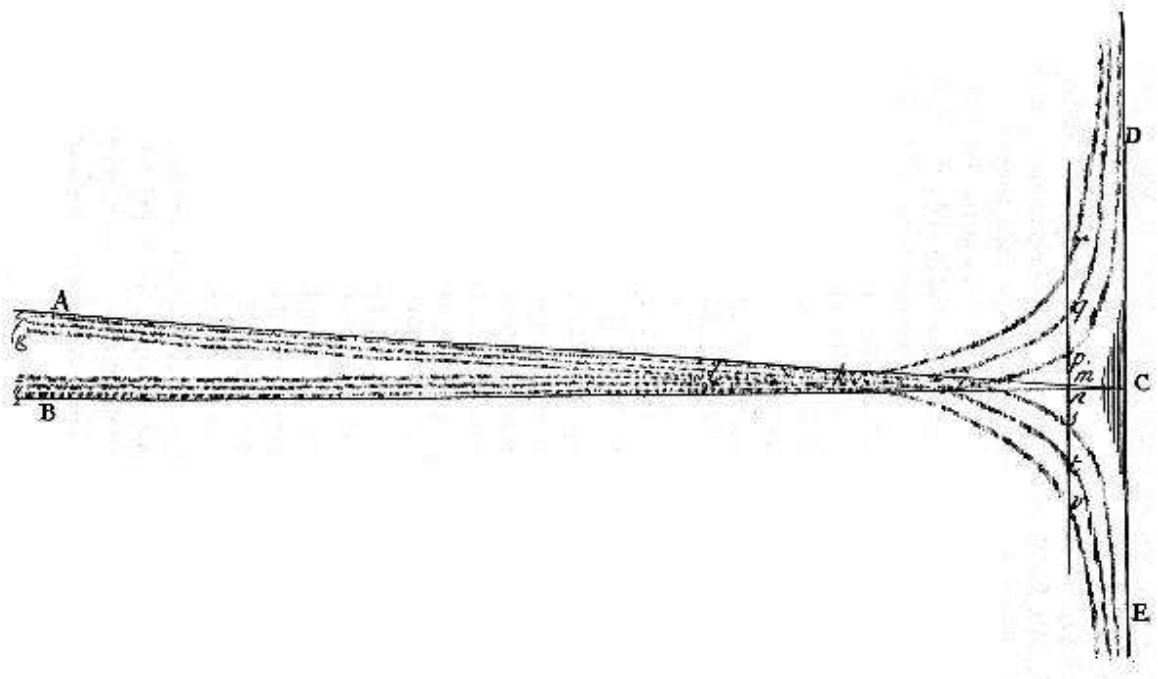


Fig. 3.

Obs. 10. When the Fringes of the Shadows of the Knives fell perpendicularly upon a Paper at a great distance from the Knives, they were in the form of Hyperbola's, and their Dimensions were as follows. Let CA, CB [in *Fig.* 3.] represent Lines drawn upon the Paper parallel to the edges of the Knives, and between which all the Light would fall, if it passed between the edges of the Knives without inflexion; DE a Right Line drawn through C making the Angles ACD, BCE, equal to one another, and terminating all the Light which falls upon the Paper from the point where the edges of the Knives meet; *eis*, *fkt*, and *glv*, three hyperbolical Lines representing the Terminus of the Shadow of one of the Knives, the dark Line between the first and second Fringes of that Shadow, and the dark Line between the second and third Fringes of the same Shadow; *xip*, *ykq*, and *zlr*, three other hyperbolical Lines representing the Terminus of the Shadow of

the other Knife, the dark Line between the first and second Fringes of that Shadow, and the dark line between the second and third Fringes of the same Shadow. And conceive that these three Hyperbola's are like and equal to the former three, and cross them in the points *i*, *k*, and *l*, and that the Shadows of the Knives are terminated and distinguish'd from the first luminous Fringes by the lines *eis* and *xip*, until the meeting and crossing of the Fringes, and then those lines cross the Fringes in the form of dark lines, terminating the first luminous Fringes within side, and distinguishing them from another Light which begins to appear at *i*, and illuminates all the triangular space *ip*DE*s* comprehended by these dark lines, and the right line DE. Of these Hyperbola's one Asymptote is the line DE, and their other Asymptotes are parallel to the lines CA and CB. Let *rv* represent a line drawn any where upon the Paper parallel to the Asymptote DE, and let this line cross the right lines AC in *m*, and BC in *n*, and the six dark hyperbolical lines in *p*, *q*, *r*; *s*, *t*, *v*; and by measuring the distances *ps*, *qt*, *rv*, and thence collecting the lengths of the Ordinates *np*, *nq*, *nr* or *ms*, *mt*, *mv*, and doing this at several distances of the line *rv* from the Asymptote DD, you may find as many points of these Hyperbola's as you please, and thereby know that these curve lines are Hyperbola's differing little from the conical Hyperbola. And by measuring the lines C*i*, C*k*, C*l*, you may find other points of these Curves.

For instance; when the Knives were distant from the hole in the Window ten Feet, and the Paper from the Knives nine Feet, and the Angle contained by the edges of the Knives to which the Angle ACB is equal, was subtended by a Chord which was to the Radius as 1 to 32, and the distance of the line *rv* from the Asymptote DE was half an Inch: I measured the lines *ps*, *qt*, *rv*, and found them 0'35, 0'65, 0'98 Inches respectively; and by adding to their halfs the line 1/2 *mn*, (which here was the 128th part of an Inch, or 0'0078 Inches,) the Sums *np*, *nq*, *nr*, were 0'1828, 0'3328, 0'4978 Inches. I measured also the distances of the brightest parts of the Fringes which run between *pq* and *st*, *qr* and *tv*, and next beyond *r* and *v*, and found them 0'5, 0'8, and 1'17 Inches.

Obs. 11. The Sun shining into my darken'd Room through a small round hole made in a Plate of Lead with a slender Pin, as above; I placed at the hole a Prism to refract the Light, and form on the opposite Wall the Spectrum of Colours, described in the third Experiment of the first Book.

And then I found that the Shadows of all Bodies held in the colour'd Light between the Prism and the Wall, were border'd with Fringes of the Colour of that Light in which they were held. In the full red Light they were totally red without any sensible blue or violet, and in the deep blue Light they were totally blue without any sensible red or yellow; and so in the green Light they were totally green, excepting a little yellow and blue, which were mixed in the green Light of the Prism. And comparing the Fringes made in the several colour'd Lights, I found that those made in the red Light were largest, those made in the violet were least, and those made in the green were of a middle bigness. For the Fringes with which the Shadow of a Man's Hair were bordered, being measured cross the Shadow at the distance of six Inches from the Hair, the distance between the middle and most luminous part of the first or innermost Fringe on one side of the Shadow, and that of the like Fringe on the other side of the Shadow, was in the full red Light 1/37-1/4 of an Inch, and in the full violet 7/46. And the like distance between the middle and most luminous parts of the second Fringes on either side the Shadow was in the full red Light 1/22, and in the violet 1/27 of an Inch. And these distances of the Fringes held the same proportion at all distances from the Hair without any sensible variation.

So then the Rays which made these Fringes in the red Light passed by the Hair at a greater distance than those did which made the like Fringes in the violet; and therefore the Hair in causing these Fringes acted alike upon the red Light or least refrangible Rays at a greater distance, and upon the violet or most refrangible Rays at a less distance, and by those actions disposed the red Light into Larger Fringes, and the violet into smaller, and the Lights of intermediate Colours into Fringes of intermediate bignesses without changing the Colour of any sort of Light.

When therefore the Hair in the first and second of these Observations was held in the white beam of the Sun's Light, and cast a Shadow which was border'd with three Fringes of coloured Light, those Colours arose not from any new modifications impress'd upon the Rays of Light by the Hair, but only from the various inflexions whereby the several Sorts of Rays were separated from one another, which before separation, by the mixture of all their Colours, composed the white beam of the Sun's Light, but whenever separated compose Lights of the several Colours which they are originally disposed to exhibit. In this 11th Observation, where the Colours are

separated before the Light passes by the Hair, the least refrangible Rays, which when separated from the rest make red, were inflected at a greater distance from the Hair, so as to make three red Fringes at a greater distance from the middle of the Shadow of the Hair; and the most refrangible Rays which when separated make violet, were inflected at a less distance from the Hair, so as to make three violet Fringes at a less distance from the middle of the Shadow of the Hair. And other Rays of intermediate degrees of Refrangibility were inflected at intermediate distances from the Hair, so as to make Fringes of intermediate Colours at intermediate distances from the middle of the Shadow of the Hair. And in the second Observation, where all the Colours are mix'd in the white Light which passes by the Hair, these Colours are separated by the various inflexions of the Rays, and the Fringes which they make appear all together, and the innermost Fringes being contiguous make one broad Fringe composed of all the Colours in due order, the violet lying on the inside of the Fringe next the Shadow, the red on the outside farthest from the Shadow, and the blue, green, and yellow, in the middle. And, in like manner, the middlemost Fringes of all the Colours lying in order, and being contiguous, make another broad Fringe composed of all the Colours; and the outmost Fringes of all the Colours lying in order, and being contiguous, make a third broad Fringe composed of all the Colours. These are the three Fringes of colour'd Light with which the Shadows of all Bodies are border'd in the second Observation.

When I made the foregoing Observations, I design'd to repeat most of them with more care and exactness, and to make some new ones for determining the manner how the Rays of Light are bent in their passage by Bodies, for making the Fringes of Colours with the dark lines between them. But I was then interrupted, and cannot now think of taking these things into farther Consideration. And since I have not finish'd this part of my Design, I shall conclude with proposing only some Queries, in order to a farther search to be made by others.

Query 1. Do not Bodies act upon Light at a distance, and by their action bend its Rays; and is not this action (*cæteris paribus*) strongest at the least distance?

Qu. 2. Do not the Rays which differ in Refrangibility differ also in Flexibity; and are they not by their different Inflexions separated from one

another, so as after separation to make the Colours in the three Fringes above described? And after what manner are they inflected to make those Fringes?

Qu. 3. Are not the Rays of Light in passing by the edges and sides of Bodies, bent several times backwards and forwards, with a motion like that of an Eel? And do not the three Fringes of colour'd Light above-mention'd arise from three such bendings?

Qu. 4. Do not the Rays of Light which fall upon Bodies, and are reflected or refracted, begin to bend before they arrive at the Bodies; and are they not reflected, refracted, and inflected, by one and the same Principle, acting variously in various Circumstances?

Qu. 5. Do not Bodies and Light act mutually upon one another; that is to say, Bodies upon Light in emitting, reflecting, refracting and inflecting it, and Light upon Bodies for heating them, and putting their parts into a vibrating motion wherein heat consists?

Qu. 6. Do not black Bodies conceive heat more easily from Light than those of other Colours do, by reason that the Light falling on them is not reflected outwards, but enters the Bodies, and is often reflected and refracted within them, until it be stifled and lost?

Qu. 7. Is not the strength and vigor of the action between Light and sulphureous Bodies observed above, one reason why sulphureous Bodies take fire more readily, and burn more vehemently than other Bodies do?

Qu. 8. Do not all fix'd Bodies, when heated beyond a certain degree, emit Light and shine; and is not this Emission perform'd by the vibrating motions of their parts? And do not all Bodies which abound with terrestrial parts, and especially with sulphureous ones, emit Light as often as those parts are sufficiently agitated; whether that agitation be made by Heat, or by Friction, or Percussion, or Putrefaction, or by any vital Motion, or any other Cause? As for instance; Sea-Water in a raging Storm; Quick-silver agitated in *vacuo*; the Back of a Cat, or Neck of a Horse, obliquely struck or rubbed in a dark place; Wood, Flesh and Fish while they putrefy; Vapours arising from putrefy'd Waters, usually call'd *Ignes Fatui*; Stacks of moist Hay or Corn growing hot by fermentation; Glowworms and the Eyes of some Animals by vital Motions; the vulgar *Phosphorus* agitated by the attrition of any Body, or by the acid Particles of the Air; Amber and some Diamonds by striking, pressing or rubbing them; Scrapings of Steel struck off with a

Flint; Iron hammer'd very nimbly till it become so hot as to kindle Sulphur thrown upon it; the Axletrees of Chariots taking fire by the rapid rotation of the Wheels; and some Liquors mix'd with one another whose Particles come together with an Impetus, as Oil of Vitriol distilled from its weight of Nitre, and then mix'd with twice its weight of Oil of Anniseeds. So also a Globe of Glass about 8 or 10 Inches in diameter, being put into a Frame where it may be swiftly turn'd round its Axis, will in turning shine where it rubs against the palm of ones Hand apply'd to it: And if at the same time a piece of white Paper or white Cloth, or the end of ones Finger be held at the distance of about a quarter of an Inch or half an Inch from that part of the Glass where it is most in motion, the electrick Vapour which is excited by the friction of the Glass against the Hand, will by dashing against the white Paper, Cloth or Finger, be put into such an agitation as to emit Light, and make the white Paper, Cloth or Finger, appear lucid like a Glowworm; and in rushing out of the Glass will sometimes push against the finger so as to be felt. And the same things have been found by rubbing a long and large Cylinder or Glass or Amber with a Paper held in ones hand, and continuing the friction till the Glass grew warm.

Qu. 9. Is not Fire a Body heated so hot as to emit Light copiously? For what else is a red hot Iron than Fire? And what else is a burning Coal than red hot Wood?

Qu. 10. Is not Flame a Vapour, Fume or Exhalation heated red hot, that is, so hot as to shine? For Bodies do not flame without emitting a copious Fume, and this Fume burns in the Flame. The *Ignis Fatuus* is a Vapour shining without heat, and is there not the same difference between this Vapour and Flame, as between rotten Wood shining without heat and burning Coals of Fire? In distilling hot Spirits, if the Head of the Still be taken off, the Vapour which ascends out of the Still will take fire at the Flame of a Candle, and turn into Flame, and the Flame will run along the Vapour from the Candle to the Still. Some Bodies heated by Motion, or Fermentation, if the heat grow intense, fume copiously, and if the heat be great enough the Fumes will shine and become Flame. Metals in fusion do not flame for want of a copious Fume, except Spelter, which fumes copiously, and thereby flames. All flaming Bodies, as Oil, Tallow, Wax, Wood, fossil Coals, Pitch, Sulphur, by flaming waste and vanish into burning Smoke, which Smoke, if the Flame be put out, is very thick and

visible, and sometimes smells strongly, but in the Flame loses its smell by burning, and according to the nature of the Smoke the Flame is of several Colours, as that of Sulphur blue, that of Copper open'd with sublimate green, that of Tallow yellow, that of Camphire white. Smoke passing through Flame cannot but grow red hot, and red hot Smoke can have no other appearance than that of Flame. When Gun-powder takes fire, it goes away into Flaming Smoke. For the Charcoal and Sulphur easily take fire, and set fire to the Nitre, and the Spirit of the Nitre being thereby rarified into Vapour, rushes out with Explosion much after the manner that the Vapour of Water rushes out of an Æolipile; the Sulphur also being volatile is converted into Vapour, and augments the Explosion. And the acid Vapour of the Sulphur (namely that which distils under a Bell into Oil of Sulphur,) entring violently into the fix'd Body of the Nitre, sets loose the Spirit of the Nitre, and excites a great Fermentation, whereby the Heat is farther augmented, and the fix'd Body of the Nitre is also rarified into Fume, and the Explosion is thereby made more vehement and quick. For if Salt of Tartar be mix'd with Gun-powder, and that Mixture be warm'd till it takes fire, the Explosion will be more violent and quick than that of Gun-powder alone; which cannot proceed from any other cause than the action of the Vapour of the Gun-powder upon the Salt of Tartar, whereby that Salt is rarified. The Explosion of Gun-powder arises therefore from the violent action whereby all the Mixture being quickly and vehemently heated, is rarified and converted into Fume and Vapour: which Vapour, by the violence of that action, becoming so hot as to shine, appears in the form of Flame.

Qu. 11. Do not great Bodies conserve their heat the longest, their parts heating one another, and may not great dense and fix'd Bodies, when heated beyond a certain degree, emit Light so copiously, as by the Emission and Reaction of its Light, and the Reflexions and Refractions of its Rays within its Pores to grow still hotter, till it comes to a certain period of heat, such as is that of the Sun? And are not the Sun and fix'd Stars great Earths vehemently hot, whose heat is conserved by the greatness of the Bodies, and the mutual Action and Reaction between them, and the Light which they emit, and whose parts are kept from fuming away, not only by their fixity, but also by the vast weight and density of the Atmospheres incumbent upon them; and very strongly compressing them, and condensing

the Vapours and Exhalations which arise from them? For if Water be made warm in any pellucid Vessel emptied of Air, that Water in the *Vacuum* will bubble and boil as vehemently as it would in the open Air in a Vessel set upon the Fire till it conceives a much greater heat. For the weight of the incumbent Atmosphere keeps down the Vapours, and hinders the Water from boiling, until it grow much hotter than is requisite to make it boil *in vacuo*. Also a mixture of Tin and Lead being put upon a red hot Iron *in vacuo* emits a Fume and Flame, but the same Mixture in the open Air, by reason of the incumbent Atmosphere, does not so much as emit any Fume which can be perceived by Sight. In like manner the great weight of the Atmosphere which lies upon the Globe of the Sun may hinder Bodies there from rising up and going away from the Sun in the form of Vapours and Fumes, unless by means of a far greater heat than that which on the Surface of our Earth would very easily turn them into Vapours and Fumes. And the same great weight may condense those Vapours and Exhalations as soon as they shall at any time begin to ascend from the Sun, and make them presently fall back again into him, and by that action increase his Heat much after the manner that in our Earth the Air increases the Heat of a culinary Fire. And the same weight may hinder the Globe of the Sun from being diminish'd, unless by the Emission of Light, and a very small quantity of Vapours and Exhalations.

Qu. 12. Do not the Rays of Light in falling upon the bottom of the Eye excite Vibrations in the *Tunica Retina*? Which Vibrations, being propagated along the solid Fibres of the optick Nerves into the Brain, cause the Sense of seeing. For because dense Bodies conserve their Heat a long time, and the densest Bodies conserve their Heat the longest, the Vibrations of their parts are of a lasting nature, and therefore may be propagated along solid Fibres of uniform dense Matter to a great distance, for conveying into the Brain the impressions made upon all the Organs of Sense. For that Motion which can continue long in one and the same part of a Body, can be propagated a long way from one part to another, supposing the Body homogeneal, so that the Motion may not be reflected, refracted, interrupted or disorder'd by any unevenness of the Body.

Qu. 13. Do not several sorts of Rays make Vibrations of several bignesses, which according to their bignesses excite Sensations of several Colours, much after the manner that the Vibrations of the Air, according to

their several bignesses excite Sensations of several Sounds? And particularly do not the most refrangible Rays excite the shortest Vibrations for making a Sensation of deep violet, the least refrangible the largest for making a Sensation of deep red, and the several intermediate sorts of Rays, Vibrations of several intermediate bignesses to make Sensations of the several intermediate Colours?

Qu. 14. May not the harmony and discord of Colours arise from the proportions of the Vibrations propagated through the Fibres of the optick Nerves into the Brain, as the harmony and discord of Sounds arise from the proportions of the Vibrations of the Air? For some Colours, if they be view'd together, are agreeable to one another, as those of Gold and Indigo, and others disagree.

Qu. 15. Are not the Species of Objects seen with both Eyes united where the optick Nerves meet before they come into the Brain, the Fibres on the right side of both Nerves uniting there, and after union going thence into the Brain in the Nerve which is on the right side of the Head, and the Fibres on the left side of both Nerves uniting in the same place, and after union going into the Brain in the Nerve which is on the left side of the Head, and these two Nerves meeting in the Brain in such a manner that their Fibres make but one entire Species or Picture, half of which on the right side of the Sensorium comes from the right side of both Eyes through the right side of both optick Nerves to the place where the Nerves meet, and from thence on the right side of the Head into the Brain, and the other half on the left side of the Sensorium comes in like manner from the left side of both Eyes. For the optick Nerves of such Animals as look the same way with both Eyes (as of Men, Dogs, Sheep, Oxen, &c.) meet before they come into the Brain, but the optick Nerves of such Animals as do not look the same way with both Eyes (as of Fishes, and of the Chameleon,) do not meet, if I am rightly inform'd.

Qu. 16. When a Man in the dark presses either corner of his Eye with his Finger, and turns his Eye away from his Finger, he will see a Circle of Colours like those in the Feather of a Peacock's Tail. If the Eye and the Finger remain quiet these Colours vanish in a second Minute of Time, but if the Finger be moved with a quavering Motion they appear again. Do not these Colours arise from such Motions excited in the bottom of the Eye by the Pressure and Motion of the Finger, as, at other times are excited there by

Light for causing Vision? And do not the Motions once excited continue about a Second of Time before they cease? And when a Man by a stroke upon his Eye sees a flash of Light, are not the like Motions excited in the *Retina* by the stroke? And when a Coal of Fire moved nimbly in the circumference of a Circle, makes the whole circumference appear like a Circle of Fire; is it not because the Motions excited in the bottom of the Eye by the Rays of Light are of a lasting nature, and continue till the Coal of Fire in going round returns to its former place? And considering the lastingness of the Motions excited in the bottom of the Eye by Light, are they not of a vibrating nature?

Qu. 17. If a stone be thrown into stagnating Water, the Waves excited thereby continue some time to arise in the place where the Stone fell into the Water, and are propagated from thence in concentrick Circles upon the Surface of the Water to great distances. And the Vibrations or Tremors excited in the Air by percussion, continue a little time to move from the place of percussion in concentrick Spheres to great distances. And in like manner, when a Ray of Light falls upon the Surface of any pellucid Body, and is there refracted or reflected, may not Waves of Vibrations, or Tremors, be thereby excited in the refracting or reflecting Medium at the point of Incidence, and continue to arise there, and to be propagated from thence as long as they continue to arise and be propagated, when they are excited in the bottom of the Eye by the Pressure or Motion of the Finger, or by the Light which comes from the Coal of Fire in the Experiments above-mention'd? and are not these Vibrations propagated from the point of Incidence to great distances? And do they not overtake the Rays of Light, and by overtaking them successively, do they not put them into the Fits of easy Reflexion and easy Transmission described above? For if the Rays endeavour to recede from the densest part of the Vibration, they may be alternately accelerated and retarded by the Vibrations overtaking them.

Qu. 18. If in two large tall cylindrical Vessels of Glass inverted, two little Thermometers be suspended so as not to touch the Vessels, and the Air be drawn out of one of these Vessels, and these Vessels thus prepared be carried out of a cold place into a warm one; the Thermometer *in vacuo* will grow warm as much, and almost as soon as the Thermometer which is not *in vacuo*. And when the Vessels are carried back into the cold place, the Thermometer *in vacuo* will grow cold almost as soon as the other

Thermometer. Is not the Heat of the warm Room convey'd through the *Vacuum* by the Vibrations of a much subtiler Medium than Air, which after the Air was drawn out remained in the *Vacuum*? And is not this Medium the same with that Medium by which Light is refracted and reflected, and by whose Vibrations Light communicates Heat to Bodies, and is put into Fits of easy Reflexion and easy Transmission? And do not the Vibrations of this Medium in hot Bodies contribute to the intenseness and duration of their Heat? And do not hot Bodies communicate their Heat to contiguous cold ones, by the Vibrations of this Medium propagated from them into the cold ones? And is not this Medium exceedingly more rare and subtile than the Air, and exceedingly more elastick and active? And doth it not readily pervade all Bodies? And is it not (by its elastick force) expanded through all the Heavens?

Qu. 19. Doth not the Refraction of Light proceed from the different density of this Æthereal Medium in different places, the Light receding always from the denser parts of the Medium? And is not the density thereof greater in free and open Spaces void of Air and other grosser Bodies, than within the Pores of Water, Glass, Crystal, Gems, and other compact Bodies? For when Light passes through Glass or Crystal, and falling very obliquely upon the farther Surface thereof is totally reflected, the total Reflexion ought to proceed rather from the density and vigour of the Medium without and beyond the Glass, than from the rarity and weakness thereof.

Qu. 20. Doth not this Æthereal Medium in passing out of Water, Glass, Crystal, and other compact and dense Bodies into empty Spaces, grow denser and denser by degrees, and by that means refract the Rays of Light not in a point, but by bending them gradually in curve Lines? And doth not the gradual condensation of this Medium extend to some distance from the Bodies, and thereby cause the Inflexions of the Rays of Light, which pass by the edges of dense Bodies, at some distance from the Bodies?

Qu. 21. Is not this Medium much rarer within the dense Bodies of the Sun, Stars, Planets and Comets, than in the empty celestial Spaces between them? And in passing from them to great distances, doth it not grow denser and denser perpetually, and thereby cause the gravity of those great Bodies towards one another, and of their parts towards the Bodies; every Body endeavouring to go from the denser parts of the Medium towards the rarer? For if this Medium be rarer within the Sun's Body than at its Surface, and

rarer there than at the hundredth part of an Inch from its Body, and rarer there than at the fiftieth part of an Inch from its Body, and rarer there than at the Orb of *Saturn*; I see no reason why the Increase of density should stop any where, and not rather be continued through all distances from the Sun to *Saturn*, and beyond. And though this Increase of density may at great distances be exceeding slow, yet if the elastick force of this Medium be exceeding great, it may suffice to impel Bodies from the denser parts of the Medium towards the rarer, with all that power which we call Gravity. And that the elastick force of this Medium is exceeding great, may be gather'd from the swiftness of its Vibrations. Sounds move about 1140 *English* Feet in a second Minute of Time, and in seven or eight Minutes of Time they move about one hundred *English* Miles. Light moves from the Sun to us in about seven or eight Minutes of Time, which distance is about 70,000,000 *English* Miles, supposing the horizontal Parallax of the Sun to be about 12 ″. And the Vibrations or Pulses of this Medium, that they may cause the alternate Fits of easy Transmission and easy Reflexion, must be swifter than Light, and by consequence above 700,000 times swifter than Sounds. And therefore the elastick force of this Medium, in proportion to its density, must be above 700000 x 700000 (that is, above 490,000,000,000) times greater than the elastick force of the Air is in proportion to its density. For the Velocities of the Pulses of elastick Mediums are in a subduplicate *Ratio* of the Elasticities and the Rarities of the Mediums taken together.

As Attraction is stronger in small Magnets than in great ones in proportion to their Bulk, and Gravity is greater in the Surfaces of small Planets than in those of great ones in proportion to their bulk, and small Bodies are agitated much more by electric attraction than great ones; so the smallness of the Rays of Light may contribute very much to the power of the Agent by which they are refracted. And so if any one should suppose that *Æther* (like our Air) may contain Particles which endeavour to recede from one another (for I do not know what this *Æther* is) and that its Particles are exceedingly smaller than those of Air, or even than those of Light: The exceeding smallness of its Particles may contribute to the greatness of the force by which those Particles may recede from one another, and thereby make that Medium exceedingly more rare and elastick than Air, and by consequence exceedingly less able to resist the motions of

Projectiles, and exceedingly more able to press upon gross Bodies, by endeavouring to expand it self.

Qu. 22. May not Planets and Comets, and all gross Bodies, perform their Motions more freely, and with less resistance in this Æthereal Medium than in any Fluid, which fills all Space adequately without leaving any Pores, and by consequence is much denser than Quick-silver or Gold? And may not its resistance be so small, as to be inconsiderable? For instance; If this *Æther* (for so I will call it) should be supposed 700000 times more elastick than our Air, and above 700000 times more rare; its resistance would be above 600,000,000 times less than that of Water. And so small a resistance would scarce make any sensible alteration in the Motions of the Planets in ten thousand Years. If any one would ask how a Medium can be so rare, let him tell me how the Air, in the upper parts of the Atmosphere, can be above an hundred thousand thousand times rarer than Gold. Let him also tell me, how an electrick Body can by Friction emit an Exhalation so rare and subtile, and yet so potent, as by its Emission to cause no sensible Diminution of the weight of the electrick Body, and to be expanded through a Sphere, whose Diameter is above two Feet, and yet to be able to agitate and carry up Leaf Copper, or Leaf Gold, at the distance of above a Foot from the electrick Body? And how the Effluvia of a Magnet can be so rare and subtile, as to pass through a Plate of Glass without any Resistance or Diminution of their Force, and yet so potent as to turn a magnetick Needle beyond the Glass?

Qu. 23. Is not Vision perform'd chiefly by the Vibrations of this Medium, excited in the bottom of the Eye by the Rays of Light, and propagated through the solid, pellucid and uniform Capillamenta of the optick Nerves into the place of Sensation? And is not Hearing perform'd by the Vibrations either of this or some other Medium, excited in the auditory Nerves by the Tremors of the Air, and propagated through the solid, pellucid and uniform Capillamenta of those Nerves into the place of Sensation? And so of the other Senses.

Qu. 24. Is not Animal Motion perform'd by the Vibrations of this Medium, excited in the Brain by the power of the Will, and propagated from thence through the solid, pellucid and uniform Capillamenta of the Nerves into the Muscles, for contracting and dilating them? I suppose that the Capillamenta of the Nerves are each of them solid and uniform, that the

vibrating Motion of the Æthereal Medium may be propagated along them from one end to the other uniformly, and without interruption: For Obstructions in the Nerves create Palsies. And that they may be sufficiently uniform, I suppose them to be pellucid when view'd singly, tho' the Reflexions in their cylindrical Surfaces may make the whole Nerve (composed of many Capillamenta) appear opake and white. For opacity arises from reflecting Surfaces, such as may disturb and interrupt the Motions of this Medium.

See the following Scheme, .

Qu. 25. Are there not other original Properties of the Rays of Light, besides those already described? An instance of another original Property we have in the Refraction of Island Crystal, described first by *Erasmus Bartholine*, and afterwards more exactly by *Hugenius*, in his Book *De la Lumiere*. This Crystal is a pellucid fissile Stone, clear as Water or Crystal of the Rock, and without Colour; enduring a red Heat without losing its transparency, and in a very strong Heat calcining without Fusion. Steep'd a Day or two in Water, it loses its natural Polish. Being rubb'd on Cloth, it attracts pieces of Straws and other light things, like Ambar or Glass; and with *Aqua fortis* it makes an Ebullition. It seems to be a sort of Talk, and is found in form of an oblique Parallelopiped, with six parallelogram Sides and eight solid Angles. The obtuse Angles of the Parallelograms are each of them 101 Degrees and 52 Minutes; the acute ones 78 Degrees and 8 Minutes. Two of the solid Angles opposite to one another, as C and E, are compassed each of them with three of these obtuse Angles, and each of the other six with one obtuse and two acute ones. It cleaves easily in planes parallel to any of its Sides, and not in any other Planes. It cleaves with a glossy polite Surface not perfectly plane, but with some little unevenness. It is easily scratch'd, and by reason of its softness it takes a Polish very difficultly. It polishes better upon polish'd Looking-glass than upon Metal, and perhaps better upon Pitch, Leather or Parchment. Afterwards it must be rubb'd with a little Oil or white of an Egg, to fill up its Scratches; whereby it will become very transparent and polite. But for several Experiments, it is not necessary to polish it. If a piece of this crystalline Stone be laid upon a Book, every Letter of the Book seen through it will appear double, by means of a double Refraction. And if any beam of Light falls either perpendicularly, or in any oblique Angle upon any Surface of this Crystal, it

becomes divided into two beams by means of the same double Refraction. Which beams are of the same Colour with the incident beam of Light, and seem equal to one another in the quantity of their Light, or very nearly equal. One of these Refractions is perform'd by the usual Rule of Opticks, the Sine of Incidence out of Air into this Crystal being to the Sine of Refraction, as five to three. The other Refraction, which may be called the unusual Refraction, is perform'd by the following Rule.

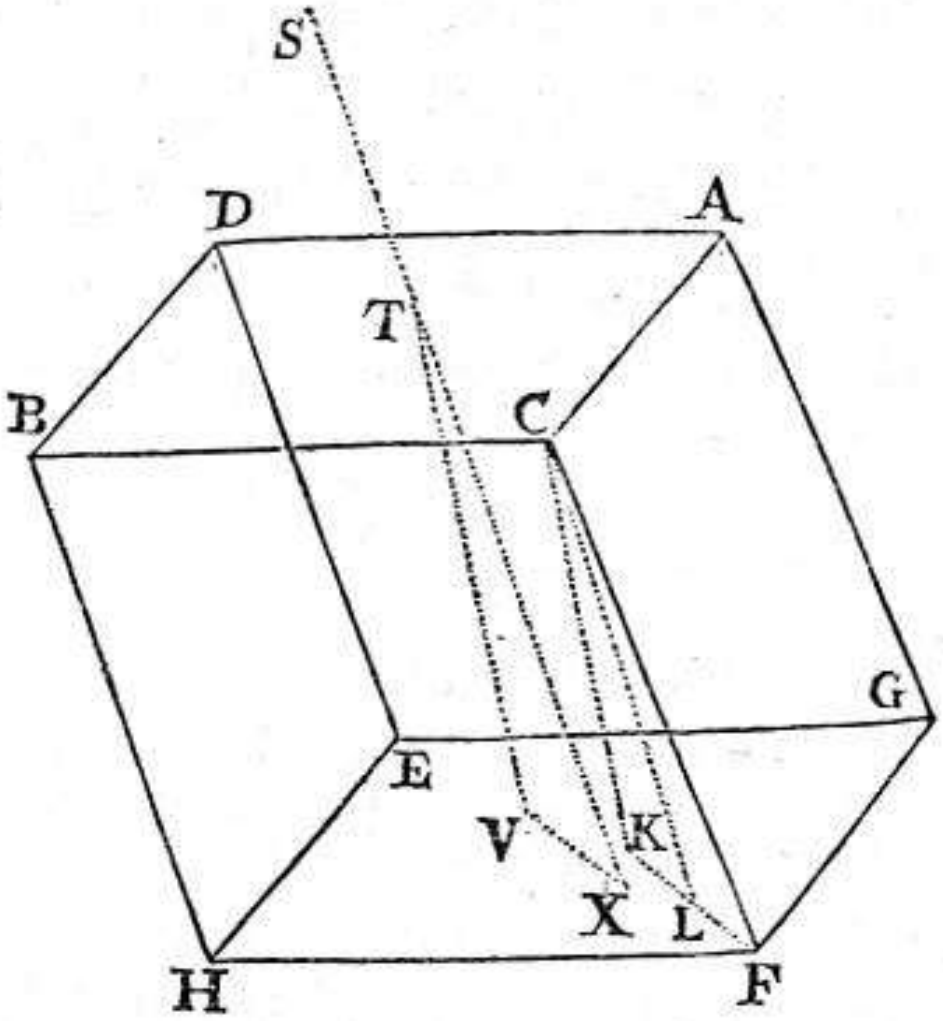


Fig. 4.

Let ADBC represent the refracting Surface of the Crystal, C the biggest solid Angle at that Surface, GEHF the opposite Surface, and CK a perpendicular on that Surface. This perpendicular makes with the edge of the Crystal CF, an Angle of 19 Degr. 3'. Join KF, and in it take KL, so that the Angle KCL be 6 Degr. 40'. and the Angle LCF 12 Degr. 23'. And if ST

represent any beam of Light incident at T in any Angle upon the refracting Surface ADBC, let TV be the refracted beam determin'd by the given Portion of the Sines 5 to 3, according to the usual Rule of Opticks. Draw VX parallel and equal to KL. Draw it the same way from V in which L lieth from K; and joining TX, this line TX shall be the other refracted beam carried from T to X, by the unusual Refraction.

If therefore the incident beam ST be perpendicular to the refracting Surface, the two beams TV and TX, into which it shall become divided, shall be parallel to the lines CK and CL; one of those beams going through the Crystal perpendicularly, as it ought to do by the usual Laws of Opticks, and the other TX by an unusual Refraction diverging from the perpendicular, and making with it an Angle VTX of about 6-2/3 Degrees, as is found by Experience. And hence, the Plane VTX, and such like Planes which are parallel to the Plane CFK, may be called the Planes of perpendicular Refraction. And the Coast towards which the lines KL and VX are drawn, may be call'd the Coast of unusual Refraction.

In like manner Crystal of the Rock has a double Refraction: But the difference of the two Refractions is not so great and manifest as in Island Crystal.

When the beam ST incident on Island Crystal is divided into two beams TV and TX, and these two beams arrive at the farther Surface of the Glass; the beam TV, which was refracted at the first Surface after the usual manner, shall be again refracted entirely after the usual manner at the second Surface; and the beam TX, which was refracted after the unusual manner in the first Surface, shall be again refracted entirely after the unusual manner in the second Surface; so that both these beams shall emerge out of the second Surface in lines parallel to the first incident beam ST.

And if two pieces of Island Crystal be placed one after another, in such manner that all the Surfaces of the latter be parallel to all the corresponding Surfaces of the former: The Rays which are refracted after the usual manner in the first Surface of the first Crystal, shall be refracted after the usual manner in all the following Surfaces; and the Rays which are refracted after the unusual manner in the first Surface, shall be refracted after the unusual manner in all the following Surfaces. And the same thing happens, though

the Surfaces of the Crystals be any ways inclined to one another, provided that their Planes of perpendicular Refraction be parallel to one another.

And therefore there is an original difference in the Rays of Light, by means of which some Rays are in this Experiment constantly refracted after the usual manner, and others constantly after the unusual manner: For if the difference be not original, but arises from new Modifications impress'd on the Rays at their first Refraction, it would be alter'd by new Modifications in the three following Refractions; whereas it suffers no alteration, but is constant, and has the same effect upon the Rays in all the Refractions. The unusual Refraction is therefore perform'd by an original property of the Rays. And it remains to be enquired, whether the Rays have not more original Properties than are yet discover'd.

Qu. 26. Have not the Rays of Light several sides, endued with several original Properties? For if the Planes of perpendicular Refraction of the second Crystal be at right Angles with the Planes of perpendicular Refraction of the first Crystal, the Rays which are refracted after the usual manner in passing through the first Crystal, will be all of them refracted after the unusual manner in passing through the second Crystal; and the Rays which are refracted after the unusual manner in passing through the first Crystal, will be all of them refracted after the usual manner in passing through the second Crystal. And therefore there are not two sorts of Rays differing in their nature from one another, one of which is constantly and in all Positions refracted after the usual manner, and the other constantly and in all Positions after the unusual manner. The difference between the two sorts of Rays in the Experiment mention'd in the 25th Question, was only in the Positions of the Sides of the Rays to the Planes of perpendicular Refraction. For one and the same Ray is here refracted sometimes after the usual, and sometimes after the unusual manner, according to the Position which its Sides have to the Crystals. If the Sides of the Ray are posited the same way to both Crystals, it is refracted after the same manner in them both: But if that side of the Ray which looks towards the Coast of the unusual Refraction of the first Crystal, be 90 Degrees from that side of the same Ray which looks toward the Coast of the unusual Refraction of the second Crystal, (which may be effected by varying the Position of the second Crystal to the first, and by consequence to the Rays of Light,) the Ray shall be refracted after several manners in the several Crystals. There is

nothing more required to determine whether the Rays of Light which fall upon the second Crystal shall be refracted after the usual or after the unusual manner, but to turn about this Crystal, so that the Coast of this Crystal's unusual Refraction may be on this or on that side of the Ray. And therefore every Ray may be consider'd as having four Sides or Quarters, two of which opposite to one another incline the Ray to be refracted after the unusual manner, as often as either of them are turn'd towards the Coast of unusual Refraction; and the other two, whenever either of them are turn'd towards the Coast of unusual Refraction, do not incline it to be otherwise refracted than after the usual manner. The two first may therefore be call'd the Sides of unusual Refraction. And since these Dispositions were in the Rays before their Incidence on the second, third, and fourth Surfaces of the two Crystals, and suffered no alteration (so far as appears,) by the Refraction of the Rays in their passage through those Surfaces, and the Rays were refracted by the same Laws in all the four Surfaces; it appears that those Dispositions were in the Rays originally, and suffer'd no alteration by the first Refraction, and that by means of those Dispositions the Rays were refracted at their Incidence on the first Surface of the first Crystal, some of them after the usual, and some of them after the unusual manner, accordingly as their Sides of unusual Refraction were then turn'd towards the Coast of the unusual Refraction of that Crystal, or sideways from it.

Every Ray of Light has therefore two opposite Sides, originally endued with a Property on which the unusual Refraction depends, and the other two opposite Sides not endued with that Property. And it remains to be enquired, whether there are not more Properties of Light by which the Sides of the Rays differ, and are distinguished from one another.

In explaining the difference of the Sides of the Rays above mention'd, I have supposed that the Rays fall perpendicularly on the first Crystal. But if they fall obliquely on it, the Success is the same. Those Rays which are refracted after the usual manner in the first Crystal, will be refracted after the unusual manner in the second Crystal, supposing the Planes of perpendicular Refraction to be at right Angles with one another, as above; and on the contrary.

If the Planes of the perpendicular Refraction of the two Crystals be neither parallel nor perpendicular to one another, but contain an acute

Angle: The two beams of Light which emerge out of the first Crystal, will be each of them divided into two more at their Incidence on the second Crystal. For in this case the Rays in each of the two beams will some of them have their Sides of unusual Refraction, and some of them their other Sides turn'd towards the Coast of the unusual Refraction of the second Crystal.

Qu. 27. Are not all Hypotheses erroneous which have hitherto been invented for explaining the Phænomena of Light, by new Modifications of the Rays? For those Phænomena depend not upon new Modifications, as has been supposed, but upon the original and unchangeable Properties of the Rays.

Qu. 28. Are not all Hypotheses erroneous, in which Light is supposed to consist in Pression or Motion, propagated through a fluid Medium? For in all these Hypotheses the Phænomena of Light have been hitherto explain'd by supposing that they arise from new Modifications of the Rays; which is an erroneous Supposition.

If Light consisted only in Pression propagated without actual Motion, it would not be able to agitate and heat the Bodies which refract and reflect it. If it consisted in Motion propagated to all distances in an instant, it would require an infinite force every moment, in every shining Particle, to generate that Motion. And if it consisted in Pression or Motion, propagated either in an instant or in time, it would bend into the Shadow. For Pression or Motion cannot be propagated in a Fluid in right Lines, beyond an Obstacle which stops part of the Motion, but will bend and spread every way into the quiescent Medium which lies beyond the Obstacle. Gravity tends downwards, but the Pressure of Water arising from Gravity tends every way with equal Force, and is propagated as readily, and with as much force sideways as downwards, and through crooked passages as through strait ones. The Waves on the Surface of stagnating Water, passing by the sides of a broad Obstacle which stops part of them, bend afterwards and dilate themselves gradually into the quiet Water behind the Obstacle. The Waves, Pulses or Vibrations of the Air, wherein Sounds consist, bend manifestly, though not so much as the Waves of Water. For a Bell or a Cannon may be heard beyond a Hill which intercepts the sight of the sounding Body, and Sounds are propagated as readily through crooked Pipes as through streight ones. But Light is never known to follow crooked

Passages nor to bend into the Shadow. For the fix'd Stars by the Interposition of any of the Planets cease to be seen. And so do the Parts of the Sun by the Interposition of the Moon, *Mercury* or *Venus*. The Rays which pass very near to the edges of any Body, are bent a little by the action of the Body, as we shew'd above; but this bending is not towards but from the Shadow, and is perform'd only in the passage of the Ray by the Body, and at a very small distance from it. So soon as the Ray is past the Body, it goes right on.

Mais pour dire comment cela se fait, je n'ay rien trove jusqu' ici qui me satisfasse. C. H. de la lumiere, c. 5, .

To explain the unusual Refraction of Island Crystal by Pression or Motion propagated, has not hitherto been attempted (to my knowledge) except by *Huygens*, who for that end supposed two several vibrating Mediums within that Crystal. But when he tried the Refractions in two successive pieces of that Crystal, and found them such as is mention'd above; he confessed himself at a loss for explaining them. For Pressions or Motions, propagated from a shining Body through an uniform Medium, must be on all sides alike; whereas by those Experiments it appears, that the Rays of Light have different Properties in their different Sides. He suspected that the Pulses of *Æther* in passing through the first Crystal might receive certain new Modifications, which might determine them to be propagated in this or that Medium within the second Crystal, according to the Position of that Crystal. But what Modifications those might be he could not say, nor think of any thing satisfactory in that Point. And if he had known that the unusual Refraction depends not on new Modifications, but on the original and unchangeable Dispositions of the Rays, he would have found it as difficult to explain how those Dispositions which he supposed to be impress'd on the Rays by the first Crystal, could be in them before their Incidence on that Crystal, and in general, how all Rays emitted by shining Bodies, can have those Dispositions in them from the beginning. To me, at least, this seems inexplicable, if Light be nothing else than Pression or Motion propagated through *Æther*.

And it is as difficult to explain by these Hypotheses, how Rays can be alternately in Fits of easy Reflexion and easy Transmission; unless perhaps one might suppose that there are in all Space two Æthereal vibrating Mediums, and that the Vibrations of one of them constitute Light, and the

Vibrations of the other are swifter, and as often as they overtake the Vibrations of the first, put them into those Fits. But how two *Æthers* can be diffused through all Space, one of which acts upon the other, and by consequence is re-acted upon, without retarding, shattering, dispersing and confounding one anothers Motions, is inconceivable. And against filling the Heavens with fluid Mediums, unless they be exceeding rare, a great Objection arises from the regular and very lasting Motions of the Planets and Comets in all manner of Courses through the Heavens. For thence it is manifest, that the Heavens are void of all sensible Resistance, and by consequence of all sensible Matter.

For the resisting Power of fluid Mediums arises partly from the Attrition of the Parts of the Medium, and partly from the *Vis inertiæ* of the Matter. That part of the Resistance of a spherical Body which arises from the Attrition of the Parts of the Medium is very nearly as the Diameter, or, at the most, as the *Factum* of the Diameter, and the Velocity of the spherical Body together. And that part of the Resistance which arises from the *Vis inertiæ* of the Matter, is as the Square of that *Factum*. And by this difference the two sorts of Resistance may be distinguish'd from one another in any Medium; and these being distinguish'd, it will be found that almost all the Resistance of Bodies of a competent Magnitude moving in Air, Water, Quick-silver, and such like Fluids with a competent Velocity, arises from the *Vis inertiæ* of the Parts of the Fluid.

Now that part of the resisting Power of any Medium which arises from the Tenacity, Friction or Attrition of the Parts of the Medium, may be diminish'd by dividing the Matter into smaller Parts, and making the Parts more smooth and slippery: But that part of the Resistance which arises from the *Vis inertiæ*, is proportional to the Density of the Matter, and cannot be diminish'd by dividing the Matter into smaller Parts, nor by any other means than by decreasing the Density of the Medium. And for these Reasons the Density of fluid Mediums is very nearly proportional to their Resistance. Liquors which differ not much in Density, as Water, Spirit of Wine, Spirit of Turpentine, hot Oil, differ not much in Resistance. Water is thirteen or fourteen times lighter than Quick-silver and by consequence thirteen or fourteen times rarer, and its Resistance is less than that of Quick-silver in the same Proportion, or thereabouts, as I have found by Experiments made with Pendulums. The open Air in which we breathe is

eight or nine hundred times lighter than Water, and by consequence eight or nine hundred times rarer, and accordingly its Resistance is less than that of Water in the same Proportion, or thereabouts; as I have also found by Experiments made with Pendulums. And in thinner Air the Resistance is still less, and at length, by ratifying the Air, becomes insensible. For small Feathers falling in the open Air meet with great Resistance, but in a tall Glass well emptied of Air, they fall as fast as Lead or Gold, as I have seen tried several times. Whence the Resistance seems still to decrease in proportion to the Density of the Fluid. For I do not find by any Experiments, that Bodies moving in Quick-silver, Water or Air, meet with any other sensible Resistance than what arises from the Density and Tenacity of those sensible Fluids, as they would do if the Pores of those Fluids, and all other Spaces, were filled with a dense and subtile Fluid. Now if the Resistance in a Vessel well emptied of Air, was but an hundred times less than in the open Air, it would be about a million of times less than in Quick-silver. But it seems to be much less in such a Vessel, and still much less in the Heavens, at the height of three or four hundred Miles from the Earth, or above. For Mr. *Boyle* has shew'd that Air may be rarified above ten thousand times in Vessels of Glass; and the Heavens are much emptier of Air than any *Vacuum* we can make below. For since the Air is compress'd by the Weight of the incumbent Atmosphere, and the Density of Air is proportional to the Force compressing it, it follows by Computation, that at the height of about seven and a half *English* Miles from the Earth, the Air is four times rarer than at the Surface of the Earth; and at the height of 15 Miles it is sixteen times rarer than that at the Surface of the Earth; and at the height of 22-1/2, 30, or 38 Miles, it is respectively 64, 256, or 1024 times rarer, or thereabouts; and at the height of 76, 152, 228 Miles, it is about 1000000, 1000000000000, or 1000000000000000000 times rarer; and so on.

Heat promotes Fluidity very much by diminishing the Tenacity of Bodies. It makes many Bodies fluid which are not fluid in cold, and increases the Fluidity of tenacious Liquids, as of Oil, Balsam, and Honey, and thereby decreases their Resistance. But it decreases not the Resistance of Water considerably, as it would do if any considerable part of the Resistance of Water arose from the Attrition or Tenacity of its Parts. And therefore the Resistance of Water arises principally and almost entirely from

the *Vis inertiæ* of its Matter; and by consequence, if the Heavens were as dense as Water, they would not have much less Resistance than Water; if as dense as Quick-silver, they would not have much less Resistance than Quick-silver; if absolutely dense, or full of Matter without any *Vacuum*, let the Matter be never so subtil and fluid, they would have a greater Resistance than Quick-silver. A solid Globe in such a Medium would lose above half its Motion in moving three times the length of its Diameter, and a Globe not solid (such as are the Planets,) would be retarded sooner. And therefore to make way for the regular and lasting Motions of the Planets and Comets, it's necessary to empty the Heavens of all Matter, except perhaps some very thin Vapours, Steams, or Effluvia, arising from the Atmospheres of the Earth, Planets, and Comets, and from such an exceedingly rare Æthereal Medium as we described above. A dense Fluid can be of no use for explaining the Phænomena of Nature, the Motions of the Planets and Comets being better explain'd without it. It serves only to disturb and retard the Motions of those great Bodies, and make the Frame of Nature languish: And in the Pores of Bodies, it serves only to stop the vibrating Motions of their Parts, wherein their Heat and Activity consists. And as it is of no use, and hinders the Operations of Nature, and makes her languish, so there is no evidence for its Existence, and therefore it ought to be rejected. And if it be rejected, the Hypotheses that Light consists in Pression or Motion, propagated through such a Medium, are rejected with it.

And for rejecting such a Medium, we have the Authority of those the oldest and most celebrated Philosophers of *Greece* and *Phœnicia*, who made a *Vacuum*, and Atoms, and the Gravity of Atoms, the first Principles of their Philosophy; tacitly attributing Gravity to some other Cause than dense Matter. Later Philosophers banish the Consideration of such a Cause out of natural Philosophy, feigning Hypotheses for explaining all things mechanically, and referring other Causes to Metaphysicks: Whereas the main Business of natural Philosophy is to argue from Phænomena without feigning Hypotheses, and to deduce Causes from Effects, till we come to the very first Cause, which certainly is not mechanical; and not only to unfold the Mechanism of the World, but chiefly to resolve these and such like Questions. What is there in places almost empty of Matter, and whence is it that the Sun and Planets gravitate towards one another, without dense Matter between them? Whence is it that Nature doth nothing in vain; and

whence arises all that Order and Beauty which we see in the World? To what end are Comets, and whence is it that Planets move all one and the same way in Orbs concentrick, while Comets move all manner of ways in Orbs very excentrick; and what hinders the fix'd Stars from falling upon one another? How came the Bodies of Animals to be contrived with so much Art, and for what ends were their several Parts? Was the Eye contrived without Skill in Opticks, and the Ear without Knowledge of Sounds? How do the Motions of the Body follow from the Will, and whence is the Instinct in Animals? Is not the Sensory of Animals that place to which the sensitive Substance is present, and into which the sensible Species of Things are carried through the Nerves and Brain, that there they may be perceived by their immediate presence to that Substance? And these things being rightly dispatch'd, does it not appear from Phænomena that there is a Being incorporeal, living, intelligent, omnipresent, who in infinite Space, as it were in his Sensory, sees the things themselves intimately, and throughly perceives them, and comprehends them wholly by their immediate presence to himself: Of which things the Images only carried through the Organs of Sense into our little Sensoriums, are there seen and beheld by that which in us perceives and thinks. And though every true Step made in this Philosophy brings us not immediately to the Knowledge of the first Cause, yet it brings us nearer to it, and on that account is to be highly valued.

Qu. 29. Are not the Rays of Light very small Bodies emitted from shining Substances? For such Bodies will pass through uniform Mediums in right Lines without bending into the Shadow, which is the Nature of the Rays of Light. They will also be capable of several Properties, and be able to conserve their Properties unchanged in passing through several Mediums, which is another Condition of the Rays of Light. Pellucid Substances act upon the Rays of Light at a distance in refracting, reflecting, and inflecting them, and the Rays mutually agitate the Parts of those Substances at a distance for heating them; and this Action and Reaction at a distance very much resembles an attractive Force between Bodies. If Refraction be perform'd by Attraction of the Rays, the Sines of Incidence must be to the Sines of Refraction in a given Proportion, as we shew'd in our Principles of Philosophy: And this Rule is true by Experience. The Rays of Light in going out of Glass into a *Vacuum*, are bent towards the Glass; and if they

fall too obliquely on the *Vacuum*, they are bent backwards into the Glass, and totally reflected; and this Reflexion cannot be ascribed to the Resistance of an absolute *Vacuum*, but must be caused by the Power of the Glass attracting the Rays at their going out of it into the *Vacuum*, and bringing them back. For if the farther Surface of the Glass be moisten'd with Water or clear Oil, or liquid and clear Honey, the Rays which would otherwise be reflected will go into the Water, Oil, or Honey; and therefore are not reflected before they arrive at the farther Surface of the Glass, and begin to go out of it. If they go out of it into the Water, Oil, or Honey, they go on, because the Attraction of the Glass is almost balanced and rendered ineffectual by the contrary Attraction of the Liquor. But if they go out of it into a *Vacuum* which has no Attraction to balance that of the Glass, the Attraction of the Glass either bends and refracts them, or brings them back and reflects them. And this is still more evident by laying together two Prisms of Glass, or two Object-glasses of very long Telescopes, the one plane, the other a little convex, and so compressing them that they do not fully touch, nor are too far asunder. For the Light which falls upon the farther Surface of the first Glass where the Interval between the Glasses is not above the ten hundred thousandth Part of an Inch, will go through that Surface, and through the Air or *Vacuum* between the Glasses, and enter into the second Glass, as was explain'd in the first, fourth, and eighth Observations of the first Part of the second Book. But, if the second Glass be taken away, the Light which goes out of the second Surface of the first Glass into the Air or *Vacuum*, will not go on forwards, but turns back into the first Glass, and is reflected; and therefore it is drawn back by the Power of the first Glass, there being nothing else to turn it back. Nothing more is requisite for producing all the variety of Colours, and degrees of Refrangibility, than that the Rays of Light be Bodies of different Sizes, the least of which may take violet the weakest and darkest of the Colours, and be more easily diverted by refracting Surfaces from the right Course; and the rest as they are bigger and bigger, may make the stronger and more lucid Colours, blue, green, yellow, and red, and be more and more difficultly diverted. Nothing more is requisite for putting the Rays of Light into Fits of easy Reflexion and easy Transmission, than that they be small Bodies which by their attractive Powers, or some other Force, stir up Vibrations in what they act upon, which Vibrations being swifter than the

Rays, overtake them successively, and agitate them so as by turns to increase and decrease their Velocities, and thereby put them into those Fits. And lastly, the unusual Refraction of Island-Crystal looks very much as if it were perform'd by some kind of attractive virtue lodged in certain Sides both of the Rays, and of the Particles of the Crystal. For were it not for some kind of Disposition or Virtue lodged in some Sides of the Particles of the Crystal, and not in their other Sides, and which inclines and bends the Rays towards the Coast of unusual Refraction, the Rays which fall perpendicularly on the Crystal, would not be refracted towards that Coast rather than towards any other Coast, both at their Incidence and at their Emergence, so as to emerge perpendicularly by a contrary Situation of the Coast of unusual Refraction at the second Surface; the Crystal acting upon the Rays after they have pass'd through it, and are emerging into the Air; or, if you please, into a *Vacuum*. And since the Crystal by this Disposition or Virtue does not act upon the Rays, unless when one of their Sides of unusual Refraction looks towards that Coast, this argues a Virtue or Disposition in those Sides of the Rays, which answers to, and sympathizes with that Virtue or Disposition of the Crystal, as the Poles of two Magnets answer to one another. And as Magnetism may be intended and remitted, and is found only in the Magnet and in Iron: So this Virtue of refracting the perpendicular Rays is greater in Island-Crystal, less in Crystal of the Rock, and is not yet found in other Bodies. I do not say that this Virtue is magnetical: It seems to be of another kind. I only say, that whatever it be, it's difficult to conceive how the Rays of Light, unless they be Bodies, can have a permanent Virtue in two of their Sides which is not in their other Sides, and this without any regard to their Position to the Space or Medium through which they pass.

What I mean in this Question by a *Vacuum*, and by the Attractions of the Rays of Light towards Glass or Crystal, may be understood by what was said in the 18th, 19th, and 20th Questions.

Quest. 30. Are not gross Bodies and Light convertible into one another, and may not Bodies receive much of their Activity from the Particles of Light which enter their Composition? For all fix'd Bodies being heated emit Light so long as they continue sufficiently hot, and Light mutually stops in Bodies as often as its Rays strike upon their Parts, as we shew'd above. I know no Body less apt to shine than Water; and yet Water by frequent

Distillations changes into fix'd Earth, as Mr. *Boyle* has try'd; and then this Earth being enabled to endure a sufficient Heat, shines by Heat like other Bodies.

The changing of Bodies into Light, and Light into Bodies, is very conformable to the Course of Nature, which seems delighted with Transmutations. Water, which is a very fluid tasteless Salt, she changes by Heat into Vapour, which is a sort of Air, and by Cold into Ice, which is a hard, pellucid, brittle, fusible Stone; and this Stone returns into Water by Heat, and Vapour returns into Water by Cold. Earth by Heat becomes Fire, and by Cold returns into Earth. Dense Bodies by Fermentation rarify into several sorts of Air, and this Air by Fermentation, and sometimes without it, returns into dense Bodies. Mercury appears sometimes in the form of a fluid Metal, sometimes in the form of a hard brittle Metal, sometimes in the form of a corrosive pellucid Salt call'd Sublimate, sometimes in the form of a tasteless, pellucid, volatile white Earth, call'd *Mercurius Dulcis*; or in that of a red opake volatile Earth, call'd Cinnaber; or in that of a red or white Precipitate, or in that of a fluid Salt; and in Distillation it turns into Vapour, and being agitated *in Vacuo*, it shines like Fire. And after all these Changes it returns again into its first form of Mercury. Eggs grow from insensible Magnitudes, and change into Animals; Tadpoles into Frogs; and Worms into Flies. All Birds, Beasts and Fishes, Insects, Trees, and other Vegetables, with their several Parts, grow out of Water and watry Tinctures and Salts, and by Putrefaction return again into watry Substances. And Water standing a few Days in the open Air, yields a Tincture, which (like that of Malt) by standing longer yields a Sediment and a Spirit, but before Putrefaction is fit Nourishment for Animals and Vegetables. And among such various and strange Transmutations, why may not Nature change Bodies into Light, and Light into Bodies?

Quest. 31. Have not the small Particles of Bodies certain Powers, Virtues, or Forces, by which they act at a distance, not only upon the Rays of Light for reflecting, refracting, and inflecting them, but also upon one another for producing a great Part of the Phænomena of Nature? For it's well known, that Bodies act one upon another by the Attractions of Gravity, Magnetism, and Electricity; and these Instances shew the Tenor and Course of Nature, and make it not improbable but that there may be more attractive Powers than these. For Nature is very consonant and conformable to her

self. How these Attractions may be perform'd, I do not here consider. What I call Attraction may be perform'd by impulse, or by some other means unknown to me. I use that Word here to signify only in general any Force by which Bodies tend towards one another, whatsoever be the Cause. For we must learn from the Phænomena of Nature what Bodies attract one another, and what are the Laws and Properties of the Attraction, before we enquire the Cause by which the Attraction is perform'd. The Attractions of Gravity, Magnetism, and Electricity, reach to very sensible distances, and so have been observed by vulgar Eyes, and there may be others which reach to so small distances as hitherto escape Observation; and perhaps electrical Attraction may reach to such small distances, even without being excited by Friction.

For when Salt of Tartar runs *per Deliquium*, is not this done by an Attraction between the Particles of the Salt of Tartar, and the Particles of the Water which float in the Air in the form of Vapours? And why does not common Salt, or Salt-petre, or Vitriol, run *per Deliquium*, but for want of such an Attraction? Or why does not Salt of Tartar draw more Water out of the Air than in a certain Proportion to its quantity, but for want of an attractive Force after it is satiated with Water? And whence is it but from this attractive Power that Water which alone distils with a gentle luke-warm Heat, will not distil from Salt of Tartar without a great Heat? And is it not from the like attractive Power between the Particles of Oil of Vitriol and the Particles of Water, that Oil of Vitriol draws to it a good quantity of Water out of the Air, and after it is satiated draws no more, and in Distillation lets go the Water very difficultly? And when Water and Oil of Vitriol poured successively into the same Vessel grow very hot in the mixing, does not this Heat argue a great Motion in the Parts of the Liquors? And does not this Motion argue, that the Parts of the two Liquors in mixing coalesce with Violence, and by consequence rush towards one another with an accelerated Motion? And when *Aqua fortis*, or Spirit of Vitriol poured upon Filings of Iron dissolves the Filings with a great Heat and Ebullition, is not this Heat and Ebullition effected by a violent Motion of the Parts, and does not that Motion argue that the acid Parts of the Liquor rush towards the Parts of the Metal with violence, and run forcibly into its Pores till they get between its outmost Particles, and the main Mass of the Metal, and surrounding those Particles loosen them from the main Mass, and set them at liberty to float

off into the Water? And when the acid Particles, which alone would distil with an easy Heat, will not separate from the Particles of the Metal without a very violent Heat, does not this confirm the Attraction between them?

When Spirit of Vitriol poured upon common Salt or Salt-petre makes an Ebullition with the Salt, and unites with it, and in Distillation the Spirit of the common Salt or Salt-petre comes over much easier than it would do before, and the acid part of the Spirit of Vitriol stays behind; does not this argue that the fix'd Alcaly of the Salt attracts the acid Spirit of the Vitriol more strongly than its own Spirit, and not being able to hold them both, lets go its own? And when Oil of Vitriol is drawn off from its weight of Nitre, and from both the Ingredients a compound Spirit of Nitre is distilled, and two parts of this Spirit are poured on one part of Oil of Cloves or Carraway Seeds, or of any ponderous Oil of vegetable or animal Substances, or Oil of Turpentine thicken'd with a little Balsam of Sulphur, and the Liquors grow so very hot in mixing, as presently to send up a burning Flame; does not this very great and sudden Heat argue that the two Liquors mix with violence, and that their Parts in mixing run towards one another with an accelerated Motion, and clash with the greatest Force? And is it not for the same reason that well rectified Spirit of Wine poured on the same compound Spirit flashes; and that the *Pulvis fulminans*, composed of Sulphur, Nitre, and Salt of Tartar, goes off with a more sudden and violent Explosion than Gun-powder, the acid Spirits of the Sulphur and Nitre rushing towards one another, and towards the Salt of Tartar, with so great a violence, as by the shock to turn the whole at once into Vapour and Flame? Where the Dissolution is slow, it makes a slow Ebullition and a gentle Heat; and where it is quicker, it makes a greater Ebullition with more heat; and where it is done at once, the Ebullition is contracted into a sudden Blast or violent Explosion, with a heat equal to that of Fire and Flame. So when a Drachm of the above-mention'd compound Spirit of Nitre was poured upon half a Drachm of Oil of Carraway Seeds *in vacuo*, the Mixture immediately made a flash like Gun-powder, and burst the exhausted Receiver, which was a Glass six Inches wide, and eight Inches deep. And even the gross Body of Sulphur powder'd, and with an equal weight of Iron Filings and a little Water made into Paste, acts upon the Iron, and in five or six hours grows too hot to be touch'd, and emits a Flame. And by these Experiments compared with the great quantity of Sulphur with which the Earth abounds,

and the warmth of the interior Parts of the Earth, and hot Springs, and burning Mountains, and with Damps, mineral Coruscations, Earthquakes, hot suffocating Exhalations, Hurricanes, and Spouts; we may learn that sulphureous Steams abound in the Bowels of the Earth and ferment with Minerals, and sometimes take fire with a sudden Coruscation and Explosion; and if pent up in subterraneous Caverns, burst the Caverns with a great shaking of the Earth, as in springing of a Mine. And then the Vapour generated by the Explosion, expiring through the Pores of the Earth, feels hot and suffocates, and makes Tempests and Hurricanes, and sometimes causes the Land to slide, or the Sea to boil, and carries up the Water thereof in Drops, which by their weight fall down again in Spouts. Also some sulphureous Steams, at all times when the Earth is dry, ascending into the Air, ferment there with nitrous Acids, and sometimes taking fire cause Lightning and Thunder, and fiery Meteors. For the Air abounds with acid Vapours fit to promote Fermentations, as appears by the rusting of Iron and Copper in it, the kindling of Fire by blowing, and the beating of the Heart by means of Respiration. Now the above-mention'd Motions are so great and violent as to shew that in Fermentations the Particles of Bodies which almost rest, are put into new Motions by a very potent Principle, which acts upon them only when they approach one another, and causes them to meet and clash with great violence, and grow hot with the motion, and dash one another into pieces, and vanish into Air, and Vapour, and Flame.

When Salt of Tartar *per deliquium*, being poured into the Solution of any Metal, precipitates the Metal and makes it fall down to the bottom of the Liquor in the form of Mud: Does not this argue that the acid Particles are attracted more strongly by the Salt of Tartar than by the Metal, and by the stronger Attraction go from the Metal to the Salt of Tartar? And so when a Solution of Iron in *Aqua fortis* dissolves the *Lapis Calaminaris*, and lets go the Iron, or a Solution of Copper dissolves Iron immersed in it and lets go the Copper, or a Solution of Silver dissolves Copper and lets go the Silver, or a Solution of Mercury in *Aqua fortis* being poured upon Iron, Copper, Tin, or Lead, dissolves the Metal and lets go the Mercury; does not this argue that the acid Particles of the *Aqua fortis* are attracted more strongly by the *Lapis Calaminaris* than by Iron, and more strongly by Iron than by Copper, and more strongly by Copper than by Silver, and more strongly by Iron, Copper, Tin, and Lead, than by Mercury? And is it not for the same

reason that Iron requires more *Aqua fortis* to dissolve it than Copper, and Copper more than the other Metals; and that of all Metals, Iron is dissolved most easily, and is most apt to rust; and next after Iron, Copper?

When Oil of Vitriol is mix'd with a little Water, or is run *per deliquium*, and in Distillation the Water ascends difficultly, and brings over with it some part of the Oil of Vitriol in the form of Spirit of Vitriol, and this Spirit being poured upon Iron, Copper, or Salt of Tartar, unites with the Body and lets go the Water; doth not this shew that the acid Spirit is attracted by the Water, and more attracted by the fix'd Body than by the Water, and therefore lets go the Water to close with the fix'd Body? And is it not for the same reason that the Water and acid Spirits which are mix'd together in Vinegar, *Aqua fortis*, and Spirit of Salt, cohere and rise together in Distillation; but if the *Menstruum* be poured on Salt of Tartar, or on Lead, or Iron, or any fix'd Body which it can dissolve, the Acid by a stronger Attraction adheres to the Body, and lets go the Water? And is it not also from a mutual Attraction that the Spirits of Soot and Sea-Salt unite and compose the Particles of Sal-armoniac, which are less volatile than before, because grosser and freer from Water; and that the Particles of Sal-armoniac in Sublimation carry up the Particles of Antimony, which will not sublime alone; and that the Particles of Mercury uniting with the acid Particles of Spirit of Salt compose Mercury sublimate, and with the Particles of Sulphur, compose Cinnaber; and that the Particles of Spirit of Wine and Spirit of Urine well rectified unite, and letting go the Water which dissolved them, compose a consistent Body; and that in subliming Cinnaber from Salt of Tartar, or from quick Lime, the Sulphur by a stronger Attraction of the Salt or Lime lets go the Mercury, and stays with the fix'd Body; and that when Mercury sublimate is sublimed from Antimony, or from Regulus of Antimony, the Spirit of Salt lets go the Mercury, and unites with the antimonial metal which attracts it more strongly, and stays with it till the Heat be great enough to make them both ascend together, and then carries up the Metal with it in the form of a very fusible Salt, called Butter of Antimony, although the Spirit of Salt alone be almost as volatile as Water, and the Antimony alone as fix'd as Lead?

When *Aqua fortis* dissolves Silver and not Gold, and *Aqua regia* dissolves Gold and not Silver, may it not be said that *Aqua fortis* is subtil enough to penetrate Gold as well as Silver, but wants the attractive Force to

give it Entrance; and that *Aqua regia* is subtil enough to penetrate Silver as well as Gold, but wants the attractive Force to give it Entrance? For *Aqua regia* is nothing else than *Aqua fortis* mix'd with some Spirit of Salt, or with Sal-armoniac; and even common Salt dissolved in *Aqua fortis*, enables the *Menstruum* to dissolve Gold, though the Salt be a gross Body. When therefore Spirit of Salt precipitates Silver out of *Aqua fortis*, is it not done by attracting and mixing with the *Aqua fortis*, and not attracting, or perhaps repelling Silver? And when Water precipitates Antimony out of the Sublimate of Antimony and Sal-armoniac, or out of Butter of Antimony, is it not done by its dissolving, mixing with, and weakening the Sal-armoniac or Spirit of Salt, and its not attracting, or perhaps repelling the Antimony? And is it not for want of an attractive virtue between the Parts of Water and Oil, of Quick-silver and Antimony, of Lead and Iron, that these Substances do not mix; and by a weak Attraction, that Quick-silver and Copper mix difficultly; and from a strong one, that Quick-silver and Tin, Antimony and Iron, Water and Salts, mix readily? And in general, is it not from the same Principle that Heat congregates homogeneal Bodies, and separates heterogeneal ones?

When Arsenick with Soap gives a Regulus, and with Mercury sublimate a volatile fusible Salt, like Butter of Antimony, doth not this shew that Arsenick, which is a Substance totally volatile, is compounded of fix'd and volatile Parts, strongly cohering by a mutual Attraction, so that the volatile will not ascend without carrying up the fixed? And so, when an equal weight of Spirit of Wine and Oil of Vitriol are digested together, and in Distillation yield two fragrant and volatile Spirits which will not mix with one another, and a fix'd black Earth remains behind; doth not this shew that Oil of Vitriol is composed of volatile and fix'd Parts strongly united by Attraction, so as to ascend together in form of a volatile, acid, fluid Salt, until the Spirit of Wine attracts and separates the volatile Parts from the fixed? And therefore, since Oil of Sulphur *per Campanam* is of the same Nature with Oil of Vitriol, may it not be inferred, that Sulphur is also a mixture of volatile and fix'd Parts so strongly cohering by Attraction, as to ascend together in Sublimation. By dissolving Flowers of Sulphur in Oil of Turpentine, and distilling the Solution, it is found that Sulphur is composed of an inflamable thick Oil or fat Bitumen, an acid Salt, a very fix'd Earth, and a little Metal. The three first were found not much unequal to one

another, the fourth in so small a quantity as scarce to be worth considering. The acid Salt dissolved in Water, is the same with Oil of Sulphur *per Campanam*, and abounding much in the Bowels of the Earth, and particularly in Markasites, unites it self to the other Ingredients of the Markasite, which are, Bitumen, Iron, Copper, and Earth, and with them compounds Allum, Vitriol, and Sulphur. With the Earth alone it compounds Allum; with the Metal alone, or Metal and Earth together, it compounds Vitriol; and with the Bitumen and Earth it compounds Sulphur. Whence it comes to pass that Markasites abound with those three Minerals. And is it not from the mutual Attraction of the Ingredients that they stick together for compounding these Minerals, and that the Bitumen carries up the other Ingredients of the Sulphur, which without it would not sublime? And the same Question may be put concerning all, or almost all the gross Bodies in Nature. For all the Parts of Animals and Vegetables are composed of Substances volatile and fix'd, fluid and solid, as appears by their Analysis; and so are Salts and Minerals, so far as Chymists have been hitherto able to examine their Composition.

When Mercury sublimate is re-sublimed with fresh Mercury, and becomes *Mercurius Dulcis*, which is a white tasteless Earth scarce dissolvable in Water, and *Mercurius Dulcis* re-sublimed with Spirit of Salt returns into Mercury sublimate; and when Metals corroded with a little acid turn into rust, which is an Earth tasteless and indissolvable in Water, and this Earth imbibed with more acid becomes a metallick Salt; and when some Stones, as Spar of Lead, dissolved in proper *Menstruums* become Salts; do not these things shew that Salts are dry Earth and watry Acid united by Attraction, and that the Earth will not become a Salt without so much acid as makes it dissolvable in Water? Do not the sharp and pungent Tastes of Acids arise from the strong Attraction whereby the acid Particles rush upon and agitate the Particles of the Tongue? And when Metals are dissolved in acid *Menstruums*, and the Acids in conjunction with the Metal act after a different manner, so that the Compound has a different Taste much milder than before, and sometimes a sweet one; is it not because the Acids adhere to the metallick Particles, and thereby lose much of their Activity? And if the Acid be in too small a Proportion to make the Compound dissolvable in Water, will it not by adhering strongly to the Metal become unactive and lose its Taste, and the Compound be a tasteless

Earth? For such things as are not dissolvable by the Moisture of the Tongue, act not upon the Taste.

As Gravity makes the Sea flow round the denser and weightier Parts of the Globe of the Earth, so the Attraction may make the watry Acid flow round the denser and compacter Particles of Earth for composing the Particles of Salt. For otherwise the Acid would not do the Office of a Medium between the Earth and common Water, for making Salts dissolvable in the Water; nor would Salt of Tartar readily draw off the Acid from dissolved Metals, nor Metals the Acid from Mercury. Now, as in the great Globe of the Earth and Sea, the densest Bodies by their Gravity sink down in Water, and always endeavour to go towards the Center of the Globe; so in Particles of Salt, the densest Matter may always endeavour to approach the Center of the Particle: So that a Particle of Salt may be compared to a Chaos; being dense, hard, dry, and earthy in the Center; and rare, soft, moist, and watry in the Circumference. And hence it seems to be that Salts are of a lasting Nature, being scarce destroy'd, unless by drawing away their watry Parts by violence, or by letting them soak into the Pores of the central Earth by a gentle Heat in Putrefaction, until the Earth be dissolved by the Water, and separated into smaller Particles, which by reason of their Smallness make the rotten Compound appear of a black Colour. Hence also it may be, that the Parts of Animals and Vegetables preserve their several Forms, and assimilate their Nourishment; the soft and moist Nourishment easily changing its Texture by a gentle Heat and Motion, till it becomes like the dense, hard, dry, and durable Earth in the Center of each Particle. But when the Nourishment grows unfit to be assimilated, or the central Earth grows too feeble to assimilate it, the Motion ends in Confusion, Putrefaction, and Death.

If a very small quantity of any Salt or Vitriol be dissolved in a great quantity of Water, the Particles of the Salt or Vitriol will not sink to the bottom, though they be heavier in Specie than the Water, but will evenly diffuse themselves into all the Water, so as to make it as saline at the top as at the bottom. And does not this imply that the Parts of the Salt or Vitriol recede from one another, and endeavour to expand themselves, and get as far asunder as the quantity of Water in which they float, will allow? And does not this Endeavour imply that they have a repulsive Force by which they fly from one another, or at least, that they attract the Water more

strongly than they do one another? For as all things ascend in Water which are less attracted than Water, by the gravitating Power of the Earth; so all the Particles of Salt which float in Water, and are less attracted than Water by any one Particle of Salt, must recede from that Particle, and give way to the more attracted Water.

When any saline Liquor is evaporated to a Cuticle and let cool, the Salt concretes in regular Figures; which argues, that the Particles of the Salt before they concreted, floated in the Liquor at equal distances in rank and file, and by consequence that they acted upon one another by some Power which at equal distances is equal, at unequal distances unequal. For by such a Power they will range themselves uniformly, and without it they will float irregularly, and come together as irregularly. And since the Particles of Island-Crystal act all the same way upon the Rays of Light for causing the unusual Refraction, may it not be supposed that in the Formation of this Crystal, the Particles not only ranged themselves in rank and file for concreting in regular Figures, but also by some kind of polar Virtue turned their homogeneal Sides the same way.

The Parts of all homogeneal hard Bodies which fully touch one another, stick together very strongly. And for explaining how this may be, some have invented hooked Atoms, which is begging the Question; and others tell us that Bodies are glued together by rest, that is, by an occult Quality, or rather by nothing; and others, that they stick together by conspiring Motions, that is, by relative rest amongst themselves. I had rather infer from their Cohesion, that their Particles attract one another by some Force, which in immediate Contact is exceeding strong, at small distances performs the chymical Operations above-mention'd, and reaches not far from the Particles with any sensible Effect.

All Bodies seem to be composed of hard Particles: For otherwise Fluids would not congeal; as Water, Oils, Vinegar, and Spirit or Oil of Vitriol do by freezing; Mercury by Fumes of Lead; Spirit of Nitre and Mercury, by dissolving the Mercury and evaporating the Flegm; Spirit of Wine and Spirit of Urine, by deflegming and mixing them; and Spirit of Urine and Spirit of Salt, by subliming them together to make Sal-armoniac. Even the Rays of Light seem to be hard Bodies; for otherwise they would not retain different Properties in their different Sides. And therefore Hardness may be reckon'd the Property of all uncompounded Matter. At least, this seems to

be as evident as the universal Impenetrability of Matter. For all Bodies, so far as Experience reaches, are either hard, or may be harden'd; and we have no other Evidence of universal Impenetrability, besides a large Experience without an experimental Exception. Now if compound Bodies are so very hard as we find some of them to be, and yet are very porous, and consist of Parts which are only laid together; the simple Particles which are void of Pores, and were never yet divided, must be much harder. For such hard Particles being heaped up together, can scarce touch one another in more than a few Points, and therefore must be separable by much less Force than is requisite to break a solid Particle, whose Parts touch in all the Space between them, without any Pores or Interstices to weaken their Cohesion. And how such very hard Particles which are only laid together and touch only in a few Points, can stick together, and that so firmly as they do, without the assistance of something which causes them to be attracted or press'd towards one another, is very difficult to conceive.

The same thing I infer also from the cohering of two polish'd Marbles *in vacuo*, and from the standing of Quick-silver in the Barometer at the height of 50, 60 or 70 Inches, or above, when ever it is well-purged of Air and carefully poured in, so that its Parts be every where contiguous both to one another and to the Glass. The Atmosphere by its weight presses the Quick-silver into the Glass, to the height of 29 or 30 Inches. And some other Agent raises it higher, not by pressing it into the Glass, but by making its Parts stick to the Glass, and to one another. For upon any discontinuation of Parts, made either by Bubbles or by shaking the Glass, the whole Mercury falls down to the height of 29 or 30 Inches.

And of the same kind with these Experiments are those that follow. If two plane polish'd Plates of Glass (suppose two pieces of a polish'd Looking-glass) be laid together, so that their sides be parallel and at a very small distance from one another, and then their lower edges be dipped into Water, the Water will rise up between them. And the less the distance of the Glasses is, the greater will be the height to which the Water will rise. If the distance be about the hundredth part of an Inch, the Water will rise to the height of about an Inch; and if the distance be greater or less in any Proportion, the height will be reciprocally proportional to the distance very nearly. For the attractive Force of the Glasses is the same, whether the distance between them be greater or less; and the weight of the Water drawn

up is the same, if the height of it be reciprocally proportional to the distance of the Glasses. And in like manner, Water ascends between two Marbles polish'd plane, when their polish'd sides are parallel, and at a very little distance from one another, And if slender Pipes of Glass be dipped at one end into stagnating Water, the Water will rise up within the Pipe, and the height to which it rises will be reciprocally proportional to the Diameter of the Cavity of the Pipe, and will equal the height to which it rises between two Planes of Glass, if the Semi-diameter of the Cavity of the Pipe be equal to the distance between the Planes, or thereabouts. And these Experiments succeed after the same manner *in vacuo* as in the open Air, (as hath been tried before the Royal Society,) and therefore are not influenced by the Weight or Pressure of the Atmosphere.

And if a large Pipe of Glass be filled with sifted Ashes well pressed together in the Glass, and one end of the Pipe be dipped into stagnating Water, the Water will rise up slowly in the Ashes, so as in the space of a Week or Fortnight to reach up within the Glass, to the height of 30 or 40 Inches above the stagnating Water. And the Water rises up to this height by the Action only of those Particles of the Ashes which are upon the Surface of the elevated Water; the Particles which are within the Water, attracting or repelling it as much downwards as upwards. And therefore the Action of the Particles is very strong. But the Particles of the Ashes being not so dense and close together as those of Glass, their Action is not so strong as that of Glass, which keeps Quick-silver suspended to the height of 60 or 70 Inches, and therefore acts with a Force which would keep Water suspended to the height of above 60 Feet.

By the same Principle, a Sponge sucks in Water, and the Glands in the Bodies of Animals, according to their several Natures and Dispositions, suck in various Juices from the Blood.

If two plane polish'd Plates of Glass three or four Inches broad, and twenty or twenty five long, be laid one of them parallel to the Horizon, the other upon the first, so as at one of their ends to touch one another, and contain an Angle of about 10 or 15 Minutes, and the same be first moisten'd on their inward sides with a clean Cloth dipp'd into Oil of Oranges or Spirit of Turpentine, and a Drop or two of the Oil or Spirit be let fall upon the lower Glass at the other; so soon as the upper Glass is laid down upon the lower, so as to touch it at one end as above, and to touch the Drop at the

other end, making with the lower Glass an Angle of about 10 or 15 Minutes; the Drop will begin to move towards the Concourse of the Glasses, and will continue to move with an accelerated Motion, till it arrives at that Concourse of the Glasses. For the two Glasses attract the Drop, and make it run that way towards which the Attractions incline. And if when the Drop is in motion you lift up that end of the Glasses where they meet, and towards which the Drop moves, the Drop will ascend between the Glasses, and therefore is attracted. And as you lift up the Glasses more and more, the Drop will ascend slower and slower, and at length rest, being then carried downward by its Weight, as much as upwards by the Attraction. And by this means you may know the Force by which the Drop is attracted at all distances from the Concourse of the Glasses.

Now by some Experiments of this kind, (made by Mr. *Hauksbee*) it has been found that the Attraction is almost reciprocally in a duplicate Proportion of the distance of the middle of the Drop from the Concourse of the Glasses, *viz.* reciprocally in a simple Proportion, by reason of the spreading of the Drop, and its touching each Glass in a larger Surface; and again reciprocally in a simple Proportion, by reason of the Attractions growing stronger within the same quantity of attracting Surface. The Attraction therefore within the same quantity of attracting Surface, is reciprocally as the distance between the Glasses. And therefore where the distance is exceeding small, the Attraction must be exceeding great. By the Table in the second Part of the second Book, wherein the thicknesses of colour'd Plates of Water between two Glasses are set down, the thickness of the Plate where it appears very black, is three eighths of the ten hundred thousandth part of an Inch. And where the Oil of Oranges between the Glasses is of this thickness, the Attraction collected by the foregoing Rule, seems to be so strong, as within a Circle of an Inch in diameter, to suffice to hold up a Weight equal to that of a Cylinder of Water of an Inch in diameter, and two or three Furlongs in length. And where it is of a less thickness the Attraction may be proportionally greater, and continue to increase, until the thickness do not exceed that of a single Particle of the Oil. There are therefore Agents in Nature able to make the Particles of Bodies stick together by very strong Attractions. And it is the Business of experimental Philosophy to find them out.

Now the smallest Particles of Matter may cohere by the strongest Attractions, and compose bigger Particles of weaker Virtue; and many of these may cohere and compose bigger Particles whose Virtue is still weaker, and so on for divers Successions, until the Progression end in the biggest Particles on which the Operations in Chymistry, and the Colours of natural Bodies depend, and which by cohering compose Bodies of a sensible Magnitude. If the Body is compact, and bends or yields inward to Pression without any sliding of its Parts, it is hard and elastick, returning to its Figure with a Force rising from the mutual Attraction of its Parts. If the Parts slide upon one another, the Body is malleable or soft. If they slip easily, and are of a fit Size to be agitated by Heat, and the Heat is big enough to keep them in Agitation, the Body is fluid; and if it be apt to stick to things, it is humid; and the Drops of every fluid affect a round Figure by the mutual Attraction of their Parts, as the Globe of the Earth and Sea affects a round Figure by the mutual Attraction of its Parts by Gravity.

Since Metals dissolved in Acids attract but a small quantity of the Acid, their attractive Force can reach but to a small distance from them. And as in Algebra, where affirmative Quantities vanish and cease, there negative ones begin; so in Mechanicks, where Attraction ceases, there a repulsive Virtue ought to succeed. And that there is such a Virtue, seems to follow from the Reflexions and Inflexions of the Rays of Light. For the Rays are repelled by Bodies in both these Cases, without the immediate Contact of the reflecting or inflecting Body. It seems also to follow from the Emission of Light; the Ray so soon as it is shaken off from a shining Body by the vibrating Motion of the Parts of the Body, and gets beyond the reach of Attraction, being driven away with exceeding great Velocity. For that Force which is sufficient to turn it back in Reflexion, may be sufficient to emit it. It seems also to follow from the Production of Air and Vapour. The Particles when they are shaken off from Bodies by Heat or Fermentation, so soon as they are beyond the reach of the Attraction of the Body, receding from it, and also from one another with great Strength, and keeping at a distance, so as sometimes to take up above a Million of Times more space than they did before in the form of a dense Body. Which vast Contraction and Expansion seems unintelligible, by feigning the Particles of Air to be springy and ramous, or rolled up like Hoops, or by any other means than a repulsive Power. The Particles of Fluids which do not cohere too strongly, and are of

such a Smallness as renders them most susceptible of those Agitations which keep Liquors in a Fluor, are most easily separated and rarified into Vapour, and in the Language of the Chymists, they are volatile, rarifying with an easy Heat, and condensing with Cold. But those which are grosser, and so less susceptible of Agitation, or cohere by a stronger Attraction, are not separated without a stronger Heat, or perhaps not without Fermentation. And these last are the Bodies which Chymists call fix'd, and being rarified by Fermentation, become true permanent Air; those Particles receding from one another with the greatest Force, and being most difficultly brought together, which upon Contact cohere most strongly. And because the Particles of permanent Air are grosser, and arise from denser Substances than those of Vapours, thence it is that true Air is more ponderous than Vapour, and that a moist Atmosphere is lighter than a dry one, quantity for quantity. From the same repelling Power it seems to be that Flies walk upon the Water without wetting their Feet; and that the Object-glasses of long Telescopes lie upon one another without touching; and that dry Powders are difficultly made to touch one another so as to stick together, unless by melting them, or wetting them with Water, which by exhaling may bring them together; and that two polish'd Marbles, which by immediate Contact stick together, are difficultly brought so close together as to stick.

And thus Nature will be very conformable to her self and very simple, performing all the great Motions of the heavenly Bodies by the Attraction of Gravity which intercedes those Bodies, and almost all the small ones of their Particles by some other attractive and repelling Powers which intercede the Particles. The *Vis inertiæ* is a passive Principle by which Bodies persist in their Motion or Rest, receive Motion in proportion to the Force impressing it, and resist as much as they are resisted. By this Principle alone there never could have been any Motion in the World. Some other Principle was necessary for putting Bodies into Motion; and now they are in Motion, some other Principle is necessary for conserving the Motion. For from the various Composition of two Motions, 'tis very certain that there is not always the same quantity of Motion in the World. For if two Globes joined by a slender Rod, revolve about their common Center of Gravity with an uniform Motion, while that Center moves on uniformly in a right Line drawn in the Plane of their circular Motion; the Sum of the Motions of the two Globes, as often as the Globes are in the right Line described by their common Center of Gravity, will be bigger than the Sum of their Motions, when they are in a Line perpendicular to that right Line. By this Instance it appears that Motion may be got or lost. But by reason of the Tenacity of Fluids, and Attrition of their Parts, and the Weakness of Elasticity in Solids, Motion is much more apt to be lost than got, and is always upon the Decay. For Bodies which are either absolutely hard, or so soft as to be void of Elasticity, will not rebound from one another. Impenetrability makes them only stop. If two equal Bodies meet directly *in vacuo*, they will by the Laws of Motion stop where they meet, and lose all their Motion, and remain in rest, unless they be elastick, and receive new Motion from their Spring. If they have so much Elasticity as suffices to make them rebound with a quarter, or half, or three quarters of the Force with which they come together, they will lose three quarters, or half, or a quarter of their Motion. And this may be try'd, by letting two equal Pendulums fall against one another from equal heights. If the Pendulums be of Lead or soft Clay, they will lose all or almost all their Motions: If of elastick Bodies they will lose all but what they recover from their Elasticity. If it be said, that they can lose no Motion but what they communicate to other Bodies, the consequence is, that *in vacuo* they can lose no Motion, but when they meet they must go on and penetrate one another's Dimensions. If

three equal round Vessels be filled, the one with Water, the other with Oil, the third with molten Pitch, and the Liquors be stirred about alike to give them a vortical Motion; the Pitch by its Tenacity will lose its Motion quickly, the Oil being less tenacious will keep it longer, and the Water being less tenacious will keep it longest, but yet will lose it in a short time. Whence it is easy to understand, that if many contiguous Vortices of molten Pitch were each of them as large as those which some suppose to revolve about the Sun and fix'd Stars, yet these and all their Parts would, by their Tenacity and Stiffness, communicate their Motion to one another till they all rested among themselves. Vortices of Oil or Water, or some fluider Matter, might continue longer in Motion; but unless the Matter were void of all Tenacity and Attrition of Parts, and Communication of Motion, (which is not to be supposed,) the Motion would constantly decay. Seeing therefore the variety of Motion which we find in the World is always decreasing, there is a necessity of conserving and recruiting it by active Principles, such as are the cause of Gravity, by which Planets and Comets keep their Motions in their Orbs, and Bodies acquire great Motion in falling; and the cause of Fermentation, by which the Heart and Blood of Animals are kept in perpetual Motion and Heat; the inward Parts of the Earth are constantly warm'd, and in some places grow very hot; Bodies burn and shine, Mountains take fire, the Caverns of the Earth are blown up, and the Sun continues violently hot and lucid, and warms all things by his Light. For we meet with very little Motion in the World, besides what is owing to these active Principles. And if it were not for these Principles, the Bodies of the Earth, Planets, Comets, Sun, and all things in them, would grow cold and freeze, and become inactive Masses; and all Putrefaction, Generation, Vegetation and Life would cease, and the Planets and Comets would not remain in their Orbs.

All these things being consider'd, it seems probable to me, that God in the Beginning form'd Matter in solid, massy, hard, impenetrable, moveable Particles, of such Sizes and Figures, and with such other Properties, and in such Proportion to Space, as most conduced to the End for which he form'd them; and that these primitive Particles being Solids, are incomparably harder than any porous Bodies compounded of them; even so very hard, as never to wear or break in pieces; no ordinary Power being able to divide what God himself made one in the first Creation. While the Particles

continue entire, they may compose Bodies of one and the same Nature and Texture in all Ages: But should they wear away, or break in pieces, the Nature of Things depending on them, would be changed. Water and Earth, composed of old worn Particles and Fragments of Particles, would not be of the same Nature and Texture now, with Water and Earth composed of entire Particles in the Beginning. And therefore, that Nature may be lasting, the Changes of corporeal Things are to be placed only in the various Separations and new Associations and Motions of these permanent Particles; compound Bodies being apt to break, not in the midst of solid Particles, but where those Particles are laid together, and only touch in a few Points.

It seems to me farther, that these Particles have not only a *Vis inertiæ*, accompanied with such passive Laws of Motion as naturally result from that Force, but also that they are moved by certain active Principles, such as is that of Gravity, and that which causes Fermentation, and the Cohesion of Bodies. These Principles I consider, not as occult Qualities, supposed to result from the specifick Forms of Things, but as general Laws of Nature, by which the Things themselves are form'd; their Truth appearing to us by Phænomena, though their Causes be not yet discover'd. For these are manifest Qualities, and their Causes only are occult. And the *Aristotelians* gave the Name of occult Qualities, not to manifest Qualities, but to such Qualities only as they supposed to lie hid in Bodies, and to be the unknown Causes of manifest Effects: Such as would be the Causes of Gravity, and of magnetick and electrick Attractions, and of Fermentations, if we should suppose that these Forces or Actions arose from Qualities unknown to us, and uncapable of being discovered and made manifest. Such occult Qualities put a stop to the Improvement of natural Philosophy, and therefore of late Years have been rejected. To tell us that every Species of Things is endow'd with an occult specifick Quality by which it acts and produces manifest Effects, is to tell us nothing: But to derive two or three general Principles of Motion from Phænomena, and afterwards to tell us how the Properties and Actions of all corporeal Things follow from those manifest Principles, would be a very great step in Philosophy, though the Causes of those Principles were not yet discover'd: And therefore I scruple not to propose the Principles of Motion above-mention'd, they being of very general Extent, and leave their Causes to be found out.

Now by the help of these Principles, all material Things seem to have been composed of the hard and solid Particles above-mention'd, variously associated in the first Creation by the Counsel of an intelligent Agent. For it became him who created them to set them in order. And if he did so, it's unphilosophical to seek for any other Origin of the World, or to pretend that it might arise out of a Chaos by the mere Laws of Nature; though being once form'd, it may continue by those Laws for many Ages. For while Comets move in very excentrick Orbs in all manner of Positions, blind Fate could never make all the Planets move one and the same way in Orbs concentrick, some inconsiderable Irregularities excepted, which may have risen from the mutual Actions of Comets and Planets upon one another, and which will be apt to increase, till this System wants a Reformation. Such a wonderful Uniformity in the Planetary System must be allowed the Effect of Choice. And so must the Uniformity in the Bodies of Animals, they having generally a right and a left side shaped alike, and on either side of their Bodies two Legs behind, and either two Arms, or two Legs, or two Wings before upon their Shoulders, and between their Shoulders a Neck running down into a Back-bone, and a Head upon it; and in the Head two Ears, two Eyes, a Nose, a Mouth, and a Tongue, alike situated. Also the first Contrivance of those very artificial Parts of Animals, the Eyes, Ears, Brain, Muscles, Heart, Lungs, Midriff, Glands, Larynx, Hands, Wings, swimming Bladders, natural Spectacles, and other Organs of Sense and Motion; and the Instinct of Brutes and Insects, can be the effect of nothing else than the Wisdom and Skill of a powerful ever-living Agent, who being in all Places, is more able by his Will to move the Bodies within his boundless uniform Sensorium, and thereby to form and reform the Parts of the Universe, than we are by our Will to move the Parts of our own Bodies. And yet we are not to consider the World as the Body of God, or the several Parts thereof, as the Parts of God. He is an uniform Being, void of Organs, Members or Parts, and they are his Creatures subordinate to him, and subservient to his Will; and he is no more the Soul of them, than the Soul of Man is the Soul of the Species of Things carried through the Organs of Sense into the place of its Sensation, where it perceives them by means of its immediate Presence, without the Intervention of any third thing. The Organs of Sense are not for enabling the Soul to perceive the Species of Things in its Sensorium, but only for conveying them thither; and God has no need of

such Organs, he being every where present to the Things themselves. And since Space is divisible *in infinitum*, and Matter is not necessarily in all places, it may be also allow'd that God is able to create Particles of Matter of several Sizes and Figures, and in several Proportions to Space, and perhaps of different Densities and Forces, and thereby to vary the Laws of Nature, and make Worlds of several sorts in several Parts of the Universe. At least, I see nothing of Contradiction in all this.

As in Mathematicks, so in Natural Philosophy, the Investigation of difficult Things by the Method of Analysis, ought ever to precede the Method of Composition. This Analysis consists in making Experiments and Observations, and in drawing general Conclusions from them by Induction, and admitting of no Objections against the Conclusions, but such as are taken from Experiments, or other certain Truths. For Hypotheses are not to be regarded in experimental Philosophy. And although the arguing from Experiments and Observations by Induction be no Demonstration of general Conclusions; yet it is the best way of arguing which the Nature of Things admits of, and may be looked upon as so much the stronger, by how much the Induction is more general. And if no Exception occur from Phænomena, the Conclusion may be pronounced generally. But if at any time afterwards any Exception shall occur from Experiments, it may then begin to be pronounced with such Exceptions as occur. By this way of Analysis we may proceed from Compounds to Ingredients, and from Motions to the Forces producing them; and in general, from Effects to their Causes, and from particular Causes to more general ones, till the Argument end in the most general. This is the Method of Analysis: And the Synthesis consists in assuming the Causes discover'd, and establish'd as Principles, and by them explaining the Phænomena proceeding from them, and proving the Explanations.

In the two first Books of these Opticks, I proceeded by this Analysis to discover and prove the original Differences of the Rays of Light in respect of Refrangibility, Reflexibility, and Colour, and their alternate Fits of easy Reflexion and easy Transmission, and the Properties of Bodies, both opake and pellucid, on which their Reflexions and Colours depend. And these Discoveries being proved, may be assumed in the Method of Composition for explaining the Phænomena arising from them: An Instance of which Method I gave in the End of the first Book. In this third Book I have only

begun the Analysis of what remains to be discover'd about Light and its Effects upon the Frame of Nature, hinting several things about it, and leaving the Hints to be examin'd and improv'd by the farther Experiments and Observations of such as are inquisitive. And if natural Philosophy in all its Parts, by pursuing this Method, shall at length be perfected, the Bounds of Moral Philosophy will be also enlarged. For so far as we can know by natural Philosophy what is the first Cause, what Power he has over us, and what Benefits we receive from him, so far our Duty towards him, as well as that towards one another, will appear to us by the Light of Nature. And no doubt, if the Worship of false Gods had not blinded the Heathen, their moral Philosophy would have gone farther than to the four Cardinal Virtues; and instead of teaching the Transmigration of Souls, and to worship the Sun and Moon, and dead Heroes, they would have taught us to worship our true Author and Benefactor, as their Ancestors did under the Government of *Noah* and his Sons before they corrupted themselves.

Theological Works

Tower of London, the headquarters of the Royal Mint from 1279 till 1809 — Newton moved to London to take up the post of warden of the Royal Mint in 1696, a position that he had obtained through the patronage of Charles Montagu, 1st Earl of Halifax, then Chancellor of the Exchequer.

THE CHRONOLOGY OF ANCIENT KINGDOMS AMENDED

The book entitled *The Chronology of Ancient Kingdoms Amended* (see Figure 1) was originally published posthumously in 1728 in English (see Figure 2). Following a letter to the Queen, and an introduction, the centre of the work is in six chapters: Chapter I Of the Chronology of the First Ages of the Greeks.

Chapter II Of the Empire of Egypt.

Chapter III Of the Assyrian Empire.

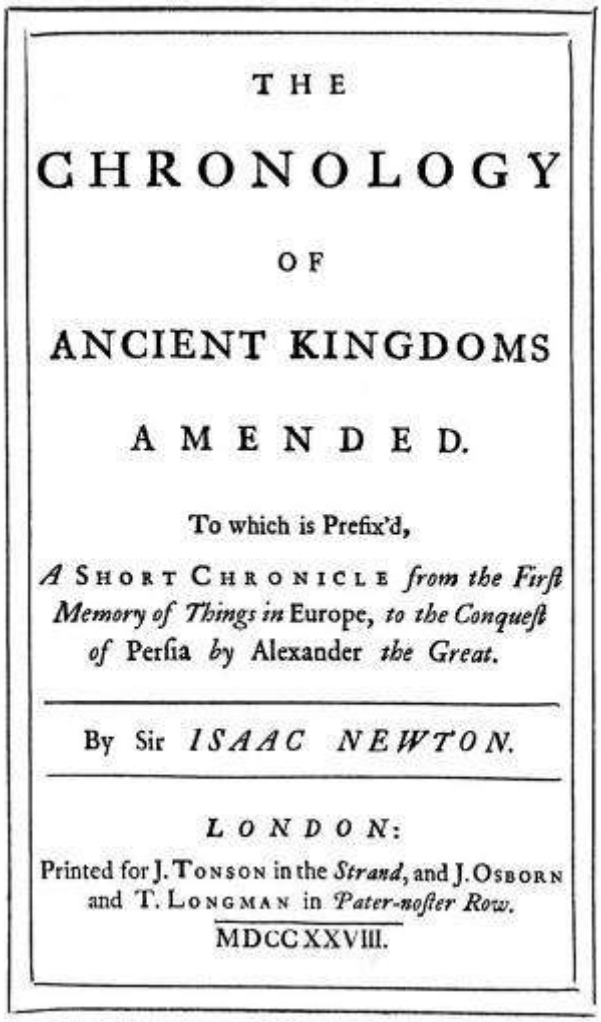
Chapter IV Of the two Contemporary Empires of the Babylonians and Medes.

Chapter V A Description of the Temple of Solomon.

Chapter VI Of the Empire of the Persians.

This is, to modern eyes, a bizarre volume – an attempt to amend the (then) accepted chronology of world events by a careful reading of the Bible. It seems incredible that the sharp scientific mind that produced a revolution in physics could be applied to such mysticism. Newton's conclusions were even more inaccurate (compared to current knowledge) than the erroneous system he was trying to replace.

Figure 1: Portrait of Sir Isaac Newton (1726, then President of the Royal Society) by John Vanderbank (© K.R. Seddon, 2014)


THE

CHRONOLOGY

OF

ANCIENT KINGDOMS

AMENDED.

To which is Prefix'd,

A SHORT CHRONICLE *from the Firſt Memory of Things in* Europe, *to the Conqueſt of* Perſia *by* Alexander *the Great.*

By Sir *ISAAC NEWTON.*

LONDON:

Printed for J. TONSON in the *Strand*, and J. OSBORN and T. LONGMAN in *Pater-noſter Row.*

MDCCXXVIII.

Figure 2: The title page of the 1728 edition

CONTENTS

TO THE QUEEN.
THE CONTENTS.
ADVERTISEMENT.
THE INTRODUCTION.
A SHORT CHRONICLE
CHAP. I.
CHAP. II
CHAP. III.
CHAP. IV.
CHAP. V.
CHAP. VI.
NOTES.

THE

CHRONOLOGY

OF

ANCIENT KINGDOMS

AMENDED.

To which is Prefix'd,

A SHORT CHRONICLE *from the First Memory of Things in* Europe*, to the Conquest of* Persia *by* Alexander *the Great.*

By Sir Isaac Newton.

LONDON: Printed for J. TONSON in the *Strand*, and J. OSBORN

and T. LONGMAN in *Pater-noster Row*.

MDCCXXVIII.

TO THE QUEEN.

MADAM,

As I could never hope to write any thing my self, worthy to be laid before YOUR MAJESTY; I think it a very great happiness, that it should be my lot to usher into the world, under Your Sacred Name, the last work of as great a Genius as any Age ever produced: an Offering of such value in its self, as to be in no danger of suffering from the meanness of the hand that presents it.

The impartial and universal encouragement which YOUR MAJESTY has always given to Arts and Sciences, entitles You to the best returns the learned world is able to make: And the many extraordinary Honours YOUR MAJESTY vouchsafed the Author of the following sheets, give You a just right to his Productions. These, above the rest, lay the most particular claim to Your Royal Protection; For the Chronology *had never appeared in its present Form without YOUR MAJESTY's Influence; and the* Short Chronicle*, which precedes it, is entirely owing to the Commands with which You were pleased to honour him, out of your singular Care for the education of the Royal Issue, and earnest desire to form their minds betimes, and lead them early into the knowledge of Truth.*

The Author has himself acquainted the Publick, that the following Treatise was the fruit of his vacant hours, and the relief he sometimes had recourse to, when tired with his other studies. What an Idea does it raise of His abilities, to find that a Work of such labour and learning, as would have been a sufficient employment and glory for the whole life of another, was to him diversion only, and amusement! The Subject is in its nature incapable of that demonstration upon which his other writings are founded, but his usual accuracy and judiciousness are here no less observable; And at the same time that he supports his suggestions, with all the authorities and proofs that the whole compass of Science can furnish, he offers them with the greatest caution; And by a Modesty, that was natural to Him and always accompanies such superior talents, sets a becoming example to others, not to be too presumptuous in matters so remote and dark. Tho' the Subject be only Chronology*, yet, as the mind of the Author abounded with the most extensive variety of Knowledge, he frequently intersperses Observations of*

a different kind; and occasionally instills principles of Virtue and Humanity, which seem to have been always uppermost in his heart, and, as they were the Constant Rule of his actions, appear Remarkably in all his writings.

Here YOUR MAJESTY will see Astronomy*, and a just Observation on the course of Nature, assisting other parts of Learning to illustrate Antiquity; and a Penetration and Sagacity peculiar to the great Author, dispelling that Mist, with which Fable and Error had darkened it; and will with pleasure contemplate the first dawnings of Your favourite Arts and Sciences, the noblest and most beneficial of which He alone carried farther in a few years, than all the most Learned who went before him, had been able to do in many Ages. Here too, MADAM, You will observe, that an Abhorrence of Idolatry and Persecution (the very essence and foundation of that Religion, which makes so bright a part of YOUR MAJESTY's character) was one of the* earliest Laws *of the Divine Legislator, the* Morality of the first Ages, and the primitive Religion of both Jews and Christians*; and, as the Author adds,* ought to be the standing Religion of all Nations; it being for the honour of God, and good of Mankind*. Nor will YOUR MAJESTY be displeased to find his sentiments so agreeable to Your own, whilst he condemns* all oppression*; and every kind of* cruelty, even to brute beasts*; and, with so much warmth, inculcates* Mercy*,* Charity*, and the indispensable duty of* doing good*, and promoting the general* welfare of mankind*: Those great ends, for which Government was first instituted, and to which alone it is administred in this happy Nation, under a KING, who distinguished himself early in opposition to the Tyranny which threatned* Europe*, and chuses to reign in the hearts of his subjects; Who, by his innate Benevolence, and Paternal Affection to his People, establishes and confirms all their Liberties; and, by his Valour and Magnanimity, guards and defends them.*

That Sincerity and Openness of mind, which is the darling quality of this Nation, is become more conspicuous, by being placed upon the Throne; And we see, with Pride, OUR SOVEREIGN the most eminent for a Virtue, by which our country is so desirous to be distinguished. A Prince, whose views and heart are above all the mean arts of Disguise, is far out of the reach of any temptation to Introduce Blindness and Ignorance. And, as HIS MAJESTY is, by his incessant personal cares, dispensing Happiness at home, and Peace abroad; You, MADAM, lead us on by Your great Example

to the most noble use of that Quiet and Ease, which we enjoy under His Administration, whilst all Your hours of leisure are employed in cultivating in Your Self That Learning, which You so warmly patronize in Others.

YOUR MAJESTY does not think the instructive Pursuit, an entertainment below Your exalted Station; and are Your Self a proof, that the abstruser parts of it are not beyond the reach of Your Sex. Nor does this Study end in barren speculation; It discovers itself in a steady attachment to true Religion; in Liberality, Beneficence, and all those amiable Virtues, which increase and heighten the Felicities of a Throne, at the same time that they bless All around it. Thus, MADAM, to enjoy, together with the highest state of publick Splendor and Dignity all the retired Pleasures and domestick Blessings of private life; is the perfection of human Wisdom, as well as Happiness.

The good Effects of this Love of knowledge, will not stop with the present Age; It will diffuse its Influence with advantage to late Posterity: And what may we not anticipate in our minds for the Generations to come under a Royal Progeny, so descended, so educated, and formed by such Patterns!

The glorious Prospect gives us abundant reason to hope, that Liberty and Learning will be perpetuated together; and that the bright Examples of Virtue and Wisdom, set in this Reign by the Royal Patrons of Both, will be transmitted with the Scepter to their Posterity, till this and the other Works of Sir ISAAC NEWTON shall be forgot, and Time it self be no more: Which is the most sincere and ardent wish of

MADAM,

May it please YOUR MAJESTY,
YOUR MAJESTY's most obedient and most dutiful subject and servant,
John Conduitt.

THE CONTENTS.

A Short Chronicle from the first Memory of Things in Europe*, to the Conquest of* Persia *by* Alexander *the Great.*

The Chronology of Ancient Kingdoms amended.

Chap. I. *Of the Chronology of the First Ages of the* Greeks.

Chap. II. *Of the Empire of* Egypt.

Chap. III. *Of the* Assyrian *Empire.*

Chap. IV. *Of the two Contemporary Empires of the* Babylonians *and* Medes.

Chap. V. *A Description of the Temple of* Solomon.

Chap. VI. *Of the Empire of the* Persians.

ADVERTISEMENT.

Tho' The Chronology of Ancient Kingdoms amended*, was writ by the Author many years since; yet he lately revis'd it, and was actually preparing it for the Press at the time of his death. But* The Short Chronicle *was never intended to be made public, and therefore was not so lately corrected by him. To this the Reader must impute it, if he shall find any places where* the Short Chronicle *does not accurately agree with the Dates assigned in the larger Piece. The Sixth Chapter was not copied out with the other Five, which makes it doubtful whether he intended to print it: but being found among his Papers, and evidently appearing to be a Continuation of the same Work, and (as such) abridg'd in* the Short Chronicle*; it was thought proper to be added.*

Had the Great Author *himself liv'd to publish this Work, there would have been no occasion for this Advertisement; But as it is, the Reader is desired to allow for such imperfections as are inseparable from Posthumous Pieces; and, in so great a number of proper names, to excuse some errors of the Press that have escaped.*

THE INTRODUCTION.

The *Greek* Antiquities are full of Poetical Fictions, because the *Greeks* wrote nothing in Prose, before the Conquest of *Asia* by *Cyrus* the *Persian*. Then *Pherecydes Scyrius* and *Cadmus Milesius* introduced the writing in Prose. *Pherecydes Atheniensis*, about the end of the Reign of *Darius Hystaspis*, wrote of Antiquities, and digested his work by Genealogies, and was reckoned one of the best Genealogers. *Epimenides* the Historian proceeded also by Genealogies; and *Hellanicus*, who was twelve years older than *Herodotus*, digested his History by the Ages or Successions of the Priestesses of *Juno Argiva*. Others digested theirs by the Kings of the *Lacedæmonians*, or Archons of *Athens*. *Hippias* the *Elean*, about thirty years before the fall of the *Persian* Empire, published a breviary or list of the Olympic Victors; and about ten years before the fall thereof, *Ephorus* the disciple of *Isocrates* formed a Chronological History of *Greece*, beginning with the return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*, and ending with the siege of *Perinthus*, in the twentieth year of *Philip* the father of *Alexander* the great: But he digested things by Generations, and the reckoning by Olympiads was not yet in use, nor doth it appear that the Reigns of Kings were yet set down by numbers of years. The *Arundelian* marbles were composed sixty years after the death of *Alexander* the great (*An.* 4. *Olym*.) and yet mention not the Olympiads: But in the next Olympiad, *Timæus Siculus* published an history in several books down to his own times, according to the Olympiads, comparing the Ephori, the Kings of *Sparta*, the Archons of *Athens*, and the Priestesses of *Argos*, with the Olympic Victors, so as to make the Olympiads, and the Genealogies and Successions of Kings, Archons, and Priestesses, and poetical histories suit with one another, according to the best of his judgment. And where he left off, *Polybius* began and carried on the history.

So then a little after the death of *Alexander* the great, they began to set down the Generations, Reigns and Successions, in numbers of years, and by putting Reigns and Successions equipollent to Generations, and three Generations to an hundred or an hundred and twenty years (as appears by their Chronology) they have made the Antiquities of *Greece* three or four

hundred years older than the truth. And this was the original of the Technical Chronology of the *Greeks*. *Eratosthenes* wrote about an hundred years after the death of *Alexander* the great: He was followed by *Apollodorus*, and these two have been followed ever since by Chronologers.

But how uncertain their Chronology is, and how doubtful it was reputed by the *Greeks* of those times, may be understood by these passages of *Plutarch*. *Some reckon*, saith he, [1]* Lycurgus *contemporary to* Iphitus*, and to have been his companion in ordering the Olympic festivals: amongst whom was* Aristotle *the Philosopher, arguing from the Olympic Disc, which had the name of* Lycurgus *upon it. Others supputing the times by the succession of the Kings of the* Lacedæmonians*, as* Eratosthenes *and* Apollodorus*, affirm that he was not a few years older than the first Olympiad.* First *Aristotle* and some others made him as old as the first Olympiad; then *Eratosthenes*, *Apollodorus*, and some others made him above an hundred years older: and in another place *Plutarch* [2]* tells us: *The congress of* Solon *with* Croesus*, some think they can confute by Chronology. But an history so illustrious, and verified by so many witnesses, and (which is more) so agreeable to the manners of* Solon*, and so worthy of the greatness of his mind and of his wisdom, I cannot persuade my self to reject because of some Chronological Canons, as they call them: which hundreds of authors correcting, have not yet been able to constitute any thing certain, in which they could agree among themselves, about repugnancies*. It seems the Chronologers had made the Legislature of *Solon* too ancient to consist with that Congress.

For reconciling such repugnancies, Chronologers have sometimes doubled the persons of men. So when the Poets had changed *Io* the daughter of *Inachus* into the *Egyptian Isis*, Chronologers made her husband *Osiris* or *Bacchus* and his mistress *Ariadne* as old as *Io*, and so feigned that there were two *Ariadnes*, one the mistress of *Bacchus*, and the other the mistress of *Theseus*, and two *Minos's* their fathers, and a younger *Io* the daughter of *Jasus*, writing *Jasus* corruptly for *Inachus*. And so they have made two *Pandions*, and two *Erechtheus's*, giving the name of *Erechthonius* to the first; *Homer* calls the first, *Erechtheus*: and by such corruptions they have exceedingly perplexed Ancient History.

And as for the Chronology of the *Latines*, that is still more uncertain. *Plutarch* represents great uncertainties in the Originals of *Rome*: and so doth *Servius*. The old records of the *Latines* were burnt by the *Gauls*, sixty and four years before the death of *Alexander* the great; and *Quintus Fabius Pictor*, the oldest historian of the *Latines*, lived an hundred years later than that King.

In Sacred History, the *Assyrian* Empire began with *Pul* and *Tiglathpilaser*, and lasted about 170 years. And accordingly *Herodotus* hath made *Semiramis* only five generations, or about 166 years older than *Nitocris*, the mother of the last King of *Babylon*. But *Ctesias* hath made *Semiramis* 1500 years older than *Nitocris*, and feigned a long series of Kings of *Assyria*, whose names are not *Assyrian*, nor have any affinity with the *Assyrian* names in Scripture.

The Priests of *Egypt* told *Herodotus*, that *Menes* built *Memphis* and the sumptuous temple of *Vulcan*, in that City: and that *Rhampsinitus*, *Mœris*, *Asychis* and *Psammiticus* added magnificent porticos to that temple. And it is not likely that *Memphis* could be famous, before *Homer*'s days who doth not mention it, or that a temple could be above two or three hundred years in building. The Reign of *Psammiticus* began about 655 years before Christ, and I place the founding of this temple by *Menes* about 257 years earlier: but the Priests of *Egypt* had so magnified their Antiquities before the days of *Herodotus*, as to tell him that from *Menes* to *Mœris* (who reigned 200 years before *Psammiticus*) there were 330 Kings, whose Reigns took up as many Ages, that is eleven thousand years, and had filled up the interval with feigned Kings, who had done nothing. And before the days of *Diodorus Siculus* they had raised their Antiquities so much higher, as to place six, eight, or ten new Reigns of Kings between those Kings, whom they had represented to *Herodotus* to succeed one another immediately.

In the Kingdom of *Sicyon*, Chronologers have split *Apis Epaphus* or *Epopeus* into two Kings, whom they call *Apis* and *Epopeus*, and between them have inserted eleven or twelve feigned names of Kings who did nothing, and thereby they have made its Founder *Ægialeus*, three hundred years older than his brother *Phoroneus*. Some have made the Kings of *Germany* as old as the Flood: and yet before the use of letters, the names and actions of men could scarce be remembred above eighty or an hundred years after their deaths: and therefore I admit no Chronology of things done

in *Europe*, above eighty years before *Cadmus* brought letters into *Europe*; none, of things done in *Germany*, before the rise of the *Roman* Empire.

Now since *Eratosthenes* and *Apollodorus* computed the times by the Reigns of the Kings of *Sparta*, and (as appears by their Chronology still followed) have made the seventeen Reigns of these Kings in both Races, between the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus* and the Battel of *Thermopylæ*, take up *622* years, which is after the rate of 36½ years to a Reign, and yet a Race of seventeen Kings of that length is no where to be met with in all true History, and Kings at a moderate reckoning Reign but 18 or 20 years a-piece one with another: I have stated the time of the return of the *Heraclides* by the last way of reckoning, placing it about 340 years before the Battel of *Thermopylæ*. And making the Taking of *Troy* eighty years older than that Return, according to *Thucydides*, and the *Argonautic* Expedition a Generation older than the *Trojan* War, and the Wars of *Sesostris* in *Thrace* and death of *Ino* the daughter of *Cadmus* a Generation older than that Expedition: I have drawn up the following Chronological Table, so as to make Chronology suit with the Course of Nature, with Astronomy, with Sacred History, with *Herodotus* the Father of History, and with it self; without the many repugnancies complained of by *Plutarch*. I do not pretend to be exact to a year: there may be Errors of five or ten years, and sometimes twenty, and not much above.

A SHORT CHRONICLE

FROM THE

First Memory of things in Europe *to*

the Conquest of Persia *by* Alexander

the great.

The Times are set down in years before Christ.

The *Canaanites* who fled from *Joshua*, retired in great numbers into *Egypt*, and there conquered *Timaus*, *Thamus*, or *Thammuz* King of the lower *Egypt*, and reigned there under their Kings *Salatis*, *Bœon*, *Apachnas*, *Apophis*, *Janias*, *Assis*, &c. untill the days of *Eli* and *Samuel*. They fed on flesh, and sacrificed men after the manner of the *Phœnicians*, and were called Shepherds by the *Egyptians*, who lived only on the fruits of the earth, and abominated flesh-eaters. The upper parts of *Egypt* were in those days under many Kings, Reigning at *Coptos*, *Thebes*, *This*, *Elephantis*, and other Places, which by conquering one another grew by degrees into one Kingdom, over which *Misphragmuthosis* Reigned in the days of *Eli*.

In the year before Christ 1125 *Mephres* Reigned over the upper *Egypt* from *Syene* to *Heliopolis*, and his Successor *Misphragmuthosis* made a lasting war upon the Shepherds soon after, and caused many of them to fly into *Palestine*, *Idumæa*, *Syria*, and *Libya*; and under *Lelex*, *Æzeus*, *Inachus*, *Pelasgus*, *Æolus* the first, *Cecrops*, and other Captains, into *Greece*. Before those days *Greece* and all *Europe* was peopled by wandring *Cimmerians*, and *Scythians* from the backside of the *Euxine Sea*, who lived a rambling wild sort of life, like the *Tartars* in the northern parts of *Asia*. Of their Race was *Ogyges*, in whose days these *Egyptian* strangers came into *Greece*. The rest of the Shepherds were shut up by *Misphragmuthosis*, in a part of the lower *Egypt* called *Abaris* or *Pelusium*.

In the year 1100 the *Philistims*, strengthned by the access of the Shepherds, conquer *Israel*, and take the Ark. *Samuel* judges *Israel*.

1085. *Hæmon* the son of *Pelasgus* Reigns in *Thessaly*.

1080. *Lycaon* the son of *Pelasgus* builds *Lycosura*; *Phoroneus* the son of *Inachus*, *Phoronicum*, afterwards called *Argos*; *Ægialeus* the brother of *Phoroneus* and son of *Inachus*, *Ægialeum*, afterwards called *Sicyon*: and these were the oldest towns in *Peloponnesus*. 'Till then they built only single houses scattered up and down in the fields. About the same time *Cecrops* built *Cecropia* in *Attica*, afterwards called *Athens*; and *Eleusine*, the son of *Ogyges*, built *Eleusis*. And these towns gave a beginning to the Kingdoms of the *Arcadians*, *Argives*, *Sicyons*, *Athenians*, *Eleusinians*, &c. *Deucalion* flourishes.

1070. *Amosis*, or *Tethmosis*, the successor of *Misphragmuthosis*, abolishes the *Phœnician* custom in *Heliopolis* of sacrificing men, and drives the Shepherds out of *Abaris*. By their access the *Philistims* become so numerous, as to bring into the field against *Saul* 30000 chariots, 6000 horsemen, and people as the sand on the sea shore for multitude. *Abas*, the father of *Acrisius* and *Prœtus*, comes from *Egypt*.

1069. *Saul* is made King of *Israel*, and by the hand of *Jonathan* gets a great victory over the *Philistims*. *Eurotas* the son of *Lelex*, and *Lacedæmon* who married *Sparta* the daughter of *Eurotas*, Reign in *Laconia*, and build *Sparta*.

1060. *Samuel* dies.

1059. *David* made King.

1048. The *Edomites* are conquered and dispersed by *David*, and some of them fly into *Egypt* with their young King *Hadad*. Others fly to the *Persian Gulph* with their Commander *Oannes*; and others from the *Red Sea* to the coast of the *Mediterranean*, and fortify *Azoth* against *David*, and take *Zidon*; and the *Zidonians* who fled from them build *Tyre* and *Aradus*, and make *Abibalus* King of *Tyre*. These *Edomites* carry to all places their Arts and Sciences; amongst which were their Navigation, Astronomy, and Letters; for in *Idumæa* they had Constellations and Letters before the days of *Job*, who mentions them: and there *Moses* learnt to write the Law in a book. These *Edomites* who fled to the *Mediterranean*, translating the word *Erythræa* into that of *Phœnicia*, give the name of *Phœnicians* to themselves, and that of *Phœnicia* to all the sea-coasts of *Palestine* from *Azoth* to *Zidon*. And hence came the tradition of the *Persians*, and of the *Phœnicians* themselves, mentioned by *Herodotus*, that the *Phœnicians* came originally

from the *Red Sea*, and presently undertook long voyages on the *Mediterranean*.

1047. *Acrisius* marries *Eurydice*, the daughter of *Lacedæmon* and *Sparta*. The *Phœnician* mariners who fled from the *Red Sea*, being used to long voyages for the sake of traffic, begin the like voyages on the *Mediterranean* from *Zidon*; and sailing as far as *Greece*, carry away *Io* the daughter of *Inachus*, who with other *Grecian* women came to their ships to buy their merchandize. The *Greek Seas* begin to be infested with Pyrates.

1046. The *Syrians* of *Zobah* and *Damascus* are conquered by *David*. *Nyctimus*, the son of *Lycaon*, reigns in *Arcadia*. *Deucalion* still alive.

1045. Many of the *Phœnicians* and *Syrians* fleeing from *Zidon* and from *David*, come under the conduct of *Cadmus*, *Cilix*, *Phœnix*, *Membliarius*, *Nycteus*, *Thasus*, *Atymnus*, and other Captains, into *Asia minor*, *Crete*, *Greece*, and *Libya*; and introduce Letters, Music, Poetry, the *Octaeteris*, Metals and their Fabrication, and other Arts, Sciences and Customs of the *Phœnicians*. At this time *Cranaus* the successor of *Cecrops* Reigned in *Attica*, and in his Reign and the beginning of the Reign of *Nyctimus*, the *Greeks* place the flood of *Deucalion*. This flood was succeeded by four Ages or Generations of men, in the first of which *Chiron* the son of *Saturn* and *Philyra* was born, and the last of which according to *Hesiod* ended with the *Trojan* War; and so places the Destruction of *Troy* four Generations or about 140 years later than that flood, and the coming of *Cadmus*, reckoning with the ancients three Generations to an hundred years. With these *Phœnicians* came a sort of men skilled in the Religious Mysteries, Arts, and Sciences of *Phœnicia*, and settled in several places under the names of *Curetes*, *Corybantes*, *Telchines*, and *Idæi Dactyli*.

1043. Hellen, the son of *Deucalion*, and father of *Æolus*, *Xuthus*, and *Dorus*, flourishes.

1035. *Erectheus* Reigns in *Attica*. *Æthlius*, the grandson of *Deucalion* and father of *Endymion*, builds *Elis*. The *Idæi Dactyli* find out Iron in mount *Ida* in *Crete*, and work it into armour and iron tools, and thereby give a beginning to the trades of smiths and armourers in *Europe*; and by singing and dancing in their armour, and keeping time by striking upon one another's armour with their swords, they bring in Music and Poetry; and at the same time they nurse up the *Cretan Jupiter* in a cave of the same mountain, dancing about him in their armour.

1034. *Ammon* Reigns in *Egypt*. He conquered *Libya*, and reduced that people from a wandering savage life to a civil one, and taught them to lay up the fruits of the earth; and from him *Libya* and the desert above it were anciently called *Ammonia*. He was the first that built long and tall ships with sails, and had a fleet of such ships on the *Red Sea*, and another on the *Mediterranean* at *Irasa* in *Libya*. 'Till then they used small and round vessels of burden, invented on the *Red Sea*, and kept within sight of the shore. For enabling them to cross the seas without seeing the shore, the *Egyptians* began in his days to observe the Stars: and from this beginning Astronomy and Sailing had their rise. Hitherto the Lunisolar year had been in use: but this year being of an uncertain length, and so, unfit for Astronomy, in his days and in the days of his sons and grandsons, by observing the Heliacal Risings and Setting of the Stars, they found the length of the Solar year, and made it consist of five days more than the twelve calendar months of the old Lunisolar year. *Creusa* the daughter of *Erechtheus* marries *Xuthus* the son of *Hellen*. *Erechtheus* having first celebrated the *Panathenæa* joins horses to a chariot. *Ægina*, the daughter of *Asopus*, and mother of *Æacus*, born.

1030. *Ceres* a woman of *Sicily*, in seeking her daughter who was stolen, comes into *Attica*, and there teaches the *Greeks* to sow corn; for which Benefaction she was Deified after death. She first taught the Art to *Triptolemus* the young son of *Celeus* King of *Eleusis*.

1028. *Oenotrus* the youngest son of *Lycaon*, the *Janus* of the *Latines*, led the first Colony of *Greeks* into *Italy*, and there taught them to build houses. *Perseus* born.

1020. *Arcas*, the son of *Callisto* and grandson of *Lycaon*, and *Eumelus* the first King of *Achaia*, receive bread-corn from *Triptolemus*.

1019. *Solomon* Reigns, and marries the daughter of *Ammon*, and by means of this affinity is supplied with horses from *Egypt*; and his merchants also bring horses from thence for all the Kings of the *Hittites* and *Syrians*: for horses came originally from *Libya*; and thence *Neptune* was called *Equestris*. *Tantalus* King of *Phrygia* steals *Ganimede* the son of *Tros* King of *Troas*.

1017. *Solomon* by the assistance of the *Tyrians* and *Aradians*, who had mariners among them acquainted with the *Red Sea*, sets out a fleet upon that

sea. Those assistants build new cities in the *Persian Gulph*, called *Tyre* and *Aradus*.

1015. The Temple of *Solomon* is founded. *Minos* Reigns in *Crete* expelling his father *Asterius*, who flees into *Italy*, and becomes the *Saturn* of the *Latines*. *Ammon* takes *Gezer* from the *Canaanites*, and gives it to his daughter, *Solomon's* wife.

1014. *Ammon* places *Cepheus* at *Joppa*.

1010. *Sesac* in the Reign of his father *Ammon* invades *Arabia Fœlix*, and sets up pillars at the mouth of the *Red Sea*. *Apis*, *Epaphus* or *Epopeus*, the son of *Phroroneus*, and *Nycteus* King of *Bœotia*, slain. *Lycus* inherits the Kingdom of his brother *Nycteus*. *Ætolus* the son of *Endymion* flies into the Country of the *Curetes* in *Achaia*, and calls it *Ætolia*; and of *Pronoe* the daughter of *Phorbas* begets *Pleuron* and *Calydon*, who built cities in *Ætolia* called by their own names. *Antiopa* the daughter of *Nycteus* is sent home to *Lycus* by *Lamedon* the successor of *Apis*, and in the way brings forth *Amphion* and *Zethus*.

1008. *Sesac*, in the Reign of his father *Ammon*, invades *Afric* and *Spain*, and sets up pillars in all his conquests, and particularly at the mouth of the *Mediterranean*, and returns home by the coast of *Gaul* and *Italy*.

1007. *Ceres* being dead *Eumolpus* institutes her Mysteries in *Eleusine*. The Mysteries of *Rhea* are instituted in *Phrygia*, in the city *Cybele*. About this time Temples begin to be built in *Greece*. *Hyagnis* the *Phrygian* invents the pipe. After the example of the common-council of the five Lords of the *Philistims*, the *Greeks* set up the *Amphictyonic* Council, first at *Thermopylæ*, by the influence of *Amphictyon* the son of *Deucalion*; and a few years after at *Delphi* by the influence of *Acrisius*. Among the cites, whose deputies met at *Thermopylæ*, I do not find *Athens*, and therefore doubt whether *Amphictyon* was King of that city. If he was the son of *Deucalion* and brother of *Hellen*, he and *Cranaus* might Reign together in several parts of *Attica*. But I meet with a later *Amphictyon* who entertained the great *Bacchus*. This Council worshipped *Ceres*, and therefore was instituted after her death.

1006. *Minos* prepares a fleet, clears the *Greek* seas of Pyrates, and sends Colonies to the Islands of the *Greeks*, some of which were not inhabited before. *Cecrops* II. Reigns in *Attica*. *Caucon* teaches the Mysteries of *Ceres* in *Messene*.

1005. *Andromeda* carried away from *Joppa* by *Perseus*. *Pandion* the brother of *Cecrops* II. Reigns in *Attica*. *Car*, the son of *Phoroneus*, builds a Temple to *Ceres*.

1002. *Sesac* Reigns in *Egypt* and adorns *Thebes*, dedicating it to his father *Ammon* by the name of *No-Ammon* or *Ammon-No*, that is the people or city of *Ammon*: whence the *Greeks* called it *Diospolis*, the city of *Jupiter*. *Sesac* also erected Temples and Oracles to his father in *Thebes*, *Ammonia*, and *Ethiopia*, and thereby caused his father to be worshipped as a God in those countries, and I think also in *Arabia Fœlix*: and this was the original of the worship of *Jupiter Ammon*, and the first mention of Oracles that I meet with in Prophane History. War between *Pandion* and *Labdacus* the grandson of *Cadmus*.

994. *Ægeus* Reigns in *Attica*.

993. *Pelops* the son of *Tantalus* comes into *Peloponnesus*, marries *Hippodamia* the granddaughter of *Acrisius*, takes *Ætolia* from *Ætolus* the son of *Endymion*, and by his riches grows potent.

990. *Amphion* and *Zethus* slay *Lycus*, put *Laius* the son of *Labdacus* to flight, and Reign in *Thebes*, and wall the city about.

989. *Dædalus* and his nephew *Talus* invent the saw, the turning-lath, the wimble, the chip-ax, and other instruments of Carpenters and Joyners, and thereby give a beginning to those Arts in *Europe*. *Dædalus* also invented the making of Statues with their feet asunder, as if they walked.

988. *Minos* makes war upon the *Athenians*, for killing his son *Androgeus*. *Æacus* flourishes.

987. *Dædalus* kills his nephew *Talus*, and flies to *Minos*. A Priestess of *Jupiter Ammon*, being brought by *Phœnician* merchants into *Greece*, sets up the Oracle of *Jupiter* at *Dodona*. This gives a beginning to Oracles in *Greece*: and by their dictates, the Worship of the Dead is every where introduced.

983. *Sisyphus*, the son of *Æolus* and grandson of *Hellen*, Reigns in *Corinth*, and some say that he built that city.

980. *Laius* recovers the Kingdom of *Thebes*. *Athamas*, the brother of *Sisyphus* and father of *Phrixus* and *Helle*, marries *Ino* the daughter of *Cadmus*.

979. *Rehoboam* Reigns. *Thoas* is sent from *Crete* to *Lemnos*, Reigns there in the city *Hephœstia*, and works in copper and iron.

978. *Alcmena* born of *Electryo* the son of *Perseus* and *Andromeda*, and of *Lysidice* the daughter of *Pelops*.

974. *Sesac* spoils the Temple, and invades *Syria* and *Persia*, setting up pillars in many places. *Jeroboam*, becoming subject to *Sesac*, sets up the worship of the *Egyptian* Gods in *Israel*.

971. *Sesac* invades *India*, and returns with triumph the next year but one: whence *Trieterica Bacchi*. He sets up pillars on two mountains at the mouth of the river *Ganges*.

968. *Theseus* Reigns, having overcome the *Minotaur*, and soon after unites the twelve cities of *Attica* under one government. *Sesac*, having carried on his victories to *Mount Caucasus*, leaves his nephew *Prometheus* there, and *Æetes* in *Colchis*.

967. *Sesac*, passing over the *Hellespont* conquers *Thrace*, kills *Lycurgus* King thereof, and gives his Kingdom and one of his singing-women to *Oeagrus* the father of *Orpheus*. *Sesac* had in his army *Ethiopians* commanded by *Pan*, and *Libyan* women commanded by *Myrina* or *Minerva*. It was the custom of the *Ethiopians* to dance when they were entring into a battel, and from their skipping they were painted with goats feet in the form of Satyrs.

966. *Thoas*, being made King of *Cyprus* by *Sesac*, goes thither with his wife *Calycopis*, and leaves his daughter *Hypsipyle* in *Lemnos*.

965. *Sesac* is baffled by the *Greeks* and *Scythians*, loses many of his women with their Queen *Minerva*, composes the war, is received by *Amphiction* at a feast, buries *Ariadne*, goes back through *Asia* and *Syria* into *Egypt*, with innumerable captives, among whom was *Tithonus*, the son of *Laomedon* King of *Troy*; and leaves his *Libyan Amazons*, under *Marthesia* and *Lampeto*, the successors of *Minerva*, at the river *Thermodon*. He left also in *Colchos* Geographical Tables of all his conquests: And thence Geography had its rise. His singing-women were celebrated in *Thrace* by the name of the Muses. And the daughters of *Pierus* a *Thracian*, imitating them, were celebrated by the same name.

964. *Minos*, making war upon *Cocalus* King of *Sicily*, is slain by him. He was eminent for his Dominion, his Laws and his Justice: upon his sepulchre visited by *Pythagoras*, was this inscription, ΤΟΥ ΔΙΟΣ the Sepulchre of *Jupiter*. *Danaus* with his daughters flying from his brother *Egyptus* (that is from *Sesac*) comes into *Greece*. *Sesac* using the advice of

his Secretary *Thoth*, distributes *Egypt* into xxxvi *Nomes*, and in every *Nome* erects a Temple, and appoints the several Gods, Festivals and Religions of the several *Nomes*. The Temples were the sepulchres of his great men, where they were to be buried and worshipped after death, each in his own Temple, with ceremonies and festivals appointed by him; while He and his Queen, by the names of *Osiris* and *Isis*, were to be worshipped in all *Egypt*. These were the Temples seen and described by *Lucian* eleven hundred years after, to be of one and the same age: and this was the original of the several *Nomes* of *Egypt*, and of the several Gods and several Religions of those *Nomes*. *Sesac* divided also the land of *Egypt* by measure amongst his soldiers, and thence *Geometry* had its rise. *Hercules* and *Eurystheus* born.

963. *Amphictyon* brings the twelve Gods of *Egypt* into *Greece*, and these are the *Dii magni majorum gentium*, to whom the Earth and Planets and Elements are dedicated.

962. *Phryxus* and *Helle* fly from their stepmother *Ino* the daughter of *Cadmus*. *Helle* is drowned in the *Hellespont*, so named from her, but *Phryxus* arrived at *Colchos*.

960. The war between the *Lapithæ* and the people of *Thessaly* called *Centaurs*.

958. *Oedipus* kills his father *Laius*. *Sthenelus* the son of *Perseus* Reigns in *Mycene*.

956. *Sesac* is slain by his brother *Japetus*, who after death was deified in *Afric* by the name of *Neptune*, and called *Typhon* by the *Egyptians*. *Orus* Reigns and routs the *Libyans*, who under the conduct of *Japetus*, and his Son *Antæus* or *Atlas*, invaded *Egypt*. *Sesac* from his making the river *Nile* useful, by cutting channels from it to all the cities of *Egypt*, was called by its names, *Sihor* or *Siris*, *Nilus* and *Egyptus*. The *Greeks* hearing the *Egyptians* lament, *O Siris* and *Bou Siris*, called him *Osiris* and *Busiris*. The *Arabians* from his great acts called him *Bacchus*, that is, the Great. The *Phrygians* called him *Ma-fors* or *Mavors*, the valiant, and by contraction *Mars*. Because he set up pillars in all his conquests, and his army in his father's Reign fought against the *Africans* with clubs, he is painted with pillars and a club: and this is that *Hercules* who, according to *Cicero*, was born upon the *Nile*, and according to *Eudoxus*, was slain by *Typhon*; and according to *Diodorus*, was an *Egyptian*, and went over a great part of the world, and set up the pillars in *Afric*. He seems to be also the *Belus* who,

according to *Diodorus*, led a Colony of *Egyptians* to *Babylon*, and there instituted Priests called *Chaldeans*, who were free from taxes, and observed the stars, as in *Egypt*. Hitherto *Judah* and *Israel* laboured under great vexations, but henceforward *Asa* King of *Judah* had peace ten years.

947. The *Ethiopians* invade *Egypt*, and drown *Orus* in the *Nile*. Thereupon *Bubaste* the sister of *Orus* kills herself, by falling from the top of an house, and their mother *Isis* or *Astræa* goes mad: and thus ended the Reign of the Gods of *Egypt*.

946. *Zerah* the *Ethiopian* is overthrown by *Asa*. The people of the lower *Egypt* make *Osarsiphus* their King, and call in two hundred thousand *Jews* and *Phœnicians* against the *Ethiopians*. *Menes* or *Amenophis* the young son of *Zerah* and *Cissia* Reigns.

944. The *Ethiopians*, under *Amenophis*, retire from the lower *Egypt* and fortify *Memphis* against *Osarsiphus*. And by these wars and the *Argonautic* expedition, the great Empire of *Egypt* breaks in pieces. *Eurystheus* the son of *Sthenelus* Reigns in *Mycenæ*.

943. *Evander* and his mother *Carmenta* carry Letters into *Italy*.

942. *Orpheus* Deifies the son of *Semele* by the name of *Bacchus*, and appoints his Ceremonies.

940. The great men of *Greece*, hearing of the civil wars and distractions of *Egypt*, resolve to send an embassy to the nations, upon the *Euxine* and *Mediterranean* Seas, subject to that Empire, and for that end order the building of the ship *Argo*.

939. The ship *Argo* is built after the pattern of the long ship in which *Danaus* came into *Greece*: and this was the first long ship built by the *Greeks*. *Chiron*, who was born in the Golden Age, forms the Constellations for the use of the *Argonauts*; and places the Solstitial and Equinoctial Points in the fifteenth degrees or middles of the Constellations of *Cancer*, *Chelæ*, *Capricorn*, and *Aries*. *Meton* in the year of *Nabonassar* 316, observed the Summer Solstice in the eighth degree of *Cancer*, and therefore the Solstice had then gone back seven degrees. It goes back one degree in about seventytwo years, and seven degrees in about 504 years. Count these years back from the year of *Nabonassar* 316, and they will place the *Argonautic* expedition about 936 years before *Christ*. *Gingris* the son of *Thoas* slain, and Deified by the name of *Adonis*.

938. *Theseus*, being fifty years old, steals *Helena* then seven years old. *Pirithous* the son of *Ixion*, endeavouring to steal *Persephone* the daughter of *Orcus* King of the *Molossians*, is slain by the Dog of *Orcus*; and his companion *Theseus* is taken and imprisoned. *Helena* is set at liberty by her brothers.

937. The *Argonautic* expedition. *Prometheus* leaves *Mount Caucasus*, being set at liberty by *Hercules*. *Laomedon* King of *Troy* is slain by *Hercules*. *Priam* succeeds him. *Talus* a brazen man, of the Brazen Age, the son of *Minos*, is slain by the *Argonauts*. *Æsculapius* and *Hercules* were *Argonauts*, and *Hippocrates* was the eighteenth from *Æsculapius* by the father's side, and the nineteenth from *Hercules* by the mother's side; and because these generations, being noted in history, were most probably by the chief of the family, and for the most part by the eldest sons; we may reckon 28 or at the most 30 years to a generation: and thus the seventeen intervals by the father's side and eighteen by the mother's, will at a middle reckoning amount unto about 507 years; which being counted backwards from the beginning of the *Peloponnesian* war, at which time *Hippocrates* began to flourish, will reach up to the time where we have placed the *Argonautic* expedition.

936. *Theseus* is set at liberty by *Hercules*.

934. The hunting of the *Calydonian* boar slain by *Meleager*.

930. *Amenophis*, with an army out of *Ethiopia* and *Thebais*, invades the lower *Egypt*, conquers *Osarsiphus*, and drives out the *Jews* and *Canaanites*: and this is reckoned the second expulsion of the Shepherds. *Calycopis* dies, and is Deified by *Thoas* with Temples at *Paphos* and *Amathus* in *Cyprus*, and at *Byblus* in *Syria*, and with Priests and sacred Rites, and becomes the *Venus* of the ancients, and the *Dea Cypria* and *Dea Syria*. And from these and other places where Temples were erected to her, she was also called *Paphia*, *Amathusia*, *Byblia*, *Cytherea*, *Salaminia*, *Cnidia*, *Erycina*, *Idalia*, &c. And her three waiting-women became the three Graces.

928. The war of the seven Captains against *Thebes*.

927. *Hercules* and *Æsculapius* are Deified. *Eurystheus* drives the *Heraclides* out of *Peloponnesus*. He is slain by *Hyllus* the son of *Hercules*. *Atreus* the son of *Pelops* succeeds him in the Kingdom of *Mycenæ*. *Menestheus*, the great grandson of *Erechtheus*, Reigns at *Athens*.

925. *Theseus* is slain, being cast down from a rock.

924. *Hyllus* invading *Peloponnesus* is slain by *Echemus*.

919. *Atreus* dies. *Agamemnon* Reigns. In the absence of *Menelaus*, who went to look after what his father *Atreus* had left to him, *Paris* steals *Helena*.

918. The second war against *Thebes*.

912. *Thoas*, King of *Cyprus* and part of *Phœnicia* dies; and for making armour for the Kings of *Egypt*; is Deified with a sumptuous Temple at *Memphis* by the name of *Baal Canaan*, *Vulcan*. This Temple was said to be built by *Menes*, the first King of *Egypt* who reigned next after the Gods, that is, by *Menoph* or *Amenophis* who reigned next after the death of *Osiris*, *Isis*, *Orus*, *Bubaste* and *Thoth*. The city, *Memphis* was also said to be built by *Menes*; he began to build it when he fortified it against *Osarsiphus*. And from him it was called *Menoph*, *Moph*, *Noph*, &c; and is to this day called *Menuf* by the *Arabians*. And therefore *Menes* who built the city and temple Was *Menoph* or *Amenophis*. The Priests of *Egypt* at length made this temple above a thousand years older then *Amenophis*, and some of them five or ten thousand years older: but it could not be above two or three hundred years older than the Reign of *Psammiticus* who finished it, and died 614 years before *Christ*. When *Menoph* or *Menes* built the city, he built a bridge there over the *Nile*: a work too great to be older than the Monarchy of *Egypt*.

909. *Amenophis*, called *Memnon* by the *Greeks*, built the *Memnonia* at *Susa*, whilst *Egypt* was under the government of *Proteus* his Viceroy.

904. *Troy* taken. *Amenophis* was still at *Susa*; the *Greeks* feigning that he came from thence to the *Trojan* war.

903. *Demophoon*, the son of *Theseus* by *Phœdra* the daughter of *Minos*, Reigns at *Athens*.

901. *Amenophis* builds small Pyramids in *Cochome*.

896. *Ulysses* leaves *Calypso* in the Island *Ogygie* (perhaps *Cadis* or *Cales*.) She was the daughter of *Atlas*, according to *Homer*. The ancients at length feigned that this Island, (which from *Atlas* they called *Atlantis*) had been as big as all *Europe*, *Africa* and *Asia*, but was sunk into the Sea.

895. *Teucer* builds *Salamis* in *Cyprus*. *Hadad* or *Benhadad* King of *Syria* dies, and is Deified at *Damascus* with a Temple and Ceremonies.

887. *Amenophis* dies, and is succeeded by his son *Ramesses* or *Rhampsinitus*, who builds the western Portico of the Temple of *Vulcan*. The *Egyptians* dedicated to *Osiris*, *Isis*, *Orus* senior, *Typhon*, and *Nephthe* the

sister and wife of *Typhon*, the five days added by the *Egyptians* to the twelve Calendar months of the old Lunisolar year, and said that they were added when these five Princes were born. They were therefore added in the Reign of *Ammon* the father of these five Princes: but this year was scarce brought into common use before the Reign of *Amenophis*: for in his Temple or Sepulchre at *Abydus*, they placed a Circle of 365 cubits in compass, covered on the upper side with a plate of gold, and divided into 365 equal parts, to represent all the days of the year; every part having the day of the year, and the Heliacal Risings and Settings of the Stars on that day, noted upon it. And this Circle remained there 'till *Cambyses* spoiled the temples of *Egypt*: and from this monument I collect that it was *Amenophis* who established this year, fixing the beginning thereof to one of the four Cardinal Points of the heavens. For had not the beginning thereof been now fixed, the Heliacal Risings and Settings of the Stars could not have been noted upon the days thereof. The Priests of *Egypt* therefore in the Reign of *Amenophis* continued to observe the Heliacal Risings and Settings of the Stars upon every day. And when by the Sun's Meridional Altitudes they had found the Solstices and Equinoxes according to the Sun's mean motion, his Equation being not yet known, they fixed the beginning of this year to the Vernal Equinox, and in memory thereof erected this monument. Now this year being carried into *Chaldæa*, the *Chaldæans* began their year of *Nabonassar* on the same *Thoth* with the *Egyptians*, and made it of the same length. And the *Thoth* of the first year of *Nabonassar* fell upon the 26th day of *February*: which was 33 days and five hours before the Vernal Equinox, according to the Sun's mean motion. And the *Thoth* of this year moves backwards 33 days and five hours in 137 years, and therefore fell upon the Vernal Equinox 137 years before the *Æra* of *Nabonassar* began; that is, 884 years before *Christ*. And if it began upon the day next after the Vernal Equinox, it might begin three or four years earlier; and there we may place the death of this King. The *Greeks* feigned that he was the Son of *Tithonus*, and therefore he was born after the return of *Sesac* into *Egypt*, with *Tithonus* and other captives, and so might be about 70 or 75 years old at his death.

883. *Dido* builds *Carthage*, and the *Phœnicians* begin presently after to sail as far as to the *Straights Mouth*, and beyond. *Æneas* was still alive, according to *Virgil*.

870. *Hesiod* flourishes. He hath told us himself that he lived in the age next after the wars of *Thebes* and *Troy*, and that this age should end when the men then living grew hoary and dropt into the grave; and therefore it was but of an ordinary length: and *Herodotus* has told us that *Hesiod* and *Homer* were but 400 years older than himself. Whence it follows that the destruction of *Troy* was not older than we have represented it.

860. *Mœris* Reigns in *Egypt*. He adorned *Memphis*, and translated the seat of his Empire thither from *Thebes*. There he built the famous Labyrinth, and the northern portico of the Temple of *Vulcan*, and dug the great Lake called the Lake of *Mœris*, and upon the bottom of it built two great Pyramids of brick: and these things being not mentioned by *Homer* or *Hesiod*, were unknown to them, and done after their days. *Mœris* wrote also a book of Geometry.

852. *Hazael* the successor of *Hadad* at *Damascus* dies and is Deified, as was *Hadad* before: and these Gods, together with *Arathes* the wife of *Hadad*, were worshipt in their Sepulchres or Temples, ‘till the days of *Josephus* the *Jew*; and the *Syrians* boasted their antiquity, not knowing, saith *Josephus*, that they were novel.

844. The *Æolic* Migration. *Bœotia*, formerly called *Cadmeis*, is seized by the *Bœotians*.

838. *Cheops* Reigns in *Egypt*. He built the greatest Pyramid for his sepulchre, and forbad the worship of the former Kings; intending to have been worshipped himself.

825. The *Heraclides*, after three Generations, or an hundred years, reckoned from their former expedition, return into *Peloponnesus*. Henceforward, to the end of the first *Messenian* war, reigned ten Kings of *Sparta* by one Race, and nine by another; ten of *Messene*, and nine of *Arcadia*: which, by reckoning (according to the ordinary course of nature) about twenty years to a Reign, one Reign with another, will take up about 190 years. And the seven Reigns more in one of the two Races of the Kings of *Sparta*, and eight in the other, to the battle at *Thermopylæ*; may take up 150 years more: and so place the return of the *Heraclides*, about 820 years before *Christ*.

824. *Cephren* Reigns in *Egypt*, and builds another great Pyramid.

808. *Mycerinus* Reigns there, and begins the third great Pyramid. He shut up the body of his daughter in a hollow ox, and caused her to be

worshipped daily with odours.

804. The war, between the *Athenians* and *Spartans*, in which *Codrus*, King of the *Athenians*, is slain.

801. *Nitocris*, the sister of *Mycerinus*, succeeds him, and finishes the third great Pyramid.

794. The *Ionic* Migration, under the conduct of the sons of *Codrus*.

790. *Pul* founds the *Assyrian* Empire.

788. *Asychis* Reigns in *Egypt*, and builds the eastern Portico of the Temple of *Vulcan* very splendidly; and a large Pyramid of brick, made of mud dug out of the Lake of *Mœris*. *Egypt* breaks into several Kingdoms. *Gnephactus* and *Bocchoris* Reign successively in the upper *Egypt*; *Stephanathis*; *Necepsos* and *Nechus*, at *Sais*; *Anysis* or *Amosis*, at *Anysis* or *Hanes*; and *Tacellotis*, at *Bubaste*.

776. *Iphitus* restores the Olympiads. And from this *Æra* the Olympiads are now reckoned. *Gnephactus* Reigns at *Memphis*.

772. *Necepsos* and *Petosiris* invent Astrology in *Egypt*.

760. *Semiramis* begins to flourish; *Sanchoniatho* writes.

751. *Sabacon* the *Ethiopian*, invades *Egypt*, now divided into various Kingdoms, burns *Bocchoris*, slays *Nechus*, and makes *Anysis* fly.

747. *Pul*, King of *Assyria*, dies, and is succeeded at *Nineveh* by *Tiglathpilasser*, and at *Babylon* by *Nabonassar*. The *Egyptians*, who fled from *Sabacon*, carry their Astrology and Astronomy to *Babylon*, and found the *Æra* of *Nabonassar* in *Egyptian* years.

740. *Tiglathpilasser*, King of *Assyria*, takes *Damascus*, and captivates the *Syrians*.

729. *Tiglathpilasser* is succeeded by *Salmanasser*.

721. *Salmanasser*, King of *Assyria*, carries the Ten Tribes into captivity.

719. *Sennacherib* Reigns over *Assyria*. *Archias* the son of *Evagetus*, of the stock of *Hercules*, leads a Colony from *Corinth* into *Sicily*, and builds *Syracuse*.

717. *Tirhakah* Reigns in *Ethiopia*.

714. *Sennacherib* is put to flight by the *Ethiopians* and *Egyptians*, with great slaughter.

711. The *Medes* revolt from the *Assyrians*. *Sennacherib* slain. *Asserhadon* succeeds him. This is that *Asserhadon-Pul*, or *Sardanapalus*,

the son of *Anacyndaraxis*, or *Sennacherib*, who built *Tarsus* and *Anchiale* in one day.

710. *Lycurgus*, brings the poems of *Homer* out of *Asia* into *Greece*.

708. *Lycurgus*, becomes tutor to *Charillus* or *Charilaus*, the young King of *Sparta*. *Aristotle* makes *Lycurgus* as old as *Iphitus*, because his name was upon the Olympic Disc. But the Disc was one of the five games called the *Quinquertium*, and the *Quinquertium* was first instituted upon the eighteenth Olympiad. *Socrates* and *Thucydides* made the institutions of *Lycurgus* about 300 years older than the end of the *Peloponnesian* war, that is, 705 years before *Christ*.

701. *Sabacon*, after a Reign of 50 years, relinquishes *Egypt* to his son *Sevechus* or *Sethon*, who becomes Priest of *Vulcan*, and neglects military affairs.

698. *Manasseh* Reigns.

697. The *Corinthians* begin first of any men to build ships with three orders of oars, called *Triremes*. Hitherto the *Greeks* had used long vessels of fifty oars.

687. *Tirhakah* Reigns in *Egypt*.

681. *Asserhadon* invades *Babylon*.

673. The *Jews* conquered by *Asserhadon*, and *Manasseh* carried captive to *Babylon*.

671. *Asserbadon* invades *Egypt*. The government of *Egypt* committed to twelve princes.

668. The western nations of *Syria*, *Phœnicia* and *Egypt*, revolt from the *Assyrians*. *Asserhadon* dies, and is succeeded by *Saosduchinus*. *Manasseh* returns from Captivity.

658. *Phraortes* Reigns in *Media*. The *Prytanes* Reign in *Corinth*, expelling their Kings.

657. The *Corinthians* overcome the *Corcyreans* at sea: and this was the oldest sea fight.

655. *Psammiticus* becomes King of all *Egypt*, by conquering the other eleven Kings with whom he had already reigned fifteen years: he reigned about 39 years more. Henceforward the *Ionians* had access into *Egypt*; and thence came the *Ionian* Philosophy, Astronomy and Geometry.

652. The first *Messenian* war begins: it lasted twenty years.

647. *Charops*, the first decennial Archon of the *Athenians*. Some of these Archons might dye before the end of the ten years, and the remainder of the ten years be supplied by a new Archon. And hence the seven decennial Archons might not take up above forty or fifty years. *Saosduchinus* King of *Assyria* dies, and is succeeded by *Chyniladon*.

640. *Josiah* Reigns in *Judæa*.

636. *Phraortes*> King of the *Medes*, is slain in a war against the *Assyrians*. *Astyages* succeeds him.

635. The *Scythians* invade the *Medes* and *Assyrians*.

633. *Battus* builds *Cyrene*, where *Irasa*, the city of *Antæus*, had stood.

627. *Rome* is built.

625. *Nabopolassar* revolts from the King of *Assyria*, and Reigns over *Babylon*. *Phalantus* leads the *Parthenians* into *Italy*, and builds *Tarentum.*

617. *Psammiticus* dies. *Nechaoh* reigns in *Egypt*.

611. *Cyaxeres* Reigns over the *Medes*.

610. The Princes of the *Scythians* slain in a feast by *Cyaxeres*.

609. *Josiah* slain. *Cyaxeres* and *Nebuchadnezzar* overthrow *Nineveh*, and, by sharing the *Assyrian* Empire, grow great.

607. *Creon* the first annual Archon of the *Athenians*. The second *Messenian* war begins. *Cyaxeres* makes the *Scythians* retire beyond *Colchos* and *Iberia*, and seizes the *Assyrian* Provinces of *Armenia*, *Pontus* and *Cappadocia*.

606. *Nebuchadnezzar* invades *Syria* and *Judæa*.

604. *Nabopolassar* dies, and is succeeded by his Son *Nebuchadnezzar*, who had already Reigned two years with his father.

600. *Darius* the *Mede*, the son of *Cyaxeres,* is born.

599. *Cyrus* is born of *Mandane*, the Sister of *Cyaxeres*, and daughter of *Astyages*.

596. *Susiana* and *Elam* conquered by *Nebuchadnezzar*. *Caranus* and *Perdiccas* fly from *Phidon*, and found the Kingdom of *Macedon*. *Phidon* introduces Weights and Measures, and the Coining of Silver Money.

590. *Cyaxeres* makes war upon *Alyattes* King of *Lydia*.

588. The Temple of *Solomon* is burnt by *Nebuchadnezzar*. The *Messenians* being conquered, fly into *Sicily*, and build *Messana*.

585. In the sixth year of the *Lydian* war, a total Eclipse of the Sun, predicted by *Thales*, *May* the 28th, puts an end to a Battel between the

Medes and *Lydians*: Whereupon they make Peace, and ratify it by a marriage between *Darius Medus* the son of *Cyaxeres*, and *Ariene* the daughter of *Alyattes*.

584. *Phidon* presides in the 49th Olympiad.

580. *Phidon* is overthrown. Two men chosen by lot, out of the city *Elis*, to preside in the Olympic Games.

572. *Draco* is Archon of the *Athenians*, and makes laws for them.

568. The *Amphictions* make war upon the *Cirrheans*, by the advice of *Solon*, and take *Cirrha*. *Clisthenes*, *Alcmæon* and *Eurolicus* commanded the forces of the *Amphictions*, and were contemporary to *Phidon*. For *Leocides* the son of *Phidon*, and *Megacles* the son of *Alcmæon,* at one and the same time, courted *Agarista* the daughter of *Clisthenes*.

569. *Nebuchadnezzar* invades *Egypt*. *Darius* the *Mede* Reigns.

562. *Solon*, being Archon of the *Athenians*, makes laws for them.

557. *Periander* dies, and *Corinth* becomes free from Tyrants.

555. *Nabonadius* Reigns at *Babylon*. His Mother *Nitocris* adorns and fortifies that City.

550. *Pisistratus* becomes Tyrant at *Athens.* The Conference between *Crœsus* and *Solon*.

549. *Solon* dies, *Hegestratus* being Archon of *Athens*.

544. *Sardes* is taken by *Cyrus*. *Darius* the *Mede* recoins the *Lydian* money into *Darics*.

538. *Babylon* is taken by *Cyrus*.

536. *Cyrus* overcomes *Darius* the *Mede*, and translates the Empire to the *Persians*. The *Jews* return from Captivity, and found the second Temple.

529. *Cyrus* dies. *Cambyses* Reigns,

521. *Darius* the son of *Hystaspes* Reigns. The *Magi* are slain. The various Religions of the several Nations of *Persia*, which consisted in the worship of their ancient Kings, are abolished; and by the influence of *Hystaspes* and *Zoroaster*, the worship of One God, at Altars, without Temples is set up in all *Persia*.

520. The second Temple is built at *Jerusalem* by the command of *Darius*.

515. The second Temple is finished and dedicated.

513. *Harmodius* and *Aristogiton*, slay *Hipparchus* the son of *Pisistratus*, Tyrant of the *Athenians.*

508. The Kings of the *Romans* expelled, and Consuls erected.

491. The Battle of *Marathon*.

485. *Xerxes* Reigns.

480. The Passage of *Xerxes* over the *Hellespont* into *Greece*, and Battles of *Thermopylæ* and *Salamis*.

464. *Artaxerxes Longimanus* Reigns.

457. *Ezra* returns into *Judæa*. *Johanan* the father of *Jaddua* was now grown up, having a chamber in the Temple.

444. *Nehemiah* returns into *Judæa*. *Herodotus* writes.

431. The *Peloponnesian* war begins.

428. *Nehemiah* drives away *Manasseh* the brother of *Jaddua*, because he had married *Nicaso* the daughter of *Sanballat*.

424. *Darius Nothus* Reigns.

422. *Sanballat* builds a Temple in *Mount Gerizim* and makes his son-in-law *Manasseh* the first High-Priest thereof.

412. Hitherto the Priests and Levites were numbered, and written in the Chronicles of the *Jews*, before the death of *Nehemiah*: at which time either *Johanan* or *Jaddua* was High-Priest, And here Ends the Sacred History of the *Jews*.

405. *Artaxerxes Mnemon* Reigns. The end of the *Peloponnesian* war.

359. *Artaxerxes Ochus* Reigns.

338. *Arogus* Reigns.

336. *Darius Codomannus* Reigns.

332. The *Persian* Empire conquered by *Alexander* the great.

331. *Darius Codomannus*, the last King of *Persia*, slain.

CHAP. I.

Of the Chronology of the First Ages of the Greeks.

All Nations, before they began to keep exact accounts of Time, have been prone to raise their Antiquities; and this humour has been promoted, by the Contentions between Nations about their Originals. *Herodotus* [3]* tells us, that the Priests of *Egypt* reckoned from the Reign of *Menes* to that of *Sethon*, who put *Sennacherib* to flight, three hundred forty and one Generations of men, and as many Priests of *Vulcan*, and as many Kings of *Egypt*: and that three hundred Generations make ten thousand years; *for*, saith he, *three Generations of men make an hundred years*: and the remaining forty and one Generations make 1340 years: and so the whole time from the Reign of *Menes* to that of *Sethon* was 11340 years. And by this way of reckoning, and allotting longer Reigns to the Gods of *Egypt* than to the Kings which followed them, *Herodotus* tells us from the Priests of *Egypt*, that from *Pan* to *Amosis* were 15000 years, and from *Hercules* to *Amosis* 17000 years. So also the *Chaldæans* boasted of their Antiquity; for *Callisthenes*, the Disciple of *Aristotle*, sent Astronomical Observations from *Babylon* to *Greece*, said to be of 1903 years standing before the times of *Alexander* the great. And the *Chaldæans* boasted further, that they had observed the Stars 473000 years; and there were others who made the Kingdoms of *Assyria*, *Media* and *Damascus*, much older than the truth.

Some of the *Greeks* called the times before the Reign of *Ogyges*, Unknown, because they had No History of them; those between his flood and the beginning of the Olympiads, Fabulous, because their History was much mixed with Poetical Fables: and those after the beginning of the Olympiads, Historical, because their History was free from such Fables. The fabulous Ages wanted a good Chronology, and so also did the Historical, for the first 60 or 70 Olympiads.

The *Europeans*, had no Chronology before the times of the *Persian* Empire: and whatsoever Chronology they now have of ancienter times, hath been framed since, by reasoning and conjecture. In the beginning of that Monarchy, *Acusilaus* made *Phoroneus* as old as *Ogyges* and his flood, and

that flood 1020 years older than the first Olympiad; which is above 680 years older than the truth: and to make out this reckoning his followers have encreased the Reigns of Kings in length and number. *Plutarch* [4]* tells us that the Philosophers anciently delivered their Opinions in Verse, as *Orpheus*, *Hesiod*, *Parmenides*, *Xenophanes*, *Empedocles*, *Thales*; but afterwards left off the use of Verses; and that *Aristarchus*, *Timocharis*, *Aristillus*, *Hipparchus*, did not make Astronomy the more contemptible by describing it in Prose; after *Eudoxus*, *Hesiod*, and *Thales* had wrote of it in Verse. *Solon* wrote [5]* in Verse, and all the Seven Wise Men were addicted to Poetry, as *Anaximenes* [6]* affirmed. 'Till those days the *Greeks* wrote only in Verse, and while they did so there could be no Chronology, nor any other History, than such as was mixed with poetical fancies. *Pliny*, [7]* in reckoning up the Inventors of things, tells us, *that* Pherecydes Syrius *taught to compose discourses in Prose in the Reign of* Cyrus*, and* Cadmus Milesius *to write History.* And in [8]* another place he saith *that* Cadmus Milesius *was the first that wrote in Prose*. *Josephus* tells us [9]* that *Cadmus Milesius* and *Acusilaus* were but a little before the expedition of the *Persians* against the *Greeks*: and *Suidas* [10]* calls *Acusilaus* a most ancient Historian, and saith that *he wrote Genealogies out of tables of brass, which his father, as was reported, found in a corner of his house*. Who hid them there may be doubted: For the *Greeks* [11]* had no publick table or inscription older than the Laws of *Draco*. *Pherecydes Atheniensis*, in the Reign of *Darius Hystaspis*, or soon after, wrote of the Antiquities and ancient Genealogies of the *Athenians*, in ten books; and was one of the first *European* writers of this kind, and one of the best; whence he had the name of *Genealogus*; and by *Dionysius [12]* Halicarnassensis* is said to be second to none of the Genealogers. *Epimenides*, not the Philosopher, but an Historian, wrote also of the ancient Genealogies: and *Hellanicus*, who was twelve years older than *Herodotus*, digested his History by the Ages or Successions of the Priestesses of *Juno Argiva*. Others digested theirs by those of the Archons of *Athens*, or Kings of the *Lacedæmonians*. *Hippias* the *Elean* published a Breviary of the Olympiads, supported by no certain arguments, as *Plutarch* [13]* tells us: he lived in the 105th Olympiad, and was derided by *Plato* for his Ignorance. This Breviary seems to have contained nothing more than a

short account of the Victors in every Olympiad. Then [14]* *Ephorus*, the disciple of *Isocrates*, formed a Chronological History of *Greece*, beginning with the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*, and ending with the Siege of *Perinthus*, in the twentieth year of *Philip* the father of *Alexander* the great, that is, eleven years before the fall of the *Persian* Empire: but [15]* he digested things by Generations, and the reckoning by the Olympiads, or by any other *Æra*, was not yet in use among the *Greeks*. The *Arundelian* Marbles were composed sixty years after the death of *Alexander* the great (*An.* 4. *Olym*.) and yet mention not the Olympiads, nor any other standing *Æra*, but reckon backwards from the time then present. But Chronology was now reduced to a reckoning by Years; and in the next Olympiad *Timæus Siculus* improved it: for he wrote a History in Several books, down to his own times, according to the Olympiads; comparing the *Ephori*, the Kings of *Sparta*, the Archons of *Athens*, and the Priestesses of *Argos* with the Olympic Victors, so as to make the Olympiads, and the Genealogies and Successions of Kings and Priestesses, and the Poetical Histories suit with one another, according to the best of his judgment: and where he left off, *Polybius* began, and carried on the History. *Eratosthenes* wrote above an hundred years after the death of *Alexander* the great: He was followed by *Apollodorus*; and these two have been followed ever since by Chronologers.

But how uncertain their Chronology is, and how doubtful it was reputed by the *Greeks* of those times, may be understood by these passages of *Plutarch*. *Some reckon* Lycurgus, saith he, [16]* *contemporary to* Iphitus*, and to have been his companion in ordering the Olympic festivals, amongst whom was* Aristotle *the Philosopher; arguing from the Olympic Disc, which had the name of* Lycurgus *upon it. Others supputing the times by the Kings of* Lacedæmon*, as* Eratosthenes *and* Apollodorus*, affirm that he was not a few years older than the first Olympiad.* He began to flourish in the 17th or 18th Olympiad, and at length *Aristotle* made him as old as the first Olympiad; and so did *Epaminondas*, as he is cited by *Ælian* and *Plutarch*: and then *Eratosthenes*, *Apollodorus*, and their followers, made him above an hundred years older.

And in another place *Plutarch* [17]* tells us: *The Congress of* Solon *with* Crœsus*, some think they can confute by Chronology. But a History so illustrious, and verified by so many witnesses, and which is more, so*

agreeable to the manners of Solon*, and worthy of the greatness of his mind, and of his wisdom, I cannot persuade my self to reject because of some Chronological Canons, as they call them, which hundreds of authors correcting, have not yet been able to constitute any thing certain, in which they could agree amongst themselves, about repugnancies.*

As for the Chronology of the *Latines*, that is still more uncertain. *Plutarch* [18]* represents great uncertainties in the Originals of *Rome*, and so doth *Servius* [19]*. The old Records of the *Latines* were burnt [20]* by the *Gauls*, an hundred and twenty years after the Regifuge, and sixty-four years before the death of *Alexander* the great: and *Quintus Fabius Pictor*, [21]* the oldest Historian of the *Latines*, lived an hundred years later than that King, and took almost all things from *Diocles Peparethius*, a *Greek*. The Chronologers of *Gallia*, *Spain*, *Germany*, *Scythia*, *Swedeland*, *Britain* and *Ireland* are of a date still later; for *Scythia* beyond the *Danube* had no letters, 'till *Ulphilas* their Bishop formed them; which was about six hundred years after the death of *Alexander* the great: and *Germany* had none 'till it received them, from the western Empire of the *Latines*, above seven hundred years after the death of that King. The *Hunns*, had none in the days of *Procopius*, who flourished 850 years after the death of that King: and *Sweden* and *Norway* received them still later. And things said to be done above one or two hundred years before the use of letters, are of little credit.

Diodorus, [22]* in the beginning of his History tells us, that he did not define by any certain space the times preceding the *Trojan* War, because he had no certain foundation to rely upon: but from the *Trojan* war, according to the reckoning of *Apollodorus*, whom he followed, there were eighty years to the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*; and that from that Period to the first Olympiad, there were three hundred and twenty eight years, computing the times from the Kings of the *Lacedæmonians*. *Apollodorus* followed *Eratosthenes*, and both of them followed *Thucydides*, in reckoning eighty years from the *Trojan* war to the Return of the *Heraclides*: but in reckoning 328 years from that Return to the first Olympiad, *Diodorus* tells us, that the times were computed from the Kings of the *Lacedæmonians*; and *Plutarch* [23]* tells us, that *Apollodorus*, *Eratosthenes* and others followed that computation: and since this

reckoning is still received by Chronologers, and was gathered by computing the times from the Kings of the *Lacedæmonians*, that is from their number, let us re-examin that Computation.

The *Egyptians* reckoned the Reigns of Kings equipollent to Generations of men, and three Generations to an hundred years, as above; and so did the *Greeks* and *Latines*: and accordingly they have made their Kings Reign one with another thirty and three years a-piece, and above. For they make the seven Kings of *Rome* who preceded the Consuls to have Reigned 244 years, which is 35 years a-piece: and the first twelve Kings of *Sicyon*, *Ægialeus*, *Europs*, &c. to have Reigned 529 years, which is 44 years a-piece: and the first eight Kings of *Argos*, *Inachus*, *Phoroneus*, &c. to have Reigned 371 years, which is above 46 years a-piece: and between the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*, and the end of the first *Messenian* war, the ten Kings of *Sparta* in one Race; *Eurysthenes*, *Agis*, *Echestratus*, *Labotas*, *Doryagus*, *Agesilaus*, *Archelaus*, *Teleclus*, *Alcamenes*, and *Polydorus*: the nine in the other Race; *Procles*, *Sous*, *Eurypon*, *Prytanis*, *Eunomus*, *Polydectes*, *Charilaus*, *Nicander*, *Theopompus*: the ten Kings of *Messene*; *Cresphontes*, *Epytus*, *Glaucus*, *Isthmius*, *Dotadas*, *Sibotas*, *Phintas*, *Antiochus*, *Euphaes*, *Aristodemus*: and the nine of *Arcadia*; *Cypselus*, *Olœas*, *Buchalion*, *Phialus*, *Simus*, *Pompus*, *Ægineta*, *Polymnestor*, *Æchmis*, according to Chronologers, took up 379 years: which is 38 years a-piece to the ten Kings, and 42 years a-piece to the nine. And the five Kings of the Race of *Eurysthenes*, between the end of the first *Messenian* war, and the beginning of the Reign of *Darius Hystaspis*; *Eurycrates*, *Anaxander*, *Eurycrates II*, *Leon*, *Anaxandrides*, Reigned 202 years, which is above 40 years a-piece.

Thus the *Greek* Chronologers, who follow *Timæus* and *Eratosthenes*, have made the Kings of their several Cities, who lived before the times of the *Persian* Empire, to Reign about 35 or 40 years a-piece, one with another; which is a length so much beyond the course of nature, as is not to be credited. For by the ordinary course of nature Kings Reign, one with another, about eighteen or twenty years a-piece: and if in some instances they Reign, one with another, five or six years longer, in others they Reign as much shorter: eighteen or twenty years is a medium. So the eighteen Kings of *Judah* who succeeded *Solomon*, Reigned 390 years, which is one with another 22 years a-piece. The fifteen Kings of *Israel* after *Solomon*,

Reigned 259 years, which is 17¼ years a-piece. The eighteen Kings of *Babylon*, *Nabonassar* &c. Reigned 209 years, which is 11⅔ years a-piece. The ten Kings of *Persia*; *Cyrus*, *Cambyses*, &c. Reigned 208 years, which is almost 21 years a piece. The sixteen Successors of *Alexander* the great, and of his brother and son in *Syria*; *Seleucus*, *Antiochus Soter*, &c. Reigned 244 years, after the breaking of that Monarchy into various Kingdoms, which is 15¼ years a-piece. The eleven Kings of *Egypt*; *Ptolomæus Lagi*, &c. Reigned 277 years, counted from the same Period, which is 25 years a-piece. The eight in *Macedonia*; *Cassander*, &c. Reigned 138 years, which is 17¼ years a-piece. The thirty Kings of *England*; *William* the Conqueror, *William Rufus*, &c. Reigned 648 years, which is 21½ years a-piece. The first twenty four Kings of *France*; *Pharamundus*, &c. Reigned 458 years, which is 19 years a-piece: the next twenty four Kings of *France*; *Ludovicus Balbus*, &c. 451 years, which is 18¾ years a-piece: the next fifteen, *Philip Valesius*, &c. 315 years, which is 21 years a-piece: and all the sixty three Kings of *France*, 1224 years, which is 19½ years a-piece. Generations from father to son, may be reckoned one with another at about 33 or 34 years a-piece, or about three Generations to an hundred years: but if the reckoning proceed by the eldest sons, they are shorter, so that three of them may be reckoned at about 75 or 80 years: and the Reigns of Kings are still shorter, because Kings are succeeded not only by their eldest sons, but sometimes by their brothers, and sometimes they are slain or deposed; and succeeded by others of an equal or greater age, especially in elective or turbulent Kingdoms. In the later Ages, since Chronology hath been exact, there is scarce an instance to be found of ten Kings Reigning any where in continual Succession above 260 years: but *Timæus* and his followers, and I think also some of his Predecessors, after the example of the *Egyptians*, have taken the Reigns of Kings for Generations, and reckoned three Generations to an hundred, and sometimes to an hundred and twenty years; and founded the Technical Chronology of the *Greeks* upon this way of reckoning. Let the reckoning be reduced to the course of nature, by putting the Reigns of Kings one with another, at about eighteen or twenty years a-piece: and the ten Kings of *Sparta* by one Race, the nine by another Race, the ten Kings of *Messene*, and the nine of *Arcadia*, above mentioned, between the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*, and the end of the first *Messenian* war,

will scarce take up above 180 or 190 years: whereas according to Chronologers they took up 379 years.

For confirming this reckoning, I may add another argument. *Euryleon* the son of *Ægeus*, [24]* commanded the main body of the *Messenians* in the fifth year of the first *Messenian* war, and was in the fifth Generation from *Oiolicus* the son *Theras*, the brother-in-law of *Aristodemus*, and tutor to his sons *Eurysthenes* and *Procles*, as *Pausanias* [25]* relates: and by consequence, from the return of the *Heraclides*, which was in the days of *Theras*, to the battle which was in the fifth year of this war, there were six Generations, which, as I conceive, being for the most part by the eldest sons, will scarce exceed thirty years to a Generation; and so may amount unto 170 or 180 years. That war lasted 19 or 20 years: add the last 15 years, and there will be about 190 years to the end of that war: whereas the followers of *Timæus* make it about 379 years, which is above sixty years to a Generation.

By these arguments, Chronologers have lengthned the time, between the return of the *Heraclides* into *Peloponnesus* and the first *Messenian* war, adding to it about 190 years: and they have also lengthned the time, between that war and the rise of the *Persian* Empire. For in the Race of the *Spartan* Kings, descended from *Eurysthenes*; after *Polydorus*, reigned [26]* these Kings, *Eurycrates*, *Anaxander*, *Eurycratides*, *Leon*, *Anaxandrides*, *Clomenes*, *Leonidas*, &c. And in the other Race descended from *Procles*; after *Theopompus*, reigned [27]* these, *Anaxandrides*, *Archidemus*, *Anaxileus*, *Leutychides*, *Hippocratides*, *Ariston*, *Demaratus*, *Leutychides* II. &c. according to *Herodotus*. These Kings reigned ‘till the sixth year of *Xerxes*, in which *Leonidas* was slain by the *Persians* at *Thermopylæ*; and *Leutychides* II. soon after, flying from *Sparta* to *Tegea*, died there. The seven Reigns of the Kings of *Sparta*, which follow *Polydorus*, being added to the ten Reigns above mentioned, which began with that of *Eurysthenes*; make up seventeen Reigns of Kings, between the return of the *Heraclides* into *Peloponnesus* and the sixth year of *Xerxes*: and the eight Reigns following *Theopompus*, being added to the nine Reigns above mentioned, which began with that of *Procles*, make up also seventeen Reigns: and these seventeen Reigns, at twenty years a-piece one with another, amount unto three hundred and forty years. Count these 340 years upwards from the

sixth year of *Xerxes*, and one or two years more for the war of the *Heraclides*, and Reign of *Aristodemus*, the father of *Eurysthenes* and *Procles*; and they will place the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*, 159 years after the death of *Solomon*, and 46 years before the first Olympiad, in which *Corœbus* was victor. But the followers of *Timæus* have placed this Return two hundred and eighty years earlier. Now this being the computation upon which the *Greeks*, as you have heard from *Diodorus* and *Plutarch*, have founded the Chronology of their Kingdoms, which were ancienter than the *Persian* Empire; that Chronology is to be rectified, by shortening the times which preceded the death of *Cyrus*, in the proportion of almost two to one; for the times which follow the death of *Cyrus* are not much amiss.

The Artificial Chronologers, have made *Lycurgus*, the legislator, as old as *Iphitus*, the restorer of the Olympiads; and *Iphitus*, an hundred and twelve years, older than the first Olympiad: and, to help out the Hypothesis, they have feigned twenty eight Olympiads older than the first Olympiad, wherein *Corœbus* was victor. But these things were feigned, after the days of *Thucydides* and *Plato*: for *Socrates* died three years after the end of the *Peloponnesian* war, and *Plato* [28]* introduceth him saying, that *the institutions of* Lycurgus *were but of three hundred years standing, or not much more*. And [29]* *Thucydides*, in the reading followed by *Stephanus*, saith, that *the* Lacedæmonians*, had from ancient times used good laws, and been free from tyranny; and that from the time that they had used one and the same administration of their commonwealth, to the end of the* Peloponnesian *war, there were three hundred years and a few more*. Count three hundred years back from the end of the *Peloponnesian* war, and they will place the Legislature of *Lycurgus* upon the 19th Olympiad. And, according to *Socrates*, it might be upon the 22d or 23d. *Athenæus* [30]* tells us out of ancient authors (*Hellanicus*, *Sosimus* and *Hieronymus*) that *Lycurgus* the Legislator, was contemporary to *Terpander* the Musician; and that *Terpander* was the first man who got the victory in the *Carnea*, in a solemnity of music instituted in those festivals in the 26th Olympiad. He overcame four times in those *Pythic* games, and therefore lived at least ‘till the 29th Olympiad: and beginning to flourish in the days of *Lycurgus*, it is not likely that *Lycurgus* began to flourish, much before the 18th Olympiad.

The name of *Lycurgus* being on the Olympic Disc, *Aristotle* concluded thence, that *Lycurgus* was the companion of *Iphitus*, in restoring the Olympic games: and this argument might be the ground of the opinion of Chronologers, that *Lycurgus* and *Iphitus* were contemporary. But *Iphitus* did not restore all the Olympic games. He [31]* restored indeed the Racing in the first Olympiad, *Corœbus* being victor. In the 14th Olympiad, the double *stadium* was added, *Hypœnus* being victor. And in the 18th Olympiad the *Quinquertium* and Wrestling were added, *Lampus* and *Eurybatus*, two *Spartans*, being victors: And the Disc was one of the games of the *Quinquertium*. [32]* *Pausanias* tells us that there were three Discs kept in the Olympic treasury at *Altis*: these therefore having the name of *Lycurgus* upon them, shew that they were given by him, at the institution of the *Quinquertium*, in the 18th Olympiad. Now *Polydectes* King of *Sparta*, being slain before the birth of his son *Charillus* or *Charilaus*, left the Kingdom to *Lycurgus* his brother; and *Lycurgus*, upon the birth of *Charillus*, became tutor to the child; and after about eight months travelled into *Crete* and *Asia*, till the child grew up, and brought back with him the poems of *Homer*; and soon after published his laws, suppose upon the 22d or 23d Olympiad; for he was then growing old: and *Terpander* was a Lyric Poet, and began to flourish about this time; for [33]* he imitated *Orpheus* and *Homer*, and sung *Homer's* verses and his own, and wrote the laws of *Lycurgus* in verse, and was victor in the *Pythic* games in the 26th Olympiad, as above. He was the first who distinguished the modes of Lyric music by several names. *Ardalus* and *Clonas* soon after did the like for wind music: and from henceforward, by the encouragement of the *Pythic* games, now instituted, several eminent Musicians and Poets flourished in *Greece*: as *Archilochus*, *Eumelus Corinthius*, *Polymnestus*, *Thaletas*, *Xenodemus*, *Xenocritus*, *Sacadas*, *Tyrtæus*, *Tlesilla*, *Rhianus*, *Alcman*, *Arion*, *Stesichorus*, *Mimnermnus*, *Alcæus*, *Sappho*, *Theognis*, *Anacreon*, *Ibycus*, *Simonides*, *Æschylus*, *Pindar*, by whom the Music and Poetry of the *Greeks* were brought to perfection.

Lycurgus, published his laws in the Reign of *Agesilaus*, the son and successor of *Doryagus*, in the Race of the Kings of *Sparta* descended from *Eurysthenes*. From the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*, to the end of the Reign of *Agesilaus*, there were six Reigns: and from the same

Return to the end of the Reign of *Polydectes*, in the Race of the *Spartan* Kings descended from *Procles*, there were also six Reigns: and these Reigns, at twenty years a-piece one with another, amount unto 120 years; besides the short Reign of *Aristodemus*, the father of *Eurysthenes* and *Procles*, which might amount to a year or two: for *Aristodemus* came to the crown, as [34]* *Herodotus* and the *Lacedæmonians* themselves affirmed. The times of the deaths of *Agesilaus* and *Polydectes* are not certainly known: but it may be presumed that *Lycurgus* did not meddle with the Olympic games before he came to the Kingdom; and therefore *Polydectes* died in the beginning of the 18th Olympiad, or but a very little before. If it may be supposed that the 20th Olympiad was in, or very near to the middle time between the deaths of the two Kings *Polydectes* and *Agesilaus*, and from thence be counted upwards the aforesaid 120 years, and one year more for the Reign of *Aristodemus*; the reckoning will place the Return of the *Heraclides*, about 45 years before the beginning of the Olympiads.

Iphitus, who restored the Olympic games, [35]* was descended from *Oxylus*, the son of *Hæmon*, the son of *Thoas*, the son of *Andræmon*: *Hercules* and *Andræmon* married two sisters: *Thoas* warred at *Troy*: *Oxylus* returned into *Peloponnesus* with the *Heraclides*. In this return he commanded the body of the *Ætolians*, and recovered *Elea*; [36]* from whence his ancestor *Ætolus*, the son of *Endymion*, the son of *Aethlius*, had been driven by *Salmoneus* the grandson of *Hellen*. By the friendship of the *Heraclides*, *Oxylus* had the care of the Olympic Temple committed to him: and the *Heraclides*, for his service done them, granted further upon oath that the country of the *Eleans* should be free from invasions, and be defended by them from all armed force: And when the *Eleans* were thus consecrated, *Oxylus* restored the Olympic games: and after they had been again intermitted, *Iphitus* their King [37]* restored them, and made them quadrennial. *Iphitus* is by some reckoned the son of *Hæmon*, by others the son of *Praxonidas*, the son of *Hæmon*: but *Hæmon* being the father of *Oxylus*, I would reckon *Iphitus* the son of *Praxonidas*, the son of *Oxylus*, the son of *Hæmon*. And by this reckoning the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus* will be two Generations by the eldest sons, or about 52 years, before the Olympiads.

Pausanias [38]* represents that *Melas* the son of *Antissus*, of the posterity of *Gonussa* the daughter of *Sicyon*, was not above six Generations older than *Cypselus* King of *Corinth*; and that he was contemporary to *Aletes*, who returned with the *Heraclides* into *Peloponnesus*. The Reign of *Cypselus* began *An.* 2, Olym, according to Chronologers; and six Generations, at about 30 years to a Generation, amount unto 180 years. Count those years backwards from *An.* 2, Olym, and they will place the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus* 58 years before the first Olympiad. But it might not be so early, if the Reign of *Cypselus* began three or four Olympiads later; for he reigned before the *Persian* Empire began.

Hercules the *Argonaut* was the father of *Hyllus*; the father of *Cleodius*; the father of *Aristomachus*; the father of *Temenus*, *Cresphontes*, and *Aristodemus*, who led the *Heraclides* into *Peloponnesus* and *Eurystheus*, who was of the same age with *Hercules*, was slain in the first attempt of the *Heraclides* to return: *Hyllus* was slain in the second attempt, *Cleodius* in the third attempt, *Aristomachus* in the fourth attempt, and *Aristodemus* died as soon as they were returned, and left the Kingdom of *Sparta* to his sons *Eurysthenes* and *Procles*. Whence their Return was four Generations later than the *Argonautic* expedition: And these Generations were short ones, being by the chief of the family, and suit with the reckoning of *Thucydides* and the Ancients, that the taking of *Troy* was about 75 or eighty years before the return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*; and the *Argonautic* expedition one Generation earlier than the taking of *Troy*. Count therefore eighty years backward from the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus* to the *Trojan* war, and the taking of *Troy* will be about 76 years after the death of *Solomon*: And the *Argonautic* expedition, which was one Generation earlier, will be about 43 years after it. From the taking of *Troy* to the Return of the *Heraclides*, could scarce be more than eighty years, because *Orestes* the son of *Agamemnon* was a youth at the taking of *Troy*, and his sons *Penthilus* and *Tisamenus* lived till the Return of the *Heraclides*.

Æsculapius and *Hercules* were *Argonauts*, and *Hippocrates* was the eighteenth inclusively by the father's side from *Æsculapius*, and the nineteenth from *Hercules* by the mother's side: and because these Generations, being taken notice of by writers, were most probably by the

principal of the family, and so for the most part by the eldest sons; we may reckon about 28 or at the most about 30 years to a Generation. And thus the seventeen intervals by the father's side, and eighteen by the mother's, will at a middle reckoning amount unto about 507 years: which counted backwards from the beginning of the *Peloponnesian* war, at which time *Hippocrates* began to flourish, will reach up to the 43d year after the death of *Solomon*, and there place the *Argonautic* expedition.

When the *Romans* conquered the *Carthaginians*, the Archives of *Carthage* came into their hands: And thence *Appian*, in his history of the *Punic* wars, tells in round numbers that *Carthage* stood seven hundred years: and [39]* *Solinus* adds the odd number of years in these words: *Adrymeto atque Carthagini author est a Tyro populus. Urbem istam, ut Cato in Oratione Senatoria autumat; cum rex Hiarbas rerum in Libya potiretur, Elissa mulier extruxit, domo Phœnix & Carthadam dixit, quod Phœnicum ore exprimit civitatem novam; mox sermone verso Carthago dicta est, quæ post annos septingentos triginta septem exciditur quam fuerat extructa*. *Elissa* was *Dido*, and *Carthage* was destroyed in the Consulship of *Lentulus* and *Mummius*, in the year of the *Julian Period* 4568; from whence count backwards *737* years, and the *Encœnia* or Dedication of the City, will fall upon the 16th year of *Pygmalion*, the brother of *Dido*, and King of *Tyre*. She fled in the seventh year of *Pygmalion*, but the *Æra* of the City began with its *Encœnia*. Now *Virgil*, and his Scholiast *Servius*, who might have some things from the archives of *Tyre* and *Cyprus*, as well as from those of *Carthage*, relate that *Teucer* came from the war of *Troy* to *Cyprus*, in the days of *Dido*, a little before the Reign of her brother *Pygmalion*; and, in conjunction with her father, seized *Cyprus*, and ejected *Cinyras*: and the Marbles say that *Teucer* came to *Cyprus* seven years after the destruction of *Troy*, and built *Salamis*; and *Apollodorus*, that *Cinyras* married *Metharme* the daughter of *Pygmalion*, and built *Paphos*. Therefore, if the *Romans*, in the days of *Augustus*, followed not altogether the artificial Chronology of *Eratosthenes*, but had these things from the records of *Carthage*, *Cyprus*, or *Tyre*; the arrival of *Teucer* at *Cyprus* will be in the Reign of the predecessor of *Pygmalion*: and by consequence the destruction of *Troy*, about 76 years later than the death of *Solomon*.

Dionysius Halicarnassensis [40]* tells us, that in the time of the *Trojan* war, *Latinus* was King of the *Aborigines* in *Italy*, and that in the sixteenth Age after that war, *Romulus* built *Rome*. By Ages he means Reigns of Kings: for after *Latinus* he names sixteen Kings of the *Latines*, the last of which was *Numitor*, in whose days *Romulus* built *Rome*: for *Romulus* was contemporary to *Numitor*, and after him *Dionysius* and others reckon six Kings more over *Rome*, to the beginning of the Consuls. Now these twenty and two Reigns, at about 18 years to a Reign one with another, for many of these Kings were slain, took up 396 years; which counted back from the consulship of *Junius Brutus* and *Valerius Publicola*, the two first Consuls, place the *Trojan* war about 78 years after the death of *Solomon*.

The expedition of *Sesostris* was one Generation earlier than the *Argonautic* expedition: for in his return back into *Egypt* he left *Æetes* in *Colchis*, and *Æetes* reigned there 'till the *Argonautic* expedition; and *Prometheus* was left by *Sesostris* with a body of men at *Mount Caucasus*, to guard that pass, and after thirty years was released by *Hercules* the *Argonaut*: and *Phlyas* and *Eumedon*, the sons of the great *Bacchus*, so the Poets call *Sesostris*, and of *Ariadne* the daughter of *Minos*, were *Argonauts*. At the return of *Sesostris* into *Egypt*, his brother *Danaus* fled from him into *Greece* with his fifty daughters, in a long ship; after the pattern of which the ship *Argo* was built: and *Argus*, the son of *Danaus*, was the master-builder thereof. *Nauplius* the *Argonaut* was born in *Greece*, of *Amymone*, one of the daughters of *Danaus*, and of *Neptune*, the brother and admiral of *Sesostris*: And two others of the daughters of *Danaus* married *Archander* and *Archilites*, the sons of *Achæus*, the son of *Creusa*, the daughter of *Erechtheus* King of *Athens*: and therefore the daughters of *Danaus* were three Generations younger than *Erechtheus*; and by consequence contemporary to *Theseus* the son of *Ægeus*, the adopted son of *Pandion*, the son of *Erechtheus*. *Theseus*, in the time of the *Argonautic* expedition, was of about 50 years of age, and so was born about the 33d year of *Solomon*: for he stole *Helena* [41]* just before that expedition, being then 50 years old, and she but seven, or as some say ten. *Pirithous* the son of *Ixion* helped *Theseus* to steal *Helena*, and then [42]* *Theseus* went with *Pirithous* to steal *Persephone*, the daughter of *Aidoneus*, or *Orcus*, King of the *Molossians*, and was taken in the action: and whilst he lay in prison, *Castor* and *Pollux*

returning from the *Argonautic* expedition, released their sister *Helena*, and captivated *Æthra* the mother of *Theseus*. Now the daughters of *Danaus* being contemporary to *Theseus*, and some of their sons being *Argonauts*, *Danaus* with his daughters fled from his brother *Sesostris* into *Greece* about one Generation before the *Argonautic* expedition; and therefore *Sesostris* returned into *Egypt* in the Reign of *Rehoboam*. He came out of *Egypt* in the fifth year of *Rehoboam*, [43]* and spent nine years in that expedition, against the Eastern Nations and *Greece*; and therefore returned back into *Egypt*, in the fourteenth year of *Rehoboam*. *Sesac* and *Sesostris* were therefore Kings of all *Egypt*, at one and the same time: and they agree not only in the time, but also in their actions and conquests. God gave *Sesac* ממלכות הארצות *the Kingdoms of the lands*, 2 Chron. xii. Where *Herodotus* describes the expedition of *Sesostris*, *Josephus* [44]* tells us that he described the expedition of *Sesac*, and attributed his actions to *Sesostris*, erring only in the name of the King. Corruptions of names are frequent in history; *Sesostris* was otherwise called *Sesochris*, *Sesochis*, *Sesoosis*, *Sethosis*, *Sesonchis*, *Sesonchosis*. Take away the *Greek* termination, and the names become *Sesost*, *Sesoch*, *Sesoos*, *Sethos*, *Sesonch*: which names differ very little from *Sesach*. *Sesonchis* and *Sesach* differ no more than *Memphis* and *Moph*, two names of the same city. *Josephus* [45]* tells us also, from *Manetho*, that *Sethosis* was the brother of *Armais*, and that these brothers were otherwise called *Ægyptus* and *Danaus*; and that upon the return of *Sethosis* or *Ægyptus*, from his great conquests into *Egypt*, *Armais* or *Danaus* fled from him into *Greece*.

Egypt was at first divided into many small Kingdoms, like other nations; and grew into one monarchy by degrees: and the father of *Solomon's* Queen, was the first King of *Egypt*, who came into *Phœnicia* with an Army: but he only took *Gezir*, and gave it to his daughter. *Sesac*, the next King, came out of *Egypt* with an army of *Libyans*, *Troglodites* and *Ethiopians*, 2 Chron. xii. 3. and therefore was then King of all those countries; and we do not read in Scripture, that any former King of *Egypt*; who Reigned over all those nations, came out of *Egypt* with a great army to conquer other countries. The sacred history of the *Israelites*, from the days of *Abraham* to the days of *Solomon*, admits of no such conqueror. *Sesostris* reigned over all the same nations of the *Libyans*, *Troglodites* and *Ethiopians*, and came out of

Egypt with a great army to conquer other Kingdoms. The Shepherds reigned long in the lower part of *Egypt*, and were expelled thence, just before the building of *Jerusalem* and the Temple; according to *Manetho*; and whilst they Reigned in the lower part of *Egypt*, the upper part thereof was under other Kings: and while *Egypt* was divided into several Kingdoms, there was no room for any such King of all *Egypt* as *Sesostris*; and no historian makes him later than *Sesac*: and therefore he was one and the same King of *Egypt* with *Sesac*. This is no new opinion: *Josephus* discovered it when he affirmed that *Herodotus* erred, in ascribing the actions of *Sesac* to *Sesostris*, and that the error was only in the name of the King: for this is as much as to say, that the true name of him who did those things described by *Herodotus*, was *Sesac*; and that *Herodotus* erred only in calling him *Sesostris*; or that he was called *Sesostris* by a corruption of his name. Our great Chronologer, *Sir John Marsham*, was also of opinion that *Sesostris* was *Sesac*: and if this be granted, it is then most certain, that *Sesostris* came out of *Egypt* in the fifth year of *Rehoboam* to invade the nations, and returned back into *Egypt* in the 14th year of that King; and that *Danaus* then flying from his brother, came into *Greece* within a year or two after: and the *Argonautic* expedition being one Generation later than that invasion, and than the coming of *Danaus* into *Greece*, was certainly about 40 or 45 years later than the death of *Solomon*. *Prometheus* stay'd on *Mount Caucasus* [46]* thirty years, and then was released by *Hercules*: and therefore the *Argonautic* expedition was thirty years after *Prometheus* had been left on *Mount Caucasus* by *Sesostris*, that is, about 44 years after the death of *Solomon*.

All nations, before the just length of the Solar year was known, reckoned months by the course of the moon; and years by the [47]* returns of winter and summer, spring and autumn: and in making Calendars for their Festivals, reckoned thirty days to a Lunar month, and twelve Lunar months to a year; taking the nearest round numbers: whence came the division of the Ecliptic into 360 degrees. So in the time of *Noah*'s flood, when the Moon could not be seen, *Noah* reckoned thirty days to a month: but if the Moon appeared a day or two before the end of the month, [48]* they began the next month with the first day of her appearing: and this was done generally, 'till the *Egyptians* of *Thebais* found the length of the Solar year. So [49]* *Diodorus* tells us that *the* Egyptians *of* Thebais *use no intercalary*

months, nor subduct any days [from the month] *as is done by most of the* Greeks. And [50]* *Cicero*, *est consuetudo Siculorum cæterorumque Græcorum, quod suos dies mensesque congruere volunt cum Solis Lunæque ratione, ut nonnumquam siquid discrepet, eximant unum aliquem diem aut summum biduum ex mense* [civili dierum triginta] *quos illi* εξαιρεσιμους *dies nominant*. And *Proclus*, upon *Hesiod*'s τριακας mentions the same thing. And [51]* *Geminus*: Προθεσις γαρ ην τοις αρχαιοις, τους μεν μηνας αγειν κατα σεληνην, τους δε ενιαυτους καθ' 'ηλιον. Το γαρ 'υπο των νομων, και των χρησμων παραγγελλομενον, το θυειν κατα γ', ηγουν τα πατρια, μηνας, 'ημερας, ενιαυτους: τουτο διελαβον απαντες 'οι 'Ελληνες τωι τους μεν 'ενιαυτους συμφωνως αγειν τωι 'ηλιωι· τας δε 'ημερας και τους μηνας τηι σεληνη. εστι δε το μεν καθ' 'ηλιον αγειν τους ενιαυτους, το περι τας αυτας 'ωρας του ενιαυτου τας αυτας θυσιας τοις θεοις επιτελειθαι, και την μεν εαρινην θυσιαν δια παντος κατα το εαρ συντελειθαι· την δε θερινην, κατα το θερος· 'ομοιως δε και κατα τους λοιπους καιρους του ετους τας αυτας θυσιας πιπτειν. Τουτο γαρ 'υπελαβον προσηνες, και κεχαρισμενον ειναι τοις θεοις. Τουτο δ' αλλως ουκ αν δυναιτο γενεσθαι, ει μη 'αι τροπαι, και 'αι ισημεριαι περι τους αυτους τοπους γιγνοιντο. Το δε κατα σεληνην αγειν τας 'ημερας, τοιουτον εστι· το ακολουθως τοις της σεληνης φωτισμοις τας προσηγοριας των 'ημερων γινεσθαι. απο γαρ των της σεληνης φωτισμων 'αι προσηγοριαι των 'ημερων κατωνομασθησαν. Εν 'ηι μεν γαρ 'ημεραι νεα 'η σεληνη φαινεται, κατα συναλοιφην νεομηνια προσηγορευθη· εν 'ηι δε 'ημεραι την δευτεραν φασιν ποιειται, δευτεραν προσηγορευσαν· την δε κατα μεσον του μηνος γινομενην φασιν της σεληνης, απο αυτου του συμβαινοντος διχομηνιαν εκαλεσαν. και καθολου δε πασας τας 'ημερας απο των της σεληνης φωτισματων προσωνομασαν. 'οθεν και την τριακοστην του μηνος 'ημεραν εσχατην ουσαν απο αυτου του συμβαινοντος τριακαδα εκαλεσαν. *Propositum enim fuit veteribus, menses quidem agere secundum Lunam, annos vero secundum Solem. Quod enim a legibus & Oraculis præcipiebatur, ut sacrificarent secundum tria, videlicet patria, menses, dies, annos; hoc ita distincte faciebant universi Græci, ut annos agerent congruenter cum Sole, dies vero & menses cum Luna. Porro secundum Solem annos agere, est circa easdem tempestates anni eadem sacrificia Diis perfici, & vernum sacrificium semper in vere consummari, æstivum autem in æstate: similiter & in reliquis anni temporibus eadem sacrificia cadere.*

Hoc enim putabant acceptum & gratum esse Diis. Hoc autem aliter fieri non posset nisi conversiones solstitiales & æquinoctia in iisdem Zodiaci locis fierent. Secundum Lunam vero dies agere est tale ut congruant cum Lunæ illuminationibus appellationes dierum. Nam a Lunæ illuminationibus appellationes dierum sunt denominatæ. In qua enim die Luna apparet nova, ea per Synalœphen, seu compositionem νεομηνια id est, Novilunium appellatur. In qua vero die secundam facit apparitionem, eam secundam Lunam vocarunt. Apparitionem Lunæ quæ circa medium mensis fit, ab ipso eventu διχομηνιαν, id est medietatem mensis nominarunt. Ac summatim, omnes dies a Lunæ illuminationibus denominarunt. Unde etiam tricesimam mensis diem, cum ultima sit, ab ipso eventu τριακαδα vocarunt.

The ancient Calendar year of the *Greeks* consisted therefore of twelve Lunar months, and every month of thirty days: and these years and months they corrected from time to time, by the courses of the Sun and Moon, omitting a day or two in the month, as often as they found the month too long for the course of the Moon; and adding a month to the year, as often as they found the twelve Lunar months too short for the return of the four seasons. *Cleobulus*, [52]* one of the seven wise men of *Greece*, alluded to this year of the *Greeks*, in his Parable of one father who had twelve sons, each of which had thirty daughters half white and half black: and *Thales* [53]* called the last day of the month τριακαδα, the thirtieth: and *Solon* counted the ten last days of the month backward from the thirtieth, calling that day ενην και νεαν, the old and the new, or the last day of the old month and the first day of the new: for he introduced months of 29 and 30 days alternately, making the thirtieth day of every other month to be the first day of the next month.

To the twelve Lunar months [54]* the ancient *Greeks* added a thirteenth, every other year, which made their *Dieteris*; and because this reckoning made their year too long by a month in eight years, they omitted an intercalary month once in eight years, which made their *Octaeteris*, one half of which was their *Tetraeteris*: And these Periods seem to have been almost as old as the religions of *Greece*, being used in divers of their *Sacra*. The [55]* *Octaeteris* was the *Annus magnus* of *Cadmus* and *Minos*, and seems to have been brought into *Greece* and *Crete* by the *Phœnicians*, who came thither with *Cadmus* and *Europa*, and to have continued ‘till after the days

of *Herodotus*: for in counting the length of seventy years [56]*, he reckons thirty days to a Lunar month, and twelve such months, or 360 days, to the ordinary year, without the intercalary months, and 25 such months to the *Dieteris*: and according to the number of days in the Calendar year of the *Greeks*, *Demetrius Phalereus* had 360 Statues erected to him by the *Athenians*. But the *Greeks*, *Cleostratus*, *Harpalus*, and others, to make their months agree better with the course of the Moon, in the times of the *Persian* Empire, varied the manner of intercaling the three months in the *Octaeteris*; and *Meton* found out the Cycle of intercaling seven months in nineteen years.

The Ancient year of the *Latines* was also Lunisolar; for *Plutarch* [57]* tells us, that the year of *Numa* consisted of twelve Lunar months, with intercalary months to make up what the twelve Lunar months wanted of the Solar year. The Ancient year of the *Egyptians* was also Lunisolar, and continued to be so ‘till the days of *Hyperion*, or *Osiris*, a King of *Egypt*, the father of *Helius* and *Selene*, or *Orus* and *Bubaste*: For the *Israelites* brought this year out of *Egypt*; and *Diodorus* tells [58]* us that *Ouranus* the father of *Hyperion* used this year, and [59]* that in the Temple of *Osiris* the Priests appointed thereunto filled 360 Milk Bowls every day: I think he means one Bowl every day, in all 360, to count the number of days in the Calendar year, and thereby to find out the difference between this and the true Solar year: for the year of 360 days was the year, to the end of which they added five days.

That the *Israelites* used the Lunisolar year is beyond question. Their months began with their new Moons. Their first month was called *Abib*, from the earing of Corn in that month. Their Passover was kept upon the fourteenth day of the first month, the Moon being then in the full: and if the Corn was not then ripe enough for offering the first Fruits, the Festival was put off, by adding an intercalary month to the end of the year; and the harvest was got in before the Pentecost, and the other Fruits gathered before the Feast of the seventh month.

Simplicius in his commentary [60]* on the first of *Aristotle*’s *Physical Acroasis*, tells us, that *some begin the year upon the Summer Solstice, as the People of* Attica*; or upon the Autumnal Equinox, as the People of* Asia*; or in Winter, as the* Romans*; or about the Vernal Equinox, as the* Arabians *and*

People of Damascus*: and the month began, according to some, upon the Full Moon, or upon the New.* The years of all these Nations were therefore Lunisolar, and kept to the four Seasons: and the *Roman* year began at first in Spring, as I seem to gather from the Names of their Months, *Quintilis*, *Sextilis*, *September*, *October*, *November*, *December*: and the beginning was afterwards removed to Winter. The ancient civil year of the *Assyrians* and *Babylonians* was also Lunisolar: for this year was also used by the *Samaritans*, who came from several parts of the *Assyrian* Empire; and the *Jews* who came from *Babylon* called the months of their Lunisolar year after the Names of the months of the *Babylonian* year: and *Berosus* [61]* tells us that the *Babylonians* celebrated the Feast *Sacæa* upon the 16th day of the month *Lous*, which was a Lunar month of the *Macedonians*, and kept to one and the same Season of the year: and the *Arabians*, a Nation who peopled *Babylon*, use Lunar months to this day. *Suidas* [62]* tells us, that the *Sarus* of the *Chaldeans* contains 222 Lunar months, which are eighteen years, consisting each of twelve Lunar months, besides six intercalary months: and when [63]* *Cyrus* cut the River *Gindus* into 360 Channels, he seems to have alluded unto the number of days in the Calendar year of the *Medes* and *Persians*: and the Emperor *Julian* [64]* writes, *For when all other People, that I may say it in one word, accommodate their months to the course of the Moon, we alone with the* Egyptians *measure the days of the year by the course of the Sun.*

At length the *Egyptians*, for the sake of Navigation, applied themselves to observe the Stars; and by their Heliacal Risings and Settings found the true Solar year to be five days longer than the Calendar year, and therefore added five days to the twelve Calendar months; making the Solar year to consist of twelve months and five days. *Strabo* [65]* and [66]* *Diodorus* ascribe this invention to the *Egyptians* of *Thebes*. *The* Theban *Priests*, saith *Strabo*, *are above others said to be Astronomers and Philosophers. They invented the reckoning of days not by the course of the Moon, but by the course of the Sun. To twelve months each of thirty days they add yearly five days.* In memory of this Emendation of the year they dedicated the [67]* five additional days to *Osiris*, *Isis*, *Orus* senior, *Typhon*, and *Nephthe* the wife of *Typhon*, feigning that those days were added to the year when these five Princes were born, that is, in the Reign of *Ouranus*, or *Ammon*, the father of

Sesac: and in [68]* the Sepulchre of *Amenophis*, who Reigned soon after, they placed a Golden Circle of 365 cubits in compass, and divided it into 365 equal parts, to represent all the days in the year, and noted upon each part the Heliacal Risings and Settings of the Stars on that day; which Circle remained there 'till the invasion of *Egypt* by *Cambyses* King of *Persia*. 'Till the Reign of *Ouranus*, the father of *Hyperion*, and grandfather of *Helius* and *Selene*, the *Egyptians* used the old Lunisolar year: but in his Reign, that is, in the Reign of *Ammon*, the father of *Osiris* or *Sesac*, and grandfather of *Orus* and *Bubaste*, the *Thebans* began to apply themselves to Navigation and Astronomy, and by the Heliacal Risings and Settings of the Stars determined the length of the Solar year; and to the old Calendar year added five days, and dedicated them to his five children above mentioned, as their birth days: and in the Reign of *Amenophis*, when by further Observations they had sufficiently determined the time of the Solstices, they might place the beginning of this new year upon the Vernal Equinox. This year being at length propagated into *Chaldæa*, gave occasion to the year of *Nabonassar*; for the years of *Nabonassar* and those of *Egypt* began on one and the same day, called by them *Thoth*, and were equal and in all respects the same: and the first year of *Nabonassar* began on the 26th day of *February* of the old *Roman* year, seven hundred forty and seven years before the Vulgar *Æra* of *Christ*, and thirty and three days and five hours before the Vernal Equinox, according to the Sun's mean motion; for it is not likely that the Equation of the Sun's motion should be known in the infancy of Astronomy. Now reckoning that the year of 365 days wants five hours and 49 minutes of the Equinoctial year; the beginning of this year will move backwards thirty and three days and five hours in 137 years: and by consequence this year began at first in *Egypt* upon the Vernal Equinox, according to the Sun's mean motion, 137 years before the *Æra* of *Nabonassar* began; that is, in the year of the *Julian* Period 3830, or 96 years after the death of *Solomon*: and if it began upon the next day after the Vernal Equinox, it might begin four years earlier; and about that time ended the Reign of *Amenophis*: for he came not from *Susa* to the *Trojan* war, but died afterwards in *Egypt*. This year was received by the *Persian* Empire from the *Babylonian*; and the *Greeks* also used it in the *Æra Philippæa*, dated from the Death of *Alexander* the great;

and *Julius Cæsar* corrected it, by adding a day in every four years, and made it the year of the *Romans*.

Syncellus tells us, that the five days were added to the old year by the last King of the Shepherds: and the difference in time between the Reign of this King, and that of *Ammon*, is but small; for the Reign of the Shepherds ended but one Generation, or two, before *Ammon* began to add those days. But the Shepherds minded not Arts and Sciences.

The first month of the Lunisolar year, by reason of the Intercalary month, began sometimes a week or a fortnight before the Equinox or Solstice, and sometimes as much after it. And this year gave occasion to the first Astronomers, who formed the *Asterisms*, to place the Equinoxes and Solstices in the middles of the Constellations of *Aries*, *Cancer*, *Chelæ*, and *Capricorn*. *Achilles Tatius* [69]* tells us, that *some antiently placed the Solstice in the beginning of* Cancer*, others in the eighth degree of* Cancer*, others about the twelfth degree, and others about the fifteenth degree thereof.* This variety of opinions proceeded from the precession of the Equinox, then not known to the *Greeks*. When the Sphere was first formed, the Solstice was in the fifteenth degree or middle of the Constellation of *Cancer*: then it came into the twelfth, eighth, fourth, and first degree successively. *Eudoxus*, who flourished about sixty years after *Meton*, and an hundred years before *Aratus*, in describing the Sphere of the Ancients, placed the Solstices and Equinoxes in the middles of the Constellations of *Aries*, *Cancer*, *Chelæ*, and *Capricorn*, as is affirmed by [70]* *Hipparchus Bithynus*; and appears also by the Description of the Equinoctial and Tropical Circles in *Aratus*, [71]* who copied after *Eudoxus*; and by the positions of the *Colures* of the Equinoxes and Solstices, which in the Sphere of *Eudoxus*, described by *Hipparchus*, went through the middles of those Constellations. For *Hipparchus* tells us, that *Eudoxus* drew the *Colure* of the Solstices, through the middle of the *great Bear*, and the middle of *Cancer*, and the neck of *Hydrus*, and the Star between the Poop and Mast of *Argo*, and the Tayl of the *South Fish*, and through the middle of *Capricorn*, and of *Sagitta*, and through the neck and right wing of the *Swan*, and the left hand of *Cepheus*; and that he drew the Equinoctial *Colure*, through the left hand of *Arctophylax*, and along the middle of his Body, and cross the middle of *Chelæ*, and through the right hand and fore-knee of the *Centaur*,

and through the flexure of *Eridanus* and head of *Cetus*, and the back of *Aries* a-cross, and through the head and right hand of *Perseus*.

Now *Chiron* delineated σχηματα ολυμπου the *Asterisms*, as the ancient Author of *Gigantomachia*, cited by [72]* *Clemens Alexandrinus* informs us: for *Chiron* was a practical Astronomer, as may be there understood also of his daughter *Hippo*: and *Musæus*, the son of *Eumolpus* and master of *Orpheus*, and one of the *Argonauts*, [73]* made a Sphere, and is reputed the first among the *Greeks* who made one: and the Sphere it self shews that it was delineated in the time of the *Argonautic* expedition; for that expedition is delineated in the *Asterisms*, together with several other ancienter Histories of the *Greeks*, and without any thing later. There's the golden *RAM*, the ensign of the Vessel in which *Phryxus* fled to *Colchis*; the *BULL* with brazen hoofs tamed by *Jason*; and the *TWINS*, *CASTOR* and *POLLUX*, two of the *Argonauts*, with the *SWAN* of *Leda* their mother. There's the Ship *ARGO*, and *HYDRUS* the watchful Dragon; with *Medea*'s *CUP*, and a *RAVEN* upon its Carcass, the Symbol of Death. There's *CHIRON* the master of *Jason*, with his *ALTAR* and *SACRIFICE*. There's the *Argonaut HERCULES* with his *DART* and *VULTURE* falling down; and the *DRAGON*, *CRAB* and *LION*, whom he slew; and the *HARP* of the *Argonaut Orpheus*. All these relate to the *Argonauts*. There's *ORION* the son of *Neptune*, or as some say, the grandson of *Minos*, with his *DOGS*, and *HARE*, and *RIVER*, and *SCORPION*. There's the story of *Perseus* in the Constellations of *PERSEUS*, *ANDROMEDA*, *CEPHEUS*, *CASSIOPEA* and *CETUS*: That of *Callisto*, and her son *Arcas*, in *URSA MAJOR* and *ARCTOPHYLAX*: That of *Icareus* and his daughter *Erigone* in *BOOTES*, *PLAUSTRUM* and *VIRGO*. *URSA MINOR* relates to one of the Nurses of *Jupiter*, *AURIGA* to *Erechthonius*, *OPHIUCHUS* to *Phorbas*, *SAGITTARIUS* to *Crolus* the son of the Nurse of the Muses, *CAPRICORN* to *Pan*, and *AQUARIUS* to *Ganimede*. There's *Ariadne*'s *CROWN*, *Bellerophon*'s *HORSE*, *Neptune*'s *DOLPHIN*, *Ganimede*'s *EAGLE*, *Jupiter*'s *GOAT* with her *KIDS*, *Bacchus*'s *ASSES*, and the *FISHES* of *Venus* and *Cupid*, and their Parent the *SOUTH FISH*. These with *DELTOTON*, are the old Constellations mentioned by *Aratus*: and they all relate to the *Argonauts* and their Contemporaries, and to Persons one or two Generations older: and nothing later than that Expedition was delineated there

Originally. *ANTINOUS* and *COMA BERENICES* are novel. The Sphere seems therefore to have been formed by *Chiron* and *Musæus*, for the use of the *Argonauts*: for the Ship *Argo* was the first long ship built by the *Greeks*. Hitherto they had used round vessels of burden, and kept within sight of the shore; and now, upon an Embassy to several Princes upon the coasts of the *Euxine* and *Mediterranean* Seas, [74]* by the dictates of the Oracle, and consent of the Princes of *Greece*, the Flower of *Greece* were to sail with Expedition through the deep, in a long Ship with Sails, and guide their Ship by the Stars. The People of the Island *Corcyra* [75]* attributed the invention of the Sphere to *Nausicaa*, the daughter of *Alcinous*, King of the *Pheaces* in that Island: and it's most probable that she had it from the *Argonauts*, who [76]* in their return home sailed to that Island, and made some stay there with her father. So then in the time of the *Argonautic* Expedition, the Cardinal points of the Equinoxes and Solstices were in the middles of the Constellations of *Aries*, *Cancer*, *Chelæ*, and *Capricorn*.

In the end of the year of our Lord 1689 the Star called *Prima Arietis* was in. 28°. 51'. 00", with North Latitude 7°. 8'. 58". And the Star called *ultima caudæ Arietis* was in. 19°. 3'. 42", with North Latitude 2°. 34'. 5". And the *Colurus Æquinoctiorum* passing through the point in the middle between those two Stars did then cut the Ecliptic in. 6°. 44': and by this reckoning the Equinox in the end of the year 1689 was gone back 36°. 44'. since the *Argonautic* Expedition: Supposing that the said *Colure* passed through the middle of the Constellation of *Aries*, according to the delineation of the Ancients. The Equinox goes back fifty seconds in one year, and one degree in seventy and two years, and by consequence 36°. 44'. in 2645 years, which counted back from the end of the year of our Lord 1689, or beginning of the year 1690, will place the *Argonautic* Expedition about 25 years after the Death of *Solomon*: but it is not necessary that the middle of the Constellation of *Aries* should be exactly in the middle between the two Stars called *prima Arietis* and *ultima Caudæ*: and it may be better to fix the Cardinal points by the Stars, through which the *Colures* passed in the primitive Sphere, according to the description of *Eudoxus* above recited. By the *Colure* of the Equinoxes, I mean a great Circle passing through the Poles of the Equator, and cutting the Ecliptic in the Equinoxes in an Angle of 66½ degrees, the complement of the Sun's greatest Declination; and by

the *Colure* of the Solstices I mean a great Circle passing through the same Poles, and cutting the Ecliptic at right Angles in the Solstices: and by the Primitive Sphere, that which was in use before the motions of the Equinoxes and Solstices were known: now the *Colures* passed through the following Stars according to *Eudoxus*.

In the back of *Aries* is a Star of the sixth magnitude, marked ν by *Bayer*: in the end of the year 1689, and beginning of the year 1690, its Longitude was. 9°. 38'. 45", and North Latitude 6°. 7'. 56": and the *Colurus Æquinoctiorum* drawn though it, according to *Eudoxus*, cuts the Ecliptic in. 6°. 58'. 57". In the head of *Cetus* are two Stars of the fourth Magnitude, called ν and ξ by *Bayer*: in the end of the year 1689 their Longitudes were. 4°. 3'. 9". and. 3°. 7'. 37", and their South Latitudes 9°. 12'. 26". and 5°. 53'. 7"; and the *Colurus Æquinoctiorum* passing in the mid way between them, cuts the Ecliptic in. 6°. 58'. 51". In the extreme flexure of *Eridanus*, rightly delineated, is a Star of the fourth Magnitude, of late referred to the breast of *Cetus*, and called ρ by *Bayer*; it is the only Star in *Eridanus* through which this *Colure* can pass; its Longitude, in the end of the year 1689, was. 25°. 22'. 10". and South Latitude 25°. 15'. 50". and the *Colurus Æquinoctiorum* passing through it, cuts the Ecliptic in. 7°. 12'. 40". In the head of *Perseus*, rightly delineated, is a Star of the fourth Magnitude, called τ by *Bayer*; the Longitude of this Star, in the end of the year 1689, was. 23°. 25'. 30", and North Latitude 34°. 20'. 12": and the *Colurus Æquinoctiorum* passing through it, cuts the Ecliptic in. 6°. 18'. 57". In the right hand of *Perseus*, rightly delineated, is a Star of the fourth Magnitude, called η by *Bayer*; its Longitude in the end of the year 1689, was. 24°. 25'. 27", and North Latitude 37°. 26'. 50": and the *Colurus Æquinoctiorum* passing through it cuts the Ecliptic in. 4°. 56'. 40": and the fifth part of the summ of the places in which these five *Colures* cut the Ecliptic, is. 6°. 29'. 15": and therefore the Great Circle which in the Primitive Sphere according to *Eudoxus*, and by consequence in the time of the *Argonautic* Expedition, was the *Colurus Æquinoctiorum* passing through the Stars above described; did in the end of the year 1689, cut the Ecliptic in. 6°. 29'. 15": as nearly as we have been able to determin by the Observations of the Ancients, which were but coarse.

In the middle of *Cancer* is the *South Asellus*, a Star of the fourth Magnitude, called by *Bayer* δ; its Longitude in the end of the year 1689,

was. 4°. 23’. 40”. In the neck of *Hydrus*, rightly delineated, is a Star of the fourth Magnitude, called δ by *Bayer*; its Longitude in the end of the year 1689, was. 5°. 59’. 3”. Between the poop and mast of the Ship *Argo* is a Star of the third Magnitude, called ι by *Bayer*; its Longitude in the end of that year, was. 7°. 5’. 31”. In *Sagitta* is a Star of the sixth Magnitude, called θ by *Bayer*; its Longitude in the end of the same year 1689, was. 6°. 29’. 53”. In the middle of *Capricorn* is a Star of the fifth Magnitude, called η by *Bayer*; its Longitude in the end of the same year was. 8°. 25’. 55”: and the fifth part of the summ of the three first Longitudes, and of the complements of the two last to 180 Degrees; is. 6°. 28’. 46”. This is the new Longitude of the old *Colurus Solstitiorum* passing through these Stars. The same *Colurus* passes also in the middle between the Stars η and κ, of the fourth and fifth Magnitudes, in the neck of the *Swan*; being distant from each about a Degree: it passeth also by the Star κ, of the fourth Magnitude, in the right wing of the *Swan*; and by the Star o, of the fifth Magnitude, in the left hand of *Cepheus*, rightly delineated; and by the Stars in the tail of the *South-Fish*; and is at right angles with the *Colurus Æquinoctiorum* found above: and so it hath all the characters, of the *Colurus Solstitiorum* rightly drawn.

The two *Colures* therefore, which in the time of the *Argonautic* Expedition cut the Ecliptic in the Cardinal Points, did in the end of the year 1689 cut it in. 6°. 29’;. 6°. 29’;. 6°. 29’; and. 6°. 29’; that is, at the distance of 1 Sign, 6 Degrees and 29 Minutes from the Cardinal Points of *Chiron*; as nearly as we have been able to determin from the coarse observations of the Ancients: and therefore the Cardinal Points, in the time between that Expedition and the end of the year 1689, have gone back from those *Colures* one Sign, 6 Degrees and 29 Minutes; which, after the rate of 72 years to a Degree, answers to 2627 years. Count those years backwards from the end of the year 1689, or beginning of the year 1690, and the reckoning will place the *Argonautic* Expedition, about 43 years after the death of *Solomon*.

By the same method the place of any Star in the Primitive Sphere may readily be found, counting backwards one Sign, 6°. 29’. from the Longitude which it had in the end of the year of our Lord 1689. So the Longitude of the first Star of *Aries* in the end of the year 1689 was. 28°. 51’. as above: count backward 1 Sign, 6°. 29’. and its Longitude, counted from the Equinox in the middle of the Constellation of *Aries*, in the time of the

Argonautic expedition, will be. 22°. 22’: and by the same way of arguing, the Longitude of the *Lucida Pleiadum* in the time of the *Argonautic* Expedition will be. 19°. 26’. 8”: and the Longitude of *Arcturus*. 13°. 24’. 52”: and so of any other Stars.

After the *Argonautic* Expedition we hear no more of Astronomy ‘till the days of *Thales*: He [77]* revived Astronomy, and wrote a book of the Tropics and Equinoxes, and predicted Eclipses; and *Pliny* [78]* tells us, that he determined the *Occasus Matutinus* of the *Pleiades* to be upon the 25th day after the Autumnal Equinox: and thence [79]* *Petavius* computes the Longitude of the *Pleiades* in. 23°. 53’: and by consequence the *Lucida Pleiadum* had, since the *Argonautic* Expedition, moved from the Equinox 4°. 26’. 52”: and this motion, after the rate of 72 years to a Degree, answers to 320 years: count these years back from the time in which *Thales* was a young man fit to apply himself to Astronomical Studies, that is from about the 41st Olympiad, and the reckoning will place the *Argonautic* Expedition about 44 years after the death of *Solomon*, as above: and in the days of *Thales*, the Solstices and Equinoxes, by this reckoning, will have been in the middle of the eleventh Degrees of the Signs. But *Thales*, in publishing his book about the Tropics and Equinoxes, might lean a little to the opinion of former Astronomers, so as to place them in the twelfth Degrees of the Signs.

Meton and *Euctemon*, [80]* in order to publish the Lunar Cycle of nineteen years, observed the Summer Solstice in the year of *Nabonassar* 316, the year before the *Peloponnesian* war began; and *Columella* [81]* tells us that they placed it in the eighth Degree of *Cancer*, which is at least seven Degrees backwarder than at first. Now the Equinox, after the rate of a Degree in Seventy and two years, goes backwards seven Degrees in 504 years: count backwards those years from the 316th year of *Nabonassar*, and the *Argonautic* Expedition will fall upon the 44th year after the death of *Solomon*, or thereabout, as above. And thus you see the truth of what we cited above out of *Achilles Tatius*; viz. that some anciently placed the Solstice in the eighth Degree of *Cancer*, others about the twelfth Degree, and others about the fifteenth Degree thereof.

Hipparchus the great Astronomer, comparing his own Observations with those of former Astronomers, concluded first of any man, that the

Equinoxes had a motion backwards in respect of the fixt Stars: and his opinion was, that they went backwards one Degree in about an hundred years. He made his observations of the Equinoxes between the years of *Nabonassar* 586 and 618: the middle year is 602, which is 286 years after the aforesaid observation of *Meton* and *Euctemon*; and in these years the Equinox must have gone backwards four degrees, and so have been in the fourth Degree of *Aries* in the days of *Hipparchus*, and by consequence have then gone back eleven Degrees since the *Argonautic* Expedition; that is, in 1090 years, according to the Chronology of the ancient *Greeks* then in use: and this is after the rate of about 99 years, or in the next round number an hundred years to a Degree, as was then stated by *Hipparchus*. But it really went back a Degree in seventy and two years, and eleven Degrees in 792 years: count these 792 years backward from the year of *Nabonassar,* 602, the year from which we counted the 286 years, and the reckoning will place the *Argonautic* Expedition about 43 years after the death of *Solomon*. The *Greeks* have therefore made the *Argonautic* Expedition about three hundred years ancienter than the truth, and thereby given occasion to the opinion of the great *Hipparchus*, that the Equinox went backward after the rate of only a Degree in an hundred years.

Hesiod tells us that sixty days after the winter Solstice the Star *Arcturus* rose just at Sunset: and thence it follows that *Hesiod* flourished about an hundred years after the death of *Solomon*, or in the Generation or Age next after the *Trojan* war, as *Hesiod* himself declares.

From all these circumstances, grounded upon the coarse observations of the ancient Astronomers, we may reckon it certain that the *Argonautic* Expedition was not earlier than the Reign of *Solomon*: and if these Astronomical arguments be added to the former arguments taken from the mean length of the Reigns of Kings, according to the course of nature; from them all we may safely conclude that the *Argonautic* Expedition was after the death of *Solomon*, and most probably that it was about 43 years after it.

The *Trojan* War was one Generation later than that Expedition, as was said above, several Captains of the *Greeks* in that war being sons of the *Argonauts*: and the ancient *Greeks* reckoned *Memnon* or *Amenophis*, King of *Egypt*, to have Reigned in the times of that war, feigning him to be the son of *Tithonus* the elder brother of *Priam*, and in the end of that war to have come from *Susa* to the assistance of *Priam*. *Amenophis* was therefore

of the same age with the elder children of *Priam*, and was with his army at *Susa* in the last year of that war: and after he had there finished the *Memnonia*, he might return into *Egypt*, and adorn it with Buildings, and Obelisks, and Statues, and die there about 90 or 95 years after the death of *Solomon*; when he had determined and settled the beginning of the new *Egyptian* year of 365 days upon the Vernal Equinox, so as to deserve the Monument above-mentioned in memory thereof.

Rehoboam was born in the last year of King *David*, being 41 years old at the Death of *Solomon*, 1 *Kings* xiv. 21. and therefore his father *Solomon* was probably born in the 18th year of King *David's* Reign, or before: and two or three years before his Birth, *David* besieged *Rabbah* the Metropolis of the *Ammonites*, and committed adultery with *Bathsheba*: and the year before this siege began, *David* vanquished the *Ammonites*, and their Confederates the *Syrians* of *Zobah*, and *Rehob*, and *Ishtob*, and *Maacah*, and *Damascus*, and extended his Dominion over all these Nations as far as to the entring in of *Hamath* and the River *Euphrates*: and before this war began he smote *Moab*, and *Ammon*, and *Edom*, and made the *Edomites* fly, some of them into *Egypt* with their King *Hadad*, then a little child; and others to the *Philistims*, where they fortified *Azoth* against *Israel*; and others, I think, to the *Persian Gulph*, and other places whither they could escape: and before this he had several Battles with the *Philistims*: and all this was after the eighth year of his Reign, in which he came from *Hebron* to *Jerusalem*. We cannot err therefore above two or three years, if we place this Victory over *Edom* in the eleventh or twelfth year of his Reign; and that over *Ammon* and the *Syrians* in the fourteenth. After the flight of *Edom*, the King of *Edom* grew up, and married *Tahaphenes* or *Daphnis*, the sister of *Pharaoh*'s Queen, and before the Death of *David* had by her a son called *Genubah*, and this son was brought up among the children of *Pharaoh*: and among these children was the chief or *first born of her mother's children*, whom *Solomon* married in the beginning of his Reign; and her *little sister who* at that time *had no breasts*, and her *brother who* then *sucked the breasts of his mother*, *Cant.* vi. 9. and viii. 1, 8: and of about the same Age with these children was *Sesac* or *Sesostris*; for he became King of *Egypt* in the Reign of *Solomon*, 1 *Kings* xi. 40; and before he began to Reign he warred under his father, and whilst he was very young, conquered *Arabia*, *Troglodytica* and *Libya*, and then invaded *Ethiopia*; and succeeding his

father Reigned ‘till the fifth year of *Asa*: and therefore he was of about the same age with the children of *Pharaoh* above-mentioned; and might be one of them, and be born near the end of *David*’s Reign, and be about 46 years old when he came out of *Egypt* with a great Army to invade the East: and by reason of his great Conquests, he was celebrated in several Nations by several Names. The *Chaldæans* called him *Belus*, which in their Language signified *the Lord*: the *Arabians* called him *Bacchus*, which in their Language signified *the great*: the *Phrygians* and *Thracians* called him *Mafors*, *Mavors*, *Mars*, which signified *the valiant*: and thence the *Amazons*, whom he carried from *Thrace* and left at *Thermodon*, called themselves the daughters of *Mars*. The *Egyptians* before his Reign called him their *Hero* or *Hercules*; and after his death, by reason of his great works done to the River *Nile*, dedicated that River to him, and Deified him by its names *Sihor*, *Nilus* and *Ægyptus*; and the *Greeks* hearing them lament *0 Sihor, Bou Sihor*, called him *Osiris* and *Busiris*. *Arrian* [82]* tells us that the *Arabians* worshipped, only two Gods, *Cœlus* and *Dionysus*; and that they worshipped *Dionysus* for the glory of leading his Army into *India*. The *Dionysus* of the *Arabians* was *Bacchus*, and all agree that *Bacchus* was the same King of *Egypt* with *Osiris*: and the *Cœlus*, or *Uranus*, or *Jupiter Uranius* of the *Arabians*, I take to be the same King of *Egypt* with His father *Ammon*, according to the Poet:

Quamvis Æthiopum populis, Arabumque beatis
Gentibus, atque Indis unus sit Jupiter Ammon.

I place the end of the Reign of *Sesac* upon the fifth year of *Asa*, because in that year *Asa* became free from the Dominion of *Egypt*, so as to be able to fortify *Judæa*, and raise that great Army with which he met *Zerah*, and routed him. *Osiris* was therefore slain in the fifth year of *Asa*, by his brother *Japetus*, whom the *Egyptians* called *Typhon*, *Python*, and *Neptune*: and then the *Libyans*, under *Japetus* and his son *Atlas*, invaded *Egypt*, and raised that famous war between the Gods and Giants, from whence the *Nile* had the name of *Eridanus*: but *Orus* the son of *Osiris*, by the assistance of the *Ethiopians*, prevailed, and Reigned ‘till the 15th year of *Asa*: and then the *Ethiopians* under *Zerah* invaded *Egypt*, drowned *Orus* in *Eridanus*, and were routed by *Asa*, so that *Zerah* could not recover himself. *Zerah* was succeeded by *Amenophis*, a youth of the Royal Family of the *Ethiopians*,

and I think the son of *Zerah*: but the People of the lower *Egypt* revolted from him, and set up *Osarsiphus* over them, and called to their assistance a great body of men from *Phœnicia*, I think a part of the Army of *Asa*; and thereupon *Amenophis*, with the remains of his father's Army of *Ethiopians*, retired from the lower *Egypt* to *Memphis*, and there turned the River *Nile* into a new channel, under a new bridge which he built between two Mountains; and at the same time he built and fortified that City against *Osarsiphus*, calling it by his own name, *Amenoph* or *Memphis*: and then he retired into *Ethiopia*, and stayed there thirteen years; and then came back with a great Army, and subdued the lower *Egypt*, expelling the People which had been called in from *Phœnicia*: and this I take to be the second expulsion of the Shepherds. Dr. *Castel* [83]* tells us, that in *Coptic* this City is called *Manphtha*; whence by contraction came its Names *Moph*, *Noph*.

While *Amenophis* staid in *Ethiopia*, *Egypt* was in its greatest distraction: and then it was, as I conceive, that the *Greeks* hearing thereof contrived the *Argonautic* Expedition, and sent the flower of *Greece* in the Ship *Argo* to persuade the Nations upon the Sea Coasts of the *Euxine* and *Mediterranean Seas* to revolt from *Egypt*, and set up for themselves, as the *Libyans*, *Ethiopians* and *Jews* had done before. And this is a further argument for placing that Expedition about 43 years after the Death of *Solomon*; this Period being in the middle of the distraction of *Egypt*. *Amenophis* might return from *Ethiopia*, and conquer the lower *Egypt* about eight years after that Expedition, and having settled his Government over it, he might, for putting a stop to the revolting of the eastern Nations, lead his Army into *Persia*, and leave *Proteus* at *Memphis* to govern *Egypt* in his absence, and stay some time at *Susa*, and build the *Memnonia*, fortifying that City, as the Metropolis of his Dominion in those parts.

Androgeus the son of *Minos*, upon his overcoming in the *Athenæa*, or quadrennial Games at *Athens* in his youth, was perfidiously slain out of envy: and *Minos* thereupon made war upon the *Athenians*, and compelled them to send every eighth year to *Crete* seven beardless Youths, and as many young Virgins, to be given as a reward to him that should get the Victory in the like Games instituted in *Crete* in honour of *Androgeus*. These Games seem to have been celebrated in the beginning of the *Octaeteris*, and the *Athenæa* in the beginning of the *Tetraeteris*, then brought into *Crete* and

Greece by the *Phœnicians* and upon the third payment of the tribute of children, that is, about seventeen years after the said war was at an end, and about nineteen or twenty years after the death of *Androgeus*, *Theseus* became Victor, and returned from *Crete* with *Ariadne* the daughter of *Minos*; and coming to the Island *Naxus* or *Dia*, [84]* *Ariadne* was there relinquished by him, and taken up by *Glaucus*, an *Egyptian* Commander at Sea, and became the mistress of the great *Bacchus*, who at that time returned from *India* in Triumph; and [85]* by him she had two sons, *Phlyas* and *Eumedon*, who were *Argonauts*. This *Bacchus* was caught in bed in *Phrygia* with *Venus* the mother of *Æneas*, according [86]* to *Homer*; just before he came over the *Hellespont*, and invaded *Thrace*; and he married *Ariadne* the daughter of *Minos*, according to *Hesiod* [87]*: and therefore by the Testimony of both *Homer* and *Hesiod*, who wrote before the *Greeks* and *Egyptians* corrupted their Antiquities, this *Bacchus* was one Generation older than the *Argonauts*; and so being King of *Egypt* at the same time with *Sesostris*, they must be one and the same King: for they agree also in their actions; *Bacchus* invaded *India* and *Greece*, and after he was routed by the Army of *Perseus*, and the war was composed, the *Greeks* did him great honours, and built a Temple to him at *Argos*, and called it the Temple of the *Cresian Bacchus*, because *Ariadne* was buried in it, as *Pausanias* [88]* relates. *Ariadne* therefore died in the end of the war, just before the return of *Sesostris* into *Egypt*, that is, in the 14th year of *Rehoboam*: She was taken from *Naxus* upon the return of *Bacchus* from *India*, and then became the Mistress of *Bacchus*, and accompanied him in his Triumphs; and therefore the expedition of *Theseus* to *Crete*, and the death of his father *Ægeus*, was about nine or ten years after the death of *Solomon*. *Theseus* was then a beardless young man, suppose about 19 or 20 years old, and *Androgeus* was slain about twenty years before, being then about 20 or 22 years old; and his father *Minos* might be about 25 years older, and so be born about the middle of *David*'s Reign, and be about 70 years old when he pursued *Dædalus* into *Sicily*: and *Europa* and her brother *Cadmus* might come into *Europe*, two or three years before the birth of *Minos*.

Justin, in his 18th book, tells us: *A rege Ascaloniorum expugnati Sidonii navibus appulsi Tyron urbem ante annum * * Trojanæ cladis condiderunt* And *Strabo*, [89]* that *Aradus was built by the men who fled from* Zidon.

Hence [90]* *Isaiah* calls *Tyre the daughter of* Zidon*, the inhabitants of the Isle whom the Merchants of* Zidon *have replenished*: and [91]* *Solomon* in the beginning of his Reign calls the People of *Tyre Zidonians*. *My Servants*, saith he, in a Message to *Hiram* King of *Tyre*, *shall be with thy Servants, and unto thee will I give hire for thy Servants according to all that thou desirest: for thou knowest that there is not among us any that can skill to hew timber like the* Zidonians. The new Inhabitants of *Tyre* had not yet lost the name of *Zidonians*, nor had the old Inhabitants, if there were any considerable number of them, gained the reputation of the new ones for skill in hewing of timber, as they would have done had navigation been long in use at *Tyre*. The Artificers who came from *Zidon* were not dead, and the flight of the *Zidonians* was in the Reign of *David*, and by consequence in the beginning of the Reign of *Abibalus* the father of *Hiram*, and the first King of *Tyre* mentioned in History. *David* in the twelfth year of his Reign conquered *Edom*, as above, and made some of the *Edomites*, and chiefly the Merchants and Seamen, fly from the *Red Sea* to the *Philistims* upon the *Mediterranean*, where they fortified *Azoth*. For [92]* *Stephanus* tells us: Ταυτην εκτισεν 'εις των επανελθοντων απ' Ερυθρας θαλασσης Φευγαδων: *One of the Fugitives from the Red Sea built* Azoth: that is, a Prince of *Edom*, who fled from *David*, fortified *Azoth* for the *Philistims* against him. The *Philistims* were now grown very strong, by the access of the *Edomites* and Shepherds, and by their assistance invaded and took *Zidon*, that being a town very convenient for the Merchants who fled from the *Red Sea*: and then did the *Zidonians* fly by Sea to *Tyre* and *Aradus*, and to other havens in *Asia Minor*, *Greece*, and *Libya*, with which, by means of their trade, they had been acquainted before; the great wars and victories of *David* their enemy, prompting them to fly by Sea: for [93]* they went with a great multitude, not to seek *Europa* as was pretended, but to seek new Seats, and therefore fled from their enemies: and when some of them fled under *Cadmus* and his brothers to *Cilicia*, *Asia minor*, and *Greece*; others fled under other Commanders to seek new Seats in *Libya*, and there built many walled towns, as *Nonnus* [94]* affirms: and their leader was also there called *Cadmus*, which word signifies an eastern man, and his wife was called *Sithonis* a *Zidonian*. Many from those Cities went afterwards with the great *Bacchus* in his Armies: and by these things, the taking of *Zidon*, and the

flight of the *Zidonians* under *Abibalus*, *Cadmus*, *Cilix*, *Thasus*, *Membliarius*, *Atymnus*, and other Captains, to *Tyre*, *Aradus*, *Cilicia*, *Rhodes*, *Caria*, *Bithynia*, *Phrygia*, *Calliste*, *Thasus*, *Samothrace*, *Crete*, *Greece* and *Libya*, and the building of *Tyre* and *Thebes*, and beginning of the Reigns of *Abibalus* and *Cadmus* over those Cities, are fixed upon the fifteenth or sixteenth year of *David*'s Reign, or thereabout. By means of these Colonies of *Phœnicians*, the people of *Caria* learnt sea-affairs, in such small vessels with oars as were then in use, and began to frequent the *Greek Seas*, and people some of the Islands therein, before the Reign of *Minos*: for *Cadmus*, in coming to *Greece*, arrived first at *Rhodes*, an Island upon the borders of *Caria*, and left there a Colony of *Phœnicians*, who sacrificed men to *Saturn*, and the *Telchines* being repulsed by *Phoroneus*, retired from *Argos* to *Rhodes* with *Phorbas*, who purged the Island from Serpents; and *Triopas*, the son of *Phorbas*, carried a Colony from *Rhodes* to *Caria*, and there possessed himself of a promontory, thence called *Triopium*: and by this and such like Colonies *Caria* was furnished with Shipping and Seamen, and called [95]* *Phœnice*. *Strabo* and *Herodotus* [96]* tell us, that the *Cares* were called *Leleges*, and became subject to *Minos*, and lived first in the Islands of the *Greek Seas*, and went thence into *Caria*, a country possest before by some of the *Leleges* and *Pelasgi*: whence it's probable that when *Lelex* and *Pelasgus* came first into *Greece* to seek new Seats, they left part of their Colonies in *Caria* and the neighbouring Islands.

The *Zidonians* being still possessed of the trade of the *Mediterranean*, as far westward as *Greece* and *Libya*, and the trade of the *Red Sea* being richer; the *Tyrians* traded on the *Red Sea* in conjunction with *Solomon* and the Kings of *Judah*, 'till after the *Trojan* war; and so also did the Merchants of *Aradus*, *Arvad*, or *Arpad*: for in the *Persian Gulph* [97]* were two Islands called *Tyre* and *Aradus*, which had Temples like the *Phœnician*; and therefore the *Tyrians* and *Aradians* sailed thither, and beyond, to the Coasts of *India*, while the *Zidonians* frequented the *Mediterranean*: and hence it is that *Homer* celebrates *Zidon*, and makes no mention of *Tyre*. But at length, [98]* in the Reign of *Jehoram* King of *Judah*, *Edom* revolted from the Dominion of *Judah*, and made themselves a King; and the trade of *Judah* and *Tyre* upon the *Red Sea* being thereby interrupted, the *Tyrians* built ships for merchandise upon the *Mediterranean*, and began there to make long

Voyages to places not yet frequented by the *Zidonians*; some of them going to the coasts of *Afric* beyond the *Syrtes*, and building *Adrymetum*, *Carthage*, *Leptis*, *Utica*, and *Capsa*; and others going to the Coasts of *Spain*, and building *Carteia*, *Gades* and *Tartessus*; and others going further to the *Fortunate Islands*, and to *Britain* and *Thule*. *Jehoram* Reigned eight years, and the two last years was sick in his bowels, and before that sickness *Edom* revolted, because of *Jehoram*'s wicked Reign: if we place that revolt about the middle of the first six years, it will fall upon the fifth year of *Pygmalion* King of *Tyre*, and so was about twelve or fifteen years after the taking of *Troy*: and then, by reason of this revolt, the *Tyrians* retired from the *Red Sea*, and began long Voyages upon the *Mediterranean*; for in the seventh year of *Pygmalion*, his Sister *Dido* sailed to the Coast of *Afric* beyond the *Syrtes*, and there built *Carthage*. This retiring of the *Tyrians* from the *Red Sea* to make long Voyages on the *Mediterranean*, together with the flight of the *Edomites* from *David* to the *Philistims*, gave occasion to the tradition both of the ancient *Persians*, and of the *Phœnicians* themselves, that the *Phœnicians* came originally from the *Red Sea* to the coasts of the *Mediterranean*, and presently undertook long Voyages, as *Herodotus* [99]* relates: for *Herodotus*, in the beginning of his first book, relates that the *Phœnicians* coming from the *Red Sea* to the *Mediterranean*, and beginning to make long Voyages with *Egyptian* and *Assyrian* wares, among other places came to *Argos*, and having sold their wares, seized and carried away into *Egypt* some of the *Grecian* women who came to buy them; and amongst those women was *Io* the daughter of *Inachus*. The *Phœnicians* therefore came from the *Red Sea*, in the days of *Io* and her brother *Phoroneus* King of *Argos*, and by consequence at that time when *David* conquered the *Edomites*, and made them fly every way from the *Red Sea*; some into *Egypt* with their young King, and others to the *Philistims* their next neighbours and the enemies of *David*. And this flight gave occasion to the *Philistims* to call many places *Erythra*, in memory of their being *Erythreans* or *Edomites*, and of their coming from the *Erythrean* Sea; for *Erythra* was the name of a City in *Ionia*, of another in *Libya*, of another in *Locris*, of another in *Bœotia*, of another in *Cyprus*, of another in *Ætolia*, of another in *Asia* near *Chius*; and *Erythia Acra* was a promontory in *Libya*, and *Erythræum* a promontory in *Crete*, and *Erythros* a place near *Tybur*, and

Erythini a City or Country in *Paphlagonia*: and the name *Erythea* or *Erythræ* was given to the Island *Gades*, peopled by *Phœnicians*. So *Solinus*, [100]* *In capite Bæticæ insula a continenti septingentis passibus memoratur quam Tyrii a rubro mari profecti Erytheam, Pœni sua lingua Gadir, id est sepem nominarunt.* And *Pliny*, [101]* concerning a little Island near it; *Erythia dicta est quoniam Tyrii Aborigines eorum, orti ab Erythræo mari ferebantur.* Among the *Phœnicians* who came with *Cadmus* into *Greece*, there were [102]* *Arabians*, and [103]* *Erythreans* or Inhabitants of the *Red Sea*, that is *Edomites*; and in *Thrace* there settled a People who were circumcised and called *Odomantes*, that is, as some think, *Edomites*. *Edom*, *Erythra* and *Phœnicia* are names of the same signification, the words denoting a red colour: which makes it probable that the *Erythreans* who fled from *David*, settled in great numbers in *Phœnicia*, that is, in all the Sea-coasts of *Syria* from *Egypt* to *Zidon*; and by calling themselves *Phœnicians* in the language of *Syria*, instead of *Erythreans*, gave the name of *Phœnicia* to all that Sea-coast, and to that only. So *Strabo*: [104]* 'Οι μεν γαρ και τους Φοινικας, και τους Σιδονιους τους καθ' 'ημας αποικους ειναι των εν τωι Ωκεανωι φασι, προστιθεντες και δια τι Φοινικες εκαλουντο, 'οτι και 'η θαλαττα ερυθρα. *Alii referunt Phœnices & Sidonios nostros esse colonos eorum qui sunt in Oceano, addentes illos ideo vocari Phœnices* [puniceos] *quod mare rubrum sit.*

Strabo [105]* mentioning the first men who left the Sea-coasts, and ventured out into the deep, and undertook long Voyages, names *Bacchus*, *Hercules*, *Jason*, *Ulysses* and *Menelaus*; and saith that the Dominion of *Minos* over the Sea was celebrated, and the Navigation of the *Phœnicians* who went beyond the Pillars of *Hercules*, and built Cities there, and in the middle of the Sea-coasts of *Afric*, presently after the war of *Troy*. These *Phœnicians* [106]* were the *Tyrians*, who at that time built *Carthage* in *Afric*, and *Carteia* in *Spain*, and *Gades* in the Island of that name without the *Straights*; and gave the name of *Hercules* to their chief Leader, because of his labours and success, and that of *Heraclea* to the city *Carteia* which he built. So *Strabo*: [107]* Εκπλεουσιν ουν εκ της 'ημετερας θαλαττης εις την εξω, δεξιον εστι τουτο· και προς αυτο Καλπη [Καρτηια] [108]* πολις εν τετταρακοντα σταδιοις αξιολογος και παλαια, ναυσταθμον ποτε γενομενη των Ιβηρων· ενιοι δε και Ηρακλεους κτισμα λεγουσιν αυτην, 'ων εστι και

Τιμοσθενης· 'ος Φησι και Ηρακλειαν ονομαζεσθαι το παλαιον· δεικνυσθαι τε μεγαν περιβολον, και νεωσοικους. *Mons Calpe ad dextram est e nostro mari foras navigantibus, & ad quadraginta inde stadia urbs Carteia vetusta ac memorabilis, olim statio navibus Hispanorum. Hanc ab Hercule quidam conditam aiunt, inter quos est Timosthenes, qui eam antiquitus Heracleam fuisse appellatam refert, ostendique adhuc magnum murorum circuitum & navalia.* This *Hercules*, in memory of his building and Reigning over the City *Carteia*, they called also *Melcartus*, the King of *Carteia*. *Bochart* [109]* writes, that *Carteia* was at first called *Melcarteia*, from its founder *Melcartus*, and by an *Aphæresis*, *Carteia*; and that *Melcartus* signifies *Melec Kartha*, the King of the city, that is, saith he, of the city *Tyre*: but considering that no ancient Author tells us, that *Carteia* was ever called *Melcarteia*, or that *Melcartus* was King of *Tyre*; I had rather say that *Melcartus*, or *Melecartus*, had his name from being the Founder and Governor or Prince of the city *Carteia*. Under *Melcartus* the *Tyrians* sailed as far as *Tartessus* or *Tarshish*, a place in the Western part of *Spain*, between the two mouths of the river *Bœtis*, and there they [110]* met with much silver, which they purchased for trifles: they sailed also as far as *Britain* before the death of *Melcartus*; for [111]* *Pliny* tells us, *Plumbum ex Cassiteride insula primus apportavit Midacritus*: And *Bochart* [112]* observes that *Midacritus* is a *Greek* name corruptly written for *Melcartus*; *Britain* being unknown to the *Greeks* long after it was discovered by the *Phœnicians*. After the death of *Melcartus*, they [113]* built a Temple to him in the Island *Gades*, and adorned it with the sculptures of the labours of *Hercules*, and of his *Hydra*, and the Horses to whom he threw *Diomedes*, King of the *Bistones* in *Thrace*, to be devoured. In this Temple was the golden Belt of *Teucer*, and the golden Olive of *Pygmalion* bearing *Smaragdine* fruit: and by these consecrated gifts of *Teucer* and *Pygmalion*, you may know that it was built in their days. *Pomponius* derives it from the times of the *Trojan* war; for *Teucer*, seven years after that war, according to the Marbles, arrived at *Cyprus*, being banished from home by his father *Telamon*, and there built *Salamis*: and he and his Posterity Reigned there ‘till *Evagoras*, the last of them, was conquered by the *Persians*, in the twelfth year of *Artaxerxes Mnemon*. Certainly this *Tyrian Hercules* could be no older than the *Trojan* war, because the *Tyrians* did not begin to navigate

the *Mediterranean* ‘till after that war: for *Homer* and *Hesiod* knew nothing of this navigation, and the *Tyrian Hercules* went to the coasts of *Spain*, and was buried in *Gades*: so *Arnobius* [114]*; *Tyrius Hercules sepultus in finibus Hispaniæ*: and *Mela*, speaking of the Temple of *Hercules* in *Gades*, saith, *Cur sanctum sit ossa ejus ibi sepulta efficiunt*. *Carthage* [115]* paid tenths to this *Hercules*, and sent their payments yearly to *Tyre*: and thence it’s probable that this *Hercules* went to the coast of *Afric*, as well as to that of *Spain*, and by his discoveries prepared the way to *Dido*: *Orosius* [116]* and others tell us that he built *Capsa* there. *Josephus* tells of an earlier *Hercules*, to whom *Hiram* built a Temple at *Tyre*: and perhaps there might be also an earlier *Hercules* of *Tyre*, who set on foot their trade on the *Red Sea* in the days of *David* or *Solomon*.

Tatian, in his book against the *Greeks*, relates, that amongst the *Phœnicians* flourished three ancient Historians, *Theodotus*, *Hysicrates* and *Mochus*, *who all of them delivered in their histories, translated into* Greek *by* Latus*, under which of the Kings happened the rapture of* Europa*; the voyage of* Menelaus *into* Phœnicia*; and the league and friendship between* Solomon *and* Hiram*, when* Hiram *gave his daughter to* Solomon*, and furnished him with timber for building the Temple: and that the same is affirmed by* Menander *of* Pergamus. *Josephus* [117]* lets us know that the Annals of the *Tyrians*, from the days of *Abibalus* and *Hiram*, Kings of *Tyre*, were extant in his days; and that *Menander* of *Pergamus* translated them into *Greek*, and that *Hiram*’s friendship to *Solomon*, and assistance in building the Temple, was mentioned in them; and that the Temple was founded in the eleventh year of *Hiram*: and by the testimony of *Menander* and the ancient *Phœnician* historians, the rapture of *Europa*, and by consequence the coming of her brother *Cadmus* into *Greece*, happened within the time of the Reigns of the Kings of *Tyre* delivered in these histories; and therefore not before the Reign of *Abibalus*, the first of them, nor before the Reign of King *David* his contemporary. The voyage of *Menelaus* might be after the destruction of *Troy*. *Solomon* therefore Reigned in the times between the raptures of *Europa* and *Helena*, and *Europa* and her brother *Cadmus* flourished in the days or *David*. *Minos*, the son of *Europa*, flourished in the Reign of *Solomon*, and part of the Reign of *Rehoboam*: and the children of *Minos*, namely *Androgeus* his eldest son,

Deucalion his youngest son and one of the *Argonauts*, *Ariadne* the mistress of *Theseus* and *Bacchus*, and *Phædra* the wife of *Theseus*; flourished in the latter end of *Solomon*, and in the Reigns of *Rehoboam*, *Abijah* and *Asa*: and *Idomeneus*, the grandson of *Minos*, was at the war of *Troy*: and *Hiram* succeeded his father *Abibalus*, in the three and twentieth year of *David*: and *Abibalus* might found the Kingdom of *Tyre* about sixteen or eighteen years before, when *Zidon* was taken by the *Philistims*; and the *Zidonians* fled from thence, under the conduct of *Cadmus* and other commanders, to seek new seats. Thus by the Annals of *Tyre*, and the ancient *Phœnician* Historians who followed them, *Abibalus*, *Alymnus*, *Cadmus*, and *Europa* fled from *Zidon* about the sixteenth year of *David*'s Reign: and the *Argonautic* Expedition being later by about three Generations, will be about three hundred years later than where the *Greeks* have placed it.

After Navigation in long ships with sails, and one order of oars, had been propagated from *Egypt* to *Phœnicia* and *Greece*, and thereby the *Zidonians* had extended their trade to *Greece*, and carried it on about an hundred and fifty years; and then the *Tyrians* being driven from the *Red Sea* by the *Edomites*, had begun a new trade on the *Mediterranean* with *Spain*, *Afric*, *Britain*, and other remote nations; they carried it on about an hundred and sixty years; and then the *Corinthians* began to improve Navigation, by building bigger ships with three orders of oars, called *Triremes*. For [118]* *Thucydides* tells us that the *Corinthians* were the first of the *Greeks* who built such ships, and that a ship-carpenter of *Corinth* went thence to *Samos*, about 300 years before the end of the *Peloponnesian* war, and built also four ships for the *Samians*; and that 260 years before the end of that war, that is, about the 29th Olympiad, there was a fight at sea between the *Corinthians* and the *Corcyreans* which was the oldest sea-fight mentioned in history. *Thucydides* tells us further, that the first colony which the *Greeks* sent into *Sicily*, came from *Chalcis* in *Eubœa*, under the conduct of *Thucles*, and built *Naxus*; and the next year *Archias* came from *Corinth* with a colony, and built *Syracuse*; and that *Lamis* came about the same time into *Sicily*, with a colony from *Megara* in *Achaia*, and lived first at *Trotilum*, and then at *Leontini*, and died at *Thapsus* near *Syracuse*; and that after his death, this colony was invited by *Hyblo* to *Megara* in *Sicily*, and lived there 245 years, and was then expelled by *Gelo* King of *Sicily*. Now *Gelo* flourished

about 78 years before the end of the *Peloponnesian* war: count backwards the 78 and the 245 years, and about 12 years more for the Reign of *Lamis* in *Sicily*, and the reckoning will place the building of *Syracuse* about 335 years before the end of the *Peloponnesian* war, or in the tenth Olympiad; and about that time *Eusebius* and others place it: but it might be twenty or thirty years later, the antiquities of those days having been raised more or less by the *Greeks*. From the colonies henceforward sent into *Italy* and *Sicily* came the name of *Græcia magna*.

Thucydides [119]* tells us further, that the *Greeks* began to come into *Sicily* almost three hundred years after the *Siculi* had invaded that Island with an army out of *Italy*: suppose it 280 years after, and the building of *Syracuse* 310 years before the end of the *Peloponnesian* war; and that invasion of *Sicily* by the *Siculi* will be 590 years before the end of that war, that is, in the 27th year of *Solomon*'s Reign, or thereabout. *Hellanicus* [120]* tells us, that it was in the third Generation before the *Trojan* war; and in the 26th year of the Priesthood of *Alcinoe*, Priestess of *Juno Argiva*: and *Philistius* of *Syracuse*, that it was 80 years before the *Trojan* war: whence it follows that the *Trojan* war and *Argonautic* Expedition were later than the days of *Solomon* and *Rehoboam*, and could not be much earlier than where we have placed them.

The Kingdom of *Macedon* [121]* was founded by *Caranus* and *Perdiccas*, who being of the Race of *Temenus* King of *Argos*, fled from *Argos* in the Reign of *Phidon* the brother of *Caranus*. *Temenus* was one of the three brothers who led the *Heraclides* into *Peloponnesus*, and shared the conquest among themselves: he obtained *Argos*; and after him, and his son *Cisus*, the Kingdom of *Argos* became divided among the posterity of *Temenus*, until *Phidon* reunited it, expelling his kindred. *Phidon* grew potent, appointed weights and measures in *Peloponnesus*, and coined silver money; and removing the *Pisæans* and *Eleans*, presided in the Olympic games; but was soon after subdued by the *Eleans* and *Spartans*. *Herodotus* [122]* reckons that *Perdiccas* was the first King of *Macedon*; later writers, as *Livy*, *Pausanias* and *Suidas*, make *Caranus* the first King: *Justin* calls *Perdiccas* the Sucessor of *Caranus*; and *Solinus* saith that *Perdiccas* succeeded *Caranus*; and was the first that obtained the name of King. It's probable that *Caranus* and *Perdiccas* were contemporaries, and fled about the same time

from *Phidon*, and at first erected small principalities in *Macedonia*, which, after the death of *Caranus*, became one under *Perdiccas*. *Herodotus* [123]* tells us, that after *Perdiccas* Reigned *Arœus*, or *Argœus*, *Philip*, *Æropus*, *Alcetas*, *Amyntas*, and *Alexander*, successively. *Alexander* was contemporary to *Xerxes* King of *Persia*, and died *An.* 4. Olym, and was succeeded by *Perdiccas*, and he by his son *Archelaus*: and *Thucydides* [124]* tells us that there were eight Kings of *Macedon* before this *Archelaus*: now by reckoning above forty years a-piece to these Kings, Chronologers have made *Phidon* and *Caranus* older than the Olympiads; whereas if we should reckon their Reigns at about 18 or 20 years a-piece one with another, the first seven Reigns counted backwards from the death of this *Alexander*, will place the dominion of *Phidon*, and the beginning of the Kingdom of *Macedon* under *Perdiccas* and *Caranus*, upon the 46th or 47th Olympiad, or thereabout. It could scarce be earlier, because *Leocides* the son of *Phidon*, and *Megacles* the son of *Alcmæon*, at one and the same time courted *Agarista*, the daughter of *Clisthenes* King of *Sicyon*, as *Herodotus* [125]* tells us; and the *Amphictyons*, by the advice of *Solon*, made *Alcmæon*, and *Clisthenes*, and *Eurolycus* King of *Thessaly*, commanders of their army, in their war against *Cirrha*; and the *Cirrheans* were conquered *An.* 2. Olym. according to the Marbles. *Phidon* therefore and his brother *Caranus* were contemporary to *Solon*, *Alcmæon*, *Clisthenes*, and *Eurolycus*, and flourished about the 48th and 49th Olympiads. They were also contemporary in their later days to *Crœsus*; for *Solon* conversed with *Crœsus*, and *Alcmæon* entertained and conducted the messengers whom *Crœsus* sent to consult the Oracle at *Delphi*, *An.* 1. Olym. according to the Marbles, and was sent for by *Crœsus*, and rewarded with much riches.

But the times set down in the Marbles before the *Persian* Empire began, being collected by reckoning the Reigns of Kings equipollent to Generations, and three Generations to an hundred years or above; and the Reigns of Kings, one with another, being shorter in the proportion of about four to seven; the Chronology set down in the Marbles, until the Conquest of *Media* by *Cyrus*, *An.* 4, Olym, will approach the truth much nearer, by shortening the times before that Conquest in the proportion of four to seven. So the *Cirrheans* were conquered *An.* 2, Olym, according to the Marbles, that is 54 years before the Conquest of *Media*; and these years being

shortened in the proportion of four to seven, become 31 years; which subducted from *An.* 4, Olym, place the Conquest of *Cirrha* upon *An.* 1, Olym: and, by the like correction of the Marbles, *Alcmæon* entertained and conducted the messengers whom *Crœsus* sent to consult the Oracle at *Delphi*, *An.* 1, Olym; that is, four years before the Conquest of *Sardes* by *Cyrus*: and the Tyranny of *Pisistratus*, which by the Marbles began at *Athens*, *An.* 4, Olym, by the like correction began *An.* 3, Olym; and by consequence *Solon* died *An.* 4, Olym. This method may be used alone, where other arguments are wanting; but where they are not wanting, the best arguments are to be preferred.

Iphitus [126]* presided both in the Temple of *Jupiter Olympius*, and in the Olympic Games, and so did his Successors ‘till the 26th Olympiad; and so long the victors were rewarded with a *Tripos*: but then the *Pisæans* getting above the *Eleans*, began to preside, and rewarded the victors with a Crown, and instituted the *Carnea* to *Apollo*; and continued to preside ‘till *Phidon* interrupted them, that is, ‘till about the time of the 49th Olympiad: for [127]* in the 48th Olympiad the *Eleans* entered the country of the *Pisæans*, suspecting their designs, but were prevailed upon to return home quietly; afterwards the *Pisæans* confederated with several other *Greek* nations, and made war upon the *Eleans*, and in the end were beaten: in this war I conceive it was that *Phidon* presided, suppose in the 49th Olympiad; for [128]* in the 50th Olympiad, for putting an end to the contentions between the Kings about presiding, two men were chosen by lot out of the city *Elis* to preside, and their number in the 65th Olympiad was increased to nine, and afterwards to ten; and these judges were called *Hellenodicæ*, judges for or in the name of *Greece*. *Pausanias* tells us, that the *Eleans* called in *Phidon* and together with him celebrated the 8th Olympiad; he should have said the 49th Olympiad; but *Herodotus* tells us, that *Phidon* removed the *Eleans*; and both might be true: the *Eleans* might call in *Phidon* against the *Pisæans*, and upon overcoming be refused presiding in the Olympic games by *Phidon*, and confederate with the *Spartans*, and by their assistance overthrow the Kingdom of *Phidon*, and recover their ancient right of presiding in the games.

Strabo [129]* tells us that *Phidon* was the tenth from *Temenus*; not the tenth King, for between *Cisus* and *Phidon* they Reigned not, but the tenth

from father to son, including *Temenus*. If 27 years be reckoned to a Generation by the eldest sons, the nine intervals will amount unto 243 years, which counted back from the 48th Olympiad, in which *Phidon* flourished, will place the Return of the *Heraclides* about fifty years before the beginning of the Olympiads, as above. But Chronologers reckon about 515 years from the Return of the *Heraclides* to the 48th Olympiad, and account *Phidon* the seventh from *Temenus*; which is after the rate of 85 years to a Generation, and therefore not to be admitted.

Cyrus took *Babylon*, according to *Ptolomy*'s Canon, nine years before his death, *An. Nabonass.* 209, *An.* 2, Olym: and he took *Sardes* a little before, namely *An.* 1, Olym, as *Scaliger* collects from *Sosicrates*: *Crœsus* was then King of *Sardes*, and Reigned fourteen years, and therefore began to Reign *An.* 3, Olym. After *Solon* had made laws for the *Athenians*, he obliged them upon oath to observe those laws 'till he returned from his travels; and then travelled ten years, going to *Egypt* and *Cyprus*, and visiting *Thales* of *Miletus*: and upon His Return to *Athens*, *Pisistratus* began to affect the Tyranny of that city, which made *Solon* travel a second time; and now he was invited by *Crœsus* to *Sardes*; and *Crœsus*, before *Solon* visited him, had subdued all *Asia Minor*, as far as to the River *Halys*; and therefore he received that visit towards the latter part of his Reign; and we may place it upon the ninth year thereof, *An.* 3, Olym: and the legislature of *Solon* twelve years earlier, *An.* 3, Olym: and that of *Draco* still ten years earlier, *An.* 1, Olym. After *Solon* had visited *Crœsus*, he went into *Cilicia* and some other places, and died [130]* in his travels: and this was in the second year of the Tyranny of *Pisistratus*. *Comias* was Archon when *Solon* returned from his first travels to *Athens*; and the next year *Hegestratus* was Archon, and *Solon* died before the end of the year, *An.* 3, Olym, as above: and by this reckoning the objection of *Plutarch* above mentioned is removed.

We have now shewed that the *Phœnicians* of *Zidon*, under the conduct of *Cadmus* and other captains, flying from their enemies, came into *Greece*, with letters and other arts, about the sixteenth year of King *David*'s Reign; that *Europa* the sister of *Cadmus*, fled some days before him from *Zidon* and came to *Crete*, and there became the mother of *Minos*, about the 18th or 20th year of *David*'s Reign; that *Sesostris* and the great *Bacchus*, and by

consequence also *Osiris*, were one and the same King of *Egypt* with *Sesac*, and came out of *Egypt* in the fifth year of *Rehoboam* to invade the nations, and died 25 years after *Solomon*; that the *Argonautic* expedition was about 43 years after the death of *Solomon*; that *Troy* was taken about 76 or 78 years after the death of *Solomon*; that the *Phœnicians* of *Tyre* were driven from the *Red Sea* by the *Edomites*, about 87 years after the death of *Solomon*, and within two or three years began to make long voyages upon the *Mediterranean*, sailing to *Spain*, and beyond, under a commander whom for his industry, conduct, and discoveries, they honoured with the names of *Melcartus* and *Hercules*; that the return of the *Heraclides* into *Peloponnesus* was about 158 years after the death of *Solomon*; that *Lycurgus* the Legislator Reigned at *Sparta*, and gave the three Discs to the Olympic treasury, *An.* 1, Olym, or 273 years after the death of *Solomon*, the *Quinquertium* being at that time added to the Olympic Games; that the *Greeks* began soon after to build *Triremes*, and to send Colonies into *Sicily* and *Italy*, which gave the name of *Græcia magna* to those countries; that the first *Messenian* war ended about 350 years after the death of *Solomon*, *An.* 1, Olym; that *Phidon* was contemporary to *Solon*, and presided in the Olympic Games in the 49th Olympiad, that is, 397 years after the death of *Solomon*; that *Draco* was Archon, and made his laws, *An.* 1, Olym; and *Solon*, *An.* 3, Olym; and that *Solon* visited *Crœsus Ann.* 3, Olym, or 433 years after the death of *Solomon*; and *Sardes* was taken by *Cyrus* 438 years, and *Babylon* by *Cyrus* 443 years, and *Echatane* by *Cyrus* 445 years after the death of *Solomon*: and these periods being settled, they become a foundation for building the Chronology of the antient times upon them; and nothing more remains for settling such a Chronology, than to make these Periods a little exacter, if it can be, and to shew how the rest of the Antiquities of *Greece*, *Egypt*, *Assyria*, *Chaldæa*, and *Media* may suit therewith.

Whilst *Bacchus* made his expedition into *India*, *Theseus* left *Ariadne* in the Island *Naxus* or *Dia*, as above, and succeeded his father *Ægeus* at *Athens*; and upon the Return of *Bacchus* from *India*, *Ariadne* became his mistress, and accompanied him in his triumphs; and this was about ten years after the death of *Solomon*: and from that time reigned eight Kings in *Athens*, viz. *Theseus*, *Menestheus*, *Demophoon*, *Oxyntes*, *Aphidas*, *Thymætes*, *Melanthus*, and *Codrus*; these Kings, at 19 years a-piece one

with another, might take up about 152 years, and end about 44 years before the Olympiads: then Reigned twelve Archons for life, which at 14 or 15 years a-piece, the State being unstable, might take up about 174 years, and end *An.* 2, Olym: then reigned seven decennial Archons, which are usually reckoned at seventy years; but some of them dying in their Regency, they might not take up above forty years, and so end about *An.* 2, Olym, about which time began the Second *Messenian* war: these decennial Archons were followed by the annual Archons, amongst whom were the Legislators *Draco* and *Solon*. Soon after the death of *Codrus*, his second Son *Neleus*, not bearing the Reign of his lame brother *Medon* at *Athens*, retired into *Asia*, and was followed by his younger brothers *Androcles* and *Cyaretus*, and many others: these had the name of *Ionians*, from *Ion* the son of *Xuthus*, who commanded the army of the *Athenians* at the death of *Erechtheus*, and gave the name of *Ionia* to the country which they invaded: and about 20 or 25 years after the death of *Codrus*, these new Colonies, being now Lords of *Ionia*, set up over themselves a common Council called *Panionium*, and composed of Counsellors sent from twelve of their cities, *Miletus*, *Myus*, *Priene*, *Ephesus*, *Colophon*, *Lebedus*, *Teos*, *Clazomenæ*, *Phocæa*, *Samos*, *Chios*, and *Erythræa*: and this was the *Ionic* Migration.

[131]* When the *Greeks* and *Latines* were forming their Technical Chronology, there were great disputes about the Antiquity of *Rome*: the *Greeks* made it much older than the Olympiads: some of them said it was built by *Æneas*; others, by *Romus*, the son or grandson of *Æneas*; others, by *Romus*, the son or grandson of *Latinus* King of the *Aborigines*; others, by *Romus* the son of *Ulysses*, or of *Ascanius*, or of *Italus*: and some of the *Latines* at first fell in with the opinion of the *Greeks*, saying that it was built by *Romulus*, the son or grandson of *Æneas*. *Timæus Siculus* represented it built by *Romulus*, the grandson of *Æneas*, above an hundred years before the Olympiads; and so did *Nævius* the Poet, who was twenty years older than *Ennius*, and served in the first *Punic* war, and wrote the history of that war. Hitherto nothing certain was agreed upon, but about 140 or 150 years after the death of *Alexander the Great*, they began to say that *Rome* was built a second time by *Romulus*, in the fifteenth Age after the destruction of *Troy*: by Ages they meant Reigns of the Kings of the *Latines* at *Alba*, and reckoned the first fourteen Reigns at about 432 years, and the following

Reigns of the seven Kings of *Rome* at 244 years, both which numbers made up the time of about 676 years from the taking of *Troy*, according to these Chronologers; but are much too long for the course of nature: and by this reckoning they placed the building of *Rome* upon the sixth or seventh Olympiad; *Varro* placed it on the first year of the Seventh Olympiad, and was therein generally followed by the *Romans*; but this can scarce be reconciled to the course of nature: for I do not meet with any instance in all history, since Chronology was certain, wherein seven Kings, most of whom were slain, Reigned 244 years in continual Succession. The fourteen Reigns of the Kings of the *Latines*, at twenty years a-piece one with another, amount unto 280 years, and these years counted from the taking of *Troy* end in the 38th Olympiad: and the Seven Reigns of the Kings of *Rome*, four or five of them being slain and one deposed, may at a moderate reckoning amount to fifteen or sixteen years a-piece one with another: let them be reckoned at seventeen years a-piece, and they will amount unto 119 years; which being counted backwards from the Regifuge, end also in the 38th Olympiad: and by these two reckonings *Rome* was built in the 38th Olympiad, or thereabout. The 280 years and the 119 years together make up 399 years; and the same number of years arises by counting the twenty and one Reigns at nineteen years a-piece: and this being the whole time between the taking of *Troy* and the Regifuge, let these years be counted backward from the Regifuge, *An.* 1, Olym, and they will place the taking of *Troy* about 74 years after the death of *Solomon*.

When *Sesostris* returned from *Thrace* into *Egypt*, he left *Æetes* with part of his army in *Colchis*, to guard that pass; and *Phryxus* and his sister *Helle* fled from *Ino*, the daughter of *Cadmus*, to *Æetes* soon after, in a ship whose ensign was a golden ram: *Ino* was therefore alive in the fourteenth year of *Rehoboam*, the year in which *Sesostris* returned into *Egypt*; and by consequence her father *Cadmus* flourished in the Reign of *David*, and not before. *Cadmus* was the father of *Polydorus*, the father of *Labdacus*, the father of *Laius*, the father of *Oedipus*, the father of *Eteocles* and *Polynices* who slew one another in their youth, in the war of the seven Captains at *Thebes*, about ten or twelve years after the *Argonautic* Expedition: and *Thersander*, the son of *Polynices*, warred at *Troy*. These Generations being by the eldest sons who married young, if they be reckoned at about twenty and four years to a Generation, will place the birth of *Polydorus* upon the

18th year of *David*'s Reign, or thereabout: and thus *Cadmus* might be a young man, not yet married, when he came first into *Greece*. At his first coming he sail'd to *Rhodes*, and thence to *Samothrace*, an Island near *Thrace* on the north side of *Lemnos*, and there married *Harmonia*, the sister of *Jasius* and *Dardanus*, which gave occasion to the *Samothracian* mysteries: and *Polydorus* might be their son, born a year or two after their coming; and his sister *Europa* might be then a young woman, in the flower of her age. These Generations cannot well be shorter; and therefore *Cadmus*, and his son *Polydorus*, were not younger than we have reckoned them: nor can they be much longer, without making *Polydorus* too old to be born in *Europe*, and to be the son of *Harmonia* the sister of *Jasius*. *Labdacus* was therefore born in the end of *David*'s Reign, *Laius* in the 24th year of *Solomon*'s, and *Oedipus* in the seventh of *Rehoboam*'s, or thereabout: unless you had rather say, that *Polydorus* was born at *Zidon*, before his father came into *Europe*; but his name *Polydorus* is in the language of *Greece*.

Polydorus married *Nycteis*, the daughter of *Nycteus* a native of *Greece*, and dying young, left his Kingdom and young son *Labdacus* under the administration of *Nycteus*. Then *Epopeus* King of *Ægialus*, afterwards called *Sicyon*, stole *Antiope* the daughter of *Nycteus*, [132]* and *Nycteus* thereupon made war upon him, and in a battle wherein *Nycteus* overcame, both were wounded and died soon after. *Nycteus* left the tuition of *Labdacus*, and administration of the Kingdom, to his brother *Lycus*; and *Epopeus* or, as *Hyginus* [133]* calls him, *Epaphus* the *Sicyonian*, left his Kingdom to *Lamedon*, who presently ended the war, by sending home *Antiope*: and she, in returning home, brought forth *Amphion* and *Zethus*. *Labdacus* being grown up received the Kingdom from *Lycus*, and soon after dying left it again to his administration, for his young son *Laius*. When *Amphion* and *Zethus* were about twenty years old, at the instigation of their mother *Antiope*, they killed *Lycus*, and made *Laius* flee to *Pelops*, and seized the city *Thebes*, and compassed it with a wall; and *Amphion* married *Niobe* the sister of *Pelops*, and by her had several children, amongst whom was *Chloris*, the mother of *Periclymenus* the *Argonaut*. *Pelops* was the father of *Plisthenes*, *Atreus*, and *Thyestes*; and *Agamemnon* and *Menelaus*, the adopted sons of *Atreus*, warred at *Troy*. *Ægisthus*, the son of *Thyestes*,

slew *Agamemnon* the year after the taking of *Troy*; and *Atreus* died just before *Paris* stole *Helena*, which, according to [134]* *Homer*, was twenty years before the taking of *Troy*. *Deucalion* the son of *Minos*, [135]* was an *Argonaut*; and *Talus* another son of *Minos*, was slain by the *Argonauts*; and *Idomeneus* and *Meriones* the grandsons of *Minos* were at the *Trojan* war. All these things confirm the ages of *Cadmus* and *Europa*, and their posterity, above assigned, and place the death of *Epopeus* or *Epaphus* King of *Sicyon*, and birth of *Amphion* and *Zethus*, upon the tenth year of *Solomon*; and the taking of *Thebes* by *Amphion* and *Zethus*, and the flight of *Laius* to *Pelops*, upon the thirtieth year of that King, or thereabout. *Amphion* might marry the sister of *Pelops*, the same year, and *Pelops* come into *Greece* three or four years before that flight, or about the 26th year of *Solomon*.

[Sidenode p: Hygin. Fab. 14.]

In the days of *Erechtheus* King of *Athens*, and *Celeus* King of *Eleusis*, *Ceres* came into *Attica*; and educated *Triptolemus* the son of *Celeus*, and taught him to sow corn. She [136]* lay with *Jasion*, or *Jasius*, the brother of *Harmonia* the wife of *Cadmus*; and presently after her death *Erechtheus* was slain, in a war between the *Athenians* and *Eleusinians*; and, for the benefaction of bringing tillage into *Greece*, the *Eleusinia Sacra* were instituted to her [137]* with *Egyptian* ceremonies, by *Celeus* and *Eumolpus*; and a Sepulchre or Temple was erected to her in *Eleusine*, and in this Temple the families of *Celeus* and *Eumolpus* became her Priests: and this Temple, and that which *Eurydice* erected to her daughter *Danae*, by the name of *Juno Argiva*, are the first instances that I meet with in *Greece* of Deifying the dead, with Temples, and Sacred Rites, and Sacrifices, and Initiations, and a succession of Priests to perform them. Now by this history it is manifest that *Erechtheus*, *Celeus*, *Eumolpus*, *Ceres*, *Jasius*, *Cadmus*, *Harmonia*, *Asterius*, and *Dardanus* the brother of *Jasius*, and one of the founders of the Kingdom of *Troy*, were all contemporary to one another, and flourished in their youth, when *Cadmus* came first into *Europe*. *Erechtheus* could not be much older, because his daughter *Procris* convers'd with *Minos* King of *Crete*; and his grandson *Thespis* had fifty daughters, who lay with *Hercules*; and his daughter *Orithyia* was the mother of *Calais* and *Zetes*, two of the *Argonauts* in their youth; and his son

Orneus [138]* was the father of *Peteos* the father of *Menestheus*, who warred at *Troy*: nor much younger, because his second son *Pandion*, who with the *Metionides* deposed his elder brother *Cecrops*, was the father of *Ægeus*, the father of *Theseus*; and *Metion*, another of his sons, was the father of *Eupalamus*, the father of *Dædalus*, who was older than *Theseus*; and his daughter *Creusa* married *Xuthus*, the son of *Hellen*, and by him had two sons, *Achæus* and *Ion*; and *Ion* commanded the army of the *Athenians* against the *Eleusinians*, in the battle in which his grandfather *Erechtheus* was slain: and this was just before the institution of the *Eleusinia Sacra*, and before the Reign of *Pandion* the father of *Ægeus*. *Erechtheus* being an *Egyptian* procured corn from *Egypt*, and for that benefaction was made King of *Athens*; and near the beginning of his Reign *Ceres* came into *Attica* from *Sicily*, in quest of her daughter *Proserpina*. We cannot err much if we make *Hellen* contemporary to the Reign of *Saul*, and to that of *David* at *Hebron*; and place the beginning of the Reign of *Erechtheus* in the 25th year, the coming of *Ceres* into *Attica* in the 30th year, and the dispersion of corn by *Triptolemus* about the 40th year of *David*'s Reign; and the death of *Ceres* and *Erechtheus*, and institution of the *Eleusinia Sacra*, between the tenth and fifteenth year of *Solomon*.

Teucer, *Dardanus*, *Erichthonius*, *Tros*, *Ilus*, *Laomedon*, and *Priamus* Reigned successively at *Troy*; and their Reigns, at about twenty years a-piece one with another, amount unto an hundred and forty years: which counted back from the taking of *Troy*, place the beginning of the Reign of *Teucer* about the fifteenth year of the Reign of King *David*; and that of *Dardanus*, in the days of *Ceres*, who lay with *Jasius* the brother of *Dardanus*: whereas Chronologers reckon that the six last of these Kings Reigned 296 years, which is after the rate of 49⅓ years a-piece one with another; and that they began their Reign in the days of *Moses*. *Dardanus* married the daughter of *Teucer*, the Son of *Scamander*, and succeeded him: whence *Teucer* was of about the same age with *David*.

Upon the return of *Sesostris* into *Egypt*, his brother *Danaus* not only attempted his life, as above, but also commanded his daughters, who were fifty in number and had married the sons of *Sesostris*, to slay their husbands; and then fled with his daughters from *Egypt*, in a long ship of fifty oars. This Flight was in the fourteenth year of *Rehoboam*. *Danaus* came first to *Lindus*, a town in *Rhodes*, and there built a Temple, and erected a Statue to *Minerva*, and lost three of his daughters by a plague which raged there; and then sailed thence with the rest of his daughters to *Argos*. He came to *Argos* therefore in the fifteenth or sixteenth year of *Rehoboam*: and at length contending there with *Gelanor* the brother of *Eurystheus* for the crown of *Argos*, was chosen by the people, and Reigned at *Argos*, while *Eurystheus* Reigned at *Mycenæ*; and *Eurystheus* was born [139]* the same year with *Hercules*. *Gelanor* and *Eurystheus* were the sons of *Sthenelus*, by *Nicippe* the daughter of *Pelops*; and *Sthenelus* was the son of *Perseus*, and Reigned at *Argos*, and *Danaus*, who succeeded him at *Argos*, was succeeded there by his son in law *Lynceus*, and he by his son *Abas*; that *Abas* who is commonly, but erroneously, reputed the father of *Acrisius* and *Prætus*. In the time of the *Argonautic* expedition *Castor* and *Pollux* were beardless young men, and their sisters *Helena* and *Clytemnestra* were children, and their wives *Phœbe* and *Ilaira* were also very young: all these, with the *Argonauts Lynceus* and *Idas*, were the grandchildren of *Gorgophone*, the daughter of *Perseus*, the son of *Danae*, the daughter of *Acrisius* and *Eurydice*; and *Perieres* and *Oebalus*, the husbands of *Gorgophone*, were the sons of *Cynortes*, the son of *Amyclas*, the brother of *Eurydice*. *Mestor* or *Mastor*, the brother of *Sthenelus*, married *Lysidice*, another of the daughters of *Pelops*: and *Pelops* married *Hippodamia*, the daughter of *Evarete*, the daughter of *Acrisius*. *Alcmena*, the mother of *Hercules*, was the daughter of *Electryo*; and *Sthenelus*, *Mestor* and *Electryo* were brothers of *Gorgophone*, and sons of *Perseus* and *Andromeda*: and the *Argonaut Æsculapius* was the grandson of *Leucippus* and *Phlegia*, and *Leucippus* was the son of *Perieres*, the grandson of *Amyclas* the brother of *Eurydice*, and *Amyclas* and *Eurydice* were the children of *Lacedæmon* and *Sparta*: and *Capaneus*, one of the seven Captains against *Thebes*, was the husband of *Euadne* the daughter of *Iphis*, the son of *Elector*, the son of *Anaxagoras*, the son of *Megapenthes*, the son

of *Prætus* the brother of *Acrisius*. Now from these Generations it may be gathered that *Perseus*, *Perieres* and *Anaxagoras* were of about the same age with *Minos*, *Pelops*, *Ægeus* and *Sesac*; and that *Acrisius*, *Prætus*, *Eurydice*, and *Amyclas*, being two little Generations older, were of about the same age with King *David* and *Erechtheus*; and that the Temple of *Juno Argiva* was built about the same time with the Temple of *Solomon*; the same being built by *Eurydice* to her daughter *Danae*, as above; or as some say, by *Pirasus* or *Piranthus*, the son or successor of *Argus*, and great grandson of *Phoroneus*: for the first Priestess of that Goddess was *Callithea* the daughter of *Piranthus*; *Callithea* was succeeded by *Alcinoe*, about three Generations before the taking of *Troy*, that is about the middle of *Solomon*'s Reign: in her Priesthood the *Siculi* passed out of *Italy* into *Sicily*: afterwards *Hypermnestra* the daughter of *Danaus* became Priestess of this Goddess, and she flourished in the times next before the *Argonautic* expedition: and *Admeta*, the daughter of *Eurystheus*, was Priestess of this *Juno* about the times of the *Trojan* war. *Andromeda* the wife of *Perseus*, was the daughter of *Cepheus* an *Egyptian*, the son of *Belus*, according to [140]* *Herodotus*; and the *Egyptian Belus* was *Ammon*: *Perseus* took her from *Joppa*, where *Cepheus*, I think a kinsman of *Solomon*'s Queen, resided in the days of *Solomon*. *Acrisius* and *Prætus* were the sons of *Abas*: but this *Abas* was not the same man with *Abas* the grandson of *Danaus*, but a much older Prince, who built *Abæa* in *Phocis*, and might be the Prince from whom the island *Eubœa* [141]* was anciently called *Abantis*, and the people thereof *Abantes*: for *Apollonius Rhodius* [142]* tells us, that the *Argonaut Canthus* was the son of *Canethus*, and that *Canethus* was of the posterity of *Abas*; and the Commentator upon *Apollonius* tells us further, that from this *Abas* the inhabitants of *Eubœa* were anciently called *Abantes*. This *Abas* therefore flourished three or four Generations before the *Argonautic* expedition, and so might be the father of *Acrisius*: the ancestors of *Acrisius* were accounted *Egyptians* by the *Greeks*, and they might come from *Egypt* under *Abas* into *Eubœa*, and from thence into *Peloponnesus*. I do not reckon *Phorbas* and his son *Triopas* among the Kings of *Argos*, because they fled from that Kingdom to the Island *Rhodes*; nor do I reckon *Crotopus* among them, because because he went from *Argos*, and built a new city for himself in *Megaris*, as [143]* *Conon* relates.

We said that *Pelops* came into *Greece* about the 26th year of *Solomon*: he [144]* came thither in the days of *Acrisius*, and in those of *Endymion*, and of his sons, and took *Ætolia* from *Aetolus*. *Endymion* was the son of *Aëthlius*, the son of *Protogenia*, the sister of *Hellen*, and daughter of *Deucalion*: *Phrixus* and *Helle*, the children of *Athamus*, the brother of *Sisyphus* and Son of *Æolus*, the son of *Hellen*, fled from their stepmother *Ino*, the daughter of *Cadmus*, to *Æetes* in *Colchis*, presently after the return of *Sesostris* into *Egypt*: and *Jason* the *Argonaut* was the son of *Æson*, the son of *Cretheus*, the son of *Æolus*, the son of *Hellen*: and *Calyce* was the wife of *Aëthlius*, and mother of *Endymion*, and daughter of *Æolus*, and sister of *Cretheus*, *Sisyphus* and *Athamas*: and by these circumstances *Cretheus*, *Sisyphus* and *Athamas* flourished in the latter part of the Reign of *Solomon*, and in the Reign of *Rehoboam*: *Aëthlius*, *Æolus*, *Xuthus*, *Dorus*, *Tantalus*, and *Danae* were contemporary to *Erechtheus*, *Jasius* and *Cadmus*; and *Hellen* was about one, and *Deucalion* about two Generations older than *Erechtheus*. They could not be much older, because *Xuthus* the youngest son of *Hellen* [145]* married *Creusa* the daughter of *Erechtheus*; nor could they be much younger, because *Cephalus* the son of *Deioneus*, the son of *Æolus*, the eldest son of *Hellen*, [146]* married *Procris* the daughter of *Erechtheus*; and *Procris* fled from her husband to *Minos*. Upon the death of *Hellen*, his youngest son *Xuthus* [147]* was expelled *Thessaly* by his brothers *Æolus* and *Dorus*, and fled to *Erechtheus*, and married *Creusa* the daughter of *Erechtheus*; by whom he had two sons, *Achæus* and *Ion*, the youngest of which grew up before the death of *Erechtheus*, and commanded the army of the *Athenians*, in the war in which *Erechtheus* was slain: and therefore *Hellen* died about one Generation before *Erechtheus*.

Sisyphus therefore built *Corinth* about the latter end of the Reign of *Solomon*, or the beginning of the Reign of *Rehoboam*. Upon the flight of *Phrixus* and *Helle*, their father *Athamas*, a little King in *Bœotia*, went distracted and slew his son *Learchus*; and his wife *Ino* threw her self into the sea, together with her other son *Melicertus*; and thereupon *Sisyphus* instituted the *Isthmia* at *Corinth* to his nephew *Melicertus*. This was presently after *Sesostris* had left *Æetes* in *Colchis*, I think in the fifteenth or sixteenth year of *Rehoboam*: so that *Athamas*, the son of *Æolus* and grandson of *Hellen*, and *Ino* the daughter of *Cadmus*, flourished ‘till about

the sixteenth year of *Rehoboam*. *Sisyphus* and his successors *Ornytion*, *Thoas*, *Demophon*, *Propodas*, *Doridas*, and *Hyanthidas* Reigned successively at *Corinth*, 'till the return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*: then Reigned the *Heraclides*, *Aletes*, *Ixion*, *Agelas*, *Prumnis*, *Bacchis*, *Agelas II*, *Eudamus*, *Aristodemus*, and *Telestes* successively about 170 years, and then *Corinth* was governed by *Prytanes* or annual Archons about 42 years, and after them by *Cypselus* and *Periander* about 48 years more.

Celeus King of *Eleusis*, who was contemporary to *Erechtheus*, [148]* was the son of *Rharus*, the son of *Cranaus*, the successor of *Cecrops*; and in the Reign of *Cranaus*, *Deucalion* fled with his sons *Hellen* and *Amphictyon* from the flood which then overflowed *Thessaly*, and was called *Deucalion*'s flood: they fled into *Attica*, and there *Deucalion* died soon after; and *Pausanias* tells us that his Sepulchre was to be seen near *Athens*. His eldest son *Hellen* succeeded him in *Thessaly*, and his other son *Amphictyon* married the daughter of *Cranaus*, and Reigning at *Thermopylæ*, erected there the *Amphictyonic* Council; and *Acrisius* soon after erected the like Council at *Delphi*. This I conceive was done when *Amphictyon* and *Acrisius* were aged, and fit to be Counsellors; suppose in the latter half of the Reign of *David*, and beginning of the Reign of *Solomon*; and soon after, suppose about the middle of the Reign of *Solomon*, did *Phemonoë* become the first Priestess of *Apollo* at *Delphi*, and gave Oracles in hexameter verse: and then was *Acrisius* slain accidentally by his grandson *Perseus*. The Council of *Thermopylæ* included twelve nations of the *Greeks*, without *Attica*, and therefore *Amphictyon* did not then Reign at *Athens*: he might endeavour to succeed *Cranaus*, his wife's father, and be prevented by *Erechtheus*.

Between the Reigns of *Cranaus* and *Erechtheus*, Chronologers place also *Erichthonius*, and his son *Pandion*; but I take this *Erichthonius* and this his son *Pandion*, to be the same with *Erechtheus* and his son and successor *Pandion*, the names being only repeated with a little variation in the list of the Kings of *Attica*: for *Erichthonius*, he that was the son of the Earth, nursed up by *Minerva*, is by *Homer* called *Erechtheus*; and *Themistius* [149]* tells us, that it was *Erechtheus* that first joyned a chariot to horses; and *Plato* [150]* alluding to the story of *Erichthonius* in a basket, saith, *The people of magnanimous* Erechtheus *is beautiful, but it behoves us to behold him taken out*: *Erechtheus* therefore immediately succeeded *Cranaus*, while

Amphictyon Reigned at *Thermopylæ*. In the Reign of *Cranaus* the Poets place the flood of *Deucalion*, and therefore the death of *Deucalion*, and the Reign of his sons *Hellen* and *Amphictyon*, in *Thessaly* and *Thermpolyæ*, was but a few years, suppose eight or ten, before the Reign of *Erechtheus*.

The first Kings of *Arcadia* were successively *Pelasgus*, *Lycaon*, *Nyctimus*, *Arcas*, *Clitor*, *Æpytus*, *Aleus*, *Lycurgus*, *Echemus*, *Agapenor*, *Hippothous*, *Æpytus* II, *Cypselus*, *Olæas*, &c. Under *Cypselus* the *Heraclides* returned into *Peloponnesus*, as above: *Agapenor* was one of those who courted *Helena*; he courted her before he reigned, and afterwards he went to the war at *Troy*, and thence to *Cyprus*, and there built *Paphos*. *Echemus* slew *Hyllus* the son of *Hercules*. *Lycurgus*, *Cepheus*, and *Auge*, were [151]* the children of *Aleus*, the son of *Aphidas*, the son of *Arcas*, the son of *Callisto*, the daughter of *Lycaon*: *Auge* lay with *Hercules*, and *Ancæus* the son of *Lycurgus* was an *Argonaut*, and his uncle *Cepheus* was his Governour in that Expedition; and *Lycurgus* stay'd at home, to look after his aged father *Aleus*, who might be born about 75 years before that Expedition; and his grandfather *Arcas* might be born about the end of the Reign of *Saul*, and *Lycaon* the grandfather of *Arcas* might be then alive, and dye before the middle of *David*'s Reign; and His youngest son *Oenotrus*, the *Janus* of the *Latines*, might grow up, and lead a colony into *Italy* before the Reign of *Solomon*. *Arcas* received [152]* bread-corn from *Triptolemus*, and taught his people to make bread of it; and so did *Eumelus*, the first King of a region afterwards called *Achaia*: and therefore *Arcas* and *Eumelus* were contemporary to *Triptolemus*, and to his old father *Celeus*, and to *Erechtheus* King of *Athens*; and *Callisto* to *Rharus*, and her father *Lycaon* to *Cranaus*: but *Lycaon* died before *Cranaus*, so as to leave room for *Deucalion*'s flood between their deaths. The eleven Kings of *Arcadia*, between this Flood and the Return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*, that is, between the Reigns of *Lycaon* and *Cypselus*, after the rate of about twenty years to a Reign one with another, took up about 220 years; and these years counted back from the Return of the *Heraclides*, place the Flood of *Deucalion* upon the fourteenth year of *David*'s Reign, or thereabout.

Herodotus [153]* tells us, that the *Phœnicians* who came with *Cadmus* brought many doctrines into *Greece*: for amongst those *Phœnicians* were a sort of men called *Curetes*, who were skilled in the Arts and Sciences of

Phœnicia, above other men, and [154]* settled some in *Phrygia*, where they were called *Corybantes*; some in *Crete*, where they were called *Idæi Dactyli*; some in *Rhodes*, where they were called *Telchines*; some in *Samothrace*, where they were called *Cabiri*; some in *Eubœa*, where, before the invention of iron, they wrought in copper, in a city thence called *Chalcis* some in *Lemnos*, where they assisted *Vulcan*; and some in *Imbrus*, and other places: and a considerable number of them settled in *Ætolia*, which was thence called the country of the *Curetes*; until *Ætolus* the son of *Endymion*, having slain *Apis* King of *Sicyon*, fled thither, and by the assistance of his father invaded it, and from his own name called it *Ætolia*: and by the assistance of these artificers, *Cadmus* found out gold in the mountain *Pangæus* in *Thrace*, and copper at *Thebes*; whence copper ore is still called *Cadmia*. Where they settled they wrought first in copper, 'till iron was invented, and then in iron; and when they had made themselves armour, they danced in it at the sacrifices with tumult and clamour, and bells, and pipes, and drums, and swords, with which they struck upon one another's armour, in musical times, appearing seized with a divine fury; and this is reckoned the original of music in *Greece:* so *Solinus* [155]* *Studium musicum inde cœptum cum Idæi Dactyli modulos crepitu & tinnitu æris deprehensos in versificum ordinem transtulissent*: and [156]* *Isidorus*, *Studium musicum ab Idæis Dactylis cœptum*. *Apollo* and the Muses were two Generations later. *Clemens* [157]* calls the *Idæi Dactyli* barbarous, that is strangers; and saith, that they reputed the first wise men, to whom both the letters which they call *Ephesian*, and the invention of musical rhymes are referred: it seems that when the *Phœnician* letters, ascribed to *Cadmus*, were brought into *Greece*, they were at the same time brought into *Phrygia* and *Crete*, by the *Curetes*; who settled in those countries, and called them *Ephesian*, from the city *Ephesus*, where they were first taught. The *Curetes*, by their manufacturing copper and iron, and making swords, and armour, and edged tools for hewing and carving of wood, brought into *Europe* a new way of fighting; and gave *Minos* an opportunity of building a Fleet, and gaining the dominion of the seas; and set on foot the trades of Smiths and Carpenters in *Greece*, which are the foundation of manual trades: the [158]* fleet of *Minos* was without sails, and *Dædalus* fled from him by adding sails to his vessel; and therefore ships with sails were not used by

the *Greeks* before the flight of *Dædalus*, and death of *Minos*, who was slain in pursuing him to *Sicily*, in the Reign of *Rehoboam*. *Dædalus* and his nephew *Talus*, in the latter part of the Reign of *Solomon*, invented the chip-ax, and saw, and wimble, and perpendicular, and compass, and turning-lath, and glew, and the potter's wheel; and his father *Eupalamus* invented the anchor: and these things gave a beginning to manual Arts and Trades in *Europe*.

The [159]* *Curetes*, who thus introduced Letters, and Music, and Poetry, and Dancing, and Arts, and attended on the Sacrifices, were no less active about religious institutions, and for their skill and knowledge and mystical practices, were accounted wise men and conjurers by the vulgar. In *Phrygia* their mysteries were about *Rhea*, called *Magna Mater*, and from the places where she was worshipped, *Cybele*, *Berecynthia*, *Pessinuntia*, *Dindymene*, *Mygdonia*, and *Idæa Phrygia*: and in *Crete*, and the *Terra Curetum*, they were about *Jupiter Olympius*, the son of the *Cretan Rhea*: they represented, [160]* that when *Jupiter* was born in *Crete*, his mother *Rhea* caused him to be educated in a cave in mount *Ida*, under their care and tuition; and [161]* that they danced about him in armour, with great noise, that his father *Saturn* might not hear him cry; and when he was grown up, assisted him in conquering his father, and his father's friends; and in memory of these things instituted their mysteries. *Bochart* [162]* brings them from *Palestine*, and thinks that they had the name of *Curetes* from the people among the *Philistims* called *Crethim*, or *Cerethites*: *Ezek.* xxv. 16. *Zeph.* ii. 5. 1 *Sam.* xxx. 14, for the *Philistims* conquered *Zidon*, and mixed with the *Zidonians*.

The two first Kings of *Crete*, who reigned after the coming of the *Curetes*, were *Asterius* and *Minos*; and *Europa* was the Queen of *Asterius*, and mother of *Minos*; and the *Idæan Curetes* were her countrymen, and came with her and her brother *Alymnus* into *Crete*, and dwelt in the *Idæan* cave in her Reign, and there educated *Jupiter*, and found out iron, and made armour: and therefore these three, *Asterius*, *Europa*, and *Minos*, must be the *Saturn*, *Rhea* and *Jupiter* of the *Cretans*. *Minos* is usually called the son of *Jupiter*; but this is in relation to the fable, that *Jupiter* in the shape of a bull, the Ensign of the Ship, carried away *Europa* from *Zidon*: for the *Phœnicians*, upon their first coming into *Greece*, gave the name of *Jao-pater*, *Jupiter*, to every King: and thus both *Minos* and his father were

Jupiters. *Echemenes*, an ancient author cited by *Athenæus*, [163]* said that *Minos* was that *Jupiter* who committed the rape upon *Ganimede*; though others said more truly that it was *Tantalus*: *Minos* alone was that *Jupiter* who was most famous among the *Greeks* for Dominion and Justice, being the greatest King in all *Greece* in those days, and the only legislator. *Plutarch* [164]* tells us, that the people of *Naxus*, contrary to what others write, pretended that there were two *Minos's*, and two *Ariadnes*; and that the first *Ariadne* married *Bacchus*, and the last was carried away by *Theseus*: but [165]* *Homer*, *Hesiod*, *Thucydides*, *Herodotus*, and *Strabo*, knew but of one *Minos*; and *Homer* describes him to be the son of *Jupiter* and *Europa*, and the brother of *Rhadamanthus* and *Sarpedon*, and the father of *Deucalion* the *Argonaut*, and grandfather of *Idomeneus* who warred at *Troy*, and that he was the legislator of Hell: *Herodotus* [166]* makes *Minos* and *Rhadamanthus* the sons of *Europa*, contemporary to *Ægeus*: and [167]* *Apollodorus* and *Hyginus* say, that *Minos*, the father of *Androgeus*, *Ariadne* and *Phædra*, was the son of *Jupiter* and *Europa*, and brother of *Rhadamanthus* and *Sarpedon*.

Lucian [168]* lets us know that *Europa* the mother of *Minos* was worshipped by the name of *Rhea*, the form of a woman sitting in a chariot drawn by lions, with a drum in her hand, and a *Corona turrita* on her head, like *Astarte* and *Isis*; and the *Cretans* [169]* anciently shewed the house where this *Rhea* lived: and [170]* *Apollonius Rhodius* tells us, that *Saturn*, while he Reigned over the *Titans* in *Olympus*, a mountain in *Crete*, and *Jupiter* was educated by the *Curetes* in the *Cretan* cave, deceived *Rhea*, and of *Philyra* begot *Chiron*: and therefore the *Cretan Saturn* and *Rhea*, were but one Generation older than *Chiron*, and by consequence not older than *Asterius* and *Europa*, the parents of *Minos*; for *Chiron* lived 'till after the *Argonautic* Expedition, and had two grandsons in that Expedition, and *Europa* came into *Crete* above an hundred years before that Expedition: *Lucian* [171]* tells us, that the *Cretans* did not only relate, that *Jupiter* was born and buried among them, but also shewed his sepulchre: and *Porphyry* [172]* tells us, that *Pythagoras* went down into the *Idæan* cave, to see sepulchre: and *Cicero*, [173]* in numbering three *Jupiters*, saith, that the third was the *Cretan Jupiter*, *Saturn*'s son, whose sepulchre was shewed in

Crete: and the Scholiast upon *Callimachus* [174]* lets us know, that this was the sepulchre of *Minos*: his words are, Εν Κρητη επι τωι ταφωι του Μινωος επεγεγραπτο, ΜΙΝΩΟΣ ΤΟΥ ΔΙΟΣ ΤΑΦΟΣ. τωι χρονωι δε του Μινωος απηλειφθη, 'ωστε περιλειφθηναι, ΔΙΟΣ ΤΑΦΟΣ. εκ τουτου ουν εχειν λεγουσι Κρητες τον ταφον του Διος. *In* Crete *upon the Sepulchre of* Minos *was written* Minois Jovis sepulchrum*: but in time* Minois *wore out so that there remained only,* Jovis sepulchrum*, and thence the* Cretans *called it the Sepulchre of* Jupiter. By *Saturn*, *Cicero*, who was a *Latine*, understood the *Saturn* so called by the *Latines*: for when *Saturn* was expelled his Kingdom he fled from *Crete* by sea, to *Italy*; and this the Poets exprest by saying, that *Jupiter* cast him down to *Tartarus*, that is, into the Sea: and because he lay hid in *Italy*, the *Latines* called him *Saturn*; and *Italy*, *Saturnia*, and *Latium*, and themselves *Latines*: so [175]* *Cyprian*; *Antrum Jovis in Creta visitur, & sepulchrum ejus ostenditur: & ab eo Saturnum fugatum esse manifestum est: unde Latium de latebra ejus nomen accepit: hic literas imprimere, hic signare nummos in Italia primus instituit, unde ærarium Saturni vocatur; & rusticitatis hic cultor fuit, inde falcem ferens senex pingitur:* and *Minutius Felix*; *Saturnus Creta profugus, Italiam metu filii sævientis accesserat, & Jani susceptus hospitio, rudes illos homines & agrestes multa docuit, ut Græculus & politus, literas imprimere, nummos signare, instrumenta conficere: itaque latebram suam, quod tuto latuisset, vocari maluit Latium, & urbem Saturniam de suo nomine. * * Ejus filius Jupiter Cretæ excluso parente regnavit, illic obiit, illic filios habuit; adhuc antrum Jovis visitur, & sepulchrum ejus ostenditur, & ipsis sacris suis humanitatis arguitur*: and *Tertullian*; [176]* *Quantum rerum argumenta docent, nusquam invenio fideliora quam apud ipsam Italiam, in qua Saturnus post multas expeditiones, postque Attica hospitia consedit, exceptus ab Jano, vel Jane ut Salii volunt. Mons quem incoluerat Saturnius dictus: civitas quam depalaverat Saturnia usque nunc est. Tota denique Italia post Oenotriam Saturnia cognominabatur. Ab ipso primum tabulæ, & imagine signatus nummus, & inde ærario præsidet*. By *Saturn*'s carrying letters into *Italy*, and coyning money, and teaching agriculture, and making instruments, and building a town, you may know that he fled from *Crete*, after letters, and the coyning of money, and manual arts were brought into *Europe* by the *Phœnicians*; and from *Attica*, after agriculture was brought into *Greece* by

Ceres; and so could not be older than *Asterius*, and *Europa*, and her brother *Cadmus*: and by *Italy*'s being called *Oenotria*, before it was called *Saturnia*, you may know that he came into *Italy* after *Oenotrus*, and so was not older than the sons of *Lycaon*. *Oenotrus* carried the first colony of the *Greeks* into *Italy*, *Saturn* the second, and *Evander* the third; and the *Latines* know nothing older in *Italy* than *Janus* and *Saturn*: and therefore *Oenotrus* was the *Janus* of the *Latines*, and *Saturn* was contemporary to the sons of *Lycaon*, and by consequence also to *Celeus*, *Erechtheus*, *Ceres*, and *Asterius*: for *Ceres* educated *Triptolemus* the son of *Celeus*, in the Reign of *Erechtheus*, and then taught him to plow and sow corn: *Arcas* the son of *Callisto*, and grandson of *Lycaon*, received corn from *Triptolemus*, and taught his people to make bread of it; and *Procris*, the daughter of *Erechtheus*, fled to *Minos* the son of *Asterius*. In memory of *Saturn*'s coming into *Italy* by sea, the *Latines* coined their first money with his head on one side, and a ship on the other. *Macrobius* [177]* tells us, that when *Saturn* was dead, *Janus* erected an Altar to him, with sacred rites as to a God, and instituted the *Saturnalia*, and that humane sacrifices were offered to him; 'till *Hercules* driving the cattle of *Geryon* through *Italy*, abolished that custom: by the human sacrifices you may know that *Janus* was of the race of *Lycaon*; which character agrees to *Oenotrus*. *Dionysius Halicarnassensis* tells us further, that *Oenotrus* having found in the western parts of *Italy* a large region fit for pasturage and tillage, but yet for the most part uninhabited, and where it was inhabited, peopled but thinly; in a certain part of it, purged from the *Barbarians*, he built towns little and numerous, in the mountains; which manner of building was familiar to the ancients: and this was the Original of Towns in *Italy*.

Pausanias [178]* tells us that *the people of* Elis*, who were best skilled in Antiquities, related this to have been the Original of the Olympic Games: that* Saturn *Reigned first and had a Temple built to him in* Olympia *by the men of the Golden Age; and that when* Jupiter *was newly born, his mother* Rhea *recommended him to the care of the* Idæi Dactyli*, who were also called* Curetes*: that afterwards five of them, called* Hercules*,* Pœonius*,* Epimedes*,* Jasius*, and* Ida*, came from* Ida*, a mountain in* Crete*, into* Elis*; and* Hercules*, called also* Hercules Idæus*, being the oldest of them, in memory of the war between* Saturn *and* Jupiter*, instituted the game of*

racing, and that the victor should be rewarded with a crown of olive; and there erected an altar to *Jupiter Olympius*, and called these games Olympic: and that some of the *Eleans* said, *that* Jupiter *contended here with* Saturn *for the Kingdom; others that* Hercules Idæus *instituted these games in memory of their victory over the* Titans: for the people of *Arcadia* [179]* had a tradition, that the Giants fought with the Gods in the valley of *Bathos*, near the river *Alpheus* and the fountain *Olympias*. [180]* Before the Reign of *Asterius*, his father *Teutamus* came into *Crete* with a colony from *Olympia*; and upon the flight of *Asterius*, some of his friends might retire with him into their own country, and be pursued and beaten there by the *Idæan Hercules*: the *Eleans* said also that *Clymenus* the grandson of the *Idæan Hercules*, about fifty years after *Deucalion*'s flood, coming from *Crete*, celebrated these games again in *Olympia*, and erected there an altar to *Juno Olympia*, that is, to *Europa*, and another to this *Hercules* and the rest of the *Curetes*; and Reigned in *Elis* 'till he was expelled by *Endymion*, [181]* who thereupon celebrated these games again: and so did *Pelops*, who expelled *Ætolus* the son of *Endymion*; and so also did *Hercules* the son of *Alcmena*, and *Atreus* the son of *Pelops*, and *Oxylus*: they might be celebrated originally in triumph for victories, first by *Hercules Idæus*, upon the conquest of *Saturn* and the *Titans*, and then by *Clymenus*, upon his coming to Reign in the *Terra Curetum*; then by *Endymion*, upon his conquering *Clymenus*; and afterwards by *Pelops*, upon his conquering *Ætolus*; and by *Hercules*, upon his killing *Augeas*; and by *Atreus*, upon his repelling the *Heraclides*; and by *Oxylus*, upon the return of the *Heraclides* into *Peloponnesus*. This *Jupiter*, to whom they were instituted, had a Temple and Altar erected to him in *Olympia*, where the games were celebrated, and from the place was called *Jupiter Olympius*: *Olympia* was a place upon the confines of *Pisa*, near the river *Alpheus*.

In the [182]* Island *Thasus*, where *Cadmus* left his brother *Thasus*, the *Phœnicians* built a Temple to *Hercules Olympius*, that *Hercules*, whom *Cicero* [183]* calls *ex Idæis Dactylis; cui inferias afferunt*. When the mysteries of *Ceres* were instituted in *Eleusis*, there were other mysteries instituted to her and her daughter and daughter's husband, in the Island *Samothrace*, by the *Phœnician* names of *Dii Cabiri Axieros*, *Axiokersa*, and *Axiokerses*, that is, the great Gods *Ceres*, *Proserpina* and *Pluto*: for [184]*

Jasius a *Samothracian*, whose sister married *Cadmus*, was familiar with *Ceres*; and *Cadmus* and *Jasius* were both of them instituted in these mysteries. *Jasius* was the brother of *Dardanus*, and married *Cybele* the daughter of *Meones* King of *Phrygia*, and by her had *Corybas*; and after his death, *Dardanus*, *Cybele* and *Corybas* went into *Phrygia*, and carried thither the mysteries of the mother of the Gods, and *Cybele* called the goddess after her own name, and *Corybas* called her priests *Corybantes*: thus *Diodorus*; but *Dionysius* saith [185]* that *Dardanus* instituted the *Samothracian* mysteries, and that his wife *Chryses* learnt them in *Arcadia*, and that *Idæus* the son of *Dardanus* instituted afterwards the mysteries of the mother of the gods in *Phrygia*: this *Phrygian* Goddess was drawn in a chariot by lions, and had a *corona turrita* on her head, and a drum in her hand, like the *Phœnician* Goddess *Astarte*, and the *Corybantes* danced in armour at her sacrifices in a furious manner, like the *Idæi Dactyli*; and *Lucian* [186]* tells us that she was the *Cretan Rhea*, that is, *Europa* the mother of *Minos*: and thus the *Phœnicians* introduced the practice of Deifying dead men and women among the *Greeks* and *Phrygians*; for I meet with no instance of Deifying dead men and women in *Greece*, before the coming of *Cadmus* and *Europa* from *Zidon*.

From these originals it came into fashion among the *Greeks*, κτεριζειν, *parentare*, to celebrate the funerals of dead parents with festivals and invocations and sacrifices offered to their ghosts, and to erect magnificent sepulchres in the form of temples, with altars and statues, to persons of renown; and there to honour them publickly with sacrifices and invocations: every man might do it to his ancestors; and the cities of *Greece* did it to all the eminent *Greeks*: as to *Europa* the sister, to *Alymnus* the brother, and to *Minos* and *Rhadamanthus* the nephews of *Cadmus*; to his daughter *Ino*, and her son *Melicertus*; to *Bacchus* the son of his daughter *Semele*, *Aristarchus* the husband of his daughter *Autonoe*, and *Jasius* the brother of his wife *Harmonia*; to *Hercules* a *Theban*, and his mother *Alcmena*; to *Danae* the daughter of *Acrisius*; to *Æsculapius* and *Polemocrates* the son of *Machaon*, to *Pandion* and *Theseus* Kings of *Athens*, *Hippolytus* the son of *Theseus*, *Pan* the son of *Penelope*, *Proserpina*, *Triptolemus*, *Celeus*, *Trophonius*, *Castor*, *Pollux*, *Helena*, *Menelaus*, *Agamemnon*, *Amphiaraus* and his son *Amphilochus*, *Hector* and *Alexandra* the son and daughter of *Priam*,

Phoroneus, *Orpheus*, *Protesilaus*, *Achilles* and his mother *Thetis*, *Ajax*, *Arcas*, *Idomeneus*, *Meriones*, *Æacus*, *Melampus*, *Britomartis*, *Adrastus*, *Iolaus*, and divers others. They Deified their dead in divers manners, according to their abilities and circumstances, and the merits of the person; some only in private families, as houshold Gods or *Dii Pænates*; others by erecting gravestones to them in publick, to be used as altars for annual sacrifices; others, by building also to them sepulchres in the form of houses or temples; and some by appointing mysteries, and ceremonies, and set sacrifices, and festivals, and initiations, and a succession of priests for performing those institutions in the temples, and handing them down to posterity. Altars might begin to be erected in *Europe* a little before the days of *Cadmus*, for sacrificing to the old God or Gods of the Colonies, but Temples began in the days of *Solomon*; for [187]* *Æacus* the son of *Ægina*, who was two Generations older than the *Trojan* war, is by some reputed one of the first who built a Temple in *Greece*. Oracles came first from *Egypt* into *Greece* about the same time, as also did the custom of forming the images of the Gods with their legs bound up in the shape of the *Egyptian* mummies: for Idolatry began in *Chaldæa* and *Egypt*, and spread thence into *Phœnicia* and the neighbouring countries, long before it came into *Europe*; and the *Pelasgians* propagated it in *Greece*, by the dictates of the Oracles. The countries upon the *Tigris* and the *Nile* being exceeding fertile, were first frequented by mankind, and grew first into Kingdoms, and therefore began first to adore their dead Kings and Queens: hence came the Gods of *Laban*, the Gods and Goddesses called *Baalim* and *Ashtaroth* by the *Canaanites*, the Dæmons or Ghosts to whom they sacrificed, and the *Moloch* to whom they offered their children in the days of *Moses* and the Judges. Every City set up the worship of its own Founder and Kings, and by alliances and conquests they spread this worship, and at length the *Phœnicians* and *Egyptians* brought into *Europe* the practice of Deifying the dead. The Kingdom of the lower *Egypt* began to worship their Kings before the days of *Moses*; and to this worship the second commandment is opposed: when the Shepherds invaded the lower *Egypt*, they checked this worship of the old *Egyptians*, and spread that of their own Kings: and at length the *Egyptians* of *Coptos* and *Thebais*, under *Misphragmuthosis* and *Amosis*, expelling the Shepherds, checked the worship of the Gods of the

Shepherds, and Deifying their own Kings and Princes, propagated the worship of twelve of them into their conquests; and made them more universal than the false Gods of any other nation had been before, so as to be called, *Dii magni majorum gentium*. *Sesostris* conquered *Thrace*, and *Amphictyon* the son of *Prometheus* brought the twelve Gods from *Thrace* into *Greece*: *Herodotus* [188]* tells us that they came from *Egypt*; and by the names of the cities of *Egypt* dedicated to many of these Gods, you may know that they were of an *Egyptian* original: and the *Egyptians*, according to *Diodorus*, [189]* usually represented, that after their *Saturn* and *Rhea*, Reigned *Jupiter* and *Juno*, the parents of *Osiris* and *Isis*, the parents of *Orus* and *Bubaste*.

By all this it may be understood, that as the *Egyptians* who Deified their Kings, began their monarchy with the Reign of their Gods and Heroes, reckoning *Menes* the first man who reigned after their Gods; so the *Cretans* had the Ages of their Gods and Heroes, calling the first four Ages of their Deified Kings and Princes, the Golden, Silver, Brazen, and Iron Ages. *Hesiod* [190]* describing these four Ages of the Gods and Demi-Gods of *Greece*, represents them to be four Generations of men, each of which ended when the men then living grew old and dropt into the grave, and tells us that the fourth ended with the wars of *Thebes* and *Troy*: and so many Generations there were, from the coming of the *Phœnicians* and *Curetes* with *Cadmus* and *Europa* into *Greece* unto the destruction of *Troy*. *Apollonius Rhodius* saith that when the *Argonauts* came to *Crete*, they slew *Talus* a brazen man, who remained of those that were of the Brazen Age, and guarded that pass: *Talus* was reputed [191]* the son of *Minos*, and therefore the sons of *Minos* lived in the Brazen Age, and *Minos* Reigned in the Silver Age: it was the Silver Age of the *Greeks* in which they began to plow and sow Corn, and *Ceres*, that taught them to do it, flourished in the Reign of *Celeus* and *Erechtheus* and *Minos*. Mythologists tell us that the last woman with whom *Jupiter* lay, was *Alcmena*; and thereby they seem to put an end to the Reign of *Jupiter* among mortals, that is to the Silver Age, when *Alcmena* was with child of *Hercules*; who therefore was born about the eighth or tenth year of *Rehoboam's* Reign, and was about 34 years old at the time of the *Argonautic* expedition. *Chiron* was begot by *Saturn* of *Philyra* in the Golden Age, when *Jupiter* was a child in the *Cretan* cave, as

above; and this was in the Reign of *Asterius* King of *Crete*: and therefore *Asterius* Reigned in *Crete* in the Golden Age; and the Silver Age began when *Chiron* was a child: if *Chiron* was born about the 35th year of *David*'s Reign, he will be born in the Reign of *Asterius*, when *Jupiter* was a child in the *Cretan* cave, and be about 88 years old in the time of the *Argonautic* expedition, when he invented the Asterisms; and this is within the reach of nature. The Golden Age therefore falls in with the Reign of *Asterius*, and the Silver Age with that of *Minos*; and to make these Ages much longer than ordinary generations, is to make *Chiron* live much longer than according to the course of nature. This fable of the four Ages seems to have been made by the *Curetes* in the fourth Age, in memory of the first four Ages of their coming into *Europe*, as into a new world; and in honour of their country-woman *Europa*, and her husband *Asterius* the *Saturn* of the *Latines*, and of her son *Minos* the *Cretan Jupiter* and grandson *Deucalion*, who Reigned 'till the *Argonautic* expedition, and is sometimes reckoned among the *Argonauts*, and of their great grandson *Idomeneus* who warred at *Troy*. *Hesiod* tells us that he himself lived in the fifth Age, the Age next after the taking of *Troy*, and therefore he flourished within thirty or thirty five years after it: and *Homer* was of about the same Age; for he [192]* lived sometime with *Mentor* in *Ithaca*, and there learnt of him many things concerning *Ulysses*, with whom *Mentor* had been personally acquainted: now *Herodotus*, the oldest Historian of the *Greeks* now extant, [193]* tells us that *Hesiod* and *Homer* were not above four hundred years older than himself, and therefore they flourished within 110 or 120 years after the death of *Solomon*; and according to my reckoning the taking of *Troy* was but one Generation earlier.

Mythologists tell us, that *Niobe* the daughter of *Phoroneus* was the first woman with whom *Jupiter* lay, and that of her he begat *Argus*, who succeeded *Phoroneus* in the Kingdom of *Argos*, and gave his name to that city; and therefore *Argus* was born in the beginning of the Silver Age: unless you had rather say that by *Jupiter* they might here mean *Asterius*; for the *Phœnicians* gave the name of *Jupiter* to every King, from the time of their first coming into *Greece* with *Cadmus* and *Europa*, until the invasion of *Greece* by *Sesostris*, and the birth of *Hercules*, and particularly to the fathers of *Minos*, *Pelops*, *Lacedæmon*, *Æacus*, and *Perseus*.

The four first Ages succeeded the flood of *Deucalion*; and some tell us that *Deucalion* was the son of *Prometheus*, the son of *Japetus*, and brother of *Atlas*: but this was another *Deucalion*; for *Japetus* the father of *Prometheus*, *Epimetheus,* and *Atlas*, was an *Egyptian*, the brother of *Osiris*, and flourished two generations after the flood of *Deucalion*.

I have now carried up the Chronology of the *Greeks* as high as to the first use of letters, the first plowing and sowing of corn, the first manufacturing of copper and iron, the beginning of the trades of Smiths, Carpenters, Joyners, Turners, Brick-makers, Stone-cutters, and Potters, in *Europe*; the first walling of cities about, the first building of Temples, and the original of Oracles in *Greece*; the beginning of navigation by the Stars in long ships with sails; the erecting of the *Amphictyonic* Council; the first Ages of *Greece*, called the Golden, Silver, Brazen and Iron Ages, and the flood of *Deucalion* which immediately preceded them. Those Ages could not be earlier than the invention and use of the four metals in *Greece*, from whence they had their names; and the flood of *Ogyges* could not be much above two or three ages earlier than that of *Deucalion*: for among such wandering people as were then in *Europe*, there could be no memory of things done above three or four ages before the first use of letters: and the expulsion of the Shepherds out of *Egypt*, which gave the first occasion to the coming of people from *Egypt* into *Greece*, and to the building of houses and villages in *Greece*, was scarce earlier than the days of *Eli* and *Samuel*; for *Manetho* tells us, that when they were forced to quit *Abaris* and retire out of *Egypt*, they went through the wilderness into *Judæa* and built *Jerusalem*: I do not think, with *Manetho,* that they were the *Israelites* under *Moses*, but rather believe that they were *Canaanites*; and upon leaving *Abaris* mingled with the *Philistims* their next neighbours: though some of them might assist *David* and *Solomon* in building *Jerusalem* and the Temple.

Saul was made King [194]*, that he might rescue *Israel* out of the hand of the *Philistims*, who opressed them; and in the second year of his Reign, the *Philistims* brought into the field against him *thirty thousand chariots, and six thousand horsemen, and people as the sand which is on the sea shore for multitude*: the *Canaanites* had their horses from *Egypt*; and yet in the days of *Moses* all the chariots of *Egypt*, with which *Pharaoh* pursued *Israel* were

but six hundred, *Exod.* xiv. 7. From the great army of the *Philistims* against *Saul*, and the great number of their horses, I seem to gather that the Shepherds had newly relinquished *Egypt*; and joyned them: the Shepherds might be beaten and driven out of the greatest part of *Egypt*, and shut up in *Abaris* by *Misphragmuthosis* in the latter end of the days of *Eli*; and some of them fly to the *Philistims*, and strengthen them against *Israel*, in the last year of *Eli*; and from the *Philistims* some of the Shepherds might go to *Zidon*, and from *Zidon*, by sea to *Asia minor* and *Greece*: and afterwards, in the beginning of the Reign of *Saul*, the Shepherds who still remained in *Egypt* might be forced by *Tethmosis* or *Amosis* the son of *Misphragmuthosis*, to leave *Abaris*, and retire in very great numbers to the *Philistims*; and upon these occasions several of them, as *Pelasgus*, *Inachus*, *Lelex*, *Cecrops*, and *Abas*, might come with their people by sea from *Egypt* to *Zidon* and *Cyprus*, and thence to *Asia minor* and *Greece*, in the days of *Eli*, *Samuel* and *Saul*, and thereby begin to open a commerce by sea between *Zidon* and *Greece*, before the revolt of *Edom* from *Judæa*, and the final coming of the *Phœnicians* from the *Red Sea*.

Pelasgus Reigned in *Arcadia*, and was the father of *Lycaon*, according to *Pherecydes Atheniensis*, and *Lycaon* died just before the flood of *Deucalion*; and therefore his father *Pelasgus* might come into *Greece* about two Generations before *Cadmus*, or in the latter end of the days of *Eli*: *Lycaon* sacrificed children, and therefore his father might come with his people from the Shepherds in *Egypt*, and perhaps from the regions of *Heliopolis*, where they sacrificed men, 'till *Amosis* abolished that custom. *Misphragmuthosis* the father of *Amosis*, drove the Shepherds out of a great part of *Egypt*, and shut the remainder up in *Abaris*: and then great numbers might escape to *Greece*; some from the regions of *Heliopolis* under *Pelasgus*, and others from *Memphis* and other places, under other Captains: and hence it might come to pass that the *Pelasgians* were at the first very numerous in *Greece*, and spake a different language from the *Greek*, and were the ringleaders in bringing into *Greece* the worship of the dead.

Inachus is called the son of *Oceanus*, perhaps because he came to *Greece* by sea: he might come with his people to *Argos* from *Egypt* in the days of *Eli*, and seat himself upon the river *Inachus*, so named from him, and leave his territories to his sons *Phoroneus*, *Ægialeus*, and *Phegeus*, in the days of *Samuel*: for *Car* the son of *Phoroneus* built a Temple to *Ceres* in

Megara, and therefore was contemporary to *Erechtheus*. *Phoroneus* Reigned at *Argos*, and *Aegialeus* at *Sicyon*, and founded those Kingdoms; and yet *Ægialeus* is made above five hundred years older than *Phoroneus* by some Chronologers: but [195]* *Acusilaus*, [196]* *Anticlides* and [197]* *Plato*, accounted *Phoroneus* the oldest King in *Greece*, and [198]* *Apollodorus* tells us, *Ægialeus* was the brother of *Phoroneus*. *Ægialeus* died without issue, and after him Reigned *Europs*, *Telchin*, *Apis*, *Lamedon*, *Sicyon*, *Polybus*, *Adrastus*, and *Agamemnon*, *&c.* and *Sicyon* gave his name to the Kingdom: *Herodotus* [199]* saith that *Apis* in the *Greek* Tongue is *Epaphus*; and *Hyginus*, [200]* that *Epaphus* the *Sicyonian* got *Antiopa* with child: but the later *Greeks* have made two men of the two names *Apis* and *Epaphus* or *Epopeus*, and between them inserted twelve feigned Kings of *Sicyon*, who made no wars, nor did any thing memorable, and yet Reigned five hundred and twenty years, which is, one with another, above forty and three years a-piece. If these feigned Kings be rejected, and the two Kings *Apis* and *Epopeus* be reunited; *Ægialeus* will become contemporary to his brother *Phoroneus*, as he ought to be; for *Apis* or *Epopeus*, and *Nycteus* the guardian of *Labdacus*, were slain in battle about the tenth year of *Solomon*, as above; and the first four Kings of *Sicyon*, *Ægialeus*, *Europs*, *Telchin*, *Apis*, after the rate of about twenty years to a Reign, take up about eighty years; and these years counted upwards from the tenth year of *Solomon*, place the beginning of the Reign of *Ægialeus* upon the twelfth year of *Samuel*, or thereabout: and about that time began the Reign of *Phoroneus* at *Argos*; *Apollodorus* [201]* calls *Adrastus* King of *Argos*; but *Homer* [202]* tells us, that he Reigned first at *Sicyon*: he was in the first war against *Thebes*. Some place *Janiscus* and *Phæstus* between *Polybus* and *Adrastus*, but without any certainty.

Lelex might come with his people into *Laconia* in the days of *Eli*, and leave his territories to his sons *Myles*, *Eurotas*, *Cleson*, and *Polycaon* in the days of *Samuel*. *Myles* set up a quern, or handmill to grind corn, and is reputed the first among the *Greeks* who did so: but he flourished before *Triptolemus*, and seems to have had his corn and artificers from *Egypt*. *Eurotas* the brother, or as some say the son of *Myles*, built *Sparta*, and called it after the name of his daughter *Sparta*, the wife of *Lacedæmon*, and mother of *Eurydice*. *Cleson* was the father of *Pylas* the father of *Sciron*,

who married the daughter of *Pandion* the son of *Erechtheus*, and contended with *Nisus* the son of *Pandion* and brother of *Ægeus*, for the Kingdom; and *Æacus* adjudged it to *Nisus*. *Polycaon* invaded *Messene*, then peopled only by villages, called it *Messene* after the name of his wife, and built cities therein.

Cecrops came from *Sais* in *Egypt* to *Cyprus*, and thence into *Attica*: and he might do this in the days of *Samuel*, and marry *Agraule* the daughter of *Actæus*, and succeed him in *Attica* soon after, and leave his Kingdom to *Cranaus* in the Reign of *Saul*, or in the beginning of the Reign of *David*: for the flood of *Deucalion* happened in the Reign of *Cranaus*.

Of about the same age with *Pelasgus*, *Inachus*, *Lelex*, and *Actæus*, was *Ogyges*: he Reigned in *Bœotia*, and some of his people were *Leleges*: and either he or his son *Eleusis* built the city *Eleusis* in *Attica*, that is, they built a few houses of clay, which in time grew into a city. *Acusilaus* wrote that *Phoroneus* was older than *Ogyges*, and that *Ogyges* flourished 1020 years before the first Olympiad, as above; but *Acusilaus* was an *Argive*, and feigned these things in honour of his country: to call things *Ogygian* has been a phrase among the ancient *Greeks*, to signify that they are as old as the first memory of things; and so high we have now carried up the Chronology of the *Greeks*. *Inachus* might be as old as *Ogyges*, but *Acusilaus* and his followers made them seven hundred years older than the truth; and Chronologers, to make out this reckoning, have lengthened the races of the Kings of *Argos* and *Sicyon*, and changed several contemporary Princes of *Argos* into successive Kings, and inserted many feigned Kings into the race of the Kings of *Sicyon*.

Inachus had several sons, who Reigned in several parts of *Peloponnesus*, and there built Towns; as *Phoroneus*, who built *Phoronicum*, afterwards called *Argos*, from *Argus* his grandson; *Ægialeus*, who built *Ægialea*, afterwards called *Sicyon*, from *Sicyon* the grandson of *Erechtheus*; *Phegeus*, who built *Phegea*, afterwards called *Psophis*, from *Psophis* the daughter of *Lycaon*: and these were the oldest towns in *Peloponnesus* then *Sisyphus*, the son of *Æolus* and grandson of *Hellen*, built *Ephyra*, afterwards called *Corinth*; and *Aëthlius*, the son of *Æolus*, built *Elis*: and before them *Cecrops* built *Cecropia*, the cittadel of *Athens*; and *Lycaon* built *Lycosura*, reckoned by some the oldest town in *Arcadia*; and his sons, who were at least four and twenty in number, built each of them a town; except the

youngest, called *Oenotrus*, who grew up after his father's death, and sailed into *Italy* with his people, and there set on foot the building of towns, and became the *Janus* of the *Latines*. *Phoroneus* had also several children and grandchildren, who Reigned in several places, and built new towns, as *Car*, *Apis*, &c. and *Hæmon*, the son of *Pelasgus*, Reigned in *Hæmonia*, afterwards called *Thessaly*, and built towns there. This division and subdivision has made great confusion in the history of the first Kingdoms of *Peloponnesus*, and thereby given occasion to the vain-glorious *Greeks*, to make those kingdoms much older than they really were: but by all the reckonings abovementioned, the first civilizing of the *Greeks*, and teaching them to dwell in houses and towns, and the oldest towns in *Europe*, could scarce be above two or three Generations older than the coming of *Cadmus* from *Zidon* into *Greece*; and might most probably be occasioned by the expulsion of the Shepherds out of *Egypt* in the days of *Eli* and *Samuel*, and their flying into *Greece* in considerable numbers: but it's difficult to set right the Genealogies and Chronology of the Fabulous Ages of the *Greeks*, and I leave these things to be further examined.

Before the *Phœnicians* introduced the Deifying of dead men, the *Greeks* had a Council of Elders in every town for the government thereof, and a place where the elders and people worshipped their God with Sacrifices: and when many of those towns, for their common safety, united under a common Council, they erected a *Prytaneum* or Court in one of the towns, where the Council and People met at certain times, to consult their common safety, and worship their common God with sacrifices, and to buy and sell: the towns where these Councils met, the *Greeks* called δημοι, peoples or communities, or Corporation Towns: and at length, when many of these δημοι for their common safety united by consent under one common Council, they erected a *Prytaneum* in one of the δημοι for the common Council and People to meet in, and to consult and worship in, and feast, and buy, and sell; and this δημος they walled about for its safety, and called την πολιν the city: and this I take to have been the original of Villages, Market-Towns, Cities, common Councils, Vestal Temples, Feasts and Fairs, in *Europe*: the *Prytaneum*, πυρος ταμειον, was a Court with a place of worship, and a perpetual fire kept therein upon an Altar for sacrificing: from the word 'Εστια fire, came the name *Vesta*, which at length the people turned into a Goddess, and so became fire-worshippers like the ancient

Persians: and when these Councils made war upon their neighbours, they had a general commander to lead their armies, and he became their King.

So *Thucydides* [203]* tells us, that *under* Cecrops *and the ancient Kings, untill* Theseus*;* Attica *was always inhabited city by city, each having Magistrates and* Prytanea*: neither did they consult the King, when there was no fear of danger, but each apart administred their own common-wealth, and had their own Council, and even sometimes made war, as the* Eleusinians *with* Eumolpus *did against* Erechtheus*: but when* Theseus*, a prudent and potent man obtained the Kingdom, he took away the Courts and Magistrates of the other cities, and made them all meet in one Council and* Prytaneum *at* Athens. *Polemon*, as he is cited by [204]* *Strabo*, tells us, *that in this body of* Attica*, there were 170* δημοι*, one of which was* Eleusis: and *Philochorus* [205]* relates, that *when* Attica *was infested by sea and land by the* Cares *and* Bœoti*,* Cecrops *the first of any man reduced the multitude,* that is the 170 towns*, into twelve cities, whose names were* Cecropia*,* Tetrapolis*,* Epacria*,* Decelia*,* Eleusis*,* Aphydna*,* Thoricus*,* Brauron*,* Cytherus*,* Sphettus*,* Cephissia*, and* Phalerus*; and that* Theseus *contracted those twelve cities into one, which was* Athens.

The original of the Kingdom of the *Argives* was much after the same manner: for *Pausanias* [206]* tells us, *that* Phoroneus *the son of* Inachus *was the first who gathered into one community the* Argives*, who 'till then were scattered, and lived every where apart, and the place where they were first assembled was called* Phoronicum*, the city of* Phoroneus: and *Strabo* [207]* observes, *that* Homer *calls all the places which he reckons up in* Peloponnesus*, a few excepted, not cities but regions, because each of them consisted of a convention of many* δημοι*, free towns, out of which afterward noble cities were built and frequented: so the* Argives *composed* Mantinæa *in* Arcadia *out of five towns, and* Tegea *out of nine; and out of so many was* Heræa *built by* Cleombrotus*, or by* Cleonymus*: so also* Ægium *was built out of seven or eight towns,* Patræ*: out of seven, and* Dyme *out of eight; and so* Elis *was erected by the conflux of many towns into one city.*

Pausanias [208]* tells us, that the *Arcadians* accounted *Pelasgus* the first man, and that he was their first King; and *taught the ignorant people to built houses, for defending themselves from heat, and cold, and rain; and to make them garments of skins; and instead of herbs and roots, which were*

sometimes noxious, to eat the acorns of the beech tree; and that his son *Lycaon* built the oldest city in all *Greece*: he tells us also, that in the days of *Lelex* the *Spartans* lived in villages apart. The *Greeks* therefore began to build houses and villages in the days of *Pelasgus* the father of *Lycaon*, and in the days of *Lelex* the father of *Myles*, and by consequence about two or three Generations before the Flood of *Deucalion*, and the coming of *Cadmus*; 'till then [209]* they lived in woods and caves of the earth. The first houses were of clay, 'till the brothers *Euryalus* and *Hyperbius* taught them to harden the clay into bricks, and to build therewith. In the days of *Ogyges*, *Pelasgus*, *Æzeus*, *Inachus* and *Lelex*, they began to build houses and villages of clay, *Doxius* the son of *Cœlus* teaching them to do it; and in the days of *Lycaon*, *Phoroneus*, *Ægialeus*, *Phegeus*, *Eurotas*, *Myles*, *Polycaon*, and *Cecrops*, and their sons, to assemble the villages into δημοι, and the δημοι into cities.

When *Oenotrus* the son of *Lycaon* carried a Colony into *Italy*, *he* [210]* *found that country for the most part uninhabited; and where it was inhabited, peopled but thinly: and seizing a part of it, he built towns in the mountains, little and numerous*, as above: these towns were without walls; but after this Colony grew numerous, and began to want room, *they expelled the* Siculi*, compassed many cities with walls, and became possest of all the territory between the two rivers* Liris *and* Tibre: and it is to be understood that those cities had their Councils and *Prytanea* after the manner of the *Greeks*: for *Dionysius* [211]* tells us, that the new Kingdom of *Rome*, as *Romulus* left it, consisted of thirty Courts or Councils, in thirty towns, each with the sacred fire kept in the *Prytaneum* of the Court, for the Senators who met there to perform Sacred Rites, after the manner of the *Greeks*: *but when* Numa *the successor of* Romulus *Reigned, he leaving the several fires in their own Courts, instituted one common to them all at* Rome: whence *Rome* was not a compleat city before the days of *Numa*.

When navigation was so far improved that the *Phœnicians* began to leave the sea-shore, and sail through the *Mediterranean* by the help of the stars, it may be presumed that they began to discover the islands of the *Mediterranean*, and for the sake of trafic to sail as far as *Greece*: and this was not long before they carried away *Io* the daughter of *Inachus*, from *Argos*. The *Cares* first infested the *Greek* seas with piracy, and then *Minos*

the son of *Europa* got up a potent fleet, and sent out Colonies: for *Diodorus* [212]* tells us, that the *Cyclades* islands, those near *Crete*, were at first desolate and uninhabited; but *Minos* having a potent fleet, sent many Colonies out of *Crete*, and peopled many of them; and particularly that the island *Carpathus* was first seized by the soldiers of *Minos*: *Syme* lay waste and desolate 'till *Triops* came thither with a Colony under *Chthonius*: *Strongyle* or *Naxus* was first inhabited by the *Thracians* in the days of *Boreas*, a little before the *Argonautic* Expedition: *Samsos* was, at first desert, and inhabited only by a great multitude of terrible wild beasts, 'till *Macareus* peopled it, as he did also the islands *Chius* and *Cos*. *Lesbos* lay waste and desolate 'till *Xanthus* sailed thither with a Colony: *Tenedos* lay desolate 'till *Tennes*, a little before the *Trojan* war, sailed thither from *Troas*. *Aristæus*, who married *Autonoe* the daughter of *Cadmus*, carried a Colony from *Thebes* into *Cæa*, an island not inhabited before: the island *Rhodes* was at first called *Ophiusa*, being full of serpents, before *Phorbas*, a Prince of *Argos*, went thither, and made it habitable by destroying the serpents, which was about the end of *Solomon*'s Reign; in memory of which he is delineated in the heavens in the Constellation of *Ophiuchus*. The discovery of this and some other islands made a report that they rose out of the Sea: *in Asia Delos emersit, & Hiera, & Anaphe, & Rhodus*, saith [213]* *Ammianus*: and [214]* *Pliny*; *claræ jampridem insulæ, Delos & Rhodos memoriæ produntur enatæ, postea minores, ultra Melon Anaphe, inter Lemnum & Hellespontum Nea, inter Lebedum & Teon Halone*, &c.

Diodorus [215]* tells us also, that the seven islands called *Æolides*, between *Italy* and *Sicily*, were desert and uninhabited 'till *Lipparus* and *Æolus*, a little before the *Trojan* war, went thither from *Italy*, and peopled them: and that *Malta* and *Gaulus* or *Gaudus* on the other side of *Sicily*, were first peopled by *Phœnicians*; and so was *Madera* without the *Straits*: and *Homer* writes that *Ulysses* found the Island *Ogygia* covered with wood, and uninhabited, except by *Calypso* and her maids, who lived in a cave without houses; and it is not likely that *Great Britain* and *Ireland* could be peopled before navigation was propagated beyond the *Straits*.

The *Sicaneans* were reputed the first inhabitants of *Sicily*, they built little Villages or Towns upon hills, and every Town had its own King; and by this means they spread over the country, before they formed themselves into

larger governments with a common King: *Philistus* [216]* saith that *they were transplanted into* Sicily *from the River* Sicanus *in* Spain; and *Dionysius* [217]*, that *they were a* Spanish *people who fled from the* Ligures *in* Italy; he means the *Ligures* [218]* who opposed *Hercules* when he returned from his expedition against *Geryon* in *Spain*, and endeavoured to pass the *Alps* out of *Gaul* into *Italy*. *Hercules* that year got into *Italy*, and made some conquests there, and founded the city *Croton*; and [219]* after winter, upon the arrival of his fleet from *Erythra* in *Spain*, sailed to *Sicily*, and there left the *Sicani*: for *it was his custom to recruit his army with conquered people, and after they had assisted him in making new conquests to reward them with new seats*: this was the *Egyptian Hercules*, who had a potent fleet, and in the days of *Solomon* sailed to the *Straits*, and according to his custom set up pillars there, and conquered *Geryon*, and returned back by *Italy* and *Sicily* to *Egypt*, and was by the ancient *Gauls* called *Ogmius*, and by *Egyptians* [220]* *Nilus*: for *Erythra* and the country of *Geryon* were without the *Straits*. *Dionysius* [221]* represents this *Hercules* contemporary to *Evander*.

The first inhabitants of *Crete*, according to *Diodorus* [222]* were called *Eteocretans*; but whence they were, and how they came thither, is not said in history: then sailed thither a Colony of *Pelasgians* from *Greece*; and soon after *Teutamus*, the grandfather of *Minos*, carried thither a Colony of *Dorians* from *Laconia*, and from the territory of *Olympia* in *Peloponnesus*: and these several Colonies spake several languages, and fed on the spontaeous fruits of the earth, and lived quietly in caves and huts, ‘till the invention of iron tools, in the days of *Asterius* the son of *Teutamus*; and at length were reduced into one Kingdom, and one People, by *Minos*, who was their first law-giver, and built many towns and ships, and introduced plowing and sowing, and in whose days the *Curetes* conquered his father’s friends in *Crete* and *Peloponnesus*. The *Curetes* [223]* sacrificed children to *Saturn* and according to *Bochart* [224]* were *Philistims*; and *Eusebius* faith that *Crete* had its name from *Cres*, one of the *Curetes* who nursed up *Jupiter*: but whatever was the original of the island, it seems to have been peopled by Colonies which spake different languages, ‘till the days of *Asterius* and *Minos*; and might come thither two or three Generations before, and not above, for want of navigation in those seas.

The island *Cyprus* was discovered by the *Phœnicians* not long before; for *Eratosthenes* [225]* tells us, *that* Cyprus *was at first so overgrown with wood that it could not be tilled, and that they first cut down the wood for the melting of copper and silver, and afterwards when they began to sail safely upon the* Mediterranean, that is, presently after the *Trojan* war, *they built ships and even navies of it: and when they could not thus destroy the wood, they gave every man leave to cut down what wood he pleased, and to possess all the ground which he cleared of wood*. So also *Europe* at first abounded very much with woods, one of which, called the *Hercinian*, took up a great part of *Germany*, being full nine days journey broad, and above forty long, in *Julius Cæsar*'s days: and yet the *Europeans* had been cutting down their woods, to make room for mankind, ever since the invention of iron tools, in the days of *Asterius* and *Minos*.

All these footsteps there are of the first peopling of *Europe*, and its Islands, by sea; before those days it seems to have been thinly peopled from the northern coast of the *Euxine-sea* by *Scythians* descended from *Japhet*, who wandered without houses, and sheltered themselves from rain and wild beasts in thickets and caves of the earth; such as were the caves in mount *Ida* in *Crete*, in which *Minos* was educated and buried; the cave of *Cacus*, and the *Catacombs* in *Italy* near *Rome* and *Naples*, afterwards turned into burying-places; the *Syringes* and many other caves in the sides of the mountains of *Egypt*; the caves of the *Troglodites* between *Egypt* and the *Red Sea*, and those of the *Phaurusii* in *Afric*, mentioned by [226]* *Strabo*; and the caves, and thickets, and rocks, and high places, and pits, in which the *Israelites* hid themselves from the *Philistims* in the days of *Saul*, 1 *Sam.* xiii. 6. But of the state of mankind in *Europe* in those days there is now no history remaining.

The antiquities of *Libya* were not much older than those of *Europe*; for *Diodorus* [227]* tells us, that *Uranus* the father of *Hyperion*, and grandfather of *Helius* and *Selene*, that is *Ammon* the father of *Sesac*, *was their first common King, and caused the people, who 'till then wandered up and down, to dwell in towns*: and *Herodotus* [228]* tells us, that all *Media* was peopled by δημοι, towns without walls, 'till they revolted from the *Assyrians*, which was about 267 years after the death of *Solomon*: and that after that revolt they set up a King over them, and built *Ecbatane* with walls

for his seat, the first town which they walled about; and about 72 years after the death of *Solomon*, *Benhadad* King of *Syria* [229]* had two and thirty Kings in his army against *Ahab*: and when *Joshuah* conquered the land of *Canaan*, every city of the *Canaanites* had its own King, like the cities of *Europe*, before they conquered one another; and one of those Kings, *Adonibezek*, the King of *Bezek* had conquered seventy other Kings a little before, *Judg.* i. 7. and therefore towns began to be built in that land not many ages before the days of *Joshuah*: for the Patriarchs wandred there in tents, and fed their flocks where-ever they pleased, the fields of *Phœnicia* not being yet fully appropriated, for want of people. The countries first inhabited by mankind, were in those days so thinly peopled, that [230]* four Kings from the coasts of *Shinar* and *Elam* invaded and spoiled the *Rephaims*, and the inhabitants of the countries of *Moab*, *Ammon*, *Edom*, and the Kingdoms of *Sodom*, *Gomorrah*, *Admah* and *Zeboim*; and yet were pursued and beaten by *Abraham* with an armed force of only 318 men, the whole force which *Abraham* and the princes with him could raise: and *Egypt* was so thinly peopled before the birth of *Moses*, that *Pharaoh* said of the *Israelites*; [231]* *behold the people of the children of* Israel *are more and mightier than we*: and to prevent their multiplying and growing too strong, he caused their male children to be drowned.

These footsteps there are of the first peopling of the earth by mankind, not long before the days of *Abraham*; and of the overspreading it with villages, towns and cities, and their growing into Kingdoms, first Smaller and then greater, until the rise of the Monarchies of *Egypt*, *Assyria*, *Babylon*, *Media*, *Persia*, *Greece*, and *Rome*, the first great Empires on this side *India*. *Abraham* was the fifth from *Peleg*, and all mankind lived together in *Chaldea* under the Government of *Noah* and his sons, untill the days of *Peleg*: so long they were of one language, one society, and one religion: and then they divided the earth, being perhaps, disturbed by the rebellion of *Nimrod*, and forced to leave off building the tower of *Babel*: and from thence they spread themselves into the several countries which fell to their shares, carrying along with them the laws, customs and religion, under which they had ‘till those days been educated and governed, by *Noah*, and his sons and grandsons: and these laws were handed down to *Abraham*, *Melchizedek*, and *Job*, and their contemporaries, and for some time were

observed by the judges of the eastern countries: so *Job* [232]* tells us, that adultery was *an heinous crime, yea an iniquity to be punished by the judges*: and of idolatry he [233]* saith, *If I beheld the sun when it shined, or the moon walking in brightness, and my heart hath been secretly inticed, or my mouth hath kissed my hand, this also were an iniquity to be punished by the judge: for I should have denied the God that is above*: and there being no dispute between *Job* and his friends about these matters, it may be presumed that they also with their countrymen were of the same religion. *Melchizedek* was a Priest of the most high God, and *Abraham* voluntarily paid tythes to him; which he would scarce have done had they not been of one and the same religion. The first inhabitants of the land of *Canaan* seem also to have been originally of the same religion, and to have continued in it 'till the death of *Noah*, and the days of *Abraham*; for *Jerusalem* was anciently [234]* called *Jebus*, and its people *Jebusites*, and *Melchizedek* was their Priest and King: these nations revolted therefore after the days of *Melchizedek* to the worship of false Gods; as did also the posterity of *Ismael*, *Esau*, *Moab*, *Ammon*, and that of *Abraham* by *Keturah*: and the *Israelites* themselves were very apt to revolt: and one reason why *Terah* went from *Ur* of the *Chaldees* to *Haran* in his way to the land of *Canaan*; and why *Abraham* afterward left *Haran*, and went into the land of *Canaan*, might be to avoid the worship of false Gods, which in their days began in *Chaldea*, and spread every way from thence; but did not yet reach into the land of *Canaan*. Several of the laws and precepts in which this primitive religion consisted are mentioned in the book of *Job*, chap. i. ver. 5, and chap, xxxi, *viz. not to blaspheme God, nor to worship the Sun or Moon, nor to kill, nor steal, nor to commit adultery, nor trust in riches, nor oppress the poor or fatherless, nor curse your enemies, nor rejoyce at their misfortunes: but to be friendly, and hospitable and merciful, and to relieve the poor and needy, and to set up Judges*. This was the morality and religion of the first ages, still called by the *Jews*, *The precepts of the sons of* Noah: this was the religion of *Moses* and the Prophets, comprehended in the two great commandments, of *loving the Lord our God with all our heart and soul and mind, and our neighbour as our selves*: this was the religion enjoyned by *Moses* to the uncircumcised stranger within the gates of *Israel*, as well as to the *Israelites*: and this is the primitive religion of both *Jews* and *Christians*, and ought to be the standing

religion of all nations, it being for the honour of God, and good of mankind: and *Moses* adds the precept of *being merciful even to brute beasts, so as not to suck out their blood, nor to cut off their flesh alive with the blood in it, nor to kill them for the sake of their blood, nor to strangle them; but in killing them for food, to let out their blood and spill it upon the ground*, *Gen.* ix. 4, and *Levit*. xvii. 12, 13. This law was ancienter than the days of *Moses*, being given to *Noah* and his sons long before the days of *Abraham*: and therefore when the Apostles and Elders in the Council at *Jerusalem* declared that the Gentiles were not obliged to be circumcised and keep the law of *Moses*, they excepted this law of *abstaining from blood, and things strangled* as being an earlier law of God, imposed not on the sons of *Abraham* only, but on all nations, while they lived together in *Shinar* under the dominion of *Noah*: and of the same kind is the law of *abstaining from meats offered to Idols or false Gods, and from fornication*. So then, *the believing that the world was framed by one supreme God, and is governed by him; and the loving and worshipping him, and honouring our parents, and loving our neighbour as our selves, and being merciful even to brute beasts*, is the oldest of all religions: and the Original of letters, agriculture, navigation, music, arts and sciences, metals, smiths and carpenters, towns and houses, was not older in *Europe* than the days of *Eli*, *Samuel* and *David*; and before those days the earth was so thinly peopled, and so overgrown with woods, that mankind could not be much older than is represented in Scripture.

CHAP. II

Of the Empire of Egypt.

The *Egyptians* anciently boasted of a very great and lasting Empire under their Kings *Ammon*, *Osiris*, *Bacchus*, *Sesostris*, *Hercules*, *Memnon*, &c. reaching eastward to the *Indies*, and westward to the *Atlantic Ocean*; and out of vanity have made this monarchy some thousands of years older than the world: let us now try to rectify the Chronology of *Egypt*; by comparing the affairs of *Egypt* with the synchronizing affairs of the *Greeks* and *Hebrews*.

Bacchus the conqueror loved two women, *Venus* and *Ariadne*: *Venus* was the mistress of *Anchises* and *Cinyras*, and mother of *Æneas*, who all lived 'till the destruction of *Troy*; and the sons of *Bacchus* and *Ariadne* were *Argonauts*; as above: and therefore the great *Bacchus* flourished but one Generation before the *Argonautic* expedition. This *Bacchus* [235]* was potent at sea, conquered eastward as far as *India* returned in triumph, brought his army over the *Hellespont*; conquered *Thrace*, left music, dancing and poetry there; killed *Lycurgus* King of *Thrace*, and *Pentheus* the grandson of *Cadmus*; gave the Kingdom of *Lycurgus* to *Tharops*; and one of his minstrells, called by the *Greeks Calliope*, to *Oeagrus* the son of *Tharops*; and of *Oeagrus* and *Calliope* was born *Orpheus*, who sailed with the *Argonauts*: this *Bacchus* was therefore contemporary to *Sesostris*; and both being Kings of *Egypt*, and potent at sea, and great conquerors, and carrying on their conquests into *India* and *Thrace*, they must be one and the same man.

The antient *Greeks*, who made the fables of the Gods, related that *Io* the daughter of *Inachus* was carried into *Egypt*; and there became the *Egyptian Isis*; and that *Apis* the son of *Phoroneus* after death became the God *Serapis*; and some said that *Epaphus* was the son of *Io*: *Serapis* and *Epaphus* are *Osiris*, and therefore *Isis* and *Osiris*, in the opinion of the ancient *Greeks* who made the fables of the Gods, were not above two or three Generations older than the *Argonautic* expedition. *Dicæarchus*, as he is cited by the scholiast upon *Apollonius*, [236]* represents them two

Generations older than *Sesostris*, saying that after *Orus* the son of *Osiris* and *Isis*, Reigned *Sesonchosis*. He seems to have followed the opinion of the people of *Naxus*, who made *Bacchus* two Generations older than *Theseus*, and for that end feigned two *Minos's* and two *Ariadnes*; for by the consent of all antiquity *Osiris* and *Bacchus* were one and the same King of *Egypt*: this is affirmed by the *Egyptians*, as well as by the *Greeks*; and some of the antient Mythologists, as *Eumolpus* and *Orpheus*, [237]* called *Osiris* by the names of *Dionysus* and *Sirius*. *Osiris* was King of all *Egypt*, and a great conqueror, and came over the *Hellespont* in the days of *Triptolemus*, and subdued *Thrace*, and there killed *Lycurgus*; and therefore his expedition falls in with that of the great *Bacchus*. *Osiris*, *Bacchus* and *Sesostris* lived about the same time, and by the relation of historians were all of them Kings of all *Egypt*, and Reigned at *Thebes*, and adorned that city, and were very potent by land and sea: all three were great conquerors, and carried on their conquests by land through *Asia* as far as *India*: all three came over the *Hellespont* and were there in danger of losing their army: all three conquered *Thrace*, and there put a stop to their victories, and returned back from thence into *Egypt*: all three left pillars with inscriptions in their conquests: and therefore all three must be one and the same King of *Egypt*; and this King can be no other than *Sesac*. All *Egypt*, including *Thebais*, *Ethiopia* and *Libya*, had no common King before the expulsion of the Shepherds who Reigned in the lower *Egypt*; no Conqueror of *Syria*, *India*, *Asia minor* and *Thrace*, before *Sesac*; and the sacred history admits of no *Egyptian* conqueror of *Palestine* before this King.

Thymætes [238]* who was contemporary to *Orpheus*, and wrote a poesy called *Phrygia*, of the actions of *Bacchus* in very old language and character, said that *Bacchus* had *Libyan* women in his army, amongst whom was *Minerva* a woman born in *Libya*, near the river *Triton,* and that *Bacchus* commanded the men and *Minerva* the women. *Diodorus* [239]* calls her *Myrina*, and saith that she was Queen of the *Amazons* in *Libya*, and there conquered the *Atlantides* and *Gorgons*, and then made a league with *Orus* the son of *Isis*, sent to her by his father *Osiris* or *Bacchus* for that purpose, and passing through *Egypt* subdued the *Arabians*, and *Syria* and *Cilicia*, and came through *Phrygia*, *viz.* in the army of *Bacchus* to the *Mediterranean*; but palling over into *Europe*, was slain with many of her

women by the *Thracians* and *Scythians*, under the conduct of *Sipylus* a *Scythian*, and *Mopsus* a *Thracian* whom *Lycurgus* King of *Thrace* had banished. This was that *Lycurgus* who opposed the passage of *Bacchus* over the *Hellespont*, and was soon after conquered by him, and slain: but afterwards *Bacchus* met with a repulse from the *Greeks*, under the conduct of *Perseus*, who slew many of his women, as *Pausanias* [240]* relates, and was assisted by the *Scythians* and *Thracians* under the conduct of *Sipylus* and *Mopsus*; which repulses, together with a revolt of his brother *Danaus* in *Egypt*; put a stop to his victories: and in returning home he left part of his men in *Colchis* and at *Mount Caucasus*, under *Æetes* and *Prometheus*; and his women upon the river *Thermodon* near *Colchis*, under their new Queens *Marthesia* and *Lampeto*: for *Diodorus* [241]* speaking of the *Amazons* who were seated at *Thermodon*, saith, that they dwelt originally in *Libya*, and there Reigned over the *Atlantides*, and invading their neighbours conquered as far as *Europe*: and *Ammianus*, [242]* that the ancient *Amazons* breaking through many nations, attack'd the *Athenians*, and there receiving a great slaughter retired to *Thermodon*: and *Justin*, [243]* that these *Amazons* had at first, he means at their first coming to *Thermodon*, two Queens who called themselves daughters of *Mars*; and that they conquered part of *Europe*, and some cities of *Asia*, *viz.* in the Reign of *Minerva*, and then sent back part of their army with a great booty, under their said new Queens; and that *Marthesia* being afterwards slain, was succeeded by her daughter *Orithya*, and she by *Penthesilea*; and that *Theseus* captivated and married *Antiope* the sister of *Orithya*. *Hercules* made war upon the *Amazons*, and in the Reign of *Orithya* and *Penthesilea* they came to the *Trojan* war: whence the first wars of the *Amazons* in *Europe* and *Asia*, and their settling at *Thermodon*, were but one Generation before those actions of *Hercules* and *Theseus*, and but two before the *Trojan* war, and so fell in with the expedition of *Sesostris*: and since they warred in the days of *Isis* and her son *Orus*, and were a part of the army of *Bacchus* or *Osiris*, we have here a further argument for making *Osiris* and *Bacchus* contemporary to *Sesostris*, and all three one and the same King with *Sesac*.

The *Greeks* reckon *Osiris* and *Bacchus* to be sons of *Jupiter*, and the *Egyptian* name of *Jupiter* is *Ammon*. *Manetho* in his 11th and 12th *Dynasties*, as he is cited by *Africanus* and *Eusebius* names these four Kings

of *Egypt*, as reigning in order; *Ammenemes*, *Gesongeses* or *Sesonchoris* the son of *Ammenemes*, *Ammenemes* who was slain by his Eunuchs, and *Sesostris* who subdued all *Asia* and part of *Europe*. *Gesongeses* and *Sesonchoris* are corruptly written for *Sesonchosis*; and the two first of these four Kings, *Ammenemes* and *Sesonchosis*, are the same with the two last, *Ammenemes* and *Sesostris*, that is, with *Ammon* and *Sesac*; for *Diodorus* saith [244]* that *Osiris* built in *Thebes* a magnificent temple to his parents *Jupiter* and *Juno*, and two other temples to *Jupiter*, a larger to *Jupiter Uranius*, and a less to his father *Jupiter Ammon* who reigned in that city: and [245]* *Thymætes* abovementioned, who was contemporary to *Orpheus*, wrote expresly that the father of *Bacchus* was *Ammon*, a King Reigning over part of *Libya*, that is, a King of *Egypt* Reigning over all that part of *Libya*, anciently called *Ammonia*. *Stephanus* [246]* saith Πασα 'η Λιβυη 'ουτως εκαλειτο απο Αμμωνος· *All* Libya *was anciently called* Ammonia *from* Ammon: this is that King of *Egypt* from whom *Thebes* was called *No-Ammon*, and *Ammon-no* the city of *Ammon*, and by the *Greeks Diospolis*, the city of *Jupiter Ammon*: *Sesostris* built it sumptuously, and called it by his father's name, and from the same King the [247]* River called *Ammon*, the people called *Ammonii*, and the [248]* promontory *Ammonium* in *Arabia fælix* had their names.

The lower part of *Egypt* being yearly overflowed by the *Nile*, was scarce inhabited before the invention of corn, which made it useful: and the King, who by this invention first peopled it and Reigned over it, perhaps the King of the city *Mesir* where *Memphis* was afterwards built, seems to have been worshipped by his subjects after death, in the ox or calf, for this benefaction: for this city stood in the most convenient place to people the lower *Egypt*, and from its being composed of two parts seated on each side of the river *Nile*, might give the name of *Mizraim* to its founder and people; unless you had rather refer the word to the double people, those above the *Delta*, and those within it: and this I take to be the state of the lower *Egypt*, 'till the Shepherds or *Phœnicians* who fled from *Joshuah* conquered it, and being afterwards conquered by the *Ethiopians*, fled into *Afric* and other places: for there was a tradition that some of them fled into *Afric*; and St. *Austin* [249]* confirms this, by telling us that the common people of *Afric* being asked who they were, replied *Chanani*, that is, *Canaanites*.

Interrogati rustici nostri, saith he, *quid sint, Punice respondentes Chanani, corrupta scilicet voce sicut in talibus solet, quid aliud respondent quam Chanaanæi? Procopius* also [250]* tells us of two pillars in the west of *Afric*, with inscriptions signifying that the people were *Canaanites* who fled from *Joshuah*: and *Eusebius* [251]* tells us, that these *Canaanites* flying from the sons of *Israel*, built *Tripolis* in *Afric*; and the *Jerusalem Gemara*, [252]* that the *Gergesites* fled from *Joshua*, going into *Afric*: and *Procopius* relates their flight in this manner. Επει δε 'ημας 'ο της 'ιστοριας λογος ενταυθ' ηγαγεν. επαναγκες ειπειν ανωθεν, 'οθεν τε τα Μαυρουσιων εθνη ες Λιβυην ηλθε, και 'οπως ωικησαντο. Επειδη 'Εβραιοι εξ Αιγυπτου ανεχωρησαν, και αγχι των Παλαιστινης 'οριων εγενοντο· Μωσης μεν σοφος ανηρ, 'ος αυτος της 'οδου 'ηγησατο, θνησκει. διαδεχεται δε την 'ηγεμονιαν Ιησους 'ο του Ναυη παις· 'ος ες τε την Παλαιστινην τον λεων τουτον εισηγαγε· και αρετην εν τωι πολεμωι κρεισσω 'η κατα ανθρωπου φυσιν επιδειξαμενος, την χωραν εσχε· και τα εθνη 'απαντα καταστρεψαμενος, τας πολεις ευπετως παρεστησατο, ανικητος τε πανταπασιν εδοξεν ειναι. τοτε δε 'η επιθαλασσια χωρα, εκ Σιδωνος μεχρι των Αιγυπτου 'οριων, Φοινικη ξυμπασα ωνομαζετο. βασιλευς δε εις το παλαιον εφεστηκει· 'ωσπερ 'απασιν 'ωμολογηται, 'οι Φοινικων τα αρχαιοτατα ανεγραψαντο. ενταυθ' ωκηντο εθνη πολυανθρωποτατα, Γεργεσαιοι τε και Ιεβουσαιοι, και αλλα αττα ονοματα εχοντα, 'οις δη αυτα 'η των 'Εβραιων 'ιστορια καλει. 'ουτος 'ο λαος επει αμαχον τι χρημα τον επηλυτην στρατηγον ειδον· εξ ηθων των πατριων εξαναστantες, επ' Αιγυπτον 'ομορου ουσης εχωρησαν. ενθα χωρον ουδενα σφισιν 'ικανον ενοικησασθαι 'ευροντες, επει εν Αιγυπτω πολυανθρωπια εκ παλαιου ην· ες Λιβυην μεχρι στηλων των 'Ηρακλεους εσχον· ενταυθα τε και ες εμε τηι Φοινικων φωνηι χρωμενοι ωικηνται. *Quando ad Mauros nos historia deduxit, congruens nos exponere unde orta gens in Africa sedes fixerit. Quo tempore egressi Ægypto Hebræi jam prope Palestinæ fines venerant, mortuus ibi Moses, vir sapiens, dux itineris. Successor imperii factus Jesus Navæ filius intra Palæstinam duxit popularium agmen; & virtute usus supra humanum modum, terram occupavit, gentibusque excisis urbes ditionis suæ fecit, & invicti famam tulit. Maritima ora quæ a Sidone ad Ægypti limitem extenditur, nomen habet Phœnices. Rex unus* [Hebræis] *imperabat ut omnes qui res Phœnicias scripsere consentiunt. In eo tractatu numerosæ gentes erant, Gergesæi, Jebusæi, quosque aliis nominibus*

Hebræorum annales memorant. Hi homines ut impares se venienti imperatori videre, derelicto patriæ solo ad finitimam primum venere Ægyptum, sed ibi capacem tantæ multitudinis locum non reperientes, erat enim Ægyptus ab antiquo fœcunda populis, in Africam profecti, multis conditis urbibus, omnem eam Herculis columnas usque, obtinuerunt: ubi ad meam ætatem sermone Phœnicio utentes habitant. By the language and extreme poverty of the *Moors*, described also by *Procopius* and by their being unacquainted with merchandise and sea-affairs, you may know that they were *Canaanites* originally, and peopled *Afric* before the *Tyrian* merchants came thither. These *Canaanites* coming from the East, pitched their tents in great numbers in the lower *Egypt*, in the Reign of *Timaus*, as [253]* *Manetho* writes, and easily seized the country, and fortifying *Pelusium*, then called *Abaris*, they erected a Kingdom there, and Reigned long under their own Kings, *Salatis*, *Bœon*, *Apachnas*, *Apophis*, *Janias*, *Assis*, and others successively: and in the mean time the upper part of *Egypt* called *Thebais*, and according to [254]* *Herodotus*, *Ægyptus*, and in Scripture the land of *Pathros*, was under other Kings, Reigning perhaps at *Coptos*, and *Thebes*, and *This*, and *Syene*, and [255]* *Pathros*, and *Elephantis*, and *Heracleopolis*, and *Mesir*, and other great cities, 'till they conquered one another, or were conquered by the *Ethiopians*: for cities grew great in those days, by being the seats of Kingdoms: but at length one of these Kingdoms conquered the rest, and made a lasting war upon the Shepherds, and in the Reign of its King *Misphragmuthosis*, and his son *Amosis*, called also *Tethmosis*, *Tuthmosis*, and *Thomosis*, drove them out of *Egypt*, and made them fly into *Afric* and *Syria*, and other places, and united all *Egypt* into one Monarchy; and under their next Kings, *Ammon* and *Sesac*, enlarged it into a great Empire. This conquering people worshipped not the Kings of the Shepherds whom they conquered and expelled, but [256]* abolished their religion of sacrificing men, and after the manner of those ages Deified their own Kings, who founded their new Dominion, beginning the history of their Empire with the Reign and great acts of their Gods and Heroes: whence their Gods *Ammon* and *Rhea*, or *Uranus* and *Titæa*; *Osiris* and *Isis*; *Orus* and *Bubaste*: and their Secretary *Thoth*, and Generals *Hercules* and *Pan*; and Admiral *Japetus*, *Neptune*, or *Typhon*; were all of them *Thebans*, and flourished after the expulsion of the Shepherds. *Homer* places *Thebes* in

Ethiopia, and the *Ethiopians* reported that [257]* the *Egyptians* were a colony drawn out of them by *Osiris*, and that thence it came to pass that most of the laws of *Egypt* were the same with those of *Ethiopia*, and that the *Egyptians* learnt from the *Ethiopians* the custom of Deifying their Kings.

When *Joseph* entertained his brethren in *Egypt*, they did eat at a table by themselves, and he did eat at another table by himself; and the *Egyptians* who did eat with him were at another table, *because the* Egyptians *might not eat bread with the* Hebrews*; for that was an abomination to the* Egyptians, *Gen.* xliii. 32. These *Egyptians* who did eat with *Joseph* were of the Court of *Pharaoh*; and therefore *Pharaoh* and his Court were at this time not Shepherds but genuine *Egyptians*; and these *Egyptians* abominated eating bread with the *Hebrews*, at one and the same table: and of these *Egyptians* and their fellow-subjects, it is said a little after, that *every Shepherd is an abomination to the* Egyptians: *Egypt* at this time was therefore under the government of the genuine *Egyptians*, and not under that of the Shepherds.

After the descent of *Jacob* and his sons into *Egypt*, *Joseph* lived 70 years, and so long continued in favour with the Kings of *Egypt*: and 64 years after his death *Moses* was born: and between the death of *Joseph* and the birth of *Moses*, *there arose up a new King over* Egypt*, which knew not* Joseph, *Exod.* i. 8. But this King of *Egypt* was not one of the Shepherds; for he is called *Pharaoh*, *Exod.* i. 11, 22: and *Moses* told his successor, that if the people of *Israel* should sacrifice in the land of *Egypt*, *they should sacrifice the abomination of the* Egyptians *before their eyes, and the* Egyptians *would stone them*, *Exod.* viii. 26. that is, they should sacrifice sheep or oxen, contrary to the religion of *Egypt*. The Shepherds therefore did not Reign over *Egypt* while *Israel* was there, but either were driven out of *Egypt* before *Israel* went down thither, or did not enter into *Egypt* 'till after *Moses* had brought *Israel* from thence: and the latter must be true, if they were driven out of *Egypt* a little before the building of the temple of *Solomon*, as *Manetho* affirms.

Diodorus [258]* saith in his 40th book, *that in* Egypt *there were formerly multitudes of strangers of several nations, who used foreign rites and ceremonies in worshipping the Gods, for which they were expelled* Egypt*; and under* Danaus*,* Cadmus*, and other skilful commanders, after great*

hardships, came into Greece*, and other places; but the greatest part of them came into* Judæa*, not far from* Egypt*, a country then uninhabited and desert, being conducted thither by one* Moses*, a wise and valiant man, who after he had possest himself of the country, among other things built* Jerusalem*, and the Temple. Diodorus* here mistakes the original of the *Israelites*, as *Manetho* had done before, confounding their flight into the wilderness under the conduct of *Moses*, with the flight of the Shepherds from *Misphragmuthosis*, and his son *Amosis*, into *Phœnicia* and *Afric*; and not knowing that *Judæa* was inhabited by *Canaanites*, before the *Israelites* under *Moses* came thither: but however, he lets us know that the Shepherds were expelled *Egypt* by *Amosis*, a little before the building of *Jerusalem* and the Temple, and that after several hardships several of them came into *Greece*, and other places, under the conduct of *Cadmus*, and other Captains, but the most of them Settled in *Phœnicia* next *Egypt*. We may reckon therefore that the expulsion of the Shepherds by the Kings of *Thebais*, was the occasion that the *Philistims* were so numerous in the days of *Saul*; and that so many men came in those times with colonies out of *Egypt* and *Phœnicia* into *Greece*; as *Lelex*, *Inachus*, *Pelasgus*, *Æzeus*, *Cecrops*, *Ægialeus*, *Cadmus*, *Phœnix*, *Membliarius*, *Alymnus*, *Abas*, *Erechtheus*, *Peteos*, *Phorbas*, in the days of *Eli*, *Samuel*, *Saul* and *David*: some of them fled in the days of *Eli*, from *Misphragmuthosis*, who conquered part of the lower *Egypt*; others retired from his Successor *Amosis* into *Phœnicia*, and *Arabia Petræa*, and there mixed with the old inhabitants; who not long after being conquered by *David*, fled from him and the *Philistims* by sea, under the conduct of *Cadmus* and other Captains, into *Asia Minor*, *Greece*, and *Libya*, to seek new seats, and there built towns, erected Kingdoms, and set on foot the worship of the dead: and some of those who remained in *Judæa* might assist *David* and *Solomon*, in building *Jerusalem* and the Temple. Among the foreign rites used by the strangers in *Egypt*, in worshipping the Gods, was the sacrificing of men; for *Amosis* abolished that custom at *Heliopolis*: and therefore those strangers were *Canaanites*, such as fled from *Joshua*; for the *Canaanites* gave their seed, that is, their children, to *Moloch*, *and burnt their sons and their daughters in the fire to their Gods*, *Deut.* xii. 31. *Manetho* calls them *Phœnician* strangers.

After *Amosis* had expelled the Shepherds, and extended his dominion over all *Egypt*, his son and Successor *Ammenemes* or *Ammon*, by much

greater conquests laid the foundation of the *Egyptian* Empire: for by the assistance of his young son *Sesostris*, whom he brought up to hunting and other laborious exercises, he conquered *Arabia*, *Troglodytica*, and *Libya*: and from him all *Libya* was anciently called *Ammonia*: and after his death, in the temples erected to him at *Thebes*, and in *Ammonia* and at *Meroe* in *Ethiopia*, they set up Oracles to him, and made the people worship him as the God that acted in them: and these are the oldest Oracles mentioned in history; the *Greeks* therein imitating the *Egyptians*: for the [259]* Oracle at *Dodona* was the oldest in *Greece*, and was set up by an *Egyptian* woman, after the example of the Oracle of *Jupiter Ammon* at *Thebes*.

In the days of *Ammon* a body of the *Edomites* fled from *David* into *Egypt*, with their young King *Hadad*, as above; and carried thither their skill in navigation: and this seems to have given occasion to the *Egyptians* to build a fleet on the *Red Sea* near *Coptos*, and might ingratiate *Hadad* with *Pharaoh*: for the *Midianites* and *Ishmaelites*, who bordered upon the *Red Sea*, near *Mount Horeb* on the south-side of *Edom*, were merchants from the days of *Jacob* the Patriarch, *Gen.* xxxvii. 28, 36. and by their merchandise the *Midianites* abounded with gold in the days of *Moses*, *Numb.* xxxi. 50, 51, 52. and in the days of the judges of *Israel*, *because they were* Ishmaelites, *Judg.* viii 24. The *Ishmaelites* therefore in those days grew rich by merchandise; they carried their merchandise on camels through *Petra* to *Rhinocolura*, and thence to *Egypt*: and this trafic at length came into the hands of *David*, by his conquering the *Edomites*, and gaining the ports of the *Red Sea* called *Eloth* and *Ezion-Geber*, as may be understood by the 3000 talents of gold of *Ophir*, which *David* gave to the Temple, 1 *Chron.* xxix. 4. The *Egyptians* having the art of making linen-cloth, they began about this time to build long Ships with sails, in their port on those Seas near *Coptos*, and having learnt the skill of the *Edomites*, they began now to observe the positions of the Stars, and the length of the Solar Year, for enabling them to know the position of the Stars at any time, and to sail by them at all times, without sight of the shoar: and this gave a beginning to Astronomy and Navigation: for hitherto they had gone only by the shoar with oars, in round vessels of burden, first invented on that shallow sea by the posterity of *Abraham*, and in passing from island to island guided themselves by the sight of the islands in the day time, or by the sight of

some of the Stars in the night. Their old year was the Lunisolar year, derived from *Noah* to all his posterity, 'till those days, and consisted of twelve months, each of thirty days, according to their calendar: and to the end of this calendar-year they now added five days, and thereby made up the Solar year of twelve months and five days, or 365 days.

The ancient *Egyptians* feigned [260]* that *Rhea* lay secretly with *Saturn*, and *Sol* prayed that she might bring forth neither in any month, nor in the year; and that *Mercury* playing at dice with *Luna*, overcame, and took from the Lunar year the 72d part of every day, and thereof composed five days, and added them to the year of 360 days, that she might bring forth in them; and that the *Egyptians* celebrated those days as the birth-days of *Rhea*'s five children, *Osiris*, *Orus* senior, *Typhon*, *Isis*, and *Nephthe* the wife of *Typhon*: and therefore, according to the opinion of the ancient *Egyptians*, the five days were added to the Lunisolar calendar-year, in the Reign of *Saturn* and *Rhea*, the parents of *Osiris*, *Isis*, and *Typhon*; that is, in the Reign of *Ammon* and *Titæa*, the parents of the *Titans*; or in the latter half of the Reign of *David*, when those *Titans* were born, and by consequence soon after the flight of the *Edomites* from *David* into *Egypt*: but the Solstices not being yet settled, the beginning of this new year might not be fixed to the Vernal Equinox before the Reign of *Amenophis* the successor of *Orus* junior, the Son of *Osiris* and *Isis*.

When the *Edomites* fled from *David* with their young King *Hadad* into *Egypt*, it is probable that they carried thither also the use of letters: for letters were then in use among the posterity of *Abraham* in *Arabia Petræa*, and upon the borders of the *Red Sea*, the Law being written there by *Moses* in a book, and in tables of stone, long before: for *Moses* marrying the daughter of the prince of *Midian*, and dwelling with him forty years, learnt them among the *Midianites*: and *Job*, who lived [261]* among their neighbours the *Edomites*, mentions the writing down or words, as there in use in his days, *Job.* xix. 23, 24. and there is no instance of letters for writing down sounds, being in use before the days of *David*, in any other nation besides the posterity of *Abraham*. The *Egyptians* ascribed this invention to *Thoth*, the secretary of *Osiris*; and therefore Letters began to be in use in *Egypt* in the days of *Thoth*, that is, a little after the flight of the

Edomites from *David*, or about the time that *Cadmus* brought them into *Europe*.

Helladius [262]* tells us, that a man called *Oes*, who appeared in the *Red Sea* with the tail of a fish, so they painted a sea-man, taught Astronomy and Letters: and *Hyginus*, [263]* that *Euhadnes*, who came out of the Sea in *Chaldæa*, taught the *Chaldæans* Astrology the first of any man; he means Astronomy: and *Alexander Polyhistor* [264]* tells us from *Berosus*, that *Oannes* taught the *Chaldæans* Letters, Mathematicks, Arts, Agriculture, Cohabitation in Cities, and the Construction of Temples; and that several such men came thither successively. *Oes*, *Euhadnes*, and *Oannes*, seem to be the same name a little varied by corruption; and this name seems to have been given in common to several sea-men, who came thither from time to time, and by consequence were merchants, and frequented those seas with their merchandise, or else fled from their enemies: so that Letters, Astronomy, Architecture and Agriculture, came into *Chaldæa* by sea, and were carried thither by sea-men, who frequented the *Persian Gulph*, and came thither from time to time, after all those things were practised in other countries whence they came, and by consequence in the days of *Ammon* and *Sesac*, *David* and *Solomon*, and their successors, or not long before. The *Chaldæans* indeed made *Oannes* older than the flood of *Xisuthrus*, but the *Egyptians* made *Osiris* as old, and I make them contemporary.

The *Red Sea* had its name not from its colour, but from *Edom* and *Erythra*, the names of *Esau*, which signify that colour: and some [265]* tell us, that King *Erythra*, meaning *Esau*, invented the vessels, *rates*, in which they navigated that Sea, and was buried in an island thereof near the *Persian Gulph*: whence it follows, that the *Edomites* navigated that Sea from the days of *Esau*; and there is no need that the oldest *Oannes* should be older. There were boats upon rivers before, such as were the boats which carried the Patriarchs over *Euphrates* and *Jordan*, and the first nations over many other rivers, for peopling the earth, seeking new seats, and invading one another's territories: and after the example of such vessels, *Ishhmael* and *Midian* the sons of *Abraham*, and *Esau* his grandson, might build larger vessels to go to the islands upon the *Red Sea*, in searching for new seats, and by degrees learn to navigate that sea, as far as to the *Persian Gulph*: for ships were as old, even upon the *Mediterranean*, as the days of *Jacob*, *Gen.*

xlix. 13. *Judg.* v. 17. but it is probable that the merchants of that sea were not forward to discover their Arts and Sciences, upon which their trade depended: it seems therefore that Letters and Astronomy, and the trade of Carpenters, were invented by the merchants of the *Red Sea*, for writing down their merchandise, and keeping their accounts, and guiding their ships in the night by the Stars, and building ships; and that they were propagated from *Arabia Petræa* into *Egypt*, *Chaldæa*, *Syria*, *Asia minor*, and *Europe*, much about one and the same time; the time in which *David* conquered and dispersed those merchants: for we hear nothing of Letters before the days of *David*, except among the posterity of *Abraham*; nothing of Astronomy, before the *Egyptians* under *Ammon* and *Sesac* applied themselves to that study, except the Constellations mentioned by *Job*, who lived in *Arabia Petræa* among the merchants; nothing of the trade of Carpenters, or good Architecture, before *Solomon* sent to *Hiram* King of *Tyre*, to supply him with such Artificers, saying that *there were none in* Israel *who could skill to hew timber like the* Zidonians.

Diodorus [266]* tells us, *that the* Egyptians *sent many colonies out of* Egypt *into other countries; and that* Belus*, the son of* Neptune *and* Libya*, carried colonies thence into* Babylonia*, and seating himself on* Euphrates*, instituted priests free from taxes and publick expences, after the manner of* Egypt*, who were called* Chaldæans*, and who after the manner of* Egypt*, might observe the Stars*: and *Pausanias* [267]* tells us, *that the* Belus *of the* Babylonians *had his name from* Belus *an* Egyptian*, the son of* Libya: and *Apollodorus*; [268]* *that* Belus *the son of* Neptune *and* Libya*, and King of* Egypt*, was the father of* Ægyptus *and* Danaus, that is, *Ammon*: he tells us also, *that* Busiris *the son of* Neptune *and* Lisianassa [Libyanassa] *the daughter of* Epaphus*, was King of* Egypt; and *Eusebius* calls this King, Busiris *the son of* Neptune*, and of* Libya *the daughter of* Epaphus. By these things the later *Egyptians* seem to have made two *Belus's*, the one the father of *Osiris*, *Isis*, and *Neptune*, the other the son of *Neptune*, and father of *Ægyptus* and *Danaus*: and hence came the opinion of the people of *Naxus*, that there were two *Minos's* and two *Ariadnes*, the one two Generations older than the other; which we have confuted. The father of *Ægyptus* and *Danaus* was the father of *Osiris*, *Isis*, and *Typhon*; and *Typhon* was not the grandfather of *Neptune*, but *Neptune* himself.

Sesostris being brought up to hard labour by his father *Ammon*, warred first under his father, being the Hero or *Hercules* of the *Egyptians* during his father's Reign, and afterward their King: under his father, whilst he was very young, he invaded and conquered *Troglodytica*, and thereby secured the harbour of the *Red Sea*, near *Coptos* in *Egypt*, and then he invaded *Ethiopia*, and carried on his conquest southward, as far as to the region bearing cinnamon: and his father by the assistance of the *Edomites* having built a fleet on the *Red Sea*, he put to sea, and coasted *Arabia Fælix*, going to the *Persian Gulph* and beyond, and in those countries set up Columns with inscriptions denoting his conquests; and particularly he Set up a Pillar at *Dira*, a promontory in the straits of the *Red Sea*, next *Ethiopia*, and two Pillars in *India*, on the mountains near the mouth of the rivers *Ganges*; so [269]* *Dionysius*:

Ενθα τε και στηλαι, Θηβαιγενεος Διονυσου
'Εστασιν πυματοιο παρα 'ροον Ωκεανοιο,
Ινδων 'υστατιοισιν εν ουρεσιν· ενθα τε Γαγγης
Λευκον 'υδορ Νυσσαιον επι πλαταμωνα κυλινδει.
Ubi etiamnum columnæ Thebis geniti Bacchi

Stant extremi juxta fluxum Oceani
Indorum ultimis in montibus: ubi & Ganges
Claram aquam Nyssæam ad planitiem devolvit.

After these things he invaded *Libya*, and fought the *Africans* with clubs, and thence is painted with a club in his hand: so [270]* *Hyginus*; *Afri & Ægyptii primum fustibus dimicaverunt, postea Belus Neptuni filius gladio belligeratus est, unde bellum dictum est*: and after the conquest of *Libya*, by which *Egypt* was furnished with horses, and furnished *Solomon* and his friends; he prepared a fleet on the *Mediterranean*, and went on westward upon the coast of *Afric*, to search those countries, as far as to the Ocean and island *Erythra* or *Gades* in *Spain*; as *Macrobius* [271]* informs us from *Panyasis* and *Pherecydes*: and there he conquered *Geryon*, and at the mouth of the *Straits* set up the famous Pillars.

[272]* *Venit ad occasum mundique extrema Sesostris.*

Then he returned through *Spain* and the southern coasts of *France* and *Italy*, with the cattel of *Geryon*, his fleet attending him by sea, and left in *Sicily* the *Sicani*, a people which he had brought from *Spain*: and after his father's death he built Temples to him in his conquests; whence it came to pass, that *Jupiter Ammon* was worshipped in *Ammonia*, and *Ethiopia*, and *Arabia*, and as far as *India*, according to the [273]* Poet:

Quamvis Æthiopum populis, Arabumque beatis
Gentibus, atque Indis unus sit Jupiter Ammon.

The *Arabians* worshipped only two Gods, *Cœlus*, otherwise called *Ouranus*, or *Jupiter Uranius*, and *Bacchus*: and these were *Jupiter Ammon* and *Sesac*, as above: and so also the people of *Meroe* above *Egypt* [274]* worshipped no other Gods but *Jupiter* and *Bacchus*, and had an Oracle of *Jupiter*, and these two Gods were *Jupiter Ammon* and *Osiris*, according to the language of *Egypt*.

At length *Sesostris*, in the fifth year of *Rehoboam*, came out of *Egypt* with a great army of *Libyans*, *Troglodytes* and *Ethiopians*, and spoiled the Temple, and reduced *Judæa* into servitude, and went on conquering, first eastward toward *India*, which he invaded, and then westward as far as *Thrace*: for *God had given him the kingdoms of the countries*, 2 *Chron.* xii. 2, 3, 8. In [275]* this Expedition he spent nine years, setting up pillars with inscriptions in all his conquests, some of which remained in *Syria* 'till the

days of *Herodotus*. He was accompanied with his son *Orus*, or *Apollo*, and with some singing women, called *the Muses*, one of which, called *Calliope*, was the mother of *Orpheus* an *Argonaut*: and the two tops of the mountain *Parnassus*, which were very high, were dedicated [276]* the one to this *Bacchus*, and the other to his son *Apollo*: whence *Lucan*; [277]*

Parnassus gemino petit æthera colle,
Mons Phœbo, Bromioque sacer.

In the fourteenth year of *Rehoboam* he returned back into *Egypt*; leaving *Æetes* in *Colchis*, and his nephew *Prometheus* at mount *Caucasus*, with part of his army, to defend his conquests from the *Scythians*. *Apollonius Rhodius* [278]* and his scholiast tell us, that *Sesonchosis* King of all *Egypt*, that is *Sesac*, invading all *Asia*, and a great part of *Europe*, peopled many cities which he took; and that *Æa*, the Metropolis of *Colchis*, *remained stable ever since his days with the posterity of those* Egyptians *which he placed there, and that they preserved pillars or tables in which all the journies and the bounds of sea and land were described, for the use of them that were to go any whither*: these tables therefore gave a beginning to Geography.

Sesostris upon his returning home [279]* divided *Egypt* by measure amongst the *Egyptians*; and this gave a beginning to Surveying and Geometry: and [280]* *Jamblicus* derives this division of *Egypt*, and beginning of Geometry, from the Age of the Gods of *Egypt*. *Sesostris* also [281]* divided *Egypt* into 36 *Nomes* or Counties, and dug a canal from the *Nile* to the head city of every *Nome*, and with the earth dug out of it, he caused the ground of the city to be raised higher, and built a Temple in every city for the worship of the *Nome*, and in the Temples set up Oracles, some of which remained ‘till the days of *Herodotus*: and by this means the *Egyptians* of every *Nome* were induced to worship the great men of the Kingdom, to whom the *Nome*, the City, and the Temple or Sepulchre of the God, was dedicated: for every Temple had its proper God, and modes of worship, and annual festivals, at which the Council and People of the *Nome* met at certain times to sacrifice, and regulate the affairs of the *Nome*, and administer justice, and buy and sell; but *Sesac* and his Queen, by the names of *Osiris* and *Isis*, were worshipped in all *Egypt*: and because *Sesac*, to render the *Nile* more useful, dug channels from it to all the capital cities of *Egypt*; that river was consecrated to him, and he was called by its names,

Ægyptus, *Siris*, *Nilus*. *Dionysius* [282]* tells us, that the *Nile* was called *Siris* by the *Ethiopians*, and *Nilus* by the people of *Siene*. From the word *Nahal*, which signifies a torrent, that river was called *Nilus*; and *Dionysius* [283]* tells us, that *Nilus* was that King who cut *Egypt* into canals, to make the river useful: in Scripture the river is called *Schichor*, or *Sihor*, and thence the *Greeks* formed the words *Siris*, *Sirius*, *Ser-Apis*, *O-Siris*; but *Plutarch* [284]* tells us, that the syllable *O*, put before the word *Siris* by the *Greeks*, made it scarce intelligible to the *Egyptians*.

I have now told you the original of the *Nomes* of *Egypt* and of the Religions and Temples of the *Nomes*, and of the Cities built there by the Gods, and called by their names: whence *Diodorus* [285]* tells us, that *of all the Provinces of the World, there were in* Egypt *only many cities built by the ancient Gods, as by* Jupiter*,* Sol*,* Hermes*,* Apollo*,* Pan*,* Eilithyia*, and, many others*: and *Lucian* [286]* an *Assyrian*, who had travelled into *Phœnicia* and *Egypt*, tells us, that *the Temples of* Egypt *were very old, those in* Phœnicia *built by* Cinyras *as old, and those in* Assyria *almost as old as the former, but not altogether so old*: which shews that the Monarchy of *Assyria* rose up after the Monarchy of *Egypt*; as is represented in Scripture; and that the Temples of *Egypt* then standing, were those built by *Sesostris*, about the same time that the Temples of *Phœnicia* and *Cyprus* were built by *Cinyras, Benhadad*, and *Hiram*. This was not the first original of Idolatry, but only the erecting of much more sumptuous Temples than formerly to the founders of new Kingdoms: for Temples at first were very small;

Jupiter angusta vix totus stabat in æde.

Ovid. Fast. l. 1.

Altars were at first erected without Temples, and this custom continued in *Persia* ‘till after the days of *Herodotus*: in *Phœnicia* they had Altars with little houses for eating the sacrifices much earlier, and these they called High Places: such was the High Place where *Samuel* entertained *Saul*; such was the House of *Dagon* at *Ashdod*, into which the *Philistims* brought the Ark; and the House of *Baal*, in which *Jehu* slew the Prophets of *Baal*; and such were the High Places of the *Canaanites* which *Moses* commanded *Israel* to destroy: he [287]* commanded *Israel* to destroy the Altars, Images, High Places, and Groves of the *Canaanites*, but made no mention of their Temples, as he would have done had there been any in those days. I meet

with no mention of sumptuous Temples before the days of *Solomon*: new Kingdoms begun then to build Sepulchres to their Founders in the form of Sumptuous Temples; and such Temples *Hiram* built in *Tyre*, *Sesac* in all *Egypt*, and *Benhadad* in *Damascus*.

For when *David* [288]* smote *Hadad Ezer* King of *Zobah*, and slew the *Syrians* of *Damascus* who came to assist him, *Rezon the son of* Eliadah *fled from his lord* Hadad-Ezer*, and gathered men unto him and became Captain over a band, and Reigned in* Damascus*, over* Syria: he is called *Hezion*, 1 *King.* xv. 18. and his successors mentioned in history were *Tabrimon*, *Hadad* or *Benhadad*, *Benhadad* II. *Hazael*, *Benhadad* III. * * and *Rezin* the son of *Tabeah*. *Syria* became subject to *Egypt* in the days of *Tabrimon*, and recovered her liberty under *Benhadad* I; and in the days of *Benhadad* III, until the reign of the last *Rezin*, they became subject to *Israel*: and in the ninth year of *Hoshea* King of *Judah*, *Tiglath-pileser* King of *Assyria* captivated the *Syrians*, and put an end to their Kingdom: now *Josephus* [289]* tells us, that *the* Syrians *'till his days worshipped both* Adar, that is *Hadad* or *Benhadad*, *and his successor* Hazael *as Gods, for their benefactions, and for building Temples by which they adorned the city of* Damascus*: for*, saith he, *they daily celebrate solemnities in honour of these Kings, and boast their antiquity, not knowing that they are novel, and lived not above eleven hundred years ago*. It seems these Kings built sumptuous Sepulchres for themselves, and were worshipped therein. *Justin* [290]* calls the first of these two Kings *Damascus*, saying that *the city had its name from him, and that the* Syrians *in honour of him worshipped his wife* Arathes *as a Goddess, using her Sepulchre for a Temple*.

Another instance we have in the Kingdom of *Byblus*. In the [291]* Reign of *Minos* King of *Crete*, when *Rhadamanthus* the brother of *Minos* carried colonies from *Crete* to the *Greek* islands, and gave the islands to his captains, he gave *Lemnos* to *Thoas*, or *Theias*, or *Thoantes*, the father of *Hypsipyle*, a *Cretan* worker in metals, and by consequence a disciple of the *Idæi Dactyli*, and perhaps a *Phœnician*: for the *Idæi Dactyli*, and *Telchines*, and *Corybantes* brought their Arts and Sciences from *Phœnicia*: and [292]* *Suidas* saith, that he was descended from *Pharnaces* King of *Cyprus*; *Apollodorus*, [293]* that he was the son of *Sandochus* a *Syrian*; and *Apollonius Rhodius*, [294]* that Hypsipyle *gave* Jason *the purple cloak which*

the Graces *made for* Bacchus*, who gave it to his son* Thoas, the father of *Hypsipyle*, and King of *Lemnos*: *Thoas* married [295]* *Calycopis*, the mother of *Æneas*, and daughter of *Otreus* King of *Phrygia*, and for his skill on the harp was called *Cinyras*, and was said to be exceedingly beloved by *Apollo* or *Orus*: the great *Bacchus* loved his wife, and being caught in bed with her in *Phrygia* appeased him with wine, and composed the matter by making him King of *Byblus* and *Cyprus*; and then came over the *Hellespont* with his army, and conquered *Thrace:* and to these things the poets allude, in feigning that *Vulcan* fell from heaven into *Lemnos*, and that *Bacchus* [296]* appeased him with wine, and reduced him back into heaven: he fell from the heaven of the *Cretan* Gods, when he went from *Crete* to *Lemnos* to work in metals, and was reduced back into heaven when *Bacchus* made him King of *Cyprus* and *Byblus*: he Reigned there 'till a very great age, living to the times of the *Trojan* war, and becoming exceeding rich: and after the death of his wife *Calycopis*, [297]* he built Temples to her at *Paphos* and *Amathus*, in *Cyprus*; and at *Byblus* in *Syria*, and instituted Priests to her with Sacred Rites and lustful *Orgia*; whence she became the *Dea Cypria*, and the *Dea Syria*: and from Temples erected to her in these and other places, she was also called *Paphia*, *Amathusia*, *Byblia*, *Cytherea Salaminia*, *Cnidia*, *Erycina*, *Idalia*. *Fama tradit a Cinyra sacratum vetustissimum Paphiæ Veneris templum, Deamque ipsam conceptam mari huc appulsam*: *Tacit. Hist.* l. 2. c. 3. From her sailing from *Phrygia* to the island *Cythera*, and from thence to be Queen of *Cyprus*, she was said by the *Cyprians*, to be born of the froth of the sea, and was painted sailing upon a shell. *Cinyras* Deified also his son *Gingris*, by the name of *Adonis*; and for assisting the *Egyptians* with armour, it is probable that he himself was Deified by his friends the *Egyptians*, by the name of *Baal-Canaan*, or *Vulcan*: for *Vulcan* was celebrated principally by the *Egyptians*, and was a King according to *Homer*, and Reigned in *Lemnos*; and *Cinyras* was an inventor of arts, [298]* and found out copper in *Cyprus*, and the smiths hammer, and anvil, and tongs, and laver; and imployed workmen in making armour, and other things of brass and iron, and was the only King celebrated in history for working in metals, and was King of *Lemnos*, and the husband of *Venus*; all which are the characters of *Vulcan*: and the *Egyptians* about the time of the death of *Cinyras*, *viz.* in the Reign of their King *Amenophis*, built a very

sumptuous Temple at *Memphis* to *Vulcan*, and near it a smaller Temple to *Venus Hospita*; not an *Egyptian* woman but a foreigner, not *Helena* but *Vulcan's Venus*: for [299]* *Herodotus* tells us, that the region round about this Temple was inhabited by *Tyrian Phœnicians*, and that [300]* *Cambyses* going into this Temple at *Memphis*, very much derided the statue of *Vulcan* for its littleness; *For*, saith he, *this statue is most like those Gods which the* Phœnicians *call* Patæci*, and carry about in the fore part of their Ships in the form of Pygmies*: and [301]* *Bochart* saith of this *Venus Hospita*, *Phœniciam Venerem in Ægypto pro peregrina habitam.*

As the *Egyptians*, *Phœnicians* and *Syrians* in those days Deified their Kings and Princes, so upon their coming into *Asia minor* and *Greece*, they taught those nations to do the like, as hath been shewed above. In those days the writing of the *Thebans* and *Ethiopians* was in hieroglyphicks; and this way of writing seems to have spread into the lower *Egypt* before the days of *Moses*: for thence came the worship of their Gods in the various shapes of Birds, Beasts, and Fishes, forbidden in the second commandment. Now this emblematical way of writing gave occasion to the *Thebans* and *Ethiopians*, who in the days of *Samuel*, *David*, *Solomon*, and *Rehoboam* conquered *Egypt*, and the nations round about, and erected a great Empire, to represent and signify their conquering Kings and Princes, not by writing down their names, but by making various hieroglyphical figures; as by painting *Ammon* with Ram's horns, to signify the King who conquered *Libya*, a country abounding with sheep; his father *Amosis* with a Scithe, to signify that King who conquered the lower *Egypt*, a country abounding with corn; his Son *Osiris* by an Ox, because he taught the conquered nations to plow with oxen; *Bacchus* with Bulls horns for the same reason, and with Grapes because he taught the nations to plant vines, and upon a Tiger because he subdued *India*; *Orus* the son of *Osiris* with a Harp, to signify the Prince who was eminently skilled on that instrument; *Jupiter* upon an Eagle to signify the sublimity of his dominion, and with a Thunderbolt to represent him a warrior; *Venus* in a Chariot drawn with two Doves, to represent her amorous and lustful; *Neptune* with a Trident, to signify the commander of a fleet composed of three Squadrons; *Ægeon*, a Giant, with 50 heads, and an hundred hands, to signify *Neptune* with his men in a ship of fifty oars; *Thoth* with a Dog's head and wings at his cap and feet, and a

Caduceus writhen about with two Serpents, to signify a man of craft, and an embassador who reconciled two contending nations; *Pan* with a Pipe and the legs of a Goat, to signify a man delighted in piping and dancing; and *Hercules* with Pillars and a Club, because *Sesostris* set up pillars in all his conquests, and fought against the *Libyans* with clubs: this is that *Hercules* who, according to [302]* *Eudoxus*, was slain by *Typhon*; and according to *Ptolomæus Hephæstion* [303]* was called *Nilus*, and who conquered *Geryon* with his three sons in *Spain*, and set up the famous pillars at the mouth of the *Straits*: for *Diodorus* [304]* mentioning three *Hercules*'s, the *Egyptian*, the *Tyrian*, and the son of *Alcmena*, saith that *the oldest flourished among the* Egyptians*, and having conquered a great part of the world, set up the pillars in* Afric: and *Vasæus*, [305]* that *Osiris*, called also *Dionysius*, *came into* Spain *and conquered* Geryon*, and was the first who brought Idolatry into* Spain. *Strabo* [306]* tells us, that the *Ethiopians* called *Megabars* fought with clubs: and some of the *Greeks* [307]* did so 'till the times of the *Trojan* war. Now from this hieroglyphical way of writing it came to pass, that upon the division of *Egypt* into *Nomes* by *Sesostris*, the great men of the Kingdom to whom the *Nomes* were dedicated, were represented in their Sepulchers or Temples of the *Nomes*, by various hieroglyphicks; as by an *Ox*, a *Cat*, a *Dog*, a *Cebus*, a *Goat*, a *Lyon*, a *Scarabæus*, an *Ichneumon*, a *Crocodile*, an *Hippopotamus*, an *Oxyrinchus*, an *Ibis*, a *Crow*, a *Hawk,* a *Leek*, and were worshipped by the *Nomes* in the shape of these creatures.

The [308]* *Atlantides*, a people upon mount *Atlas* conquered by the *Egyptians* in the Reign of *Ammon*, related that *Uranus* was their first King, and reduced them from a savage course of life, and caused them to dwell in towns and cities, and lay up and use the fruits of the earth, and that he reigned over a great part of the world, and by his wife *Titæa* had eighteen children, among which were *Hyperion* and *Basilea* the parents of *Helius* and *Selene*; that the brothers of *Hyperion* slew him, and drowned his son *Helius*, the *Phaeton* of the ancients, in the *Nile*, and divided his Kingdom amongst themselves; and the country bordering upon the Ocean fell to the lot of *Atlas*, from whom the people were called *Atlantides*. By *Uranus* or *Jupiter Uranius*, *Hyperion*, *Basilea*, *Helius* and *Selene*, I understand *Jupiter Ammon*, *Osiris*, *Isis*, *Orus* and *Bubaste*; and by the sharing of the Kingdom

of *Hyperion* amongst his brothers the *Titans*, I understand the division of the earth among the Gods mentioned in the Poem of *Solon*.

For *Solon* having travelled into *Egypt*, and conversed with the Priests of *Sais*; about their antiquities, wrote a Poem of what he had learnt, but did not finish it; [309]* and this Poem fell into the hands of *Plato* who relates out of it, that at the mouth of the *Straits* near *Hercules*'s Pillars there was an Island called *Atlantis*, the people of which, nine thousand years before the days of *Solon*, reigned over *Libya* as far as *Egypt*; and over *Europe* as far as the *Tyrrhene* sea; and all this force collected into one body invaded *Egypt* and *Greece*, and whatever was contained within the Pillars of *Hercules*, but was resisted and stopt by the *Athenians* and other *Greeks*, and thereby the rest of the nations not yet conquered were preserved: he saith also that in those days the Gods, having finished their conquests, divided the whole earth amongst themselves, partly into larger, partly into smaller portions, and instituted Temples and Sacred Rites to themselves; and that the Island *Atlantis* fell to the lot of *Neptune*, who made his eldest Son *Atlas* King of the whole Island, a part of which was called *Gadir*; and that *in the history of the said wars mention was made of* Cecrops*,* Erechtheus*,* Erichthonius*, and others before* Theseus*, and also of the women who warred with the men, and of the habit and statue of* Minerva*, the study of war in those days being common to men and women*. By all these circumstances it is manifest that these Gods were the *Dii magni majorum gentium*, and lived between the age of *Cecrops* and *Theseus*; and that the wars which *Sesostris* with his brother *Neptune* made upon the nations by land and sea, and the resistance he met with in *Greece*, and the following invasion of *Egypt* by *Neptune*, are here described; and how the captains of *Sesostris* shared his conquests amongst themselves, as the captains of *Alexander* the great did his conquests long after, and instituting Temples and Priests and sacred Rites to themselves, caused the nations to worship them after death as Gods: and that the Island *Gadir* or *Gades*, with all *Libya*, fell to the lot of him who after death was Deified by the name of *Neptune*. The time therefore when these things were done is by *Solon* limited to the age of *Neptune*, the father of *Atlas*; for *Homer* tells us, that *Ulysses* presently after the *Trojan* war found *Calypso* the daughter of *Atlas* in the *Ogygian* Island, perhaps *Gadir*; and therefore it was but two Generations before the *Trojan* war. This is that

Neptune, who with *Apollo* or *Orus* fortified *Troy* with a wall, in the Reign of *Laomedon* the father of *Priamus*, and left many natural children in *Greece*, some of which were *Argonauts*, and others were contemporary to the *Argonauts*; and therefore he flourished but one Generation before the *Argonautic* expedition, and by consequence about 400 years before *Solon* went into *Egypt*: but the Priests of *Egypt* in those 400 years had magnified the stories and antiquity of their Gods so exceedingly, as to make them nine thousand years older than *Solon*, and the Island *Atlantis* bigger than all *Afric* and *Asia* together, and full of people; and because in the days of *Solon* this great Island did not appear, they pretended that it was sunk into the sea with all its people: thus great was the vanity of the Priests of *Egypt* in magnifying their antiquities.

The *Cretans* [310]* affirmed that *Neptune was the man who set out a fleet, having obtained this Præfecture of* his father *Saturn; whence posterity reckoned things done in the sea to be under his government, and mariners honoured him with sacrifices*: the invention of tall Ships with sails [311]* is also ascribed to him. He was first worshipped in *Africa*, as *Herodotus* [312]* affirms, and therefore Reigned over that province: for his eldest son *Atlas*, who succeeded him, was not only Lord of the Island *Atlantis*, but also Reigned over a great part of *Afric*, giving his name to the people called *Atlantii*, and to the mountain *Atlas*, and the *Atlantic Ocean*. The [313]* outmost parts of the earth and promontories, and whatever bordered upon the sea and was washed by it, the *Egyptians* called *Neptys*; and on the coasts of *Marmorica* and *Cyrene*, *Bochart* and *Arius Montanus* place the *Naphthuhim*, a people sprung from *Mizraim*, *Gen.* x. 13; and thence *Neptune* and his wife *Neptys* might have their names, the words *Neptune*, *Neptys* and *Naphthuhim*, signifying the King, Queen, and people of the sea-coasts. The *Greeks* tell us that *Japetus* was the father of *Atlas*, and *Bochart* derives *Japetus* and *Neptune* from the same original: he and his son *Atlas* are celebrated in the ancient fables for making war upon the Gods of *Egypt*; as when *Lucian* [314]* saith that *Corinth* being full of fables, tells the fight of *Sol* and *Neptune*, that is, of *Apollo* and *Python*, or *Orus* and *Typhon*; and where *Agatharcides* [315]* relates how the Gods of *Egypt* fled from the Giants, ‘till the *Titans* came in and saved them by putting *Neptune* to flight;

and where *Hyginus* [316]* tells the war between the Gods of *Ægypt*, and the *Titans* commanded by *Atlas*.

The *Titans* are the posterity of *Titæa*, some of whom under *Hercules* assisted the Gods, others under *Neptune* and *Atlas* warred against them: *for which reason*, saith *Plutarch*, [317]* *the Priests of* Egypt *abominated the sea, and had* Neptune *in no honour*. By *Hercules*, I understand here the general of the forces of *Thebais* and *Ethiopia* whom the Gods or great men of *Egypt* called to their assistance, against the Giants or great men of *Libya*, who had slain *Osiris* and invaded *Egypt*: for *Diodorus* [318]* saith that *when* Osiris *made his expedition over the world, he left his kinsman* Hercules *general of his forces over all his dominions, and* Antæus *governor of* Libya *and* Ethiopia. *Antæus* Reigned over all *Afric* to the *Atlantic Ocean*, and built *Tingis* or *Tangieres*: *Pindar* [319]* tells us that he Reigned at *Irasa* a town of *Libya*, where *Cyrene* was afterwards built: he invaded *Egypt* and *Thebais*; for he was beaten by *Hercules* and the *Egyptians* near *Antæa* or *Antæopolis*, a town of *Thebais*; and *Diodorus* [320]* tells us that *this town had its name from* Antæus*, whom* Hercules *slew in the days of* Osiris. *Hercules* overthrew him several times, and every time he grew stronger by recruits from *Libya*, his mother earth; but *Hercules* intercepted his recruits, and at length slew him. In these wars *Hercules* took the *Libyan* world from *Atlas*, and made *Atlas* pay tribute out of his golden orchard, the Kingdom of *Afric*. *Antæus* and *Atlas* were both of them sons of *Neptune* both of them Reigned over all *Libya* and *Afric*, between *Mount Atlas* and the *Mediterranean* to the very Ocean; both of them invaded *Egypt*, and contended with *Hercules* in the wars of the Gods, and therefore they are but two names of one and the same man; and even the name *Atlas* in the oblique cases seems to have been compounded of the name *Antæeus* and some other word, perhaps the word *Atal*, cursed, put before it: the invasion of *Egypt* by *Antæus*, *Ovid* hath relation unto, where he makes *Hercules* say,

Sævoque alimenta parentis
Antæo eripui.

This war was at length composed by the intervention of *Mercury*, who in memory thereof was said to reconcile two contending serpents, by casting his Ambassador's rod between them: and thus much concerning the ancient state of *Egypt*, *Libya*, and *Greece*, described by *Solon*.

The mythology of the *Cretans* differed in some things from that of *Egypt* and *Libya*: for in the *Cretan* mythology, *Cœlus* and *Terra*, or *Uranus* and *Titæa* were the parents of *Saturn* and *Rhea*, and *Saturn* and *Rhea* were the parents of *Jupiter* and *Juno*; and *Hyperion*, *Japetus* and the *Titans* were one Generation older than *Jupiter*; and *Saturn* was expelled his Kingdom and castrated by his son *Jupiter*: which fable hath no place in the mythology of *Egypt*.

During the Reign of *Sesac*, *Jeroboam* being in subjection to *Egypt*; set up the Gods of *Egypt* in *Dan* and *Bethel*; and *Israel was without the true God, and without a teaching Priest and without law: and in those times there was no peace to him that went out, nor to him that came in, but great vexations were upon all the inhabitants of the countries; and nation was destroyed of nation, and city of city: for God did vex them with all adversity*. 2 *Chron*. xv. 3, 5, 6. But in the fifth year of *Asa* the land of *Judah* became quiet from war, and from thence had quiet ten years; and *Asa* took away the altars of strange Gods, and brake down the Images, and built the fenced cities of *Judah* with walls and towers and gates and bars, having rest on every side, and got up an army of 580000 men, with which in the fifteenth year of his Reign he met *Zerah* the *Ethiopian*, who came out against him with an army of a thousand thousand *Ethiopians* and *Libyans*: the way of the *Libyans* was through *Egypt*, and therefore *Zerah* was now Lord of *Egypt*: they fought at *Mareshah* near *Gerar*, between *Egypt* and *Judæa*, and *Zerah* was beaten, so that he could not recover himself: and from all this I seem to gather that *Osiris* was slain in the fifth year of *Asa*, and thereupon *Egypt* fell into civil wars, being invaded by the *Libyans*, and defended by the *Ethiopians* for a time; and after ten years more being invaded by the *Ethiopians*, who slew *Orus* the son and successor of *Osiris*, drowning him in the *Nile*, and seized his Kingdom. By these civil wars of *Egypt*, the land of *Judah* had rest ten years. *Osiris* or *Sesostris* reigned long, *Manetho* saith 48 years; and by this reckoning he began to Reign about the 17th year of *Solomon*; and *Orus* his son was drowned in the 15th year of *Asa*: for *Pliny* [321]* tells us, *Ægyptiorum bellis attrita est Æthiopia, vicissim imperitando serviendoque, clara & potens etiam usque ad Trojana bella Memnone regnante*. *Ethiopia*, served *Egypt* ‘till the death of *Sesostris*, and no longer; for *Herodotus* [322]* tells us that *he alone enjoyed the Empire*

of Ethiopia: then the *Ethiopians* became free, and after ten years became Lords of *Egypt* and *Libya*, under *Zerah* and *Amenophis*.

When *Asa* by his victory over *Zerah* became safe from *Egypt*, he assembled all the people, and they offered sacrifices out of the spoils, and entered into a covenant upon oath to seek the Lord; and in lieu of the vessels taken away by *Sesac*, *he brought into the house of God the things that his father had dedicated, and that he himself had dedicated, Silver and Gold, and Vessels*. 2 *Chron.* xv.

When *Zerah* was beaten, so that he could not recover himself, the people [323]* of the lower *Egypt* revolted from the *Ethiopians*, and called in to their assistance two hundred thousand *Jews* and *Canaanites*; and under the conduct of one *Osarsiphus*, a Priest of *Egypt*, called *Usorthon*, *Osorchon*, *Osorchor*, and *Hercules Ægyptius* by *Manetho*, caused the *Ethiopians* now under *Memnon* to retire to *Memphis*: and there *Memnon* turned the river *Nile* into a new channel, built a bridge over it and fortified that pass, and then went back into *Ethiopia*: but after thirteen years, he and his young son *Ramesses* came down with an army from *Ethiopia*, conquered the lower *Egypt*, and drove out the *Jews* and *Phœnicians*; and this action the *Egyptian* writers and their followers call the second expulsion of the Shepherds, taking *Osarsiphus* for *Moses*.

Tithonus a beautiful youth, the elder brother of *Priamus*, went into *Ethiopia*, being carried thither among many captives by *Sesostris*: and the *Greeks*, before the days of *Hesiod*, feigned that *Memnon* was his son: *Memnon* therefore, in the opinion of those ancient *Greeks*, was one Generation younger than *Tithonus*, and was born after the return of *Sesostris* into *Egypt*: suppose about 16 or 20 years after the death of *Solomon*. He is said to have lived very long, and so might die about 95 years after *Solomon*, as we reckoned above: his mother, called *Cissia* by *Æschylus*, in a statue erected to her in *Egypt*, [324]* was represented as the daughter, the wife, and the mother of a King, and therefore he was the son of a King; which makes it probable that *Zerah*, whom he succeeded in the Kingdom of *Ethiopia*, was his father.

Historians [325]* agree that *Menes* Reigned in *Egypt* next after the Gods, and turned the river into a new channel, and built a bridge over it, and built *Memphis* and the magnificent Temple of *Vulcan*: he built *Memphis* over-

against the place where *Grand Cairo* now stands, called by the *Arabian* historians *Mesir*: he built only the body of the Temple of *Vulcan*, and his successors *Ramesses* or *Rhampsinitus*, *Mœris*, *Asychis*, and *Psammiticus* built the western, northern eastern, and southern portico's thereof: *Psammiticus*, who built the last portico of this Temple, Reigned three hundred years after the victory of *Asa* over *Zerah*, and it is not likely that this Temple could be above three hundred years in building, or that any *Menes* could be King of all *Egypt* before the expulsion of the Shepherds. The last of the Gods of *Egypt* was *Orus*, with his mother *Isis*, and sister *Bubaste*, and secretary *Thoth*, and unkle *Typhon*; and the King who reigned next after all their deaths, and turned the river and built a bridge over it, and built *Memphis* and the Temple of *Vulcan*, was *Memnon* or *Amenophis*, called by the *Egyptians Amenoph*; and therefore he is *Menes*: for the names *Amenoph*, or *Menoph*, and *Menes* do not much differ; and from *Amenoph* the city *Memphis* built by *Menes* had its *Egyptian* names *Moph*, *Noph*, *Menoph* or *Menuf*, as it is still called by the *Arabian* historians: the necessity of fortifying this place against *Osarsiphus* gave occasion to the building of it.

In the time of the revolt of the lower *Egypt* under *Osarsiphus*, and the retirement of *Amenophis* into *Ethiopia*, *Egypt* being then in the greatest distraction, the *Greeks* built the ship *Argo*, and sent in it the flower of *Greece* to *Æetes* in *Colchis*, and to many other Princes on the coasts of the *Euxine* and *Mediterranean* seas; and this ship was built after the pattern of an *Egyptian* ship with fifty oars, in which *Danaus* with his fifty daughters a few years before fled from *Egypt* into *Greece*, and was the first long ship with sails built by the *Greeks*: and such an improvement of navigation, with a design to send the flower of *Greece* to many Princes upon the sea-coasts of the *Euxine* and *Mediterranean* seas, was too great an undertaking to be set on foot, without the concurrence of the Princes and States of *Greece*, and perhaps the approbation of the *Amphictyonic* Council; for it was done by the dictate of the Oracle. This Council met every half year upon state-affairs for the welfare of *Greece*, and therefore knew of this expedition, and might send the *Argonauts* upon an embassy to the said Princes; and for concealing their design might make the fable of the golden fleece, in relation to the ship of *Phrixus* whose ensign was a golden ram: and probably their design was to notify the distraction of *Egypt*, and the

invasion thereof by the *Ethiopians* and *Israelites*, to the said Princes, and to persuade them to take that opportunity to revolt from *Egypt*, and set up for themselves, and make a league with the *Greeks*: for the *Argonauts* went through [326]* the Kingdom of *Colchis* by land to the *Armenians*, and through *Armenia* to the *Medes*; which could not have been done if they had not made friendship with the nations through which they passed: they visited also *Laomedon* King of the *Trojans*, *Phineus* King of the *Thracians*, *Cyzicus* King of the *Doliones*, *Lycus* King of the *Mariandyni*, the coasts of *Mysia* and *Taurica Chersonesus*, the nations upon the *Tanais*, the people about *Byzantium*, and the coasts of *Epirus*, *Corsica*, *Melita*, *Italy*, *Sicily*, *Sardinia*, and *Gallia* upon the *Mediterranean*; and from thence they [327]* crossed the sea to *Afric*, and there conferred with *Euripylus* King of *Cyrene*: and [328]* *Strabo* tells us that *in* Armenia *and* Media*, and the neighbouring places, there were frequent monuments of the expedition of* Jason*; as also about* Sinope*, and its sea-coasts, the* Propontis *and the* Hellespont*, and in the* Mediterranean: and a message by the flower of *Greece* to so many nations could be on no other account than state-policy; these nations had been invaded by the *Egyptians*, but after this expedition we hear no more of their continuing in subjection to *Egypt*.

The [329]* *Egyptians* originally lived on the fruits of the earth, and fared hardly, and abstained from animals, and therefore abominated Shepherds: *Menes* taught them to adorn their beds and tables with rich furniture and carpets, and brought in amongst them a sumptuous, delicious and voluptuous way of life: and about a hundred years after his death, *Gnephacthus* one of his successors cursed him for it, and to reduce the luxury of *Egypt*, caused the curse to be entered in the Temple of *Jupiter* at *Thebes*; and by this curse the honour of *Menes* was diminished among the *Egyptians*.

The Kings of *Egypt* who expelled the Shepherds and Succeeded them, Reigned I think first at *Coptos*, and then at *Thebes*, and then at *Memphis*. At *Coptos* I place *Misphragmuthosis* and *Amosis* or *Thomosis* who expelled the Shepherds, and abolished their custom of sacrificing men, and extended the *Coptic* language, and the name of Αια Κοπτου, *Aegyptus*, to the conquest. Then *Thebes* became the Royal City of *Ammon*, and from him was called *No-Ammon,* and his conquest on the west of *Egypt* was called *Ammonia.*

After him, in the same city of *Thebes*, Reigned *Osiris*, *Orus*, *Menes* or *Amenophis*, and *Ramesses*: but *Memphis* and her miracles were not yet celebrated in *Greece*; for *Homer* celebrates *Thebes* as in its glory in his days, and makes no mention of *Memphis*. After *Menes* had built *Memphis, Mœris* the successor of *Ramesses* adorned it, and made it the seat of the Kingdom, and this was almost two Generations after the *Trojan* war. *Cinyras*, the *Vulcan* who married *Venus*, and under the Kings of *Egypt* Reigned over *Cyprus* and part of *Phœnicia*, and made armour for those Kings, lived 'till the times of the *Trojan* war: and upon his death *Menes* or *Memnon* might Deify him, and found the famous Temple of *Vulcan* in that city for his worship, but not live to finish it. In a plain [330]* not far from *Memphis* are many small Pyramids, said to be built by *Venephes* or *Enephes*; and I suspect that *Venephes* and *Enephes* have been corruptly written for *Menephes* or *Amenophis*, the letters *AM* being almost worn out in some old manuscript: for after the example of these Pyramids, the following Kings, *Mœris* and his successors, built others much larger. The plain in which they were built was the burying-place of that city, as appears by the Mummies there found; and therefore the Pyramids were the sepulchral monuments of the Kings and Princes of that city: and by these and such like works the city grew famous soon after the days of *Homer*; who therefore flourished in the Reign of *Ramesses*.

Herodotus [331]* is the oldest historian now extant who wrote of the antiquities of *Egypt*, and had what he wrote from the Priests of that country: and *Diodorus*, who wrote almost 400 years after him, and had his relations also from the Priests of *Egypt*, placed many nameless Kings between those whom *Herodotus* placed in continual succession. The Priests of *Egypt* had therefore, between the days of *Herodotus* and *Diodorus*, out of vanity, very much increased the number of their Kings: and what they did after the days of *Herodotus*, they began to do before his days; for he tells us that they recited to him out of their books, the names of 330 Kings who Reigned after *Menes*, but did nothing memorable, except *Nitocris* and *Mœris* the last of them: all these Reigned at *Thebes*, 'till *Mœris* translated the seat of the Empire from *Thebes* to *Memphis*. After *Mœris* he reckons *Sesostris*, *Pheron*, *Proteus*, *Rhampsinitus*, *Cheops*, *Cephren*, *Mycerinus*, *Asychis*, *Anysis*, *Sabacon*, *Anysis* again, *Sethon*, twelve contemporary Kings, *Psammitichus*,

Nechus, *Psammis*, *Apries*, *Amasis*, and *Psammenitus*. The *Egyptians* had before the days of *Solon* made their monarchy 9000 years old, and now they reckon'd to *Herodotus* a succession of 330 Kings Reigning so many Generations, that is about 11000 years, before *Sesostris*: but the Kings who Reigned long before *Sesostris* might Reign over several little Kingdoms in several parts of *Egypt*, before the rise of their Monarchy; and by consequence before the days of *Eli* and *Samuel*, and so are not under our consideration: and these names may have been multiplied by corruption; and some of them, as *Athothes* or *Thoth*, the secretary of *Osiris*; *Tosorthrus* or *Æsculapius* a Physician who invented building with square stones; and *Thuor* or *Polybus* the husband of *Alcandra*, were only Princes of *Egypt*. If with *Herodotus* we omit the names of those Kings who did nothing memorable, and consider only those whose actions are recorded, and who left splendid monuments of their having Reigned over *Egypt*, such as were Temples, Statues, Pyramids, Obelisks, and Palaces dedicated or ascribed to them, these Kings reduced into good order will give us all or almost all the Kings of *Egypt*, from the days of the expulsion of the Shepherds and founding of the Monarchy, downwards to the conquest of *Egypt* by *Cambyses*: for *Sesostris* Reigned in the Age of the Gods of *Egypt*: being Deified by the names of *Osiris*, *Hercules* and *Bacchus*, as above; and therefore *Menes*, *Nitocris*, and *Mœris* are to be placed after him; *Menes* and his son *Ramesses* Reigned next after the Gods, and therefore *Nitocris* and *Mœris* Reigned after *Ramesses*: *Mœris* is set down immediately before *Cheops*, three times in the Dynastys of the Kings of *Egypt* composed by *Eratosthenes*, and once in the Dynasties of *Manetho*; and in the same Dynasties *Nitocris* is set after the builders of the three great Pyramids, and according to *Herodotus* her brother Reigned before her, and was slain, and she revenged his death; and according to *Syncellus* she built the third great Pyramid; and the builders of the Pyramids Reigned at *Memphis*, and by consequence after *Mœris*. Now from these things I gather that the Kings of *Egypt* mentioned by *Herodotus* ought to be placed in this order; *Sesostris*, *Pheron*, *Proteus*, *Menes*, *Rhampsinitus*, *Mœris*, *Cheops*, *Cephren*, *Mycerinus*, *Nitocris*, *Asychis*, *Anysis*, *Sabacon*, *Anysis* again, *Sethon*, twelve contemporary Kings, *Psammitichus*, *Nechus*, *Psammis*, *Apries*, *Amasis*, *Psammenitus*.

Pheron is by *Herodotus* said to be the son and successor of *Sesostris*. He was Deified by the name of *Orus*.

Proteus Reigned in the lower *Egypt* when *Paris* sailed thither; that is at the end of the *Trojan* war, according to [332]* *Herodotus*: and at that time *Amenophis* was King of *Egypt* and *Ethiopia*: but in his absence *Proteus* might be governor of some part of the lower *Egypt* under him; for *Homer* places *Proteus* upon the sea-coasts, and makes him a sea God, and calls him the servant of *Neptune*; and *Herodotus* saith that he rose up from among the common people, and that *Proteus* was his name translated into *Greek*, and this name in *Greek* signifies only a Prince or President. He succeeded *Pheron*, and was succeeded by *Rhampsinitus* according to *Herodotus*; and so was contemporary to *Amenophis*.

Amenophis Reigned next after *Orus* and *Isis* the last of the Gods; he Reigned at first over all *Egypt*, and then over *Memphis* and the upper parts of *Egypt*; and by conquering *Osarsiphus*, who had revolted from him, became King of all *Egypt* again, about 51 years after the death of *Solomon*. He built *Memphis* and ordered the worship of the Gods of *Egypt*, and built a Palace at *Abydus*, and the *Memnonia* at *This* and *Susa*, and the magnificent Temple of *Vulcan* in *Memphis*; the building with square stones being found out before by *Tosorthrus*, the *Æsculapius* of *Egypt*: he is by corruption of his name called *Menes*, *Mines*, *Minæus*, *Mineus*, *Minies*, *Mnevis*, *Enephes*, *Venephes*, *Phamenophis*, *Osymanthyas*, *Osimandes*, *Ismandes*, *Imandes*, *Memnon*, *Arminon.*

Amenophis was succeeded by his son, called by *Herodotus*, *Rhampsinitus*, and by others *Ramses*, *Ramises*, *Rameses*, *Ramesses*, [333]* *Ramestes*, *Rhampses*, *Remphis*. Upon an Obelisk erected by this King in *Heliopolis*, and sent to *Rome* by the Emperor *Constantius*, was an inscription, interpreted by *Hermapion* an *Egyptian* Priest, expressing that the King was long lived, and Reigned over a great part of the earth: and *Strabo*, [334]* an eye-witness, tells us, that in the monuments of the Kings of *Egypt*, above the *Memnonium* were inscriptions upon Obelisks, expressing the riches of the Kings, and their Reigning as far as *Scythia*, *Bactria*, *India* and *Ionia*: and *Tacitus* [335]* tells us from an inscription seen at *Thebes* by *Cæsar Germanicus,* and interpreted to him by the *Egyptian* Priests, that this King *Ramesses* had an army of 700000 men, and Reigned over *Libya*,

Ethiopia, *Media*, *Persia*, *Bactria*, *Scythia*, *Armenia*, *Cappadocia*, *Bithynia*, and *Lycia*; whence the Monarchy of *Assyria* was not yet risen. This King was very covetous, and a great collector of taxes, and one of the richest of all the Kings of *Egypt*, and built the western portico of the Temple of *Vulcan*.

Mœris inheriting the riches of *Ramesses*, built the northern portico of that Temple more sumptuously, and made the Lake of *Mœris,* with two great Pyramids of brick in the midst of it: and for preserving the division of *Egypt* into equal shares amongst the soldiers, this King wrote a book of surveying, which gave a beginning to Geometry. He is called also *Maris*, *Myris*, *Meres*, *Marres*, *Smarres*; and more corruptly, by changing M into A, T, B, Σ, YX, Λ, &c. *Ayres*, *Tyris*, *Byires*, *Soris*, *Uchoreus*, *Lachares*, *Labaris*, &c.

Diodorus [336]* places *Uchoreus* between *Osymanduas* and *Myris*, that is between *Amenophis* and *Mœris*, and saith that he built *Memphis*, and fortified it to admiration with a mighty rampart of earth, and a broad and deep trench, which was filled with the water of the *Nile*, and made there a vast and deep Lake for receiving the water of the *Nile* in the time of its overflowing, and built palaces in the city; and that this place was so commodiously seated that most of the Kings who Reigned after him preferred it before *Thebes*, and removed the Court from thence to this place, so that the magnificence of *Thebes* from that time began to decrease, and that of *Memphis* to increase, 'till *Alexander* King of *Macedon* built *Alexandria*. These great works of *Uchoreus* and those of *Mœris* savour of one and the same genius, and were certainly done by one and the same King, distinguished into two by a corruption of the name as above; for this Lake of *Uchoreus* was certainly the same with that of *Mœris*.

After the example of the two brick Pyramids made by *Mœris*, the three next Kings, *Cheops*, *Cephren* and *Mycerinus* built the three great Pyramids at *Memphis*; and therefore Reigned in that city. *Cheops* shut up the Temples of the *Nomes*, and prohibited the worship of the Gods of *Egypt*, designing no doubt to have been worshipped himself after death: he is called also *Chembis*, *Chemmis*, *Chemnis*, *Phiops*, *Apathus*, *Apappus*, *Suphis*, *Saophis*, *Syphoas*, *Syphaosis*, *Soiphis*, *Syphuris*, *Anoiphis*, *Anoisis*: he built the biggest of the three great Pyramids which stand together; and his brother

Cephren or *Cerpheres* built the second, and his son *Mycerinus* founded the third: this last King was celebrated for clemency and justice; he shut up the dead body of his daughter in a hollow ox, and caused her to be worshipped daily with odours: he is called also *Cheres*, *Cherinus*, *Bicheres*, *Moscheres*, *Mencheres*. He died before the third Pyramid was finished, and his sister and successor *Nitocris* finished it.

Then Reigned *Asychis*, who built the eastern portico of the Temple of *Vulcan* very splendidly, and among the small Pyramids a large Pyramid of brick, made of mud dug out of the Lake of *Mœris*: and these are the Kings who Reigned at *Memphis*, and spent their time in adorning that city, until the *Ethiopians* and the *Assyrians* and others revolted, and *Egypt* lost all her dominion abroad, and became again divided into several small Kingdoms.

One of those Kingdoms was I think at *Memphis*, under *Gnephactus*, and his son and successor *Bocchoris*. *Africanus* calls *Bocchoris* a *Saite*; but *Sais* at this time had other Kings: *Gnephactus*, otherwise called *Neochabis* and *Technatis*, cursed *Menes* for his luxury, and caused the curse to be entered in the Temple of *Jupiter* at *Thebes*; and therefore Reigned over *Thebais*: and *Bocchoris* sent in a wild bull upon the God *Mnevis* which was worshipped at *Heliopolis*. Another of those Kingdoms was at *Anysis*, or *Hanes*, *Isa.* xxx. 4. under its King *Anysis* or *Amosis*; a third was at *Sais*, under *Stephanathis*, *Nechepsos*, and *Nechus*; and a fourth was at *Tanis* or *Zoan*, under *Petubastes*, *Osorchon* and *Psammis*: and *Egypt* being weakened by this division, was invaded and conquered by the *Ethiopians* under *Sabacon*, who slew *Bocchoris* and *Nechus*, and made *Anysis* fly. The Olympiads began in the Reign of *Petubastes*, and the *Æra* of *Nabonassar* in the 22d year of the Reign of *Bocchoris*, according to *Africanus*; and therefore the division, of *Egypt* into many Kingdoms began before the Olympiads, but not above the length of two Kings Reigns before them.

After the study of Astronomy was set on foot for the use of navigation, and the *Egyptians* by the Heliacal Risings and Settings of the Stars had determined the length of the Solar year of 365 days, and by other observations had fixed the Solstices, and formed the fixt Stars into Asterisms, all which was done in the Reign of *Ammon*, *Sesac*, *Orus*, and *Memnon*; it may be presumed that they continued to observe the motions of the Planets; for they called them after the names of their Gods; and *Nechepsos* or *Nicepsos* King of *Sais*, by the assistance of *Petosiris* a Priest

of *Egypt*, invented Astrology, grounding it upon the aspects of the Planets, and the qualities of the men and women to whom they were dedicated: and in the beginning of the Reign of *Nabonassar* King of *Babylon*, about which time the *Ethiopians* under *Sabacon* invaded *Egypt*, those *Egyptians* who fled from him to *Babylon*, carried thither the *Egyptian* year of 365 days, and the study of Astronomy and Astrology, and founded the *Æra* of *Nabonassar*; dating it from the first year of that King's Reign, which was the 22d year *of Bocchoris* as above, and beginning the year on the same day with the *Egyptians* for the sake of their calculations. So *Diodorus* [337]*: *they say that the* Chaldæans *in* Babylon*, being Colonies of the* Egyptians*, became famous for Astrology, having learnt it from the Priests of* Egypt: and *Hestiæus*, who wrote an history of *Egypt*, speaking of a disaster of the invaded *Egyptians*, saith [338]* that *the Priests who survived this disaster, taking with them the* Sacra *of* Jupiter Enyalius*, came to* Sennaar *in* Babylonia. From the 15th year of *Asa*, in which *Zerah* was beaten, and *Menes* or *Amenophis* began his Reign, to the beginning of the *Æra* of *Nabonassar*, were 200 years; and this interval of time allows room for about nine or ten Reigns of Kings, at about twenty years to a Reign one with another; and so many Reigns there were, according to the account set down above out of *Herodotus*; and therefore that account, as it is the oldest, and was received by *Herodotus* from the Priests of *Thebes*, *Memphis*, and *Heliopolis*, three principal cities of *Egypt*, agrees also with the course of nature, and leaves no room for the Reigns of the many nameless Kings which we have omitted. These omitted Kings Reigned before *Mœris*, and by consequence at *Thebes*; for *Mœris* translated the seat of the Empire from *Thebes* to *Memphis*: they Reigned after *Ramesses*; for *Ramesses* was the son and successor of *Menes*, who Reigned next after the Gods. Now *Menes* built the body of the Temple of *Vulcan*, *Ramesses* the first portico, and *Mœris* the second portico thereof; but the *Egyptians*, for making their Gods and Kingdom look ancient, have inserted between the builders of the first and second portico of this Temple, three hundred and thirty Kings of *Thebes*, and supposed that these Kings Reigned eleven thousand years; as if any Temple could stand so long. This being a manifest fiction, we have corrected it, by omitting those interposed Kings, who did nothing, and

placing *Mœris* the builder of the second portico, next after *Ramesses* the builder of the first.

In the Dynasties of *Manetho*; *Sevechus* is made the successor of *Sabacon*, being his son; and perhaps he is the *Sethon* of *Herodotus*, who became Priest of *Vulcan*, and neglected military discipline: for *Sabacon* is that *So* or *Sua* with whom *Hoshea* King of *Israel* conspired against the *Assyrians*, in the fourth year of *Hezekiah*, *Anno Nabonass.* 24. *Herodotus* tells us twice or thrice, that *Sabacon* after a long Reign of fifty years relinquished *Egypt* voluntarily, and that *Anysis* who fled from him, returned and Reigned again in the lower *Egypt* after him, or rather with him: and that *Sethon* Reigned after *Sabacon*, and went to *Pelusium* against the army of *Sennacherib*, and was relieved with a great multitude of mice, which eat the bow-strings of the *Assyrians*; in memory of which the statue of *Sethon*, seen by *Herodotus*, [339]* was made with a Mouse in its hand. A Mouse was the *Egyptian* symbol of destruction, and the Mouse in the hand of *Sethon* signifies only that he overcame the *Assyrians* with a great destruction. The Scriptures inform us, that when *Sennacherib* invaded *Judæa* and besieged *Lachish* and *Libnah*, which was in the 14th year of *Hezekiah*, *Anno Nabonass.* 34. the King of *Judah* trusted upon *Pharaoh* King of *Egypt*, that is upon *Sethon*, and that *Tirhakah* King of *Ethiopia* came out also to fight against *Sennacherib*, 2 *King.* xviii. 21. & xix. 9. which makes it probable, that when *Sennacherib* heard of the Kings of *Egypt* and *Ethiopia* coming against him, he went from *Libnah* towards *Pelusium* to oppose them, and was there surprized and set upon in the night by them both, and routed with as great a slaughter as if the bow-strings of the *Assyrians* had been eaten by mice. Some think that the *Assyrians* were smitten by lightning, or by a fiery wind which sometimes comes from the southern parts of *Chaldæa*. After this victory *Tirhakah* succeeding *Sethon*, carried his arms westward through *Libya* and *Afric* to the mouth of the *Straits*: but *Herodotus* tells us, that the Priests of *Egypt* reckoned *Sethon* the last King of *Egypt*, who Reigned before the division of *Egypt* into twelve contemporary Kingdoms, and by consequence before the invasion of *Egypt* by the *Assyrians*.

For *Asserhadon* King of *Assyria*, in the 68th year of *Nabonassar*, after he had Reigned about thirty years over *Assyria*, invaded the Kingdom of *Babylon*, and then carried into captivity many people from *Babylon*, and

Cuthah, and *Ava*, and *Hamath*, and *Sepharvaim*, placing them in the Regions of *Samaria* and *Damascus*: and from thence they carried into *Babylonia* and *Assyria* the remainder of the people of *Israel* and *Syria*, which had been left there by *Tiglath-pileser*. This captivity was 65 years after the first year of *Ahaz*, *Isa*. vii. 1, 8. & 2. *King.* xv. 37. & xvi. 5. and by consequence in the twentieth year of *Manasseh*, *Anno Nabonass.* 69. and then *Tartan* was sent by *Asserhadon* with an army against *Ashdod* or *Azoth*, a town at that time subject to *Judæa*, 2 *Chron.* xxvi. 6. and took it, *Isa.* xx. 1: and this post being secured, the *Assyrians* beat the *Jews*, and captivated *Manasseh*, and subdued *Judæa*: and in these wars, *Isaiah* was saw'd asunder by the command of *Manasseh*, for prophesying against him. Then the *Assyrians* invaded and subdued *Egypt* and *Ethiopia*, and carried the *Egyptians* and *Ethiopians* into captivity, and thereby put an end to the Reign of the *Ethiopians* over *Egypt*, *Isa.* vii. 18. & viii. 7. & x. 11, 12, & xix. 23. & xx. 4. In this war the city *No-Ammon* or *Thebes*, which had hitherto continued in a flourishing condition, was miserably wasted and led into captivity, as is described by *Nahum*, chap. iii. ver. 8, 9, 10; for *Nahum* wrote after the last invasion of *Judæa* by the *Assyrians*, chap. i. ver. 15; and therefore describes this captivity as fresh in memory: and this and other following invasions of *Egypt* under *Nebuchadnezzar* and *Cambyses*, put an end to the glory of that city. *Asserhadon* Reigned over the *Egyptians* and *Ethiopians* three years, *Isa.* xx. 3, 4. that is until his death, which was in the year of *Nabonassar* 81, and therefore invaded *Egypt*, and put an end to the Reign of the *Ethiopians* over the *Egyptians*, in the year of *Nabonassar* 78; so that the *Ethiopians* under *Sabacon*, and his successors *Sethon* and *Tirhakah*, Reigned over *Egypt* about 80 years: *Herodotus* allots 50 years to *Sabacon*, and *Africanus* fourteen years to *Sethon*, and eighteen to *Tirhakah*.

The division of *Egypt* into more Kingdoms than one, both before and after the Reign of the *Ethiopians*, and the conquest of the *Egyptians* by *Asserhadon*, the prophet *Isaiah* [340]* seems allude unto in these words: *I will set*, saith he, *the* Egyptians *against the* Egyptians*, and they shall fight every one against his brother, and every one against his neighbour, city against city, and Kingdom against Kingdom, and the Spirit of* Egypt *shall fail. — And the* Egyptians *will I give over into the hand of a cruel Lord* [viz. *Asserhadon*] *and a fierce King shall Reign over them. — Surely the Princes*

of Zoan [Tanis] *are fools, the counsel of the wise Councellors of* Pharaoh *is become brutish: how long say ye unto* Pharaoh*, I am the son of the ancient Kings. — The Princes of* Zoan *are be come fools: the Princes of* Noph [Memphis] *are deceived, — even they that were the stay of the tribes thereof. — In that day there shall be a high-way out of* Egypt *into* Assyria*, and the* Egyptians *shall serve the* Assyrians.

After the death of *Asserhadon*, *Egypt* remained subject to twelve contemporary Kings, who revolted from the *Assyrians*, and Reigned together fifteen years; including I think the three years of *Asserhadon*, because the *Egyptians* do not reckon him among their Kings. They [341]* built the Labyrinth adjoining to the Lake of *Mœris* which was a very magnificent structure, with twelve Halls in it, for their Palaces: and then *Psammitichus*, who was one of the twelve, conquered all the rest. He built the last Portico of the Temple of *Vulcan*, founded by *Menes* about 260 years before, and Reigned 54 years, including the fifteen years of his Reign with the twelve Kings. Then Reigned *Nechaoh* or *Nechus*, 17 years; *Psammis* six years; *Vaphres*, *Apries*, *Eraphius*, or *Hophra*, 25 years; *Amasis* 44 years; and *Psammenitus* six months, according to *Herodotus*. *Egypt* was subdued by *Nebuchadnezzar* in the last year but one of *Hophra*, *Anno Nabonass.* 178, and remained in subjection to *Babylon* forty years, *Jer.* xliv. 30. & *Ezek.* xxix. 12, 13, 14, 17, 19. that is, almost all the Reign of *Amasis*, a plebeian set over *Egypt* by the conqueror: the forty years ended with the death of *Cyrus*; for he Reigned over *Egypt* and *Ethiopia*, according to *Xenophon*. At that time therefore those nations recovered their liberty; but after four or five years more they were invaded and conquered by *Cambyses*, *Anno Nabonass.* 223 or 224, and have almost ever since remained in servitude, as was predicted by the Prophets.

The Reigns of *Psammitichus*, *Nechus*, *Psammis*, *Apries*, *Amasis*, and *Psammenitus*, set down by *Herodotus*, amount unto 146½ years: and so many years there were from the 78th year of *Nabonassar*, in which the dominion of the *Ethiopians* over *Egypt* came to an end, unto the 224th year of *Nabonassar*, in which *Cambyses* invaded *Egypt*, and put an end to that Kingdom: which is an argument that *Herodotus* was circumspect and faithful in his narrations, and has given us a good account of the antiquities of *Egypt*, so far as the Priests of *Egypt* at *Thebes*, *Memphis*, and *Heliopolis*,

and the *Carians* and *Ionians* inhabiting *Egypt*, were then able to inform him: for he consulted them all; and the *Cares* and *Ionians* had been in *Egypt* from the time of the Reign of the twelve contemporary Kings.

Pliny [342]* tells us, that the *Egyptian* Obelisks were of a sort of stone dug near *Syene* in *Thebais*, and that the first Obelisk was made by *Mitres*, who Reigned in *Heliopolis*; that is, by *Mephres* the predecessor of *Misphragmuthosis*; and that afterwards other Kings made others: *Sochis*, that is *Sesochis*, or *Sesac*, four, each of 48 cubits in length; *Ramises*, that is *Ramesses*, two; *Smarres*, that is *Mœris*, one of 48 cubits in length; *Eraphius*, or *Hophra*, one of 48; and *Nectabis*, or *Nectenabis*, one of 80. *Mephres* therefore extended his dominion over all the upper *Egypt*, from *Syene* to *Heliopolis*, and after him, *Misphragmuthosis* and *Amosis*, Reigned *Ammon* and *Sesac*, who erected the first great Empire in the world: and these four, *Amosis*, *Ammon*, *Sesac*, and *Orus*, Reigned in the four ages of the great Gods of *Egypt*; and *Amenophis* was the *Menes* who Reigned next after them: he was Succeeded by *Ramesses*, and *Mœris*, and some time after by *Hophra*.

Diodorus [343]* recites the same Kings of *Egypt* with *Herodotus*, but in a more confused order, and repeats some of them twice, or oftener, under various names, and omits others: his Kings are these; *Jupiter Ammon* and *Juno*, *Osiris* and *Isis*, *Horus*, *Menes*, *Busiris* I, *Busiris* II, *Osymanduas*, *Uchoreus*, *Myris*, *Sesoosis* I, *Sesoosis* II, *Amasis*, *Actisanes*, *Mendes* or *Marrus*, *Proteus*, *Remphis*, *Chembis*, *Cephren*, *Mycerinus* or *Cherinus*, *Gnephacthus*, *Bocchoris*, *Sabacon*, twelve contemporary Kings, *Psammitichus*, * * *Apries*, *Amasis*. Here I take *Sesoosis* I, and *Sesoosis* II, *Busiris* I, and *Busiris* II, to be the same Kings with *Osiris* and *Orus*: also *Osymanduas* to be the same with *Amenophis* or *Menes*: also *Amasis*, and *Actisanes*, an *Ethiopian* who conquered him, to be the same with *Anysis* and *Sabacon* in *Herodotus*: and *Uchoreus*, *Mendes*, *Marrus*, and *Myris*, to be only several names of one and the same King. Whence the catalogue of *Diodorus* will be reduced to this: *Jupiter Ammon* and *Juno*; *Osiris*, *Busiris* or *Sesoosis*, and *Isis*; *Horus*, *Busiris* II, or *Sesoosis* II; *Menes*, or *Osymanduas*; *Proteus*; *Remphis* or *Ramesses*; *Uchoreus*, *Mendes*, *Marrus*, or *Myris*; *Chembis* or *Cheops*; *Cephren*; *Mycerinus*; * * *Gnephacthus*; *Bocchoris*; *Amasis*, or *Anysis*; *Actisanes*, or *Sabacon*; * twelve

contemporary Kings; *Psammitichus*; * * *Apries*; *Amasis*: to which, if in their proper places you add *Nitocris*, *Asychis*, *Sethon*, *Nechus*, and *Psammis,* you will have the catalogue of *Herodotus*.

The Dynasties of *Manetho* and *Eratosthenes* seem to be filled with many such names of Kings as *Herodotus* omitted: when it shall be made appear that any of them Reigned in *Egypt* after the expulsion of the Shepherds, and were different from the Kings described above, they may be inserted in their proper places.

Egypt was conquered by the *Ethiopians* under *Sabacon*, about the beginning of the *Æra* of *Nabonassar*, or perhaps three or four years before, that is, about three hundred years before *Herodotus* wrote his history; and about eighty years after that conquest, it was conquered again by the *Assyrians* under *Asserhadon*: and the history of *Egypt* set down by *Herodotus* from the time of this last conquest, is right both as to the number, and order, and names of the Kings, and as to the length of their Reigns: and therein he is now followed by historians, being the only author who hath given us so good a history of *Egypt*, for that interval of time. If his history of the earlier times be less accurate, it was because the archives of *Egypt* had suffered much during the Reign of the *Ethiopians* and *Assyrians*: and it is not likely that the Priests of *Egypt*, who lived two or three hundred years after the days of *Herodotus*, could mend the matter: on the contrary, after *Cambyses* had carried away the records of *Egypt*, the Priests were daily feigning new Kings, to make their Gods and nation look ancient; as is manifest by comparing *Herodotus* with *Diodorus Siculus*, and both of them with what *Plato* relates out of the Poem of *Solon*: which Poem makes the wars of the great Gods of *Egypt* against the *Greeks*, to have been in the days of *Cecrops*, *Erechtheus* and *Erichthonius*, and a little before those of *Theseus*; these Gods at that time instituting Temples and Sacred Rites to themselves. I have therefore chosen to rely upon the stories related to *Herodotus* by the Priests of *Egypt* in those days, and corrected by the Poem of *Solon*, so as to make these Gods of *Egypt* no older than *Cecrops* and *Erechtheus*, and their successor *Menes* no older than *Theseus* and *Memnon*, and the Temple of *Vulcan* not above 280 years in building: rather than to correct *Herodotus* by *Manetho*, *Eratosthenes*, *Diodorus*, and others, who lived after the Priests of *Egypt* had corrupted their Antiquities much more than they had done in the days of *Herodotus*.

CHAP. III.

Of the ASSYRIAN *Empire.*

As the Gods or ancient Deified Kings and Princes of *Greece*, *Egypt*, and *Syria* of *Damascus*, have been made much ancienter than the truth, so have those of *Chaldæa* and *Assyria*: for *Diodorus* [344]* tells us, that when *Alexander* the great was in *Asia*, the *Chaldæans* reckoned 473000 years since they first began to observe the Stars; and *Ctesias*, and the ancient *Greek* and *Latin* writers who copy from him, have made the *Assyrian* Empire as old as *Noah*'s flood within 60 or 70 years, and tell us the names of all the Kings of *Assyria* downwards, from *Belus* and his feigned son *Ninus*, to *Sardanapalus* the last King of that Monarchy: but the names of his Kings, except two or three, have no affinity with the names of the *Assyrians* mentioned in Scripture; for the *Assyrians* were usually named after their Gods, *Bel* or *Pul*; *Chaddon*, *Hadon*, *Adon*, or *Adonis*; *Melech* or *Moloch*; *Atsur* or *Assur*; *Nebo*; *Nergal*; *Merodach*: as in these names, *Pul*, *Tiglath-Pul-Assur*, *Salman-Assur*, *Adra-Melech*, *Shar-Assur*, *Assur-Hadon*, *Sardanapalus* or *Assur-Hadon-Pul*, *Nabonassar* or *Nebo-Adon-Assur*, *Bel Adon*, *Chiniladon* or *Chen-El-Adon*, *Nebo-Pul-Assur*, *Nebo-Chaddon-Assur*, *Nebuzaradon* or *Nebo-Assur-Adon*, *Nergal-Assur*, *Nergal-Shar-Assur*, *Labo-Assur-dach*, *Sheseb-Assur*, *Beltes-Assur*, *Evil-Merodach*, *Shamgar-Nebo*, *Rabsaris* or *Rab-Assur*, *Nebo-Shashban*, *Mardocempad* or *Merodach-Empad*. Such were the *Assyrian* names; but those in *Ctesias* are of another sort, except *Sardanapalus*, whose name he had met with in *Herodotus*. He makes *Semiramis* as old as the first *Belus*; but *Herodotus* tells us, that she was but five Generations older than the mother of *Labynetus*: he represents that the city *Ninus* was founded by a man of the same name, and *Babylon* by *Semiramis*; whereas either *Nimrod* or *Assur* founded those and other cities, without giving his own name to any of them: he makes the *Assyrian* Empire continue about 1360 years, whereas *Herodotus* tells us that it lasted only 500 years, and the numbers of *Herodotus* concerning those ancient times are all of them too long: he makes *Nineveh* destroyed by the *Medes* and *Babylonians*, three hundred

years before the Reign of *Astibares* and *Nebuchadnezzar* who destroyed it, and sets down the names of seven or eight feigned Kings of *Media*, between the destruction of *Nineveh* and the Reigns of *Astibares* and *Nebuchadnezzar*, as if the Empire of the *Medes*, erected upon the ruins of the *Assyrian* Empire, had lasted 300 years, whereas it lasted but 72: and the true Empire of the *Assyrians* described in Scripture, whose Kings were *Pul*, *Tiglath-pilesar*, *Shalmaneser*, *Sennacherib*, *Asserhadon*, &c. he mentions not, tho' much nearer to his own times; which shews that he was ignorant of the antiquities of the *Assyrians*. Yet something of truth there is in the bottom of some of his stories, as there uses to be in Romances; as, that *Nineveh* was destroyed by the *Medes* and *Babylonians*; that *Sardanapalus* was the last King of the *Assyrian* Empire; and that *Astibares* and *Astyages* were Kings of the *Medes*: but he has made all things too ancient, and out of vainglory taken too great a liberty in feigning names and stories to please his reader.

When the *Jews* were newly returned from the *Babylonian* captivity, they confessed their Sins in this manner, *Now therefore our God, —— let not all the trouble seem little before thee that hath come upon us, on our Kings, on our Princes, and on our Priests, and on our Prophets, and on our fathers, and on all thy people, since the time of the Kings of* Assyria*, unto this day*; *Nehem.* ix. 32. that is, since the time of the Kingdom of *Assyria*, or since the rise of that Empire; and therefore the *Assyrian* Empire arose when the Kings of *Assyria* began to afflict the inhabitants of *Palestine*; which was in the days of *Pul*: he and his successors afflicted *Israel*, and conquered the nations round about them; and upon the ruin of many small and ancient Kingdoms erected their Empire, conquering the *Medes* as well as other nations: but of these conquests *Ctesias* knew not a word, no not so much as the names of the conquerors, or that there was an *Assyrian* Empire then standing; for he supposes that the *Medes* Reigned at that time, and that the *Assyrian* Empire was at an end above 250 years before it began.

However we must allow that *Nimrod* founded a Kingdom at *Babylon*, and perhaps extended it into *Assyria*: but this Kingdom was but of small extent, if compared with the Empires which rose up afterwards; being only within the fertile plains of *Chaldæa*, *Chalonitis* and *Assyria*, watered by the *Tigris* and *Euphrates*: and if it had been greater, yet it was but of short continuance, it being the custom in those early ages for every father to divide his territories amongst his sons. So *Noah* was King of all the world,

and *Cham* was King of all *Afric*, and *Japhet* of all *Europe* and *Asia minor*; but they left no standing Kingdoms. After the days of *Nimrod*, we hear no more of an *Assyrian* Empire 'till the days of *Pul*. The four Kings who in the days of *Abraham* invaded the southern coast of *Canaan* came from the countries where *Nimrod* had Reigned, and perhaps were some of his posterity who had shared his conquests. In the time of the Judges of *Israel*, *Mesopotamia* was under its own King, *Judg.* iii. 8. and the King of *Zobah* Reigned on both sides of the River *Euphrates* 'till *David* conquered him, 2 *Sam.* viii, and x. The Kingdoms of *Israel*, *Moab*, *Ammon*, *Edom*, *Philistia*, *Zidon*, *Damascus*, and *Hamath* the great, continued subject to other Lords than the *Assyrians* 'till the days of *Pul* and his successors; and so did the house of *Eden*, *Amos* i. 5. 2 *Kings* xix. 12. and *Haran* or *Carrhæ*, *Gen.* xii. 2 *Kings* xix. 12. and *Sepharvaim* in *Mesopotamia*, and *Calneh* near *Bagdad*, *Gen.* x. 10, *Isa.* x. 9, 2 *Kings* xvii. 31. *Sesac* and *Memnon* were great conquerors, and Reigned over *Chaldæa*, *Assyria*, and *Persia*, but in their histories there is not a word of any opposition made to them by an *Assyrian* Empire then standing: on the contrary, *Susiana*, *Media*, *Persia*, *Bactria*, *Armenia*, *Cappadocia*, &c. were conquered by them, and continued subject to the Kings of *Egypt* 'till after the long Reign of *Ramesses* the son of *Memnon*, as above.

Homer mentions *Bacchus* and *Memnon* Kings of *Egypt* and *Persia*, but knew nothing of an *Assyrian* Empire. *Jonah* prophesied when *Israel* was in affliction under the King of *Syria*, and this was in the latter part of the Reign of *Jehoahaz*, and first part of the Reign of *Joash*, Kings of *Israel*, and I think in the Reign of *Mœris* the successor of *Ramesses* King of *Egypt*, and about sixty years before the Reign of *Pul*; and *Nineveh* was then a city of large extent, but full of pastures for cattle, so that it contained but about 120000 persons. It was not yet grown so great and potent as not to be terrified at the preaching of *Jonah*, and to fear being invaded by its neighbours and ruined within forty days: it had some time before got free from the dominion of *Egypt*, and had got a King of its own; but its King was not yet called King of *Assyria*, but only King of *Nineveh*, *Jonah* iii. 6, 7. and his proclamation for a fast was not published in several nations, nor in all *Assyria*, but only in *Nineveh*, and perhaps in the villages thereof; but soon after, when the dominion of *Nineveh* was established at home, and exalted over all *Assyria* properly so called, and this Kingdom began to

make war upon the neighbouring nations, its Kings were no longer called Kings of *Nineveh* but began to be called Kings of *Assyria*.

Amos prophesied in the Reign of *Jeroboam* the Son of *Joash* King of *Israel*, soon after *Jeroboam* had subdued the Kingdoms of *Damascus* and *Hamath*, that is, about ten or twenty years before the Reign of *Pul*: and he [345]* thus reproves *Israel* for being lifted up by those conquests; *Ye which rejoyce in a thing of nought, which say, have we not taken to us horns by our strength? But behold I will raise up against you a nation, O house of* Israel*, saith the Lord the God of Hosts, and they shall afflict you from the entring in of* Hamath *unto the river of the wilderness*. God here threatens to raise up a nation against *Israel*; but what nation he names not; that he conceals 'till the *Assyrians* should appear and discover it. In the prophesies of *Isaiah*, *Jeremiah*, *Ezekiel*, *Hosea*, *Micah*, *Nahum*, *Zephaniah* and *Zechariah*, which were written after the Monarchy grew up, it is openly named upon all occasions; but in this of *Amos* not once, tho' the captivity of *Israel* and *Syria* be the subject of the prophesy, and that of *Israel* be often threatned: he only saith in general that *Syria* should go into captivity unto *Kir*, and that *Israel*, notwithstanding her present greatness, should go into captivity beyond *Damascus*; and that God would raise up a nation to afflict them: meaning that he would raise up above them from a lower condition, a nation whom they yet feared not: for so the *Hebrew* word מקם signifies when applied to men, as in *Amos* v. 2. 1 *Sam.* xii. 11. *Psal.* cxiii. 7. *Jer.* x. 20. l. 32. *Hab.* i. 6. *Zech.* xi. 16. As *Amos* names not the *Assyrians*; at the writing of this prophecy they made no great figure in the world, but were to be raised up against *Israel*, and by consequence rose up in the days of *Pul* and his successors: for after *Jeroboam* had conquered *Damascus* and *Hamath*, his successor *Menahem* destroyed *Tiphsah* with its territories upon *Euphrates*, because they opened not to him: and therefore *Israel* continued in its greatness 'till *Pul*, probably grown formidable by some victories, caused *Menahem* to buy his peace. *Pul* therefore Reigning presently after the prophesy of *Amos*, and being the first upon record who began to fulfill it, may be justly reckoned the first conqueror and founder of this Empire. For *God stirred up the spirit of* Pul*, and the spirit of* Tiglath-pileser *King of* Assyria, 1 *Chron.* v. 20.

The same Prophet *Amos*, in prophesying against *Israel*, threatned them in this manner, with what had lately befallen other Kingdoms: *Pass ye*, [346]* saith he, *unto* Calneh *and see, and from thence go ye to* Hamath *the great, then go down to* Gath *of the* Philistims. *Be they better than these Kingdoms?* These Kingdoms were not yet conquered by the *Assyrians*, except that of *Calneh* or *Chalonitis* upon *Tigris*, between *Babylon* and *Nineveh*. *Gath* was newly vanquished [347]* by *Uzziah* King of *Judah*, and *Hamath* [348]* by *Jeroboam* King of *Israel*: and while the Prophet, in threatning *Israel* with the *Assyrians*, instances in desolations made by other nations, and mentions no other conquest of the *Assyrians* than that of *Chalonitis* near *Nineveh*; it argues that the King of *Nineveh* was now beginning his conquests, and had not yet made any great progress in that vast career of victories, which we read of a few years after.

For about seven years after the captivity of the ten Tribes, when *Sennacherib* warred in *Syria*, which was in the 16th Olympiad, he [349]* sent this message to the King of *Judah*: *Behold, thou hast heard that the Kings of* Assyria *have done to all Lands by destroying them utterly, and shalt thou be delivered? Have the Gods of the nations delivered them which the Gods of my fathers have destroyed, as* Gozan *and* Haran *and* Reseph*, and the children of* Eden *which were in* [the Kingdom of] Thelasar*? Where is the King of* Hamath*, and the King of* Arpad*, and the King of the city of* Sepharvaim*, and of* Hena *and* Ivah? And *Isaiah* [350]* thus introduceth the King of *Assyria* boasting: *Are not my Princes altogether as Kings? Is not* Calno [or *Calneh*] *as* Carchemish*? Is not* Hamath *as* Arpad*? Is not* Samaria *as* Damascus*? As my hand hath found the Kingdoms of the Idols, and whose graven Images did excel them of* Jerusalem *and of* Samaria*; shall I not as I have done unto* Samaria *and her Idols, so do to* Jerusalem *and her Idols?* All this desolation is recited as fresh in memory to terrify the *Jews*, and these Kingdoms reach to the borders of *Assyria*, and to shew the largeness of the conquests they are called *all lands*, that is, all round about *Assyria*. It was the custom of the Kings of *Assyria*, for preventing the rebellion of people newly conquered, to captivate and transplant those of several countries into one another's lands, and intermix them variously: and thence it appears [351]* that *Halah*, and *Habor*, and *Hara*, and *Gozan*, and the cities of the *Medes* into which *Galilee* and *Samaria* were transplanted; and *Kir*

into which *Damascus* was transplanted; and *Babylon* and *Cuth* or the *Susanchites*, and *Hamath*, and *Ava*, and *Sepharvaim*, and the *Dinaites*, and the *Apharsachites*, and the *Tarpelites*, and the *Archevites*, and the *Dehavites*, and the *Elamites*, or *Persians*, part of all which nations were led captive by *Asserhadon* and his predecessors into *Samaria*; were all of them conquered by the *Assyrians* not long before.

In these conquests are involved on the west and south side of *Assyria*, the Kingdoms of *Mesopotamia*, whose royal seats were *Haran* or *Carrhæ*, and *Carchemish* or *Circutium*, and *Sepharvaim*, a city upon *Euphrates*, between *Babylon* and *Nineveh*, called *Sipparæ* by *Berosus*, *Abydenus*, and *Polyhistor*, and *Sipphara* by *Ptolomy*; and the Kingdoms of *Syria* seated at *Samaria*, *Damascus*, *Gath*, *Hamath*, *Arpad*, and *Reseph*, a city placed by *Ptolomy* near *Thapsacus*: on the south side and south east side were *Babylon* and *Calneh*, or *Calno*, a city which was founded by *Nimrod*, where *Bagdad* now stands, and gave the name of *Chalonitis* to a large region under its government; and *Thelasar* or *Talatha*, a city of the children of *Eden*, placed by *Ptolomy* in *Babylonia*, upon the common stream of *Tigris* and *Euphrates*, which was therefore the river of Paradise; and the *Archevites* at *Areca* or *Erech*, a city built by *Nimrod* on the east side of *Pasitigris*, between *Apamia* and the *Persian Gulph*; and the *Susanchites* at *Cuth*, or *Susa*, the metropolis of *Susiana*: on the east were *Elymais*, and some cities of the *Medes*, and *Kir*, [352]* a city and large region of *Media*, between *Elymais*, and *Assyria*, called *Kirene* by the *Chaldee* Paraphrast and *Latin* Interpreter, and *Carine* by *Ptolomy*: on the north-east were *Habor* or *Chaboras*, a mountainous region between *Assyria* and *Media*; and the *Apharsachites*, or men of *Arrapachitis*, a region originally peopled by *Arphaxad*, and placed by *Ptolomy* at the bottom of the mountains next *Assyria*: and on the north between *Assyria* and the *Gordiæan* mountains was *Halah* or *Chalach*, the metropolis of *Calachene*: and beyond these upon the *Caspian* sea was *Gozan*, called *Gauzania* by *Ptolomy*. Thus did these new conquests extend every way from the province of *Assyria* to considerable distances, and make up the great body of that Monarchy: so that well might the King of *Assyria* boast how his armies had destroyed all lands. All these nations [353]* had ‘till now their several Gods, and each accounted his God the God of his own land, and the defender thereof, against the Gods of the

neighbouring countries, and particularly against the Gods of *Assyria*; and therefore they were never ‘till now united under the *Assyrian* Monarchy, especially since the King of *Assyria* doth not boast of their being conquered by the *Assyrians* oftner than once: but these being small Kingdoms the King of *Assyria* easily overflowed them: *Know ye not*, saith [354]* *Sennacherib* to the *Jews*, *what I and my fathers have done unto all the People of other lands? — for no God of any nation or kingdom was able to deliver his people out of mine hand, and out of the hand of my fathers: how much less shall your God deliver you out of mine hand?* He and his fathers therefore, *Pul*, *Tiglath-pileser*, and *Shalmaneser*, were great conquerors, and with a current of victories had newly overflowed all nations round about *Assyria*, and thereby set up this Monarchy.

Between the Reigns of *Jeroboam* II, and his son *Zachariah*, there was an interregnum of about ten or twelve years in the Kingdom of *Israel*: and the prophet *Hosea* [355]* in the time of that interregnum, or soon after, mentions the King of *Assyria* by the name of *Jareb*, and another conqueror by the name of *Shalman*; and perhaps *Shalman* might be the first part of the name of *Shalmaneser*, and *Iareb*, or *Irib*, for it may be read both ways, the last part of the name of his successor *Sennacherib*: but whoever these Princes were, it appears not that they Reigned before *Shalmaneser*. *Pul*, or *Belus*, seems to be the first who carried on his conquests beyond the province of *Assyria*: he conquered *Calneh* with its territories in the Reign of *Jerboam*, *Amos* i. 1. vi. 2. & *Isa.* x. 8, 9. and invaded *Israel* in the Reign of *Menahem*, 2 *King.* xv. 19. but stayed not in the land, being bought off by *Menahem* for a thousand talents of silver: in his Reign therefore the Kingdom of *Assyria* was advanced on this side *Tigris*: for he was a great warrior, and seems to have conquered *Haran*, and *Carchemish*, and *Reseph*, and *Calneh*, and *Thelasar*, and might found or enlarge the city of *Babylon*, and build the old palace.

Herodotus tells us, that one of the gates of *Babylon* was [356]* called the gate of *Semiramis*, and than she adorned the walls of the city, and the Temple of *Belus*, and that she [357]* was five Generations older than *Nitocris* the mother of *Labynitus*, or *Nabonnedus*, the last King of *Babylon*; and therefore she flourished four Generations, or about 134 years, before *Nebuchadnezzar* , and by consequence in the Reign of *Tiglath-pileser* the

successor of *Pul*: and the followers of *Ctesias* tell us, that she built *Babylon*, and was the widow of the son and successor of *Belus*, the founder of the *Assyrian* Empire; that is, the widow of one of the sons of *Pul*: but [358]* *Berosus* a *Chaldæan* blames the *Greeks* for ascribing the building of *Babylon* to *Semiramis*; and other authors ascribe the building of this city to *Belus* himself, that is to *Pul*; so *Curtius* [359]* tells us; *Semiramis Babylonem condiderat, vel ut plerique credidere Belus, cujus regia ostenditur*: and *Abydenus*, who had his history from the ancient monuments of the *Chaldæans*, writes, [360]* Λεγεται Βηλον Βαβυλωνα τειχει περιβαλειν· τωι χρονωι δε τωι ικνευμενωι αφανισθηναι. τειχισαι δε αυθις Ναβουχοδονοσορον, το μεχρι της Μακεδονιων αρχης διαμειναν εον χαλκοπυλον. *'Tis reported that* Belus *compassed* Babylon *with a wall, which in time was abolished: and that* Nebuchadnezzar *afterwards built a new wall with brazen gates, which stood 'till the time of the* Macedonian *Empire*: and so *Dorotheas* [361]* an ancient Poet of *Sidon*;

Αρχαιη Βαβυλων, Τυριου Βηλοιο πολισμα.

The ancient city Babylon *built by the* Tyrian Belus;

That is, by the *Syrian* or *Assyrian Belus*; the words *Tyrian*, *Syrian*, and *Assyrian*, being anciently used promiscuously for one another: *Herennius* [362]* tells us, that it was built by the son of *Belus*; and this son might be *Nabonassar*. After the conquest of *Calneh*, *Thelasar*, and *Sippare*, *Belus* might seize *Chaldæa*, and begin to build *Babylon*, and leave it to his younger son: for all the Kings of *Babylon* in the Canon of *Ptolemy* are called *Assyrians*, and *Nabonassar* is the first of them: and *Nebuchadnezzar* [363]* reckoned himself descended from *Belus*, that is, from the *Assyrian Pul*: and the building of *Babylon* is ascribed to the *Assyrians* by [364]* *Isaiah*: *Behold*, saith he, *the land of the* Chaldeans*: This people was not 'till the* Assyrian *founded it for them that dwell in the wilderness,* [that is, for the *Arabians*.] *They set up the towers thereof, they raised up the palaces thereof*. From all this it seems therefore that *Pul* founded the walls and the palaces of *Babylon*, and left the city with the province of *Chaldæa* to his younger son *Nabonassar*; and that *Nabonassar* finished what his father began, and erected the Temple of *Jupiter Belus* to his father: and that *Semiramis* lived in those days, and was the Queen of *Nabonassar*, because one of the gates of *Babylon* was called the gate of *Semiramis*, as *Herodotus*

affirms: but whether she continued to Reign there after her husband's death may be doubted.

Pul therefore was succeeded at *Nineveh* by his elder son *Tiglath-pileser*, at the same time that he left *Babylon* to his younger son *Nabonassar*. *Tiglath-pileser*, the second King of *Assyria*, warred in *Phœnicia*, and captivated *Galilee* with the two Tribes and an half, in the days of *Pekah* King of *Israel*, and placed them in *Halah*, and *Habor*, and *Hara*, and at the river *Gozan*, places lying on the western borders of *Media*, between *Assyria* and the *Caspian* sea, 2 *King.* xv. 29, &: 1 *Chron.* v. 26. and about the fifth or sixth year of *Nabonassar*, he came to the assistance of the King of *Judah* against the Kings of *Israel* and *Syria*, and overthrew the Kingdom of *Syria*, which had been seated at *Damascus* ever since the days of King *David*, and carried away the *Syrians* to *Kir* in *Media*, as *Amos* had prophesied, and placed other nations in the regions of *Damascus*, 2 *King.* xv. 37, & xvi. 5, 9. *Amos* i. 5. *Joseph. Antiq.* l. 9. c. 13. whence it seems that the *Medes* were conquered before, and that the Empire of the *Assyrians* was now grown great: for *the God of* Israel *stirred up the spirit of* Pul *King of* Assyria*, and the spirit of* Tiglath-pileser *King of* Assyria to make war, 1 *Chron.* v. 26.

Shalmaneser or *Salmanasser*, called *Enemessar* by *Tobit*, invaded [365]* all *Phœnicia*, took the city of *Samaria*, and captivated *Israel*, and placed them in *Chalach* and *Chabor*, by the river *Gozan*, and in the cities of the *Medes*; and *Hosea* [366]* seems to say that he took *Arbela*: and his successor *Sennacherib* said that his fathers had conquered also *Gozan*, and *Haran* or *Carrhæ*, and *Reseph* or *Resen*, and the children of *Eden*, and *Arpad* or the *Aradii*, 2 *King.* xix. 12.

Sennacherib the son of *Shalmaneser* in the 14th year of *Hezekiah* invaded *Phœnicia*, and took several cities of *Judah*, and attempted *Egypt*; and *Sethon* or *Sevechus* King of *Egypt* and *Tirhakah* King of *Ethiopia* coming against him, he lost in one night 185000 men, as some say by a plague, or perhaps by lightning, or a fiery wind which blows sometimes in the neighbouring deserts, or rather by being surprised by *Sethon* and *Tirhakah*: for the *Egyptians* in memory of this action erected a statue to *Sethon*, holding in his hand a mouse, the *Egyptian* symbol of destruction. Upon this defeat *Sennacherib* returned in haste to *Nineveh*, and [367]* his Kingdom became troubled, so that *Tobit* could not go into *Media*, the *Medes*

I think at this time revolting: and he was soon after slain by two of his sons who fled into *Armenia*, and his son *Asserhadon* succeeded him. At that time did *Merodach Baladan* or *Mardocempad* King of *Babylon* send an embassy to *Hezekiah* King of *Judah*.

Asserhadon, [368]* called *Sarchedon* by *Tobit*, *Asordan* by the LXX, and *Assaradin* in *Ptolomy*'s Canon, began his Reign at *Nineveh*, in the year of *Nabonassar* 42; and in the year 68 extended it over *Babylon*: then he carried the remainder of the *Samaritans* into captivity, and peopled *Samaria* with captives brought from several parts of his Kingdom, the *Dinaites*, the *Apharsachites*, the *Tarpelites*, the *Apharsites*, the *Archevites*, the *Babylonians*, the *Susanchites*, the *Dehavites*, the *Elamites*, *Ezra* iv. 2, 9. and therefore he Reigned over all these nations. *Pekah* and *Rezin* Kings of *Samaria* and *Damascus*, invaded *Judæa* in the first year of *Ahaz*, and within 65 years after, that is in the 21st year of *Manasseh*, *Anno Nabonass.* 69, *Samaria* by this captivity ceased to be a people, *Isa.* vii. 8. Then *Asserhadon* invaded *Judæa*, took *Azoth*, carried *Manasseh* captive to *Babylon*, and [369]* captivated also *Egypt*, *Thebais*, and *Ethiopia* above *Thebais*: and by this war he seems to have put an end to the Reign of the *Ethiopians* over *Egypt*, in the year of *Nabonassar* 77 or 78.

In the Reign of *Sennacherib* and *Asserhadon*, the *Assyrian* Empire seems arrived at its greatness, being united under one Monarch, and containing *Assyria*, *Media*, *Apolloniatis*, *Susiana*, *Chaldæa*, *Mesopotamia*, *Cilicia*, *Syria*, *Phœnicia*, *Egypt*, *Ethiopia*, and part of *Arabia*, and reaching eastward into *Elymais*, and *Parætacene*, a province of the *Medes*: and if *Chalach* and *Chabor* be *Colchis* and *Iberia*, as some think, and as may seem probable from the circumcision used by those nations 'till the days of *Herodotus*, we are also to add these two Provinces, with the two *Armenia's*, *Pontus* and *Cappadocia*, as far as to the river *Halys*: for [370]* *Herodotus* tells us, that the people of *Cappadocia* as far as to that river were called *Syrians* by the *Greeks*, both before and after the days or *Cyrus*, and that the *Assyrians* were also called *Syrians* by the *Greeks*.

Yet the *Medes* revolted from the *Assyrians* in the latter end of the Reign of *Sennacherib*, I think upon the slaughter of his army near *Egypt* and his flight to *Nineveh*: for at that time the estate of *Sennacherib* was troubled, so that *Tobit* could not go into *Media* as he had done before, *Tobit* i. 15. and

some time after, *Tobit* advised his son to go into *Media* where he might expect peace, while *Nineveh*, according to the prophesy of *Jonah*, should be destroyed. *Ctesias* wrote that *Arbaces* a *Mede* being admitted to see *Sardanapalus* in his palace, and observing his voluptuous life amongst women, revolted with the *Medes*, and in conjunction with *Belesis* a *Babylonian* overcame him, and caused him to set fire to his palace and burn himself: but he is contradicted by other authors of better credit; for *Duris* and [371]* many others wrote that *Arbaces* upon being admitted into the palace of *Sardanapalus*, and seeing his effeminate life, slew himself; and *Cleitarchus*, that *Sardanapalus* died of old age, after he had lost his dominion over *Syria*: he lost it by the revolt of the western nations; and *Herodotus* [372]* tells us, that the *Medes* revolted first, and defended their liberty by force of arms against the *Assyrians*, without conquering them; and at their first revolting had no King, but after some time set up *Dejoces* over them, and built *Ecbatane* for his residence; and that *Dejoces* Reigned only over *Media*, and had a peaceable Reign of 54 years, but his son and successor *Phraortes* made war upon his neighbours, and conquered *Persia*; and that the *Syrians* also, and other western nations, at length revolted from the *Assyrians*, being encouraged thereunto by the example of the *Medes*; and that after the revolt of the western nations, *Phraortes* invaded the *Assyrians*, but was slain by them in that war, after he had Reigned twenty and two years. He was succeeded by *Astyages*.

Now *Asserhadon* seems to be the *Sardanapalus* who died of old age after the revolt of *Syria*, the name *Sardanapalus* being derived from *Asserhadon-Pul*. *Sardanapalus* was the [373]* son of *Anacyndaraxis*, *Cyndaraxis*, or *Anabaxaris*, King of *Assyria*; and this name seems to have been corruptly written for *Sennacherib* the father of *Asserhadon*. *Sardanapalus* built *Tarsus* and *Anchiale* in one day, and therefore Reigned over *Cilicia*, before the revolt of the western nations: and if he be the same King with *Asserhadon*, he was succeeded by *Saosduchinus* in the year of *Nabonassar* 81; and by this revolution *Manasseh* was set at liberty to return home and fortify *Jerusalem*: and the *Egyptians* also, after the *Assyrians* had harrassed *Egypt* and *Ethiopia* three years, *Isa.* xx. 3, 4. were set at liberty, and continued under twelve contemporary Kings of their own nation, as above. The *Assyrians* invaded and conquered the *Egyptians* the first of the three

years, and Reigned over them two years more: and these two years are the interregnum which *Africanus*, from *Manetho*, places next before the twelve Kings. The *Scythians* of *Touran* or *Turquestan* beyond the river *Oxus* began in those days to infest *Persia*, and by one of their inroads might give occasion to the revolt of the western nations.

In the year of *Nabonassar* 101, *Saosduchinus*, after a Reign of twenty years, was succeeded at *Babylon* by *Chyniladon*, and I think at *Nineveh* also, for I take *Chyniladon* to be that *Nabuchodonosor* who is mentioned in the book of *Judith*; for the history of that King suits best with these times: for there it is said that Nabuchodonosor *King of the* Assyrians *who Reigned at* Nineveh*, that great city, in the twelfth year of his Reign made war upon* Arphaxad *King of the* Medes, and was then left alone by a defection of the auxiliary nations of *Cilicia*, *Damascus*, *Syria*, *Phœnicia*, *Moab*, *Ammon*, and *Egypt*; and without their help routed the army of the *Medes*, and slew *Arphaxad*: and *Arphaxad* is there said to have built *Ecbatane* and therefore was either *Dejoces*, or his son *Phraortes*, who might finish the city founded by his father: and *Herodotus* [374]* tells the same story of a King of *Assyria*, who routed the *Medes*, and slew their King *Phraortes*; and saith that in the time of this war the *Assyrians* were left alone by the defection of the auxiliary nations, being otherwise in good condition: *Arphaxad* was therefore the *Phraortes* of *Herodotus*, and by consequence was slain near the beginning of the Reign of *Josiah*: for this war was made after *Phœnicia*, *Moab*, *Ammon*, and *Egypt* had been conquered and revolted, *Judith* i. 7, 8, 9. and by consequence after the Reign of *Asserhadon* who conquered them: it was made when the *Jews* were newly returned from captivity, *and the Vessels and Altar and Temple were sanctified after the profanation*, *Judith* iv. 3. that is soon after *Manasseh* their King had been carried captive to *Babylon* by *Asserhadon*; and upon the death of that King, or some other change in the *Assyrian* Empire, had been released with the *Jews* from that captivity, and had repaired the Altar, and restored the sacrifices and worship of the Temple, 2 *Chron.* xxxiii. 11, 16. In the *Greek* version of the book of *Judith*, chap. v. 18. it is said, that *the Temple of God was cast to the ground*; but this is not said in *Jerom*'s version; and in the *Greek* version, chap. iv. 3, and chap. xvi. 20, it is said, that *the vessels, and the altar, and the house*

were sanctified after the prophanation, and in both versions, chap. iv. 11, the Temple is represented standing.

After this war *Nabuchodonosor* King of *Assyria*, in the 13th year of his Reign, according to the version of *Jerom*, sent his captain *Holofernes* with a great army to avenge himself on all the west country; because they had disobeyed his commandment: and *Holofernes* went forth with an army of 12000 horse, and 120000 foot of *Assyrians*, *Medes* and *Persians*, and reduced *Cilicia*, *Mesopotamia*, and *Syria*, and *Damascus*, and part of *Arabia*, and *Ammon*, and *Edom*, and *Madian*, and then came against *Judæa*: and this was done when the government was in the hands of the High-Priest and Antients of *Israel*, *Judith* iv. 8. and vii. 23. and by consequence not in the Reign of *Manasseh* or *Amon*, but when *Josiah* was a child. In times of prosperity the children of *Israel* were apt to go after false Gods, and in times of affliction to repent and turn to the Lord. So *Manasseh* a very wicked King, being captivated by the *Assyrians*, repented; and being released from captivity restored the worship of the true God: So when we are told that *Josiah in the eighth year of his Reign, while he was yet young, began to seek after the God of* David *his father, and in the twelfth year of his Reign began to purge* Judah *and* Jerusalem *from Idolatry, and to destroy the High Places, and Groves, and Altars and Images of Baalim*, 2 *Chron*. xxxiv. 3. we may understand that these acts of religion were occasioned by impending dangers, and escapes from danger. When *Holofernes* came against the western nations, and spoiled them, then were the *Jews* terrified, and they fortified *Judæa*, and *cryed unto God with great fervency, and humbled themselves in sackcloth, and put ashes on their heads, and cried unto the God of* Israel *that he would not give their wives and their children and cities for a prey, and the Temple for a profanation: and the High-priest, and all the Priests put on sackcloth and ashes, and offered daily burnt offerings with vows and free gifts of the people*, *Judith* iv. and then began *Josiah* to seek after the God of his father *David*: and after *Judith* had slain *Holofernes*, and the *Assyrians* were fled, and the *Jews* who pursued them were returned to *Jerusalem*, *they worshipped the Lord, and offered burnt offerings and gifts, and continued feasting before the sanctuary for the space of three months*, *Judith* xvi. 18, and then did *Josiah* purge *Judah* and *Jerusalem* from Idolatry. Whence it seems to me that the eighth year of *Josiah* fell in with the fourteenth or fifteenth of *Nabuchodonosor*, and that

the twelfth year of *Nabuchodonosor*, in which *Phraortes* was slain, was the fifth or sixth of *Josiah*. *Phraortes* Reigned 22 years according to *Herodotus*, and therefore succeeded his father *Dejoces* about the 40th year of *Manasseh*, *Anno Nabonass.* 89, and was slain by the *Assyrians*, and succeeded by *Astyages*, *Anno Nabonass.* 111. *Dejoces* Reigned 53 years according to *Herodotus*, and these years began in the 16th year of *Hezekiah*; which makes it probable that the *Medes* dated them from the time of their revolt: and according to all this reckoning, the Reign of *Nabuchodonosor* fell in with that of *Chyniladon*; which makes it probable that they were but two names of one and the same King.

Soon after the death of *Phraortes* [375]* the *Scythians* under *Madyes* or *Medus* invaded *Media*, and beat the *Medes* in battle, *Anno Nabonass.* 113, and went thence towards *Egypt*, but were met in *Phœnicia* by *Psammitichus* and bought off, and returning Reigned over a great part of *Asia*: but in the end of about 28 years were expelled; many of their Princes and commanders being slain in a feast by the *Medes* under the conduct of *Cyaxeres*, the successor of *Astyages*, just before the destruction of *Nineveh*, and the rest being soon after forced to retire.

In the year of *Nabonassar* 123, [376]* *Nabopolassar* the commander of the forces of *Chyniladon* the King of *Assyria* in *Chaldæa* revolted from him, and became King of *Babylon*; and *Chyniladon* was either then, or soon after, succeeded at *Nineveh* by the last King of *Assyria*, called *Sarac* by *Polyhistor*: and at length *Nebuchadnezzar*, the son of *Nabopolassar*, married *Amyite* the daughter of *Astyages* and sister of *Cyaxeres*; and by this marriage the two families having contracted affinity, they conspired against the *Assyrians*; and *Nabopolasser* being now grown old, and *Astyages* being dead, their sons *Nebuchadnezzar* and *Cyaxeres* led the armies of the two nations against *Nineveh*, slew *Sarac*, destroyed the city, and shared the Kingdom of the *Assyrians*. This victory the *Jews* refer to the *Chaldæans*; the *Greeks* to the *Medes*; *Tobit*, *Polyhistor*, *Josephus*, and *Ctesias* to both. It gave a beginning to the great successes of *Nebuchadnezzar* and *Cyaxeres*, and laid the foundation of the two collateral Empires of the *Babylonians* and *Medes*; these being branches of the *Assyrian* Empire: and thence the time of the fall of the *Assyrian* Empire is determined, the conquerors being then in their youth. In the Reign of *Josiah*, when *Zephaniah* prophesied,

Nineveh and the Kingdom of *Assyria* were standing, and their fall was predicted by that Prophet, *Zeph.* i. 1, and ii. 13. and in the end of his Reign *Pharaoh Nechoh* King of *Egypt*, the successor of *Psammitichus*, went up against the King of *Assyria* to the river *Euphrates*, to fight against *Carchemish* or *Circutium*, and in his way thither slew *Josiah*, 2 *Kings* xxiii. 29. 2 *Chron.* xxxv. 20. and therefore the last King of *Assyria* was not yet slain. But in the third and fourth year of *Jehoiakim* the successor of *Josiah*, the two conquerors having taken *Nineveh* and finished their war in *Assyria*, prosecuted their conquests westward, and leading their forces against the King of *Egypt*, as an invader of their right of conquest, they beat him at *Carchemish*, and [377]* took from him whatever he had newly taken from the *Assyrians*: and therefore we cannot err above a year or two, if we refer the destruction of *Nineveh*, and fall of the *Assyrian* Empire, to the second year of *Jehoiakim*, *Anno Nabonass.* 140. The name of the last King *Sarac* might perhaps be contracted from *Sarchedon*, as this name was from *Asserhadon*, *Asserhadon-Pul*, or *Sardanapalus*.

While the *Assyrians* Reigned at *Nineveh*, *Persia* was divided into several Kingdoms; and amongst others there was a Kingdom of *Elam*, which flourished in the days of *Hezekiah*, *Manasseh*, *Josiah*, and *Jehoiakim* Kings of *Judah*, and fell in the days of *Zedekiah*, *Jer.* xxv. 25, and xlix. 34, and *Ezek.* xxxii. 24. This Kingdom seems to have been potent, and to have had wars with the King of *Touran* or *Scythia* beyond the river *Oxus* with various success, and at length to have been subdued by the *Medes* and *Babylonians*, or one of them. For while *Nebuchadnezzar* warred in the west, *Cyaxeres* recovered the *Assyrian* provinces of *Armenia*, *Pontus*, and *Cappadocia*, and then they went eastward against the provinces of *Persia* and *Parthia*. Whether the *Pischdadians*, whom the *Persians* reckon to have been their oldest Kings, were Kings of the Kingdom of *Elam*, or of that of the *Assyrians*, and whether *Elam* was conquered by the *Assyrians* at the same time with *Babylonia* and *Susiana* in the Reign of *Asserhadon*, and soon after revolted, I leave to be examined.

CHAP. IV.

Of the two Contemporary Empires of the Babylonians *and* Medes.

By the fall of the *Assyrian* Empire the Kingdoms of the *Babylonians* and *Medes* grew great and potent. The Reigns of the Kings of *Babylon* are stated in *Ptolemy's* Canon: for understanding of which you are to note that every King's Reign in that Canon began with the last *Thoth* of his predecessor's Reign, as I gather by comparing the Reigns of the *Roman* Emperors in that Canon with their Reigns recorded in years, months, and days, by other Authors: whence it appears from that Canon that *Asserhadon* died in the year of *Nabonassar* 81, *Saosduchinus* his successor in the year 101, *Chyniladon* in the year 123, *Nabopolassar* in the year 144, and *Nebuchadnezzar* in the year 187. All these Kings, and some others mentioned in the Canon, Reigned successively over *Babylon*, and this last King died in the 37th year of *Jechoniah*'s captivity, 2 *Kings* xxv. 27. and therefore *Jechoniah* was captivated in the 150th year of *Nabonassar*.

This captivity was in the eighth year of *Nebuchadnezzar*'s Reign, 2 *Kings* xxiv. 12. and eleventh of *Jehoiakim*'s: for the first year of *Nebuchadnezzar*'s Reign was the fourth of *Jehoiakim*'s, *Jer.* xxv. i. and *Jehoiakim* Reigned eleven years before this captivity, 2 *Kings* xxiii. 36. 2 *Chron.* xxxvi. 5, and *Jechoniah* three months, ending with the captivity; and the tenth year of *Jechoniah*'s captivity, was the eighteenth year of *Nebuchadnezzar*'s Reign, *Jer.* xxxii. 1. and the eleventh year of *Zedekiah*, in which *Jerusalem* was taken, was the nineteenth of *Nebuchadnezzar*, *Jer.* lii. 5, 12. and therefore *Nebuchadnezzar* began his Reign in the year of *Nabonassar* 142, that is, two years before the death of his father *Nabopolassar*, he being then made King by his father; and *Jehoiakim* succeeded his father *Josiah* in the year of *Nabonassar* 139; and *Jerusalem* was taken and the Temple burnt in the year of *Nabonassar* 160, about twenty years after the destruction of *Nineveh*.

The Reign of *Darius Hystaspis* over *Persia*, by the Canon and the consent of all Chronologers, and by several Eclipses of the Moon, began in spring in the year of *Nabonassar* 227: and *in the fourth year of King* Darius,

in the 4th day of the ninth month, which is the month Chisleu*, when the* Jews *had sent unto the house of God, saying, should I weep in the fifth month as I have done these so many years? the word of the Lord came unto* Zechariah*, saying, speak to all the people of the Land, and to the Priests, saying; when ye fasted and mourned in the fifth and seventh month even those seventy years, did ye at all fast unto me? Zech.* vii. Count backwards those seventy years in which they fasted in the fifth month for the burning of the Temple, and in the seventh for the death of *Gedaliah*; and the burning of the Temple and death of *Gedaliah*, will fall upon the fifth and seventh *Jewish* months, in the year of *Nabonassar* 160, as above.

As the *Chaldæan* Astronomers counted the Reigns of their Kings by the years of *Nabonassar*, beginning with the month *Thoth*, so the *Jews*, as their Authors tell us, counted the Reigns of theirs by the years of *Moses*, beginning every year with the month *Nisan*: for if any King began his Reign a few days before this month began, it was reckoned to him for a whole year, and the beginning of this month was accounted the beginning of the second year of his Reign; and according to this reckoning the first year of *Jehojakim* began with the month *Nisan*, *Anno Nabonass.* 139, tho' his Reign might not really begin 'till five or six months after; and the fourth year of *Jehoiakim*, and first of *Nebuchadnezzar*, according to the reckoning of the *Jews*, began with the month *Nisan*, *Anno Nabonass.* 142; and the first year of *Zedekiah* and of *Jeconiah*'s captivity, and ninth year of *Nebuchadnezzar*, began with the month *Nisan*, in the year of *Nabonassar* 150; and the tenth year of *Zedekiah*, and 18th of *Nebuchadnezzar*, began with the month *Nisan* in the year of *Nabonassar* 159. Now in the ninth year of *Zedekiah*, *Nebuchadnezzar* invaded *Judæa* and the cities thereof and in the tenth month of that year, and tenth day of the month, he and his host besieged *Jerusalem*, 2 *Kings* xxv. 1. *Jer.* xxxiv. 1, xxxix. 1, and lii. 4. From this time to the tenth month in the second year of *Darius* are just seventy years, and accordingly, *upon the 24th day of the eleventh month of the second year of* Darius*, the word of the Lord came unto* Zechariah*, — and the Angel of the Lord said, Oh Lord of Hosts, how long wilt thou not have mercy on* Jerusalem*, and on the cities of* Judah*, against which thou hast had indignation, these threescore and ten years*, *Zech.* i. 7, 12. So then the ninth year of *Zedekiah*, in which this indignation against *Jerusalem* and the cities of *Judah* began, commenced with the month *Nisan* in the year of

Nabonassar 158; and the eleventh year of *Zedekiah*, and nineteenth of *Nebuchadnezzar*, in which the city was taken and the Temple burnt, commenced with the month *Nisan* in the year of *Nabonassar* 160, as above.

By all these characters the years of *Jehoiakim*, *Zedekiah*, and *Nebuchadnezzar*, seem to be sufficiently determined, and thereby the Chronology of the *Jews* in the Old Testament is connected with that of later times: for between the death of *Solomon* and the ninth year of *Zedekiah* wherein *Nebuchadnezzar* invaded *Judæa*, and began the Siege of *Jerusalem*, there were 390 years, as is manifest both by the prophesy of *Ezekiel*, chap. iv, and by summing up the years of the Kings of *Judah*; and from the ninth year of *Zedekiah* inclusively to the vulgar *Æra* of *Christ*, there were 590 years: and both these numbers, with half the Reign of *Solomon*, make up a thousand years.

In the [378]* end of the Reign of *Josiah*, *Anno Nabonass.* 139, *Pharaoh Nechoh*, the successor of *Psammitichus*, came with a great army out of *Egypt* against the King of *Assyria*, and being denied passage through *Judæa*, beat the *Jews* at *Megiddo* or *Magdolus* before *Egypt*, slew *Josiah* their King, marched to *Carchemish* or *Circutium*, a town of *Mesopotamia* upon *Euphrates*, and took it, possest himself of the cities of *Syria*, sent for *Jehoahaz* the new King of *Judah* to *Riblah* or *Antioch*, deposed him there, made *Jehojakim* King in the room of *Josiah*, and put the Kingdom of *Judah* to tribute: but the King of *Assyria* being in the mean time besieged and subdued, and *Nineveh* destroyed by *Assuerus* King of the *Medes*, and *Nebuchadnezzar* King of *Babylon*, and the conquerors being thereby entitled to the countries belonging to the King of *Assyria*, they led their victorious armies against the King of *Egypt* who had seized part of them. For *Nebuchadnezzar*, assisted [379]* by *Astibares*, that is, by *Astivares*, *Assuerus*, *Acksweres*, *Axeres*, or *Cy-Axeres*, King of the *Medes*, in the [380]* third year of *Jehoiakim*, came with an army of *Babylonians*, *Medes*, *Syrians*, *Moabites* and *Ammonites*, to the number of 10000 chariots, and 180000 foot, and 120000 horse, and laid waste *Samaria*, *Galilee*, *Scythopolis*, and the *Jews* in *Galaaditis*, and besieged *Jerusalem*, and took King *Jehoiakim* alive, and [381]* bound him in chains for a time, and carried to *Babylon Daniel* and others of the people, and part of what Gold and Silver and Brass they found in the Temple: and in [382]* the fourth year of

Jehoiakim, which was the twentieth of *Nabopolassar*, they routed the army of *Pharaoh Nechoh* at *Carchemish*, and by pursuing the war took from the King of *Egypt* whatever pertained to him from the river of *Egypt* to the river of *Euphrates*. This King of *Egypt* is called by *Berosus*, [383]* the *Satrapa* of *Egypt*, *Cœle-Syria*, and *Phœnicia*; and this victory over him put an end to his Reign in *Cœle-Syria* and *Phœnicia*, which he had newly invaded, and gave a beginning to the Reign of *Nebuchadnezzar* there: and by the conquests over *Assyria* and *Syria* the small Kingdom of *Babylon* was erected into a potent Empire.

Whilst *Nebuchadnezzar* was acting in *Syria*, [384]* his father *Nabopolassar* died, having Reigned 21 years; and *Nebuchadnezzar* upon the news thereof, having ordered his affairs in *Syria* returned to *Babylon*, leaving the captives and his army with his servants to follow him: and from henceforward he applied himself sometimes to war, conquering *Sittacene*, *Susiana*, *Arabia*, *Edom*, *Egypt*, and some other countries; and sometimes to peace, adorning the Temple of *Belus* with the spoils that he had taken; and the city of *Babylon* with magnificent walls and gates, and stately palaces and pensile gardens, as *Berosus* relates; and amongst other things he cut the new rivers *Naarmalcha* and *Pallacopas* above *Babylon* and built the city of *Teredon*.

Judæa was now in servitude under the King of *Babylon*, being invaded and subdued in the third and fourth years of *Jehoiakim*, *and* Jehoiakim *served him three years, and then turned and rebelled*, 2 *King.* xxiv. 1. While *Nebuchadnezzar* and the army of the *Chaldæans* continued in *Syria*, *Jehojakim* was under compulsion; after they returned to *Babylon*, *Jehojakim* continued in fidelity three years, that is, during the 7th, 8th and 9th years of his Reign, and rebelled in the tenth: whereupon in the return or end of the year, that is in spring, he sent [385]* and besieged *Jerusalem*, captivated *Jeconiah* the son and successor of *Jehoiakim*, spoiled the Temple, and carried away to *Babylon* the Princes, craftsmen, smiths, and all that were fit for war: and, when none remained but the poorest of the people, made [386]* *Zedekiah* their King, and bound him upon oath to serve the King of *Babylon*: this was in spring in the end of the eleventh year of *Jehoiakim*, and beginning of the year of *Nabonassar* 150.

Zedekiah notwithstanding his oath [387]* revolted, and made a covenant with the King of *Egypt*, and therefore *Nebuchadnezzar* in the ninth year of *Zedekiah* [388]* invaded *Judæa* and the cities thereof, and in the tenth *Jewish* month of that year besieged *Jerusalem* again, and in the eleventh year of *Zedekiah*, in the 4th and 5th months, after a siege of one year and an half, took and burnt the City and Temple.

Nebuchadnezzar after he was made King by his father Reigned over *Phœnicia* and *Cœle-Syria* 45 years, and [389]* after the death of his father 43 years, and [390]* after the captivity of *Jeconiah* 37; and then was succeeded by his son *Evilmerodach*, called *Iluarodamus* in *Ptolemy*'s Canon. *Jerome* [391]* tells us, that *Evilmerodach* Reigned seven years in his father's life-time, while his father did eat grass with oxen, and after his father's restoration was put in prison with *Jeconiah* King of *Judah* 'till the death of his father, and then succeeded in the Throne. In the fifth year of *Jeconiah*'s captivity, *Belshazzar* was next in dignity to his father *Nebuchadnezzar*, and was designed to be his successor, *Baruch* i. 2, 10, 11, 12, 14, and therefore *Evilmerodach* was even then in disgrace. Upon his coming to the Throne [392]* he brought his friend and companion *Jeconiah* out of prison on the 27th day of the twelfth month; so that *Nebuchadnezzar* died in the end of winter, *Anno Nabonass.* 187.

Evilmerodach Reigned two years after his father's death, and for his lust and evil manners was slain by his sister's husband *Neriglissar*, or *Nergalassar*, *Nabonass.* 189, according to the Canon.

Neriglissar, in the name of his young son *Labosordachus*, or *Laboasserdach*, the grand-child of *Nebuchadnezzar* by his daughter, Reigned four years, according to the Canon and *Berosus*, including the short Reign of *Laboasserdach* alone: for *Laboasserdach*, according to *Berosus* and *Josephus*, Reigned nine months after the death of his father, and then for his evil manners was slain in a feast, by the conspiracy of his friends with *Nabonnedus* a *Babylonian*, to whom by consent they gave the Kingdom: but these nine months are not reckoned apart in the Canon.

Nabonnedus or *Nabonadius*, according to the Canon, began his Reign in the year of *Nabonassar* 193, Reigned seventeen years, and ended his Reign in the year of *Nabonassar* 210, being then vanquished and *Babylon* taken by *Cyrus*.

Herodotus calls this last King of *Babylon*, *Labynitus*, and says that he was the son of a former *Labynitus*, and of *Nitocris* an eminent Queen of *Babylon*: by the father he seems to understand that *Labynitus*, who, as he tells us, was King of *Babylon* when the great Eclipse of the Sun predicted by *Thales* put an end to the five years war between the *Medes* and *Lydians*; and this was the great *Nebuchadnezzar*. *Daniel* [393]* calls the last King of *Babylon*, *Belshazzar*, and saith that *Nebuchadnezzar* was his father: and *Josephus* tells us, [394]* that the last King of *Babylon* was called *Naboandel* by the *Babylonians*, and Reigned seventeen years; and therefore he is the same King of *Babylon* with *Nabonnedus* or *Labynitus*; and this is more agreeable to sacred writ than to make *Nabonnedus* a stranger to the royal line: for all *nations were to serve* Nebuchadnezzar *and his posterity, till the very time of his land should come, and many nations should serve themselves of him*, *Jer.* xxvii. 7. *Belshazzar* was born and lived in honour before the fifth year of *Jeconiah*'s captivity, which was the eleventh year of *Nebuchadnezzar*'s Reign; and therefore he was above 34 years old at the death of *Evilmerodach*, and so could be no other King than *Nabonnedus*: for *Laboasserdach* the grandson of *Nebuchadnezzar* was a child when he Reigned.

Herodotus [395]* tells us, that there were two famous Queens of *Babylon*, *Semiramis* and *Nitocris*; and that the latter was more skilful: she observing that the Kingdom of the *Medes*, having subdued many cities, and among others *Nineveh*, was become great and potent, intercepted and fortified the passages out of *Media* into *Babylonia*; and the river which before was straight, she made crooked with great windings, that it might be more sedate and less apt to overflow: and on the side of the river above *Babylon*, in imitation of the Lake of *Mœris* in *Egypt*, she dug a Lake every way forty miles broad, to receive the water of the river, and keep it for watering the land. She built also a bridge over the river in the middle of *Babylon*, turning the stream into the Lake 'till the bridge was built. *Philostratus* saith, [396]* that she made a bridge under the river two fathoms broad, meaning an arched vault over which the river flowed, and under which they might walk cross the river: he calls her Μηδεια, a *Mede*.

Berosus tells us, that *Nebuchadnezzar* built a pensile garden upon arches, because his wife was a *Mede* and delighted in mountainous prospects, such

as abounded in *Media*, but were wanting in *Babylonia*: she was *Amyite* the daughter of *Astyages*, and sister of *Cyaxeres*, Kings of the *Medes*. *Nebuchadnezzar* married her upon a league between the two families against the King of *Assyria*: but *Nitocris* might be another woman who in the Reign of her son *Labynitus*, a voluptuous and vicious King, took care of his affairs, and for securing his Kingdom against the *Medes*, did the works above mentioned. This is that Queen mentioned in *Daniel*, chap. v. ver. 10.

Josephus [397]* relates out of the *Tyrian* records, that in the Reign of *Ithobalus* King of *Tyre*, that city was besieged by *Nebuchadnezzar* thirteen years together: in the end of that siege *Ithobalus* their King was slain, *Ezek.* xxviii. 8, 9, 10. and after him, according to the *Tyrian* records, Reigned *Baal* ten years, *Ecnibalus* and *Chelbes* one year, *Abbarus* three months, *Mytgonus* and *Gerastratus* six years, *Balatorus* one year, *Merbalus* four years, and *Iromus* twenty years: and in the fourteenth year of *Iromus*, say the *Tyrian* records, the Reign of *Cyrus* began in *Babylonia*; therefore the siege of *Tyre* began 48 years and some months before the Reign of *Cyrus* in *Babylonia*: it began when *Jerusalem* had been newly taken and burnt, with the Temple, *Ezek.* xxvi and by consequence after the eleventh year of *Jeconiah*'s captivity, or 160th year of *Nabonassar*, and therefore the Reign of *Cyrus* in *Babylonia* began after the year of *Nabonassar* 208: it ended before the eight and twentieth year of *Jeconiah*'s captivity, or 176th year of *Nabonassar*, *Ezek.* xxix. 17. and therefore the Reign of *Cyrus* in *Babylonia* began before the year of *Nabonassar* 211. By this argument the first year of *Cyrus* in *Babylonia* was one of the two intermediate years 209, 210. *Cyrus* invaded *Babylonia* in the year of *Nabonassar* 209; [398]* *Babylon* held out, and the next year was taken, *Jer.* li. 39, 57. by diverting the river *Euphrates*, and entring the city through the emptied channel, and by consequence after midsummer: for the river, by the melting of the snow in *Armenia*, overflows yearly in the beginning of summer, but in the heat of dimmer grows low. [399]* *And that night was the King of* Babylon *slain, and* Darius *the* Mede*, or King of the* Medes*, took the Kingdom being about threescore and two years old*: so then *Babylon* was taken a month or two after the summer solstice, in the year of *Nabonassar* 210; as the Canon also represents.

The Kings of the *Medes* before *Cyrus* were *Dejoces*, *Phraortes*, *Astyages*, *Cyaxeres*, or *Cyaxares*, and *Darius*: the three first Reigned before

the Kingdom grew great, the two last were great conquerors, and erected the Empire; for *Æschylus*, who flourished in the Reigns of *Darius Hystaspis*, and *Xerxes*, and died in the 76th Olympiad, introduces *Darius* thus complaining of those who persuaded his son *Xerxes* to invade *Greece*; [400]*

Τοιγαρ σφιν εργον εστιν εξειργασμενον
Μεγιστον, αιειμνηστον 'οιον ουδεπω,
Το δ’ αστυ Σουσων εξεκεινωσεν πεσον·
Εξ 'ουτε τιμην Ζευς αναξ τηνδ’ ωπασεν
Εν ανδρα πασης Ασιαδος μηλοτροφου
Ταγειν, εχοντα σκηπτρον ευθυντηριον
Μηδος γαρ ην 'ο πρωτος 'ηγεμων στρατου·
Αλλος δ’ εκεινου παις τοδ’ εργον ηνυσε·
Φρενες γαρ αυτου θυμον οιακοστροφουν.
Τριτος δ’ απ’ αυτου Κυρος, ευδαιμων ανηρ, &c.

They have done a work
The greatest, and most memorable, such as never happen'd,
For it has emptied the falling Sufa*:*
From the time that King Jupiter *granted this honour,*
That one man should Reign over all fruitful Asia*,*
Having the imperial Scepter.
For he that first led the Army was a Mede*;*
The next, who was his son, finisht the work,
For prudence directed his soul;
The third was Cyrus*, a happy man*, &c.

The Poet here attributes the founding of the *Medo-Persian* Empire to the two immediate predecessors of *Cyrus*, the first of which was a *Mede*, and the second was his son: the second was *Darius* the *Mede*, the immediate predecessor of *Cyrus*, according to *Daniel*; and therefore the first was the father of *Darius*, that is, *Achsuerus*, *Assuerus*, *Oxyares*, *Axeres*, Prince *Axeres*, or *Cy-Axeres*, the word *Cy* signifying a Prince: for *Daniel* tells us, that *Darius* was the son of *Achsuerus*, or *Ahasuerus*, as the *Masoretes* erroneously call him, of the seed of the *Medes*, that is, of the seed royal: this is that *Assuerus* who together with *Nebuchadnezzar* took and destroyed *Nineveh*, according to *Tobit*: which action is by the *Greeks* ascribed to *Cyaxeres*, and by *Eupolemus* to *Astibares*, a name perhaps corruptly written for *Assuerus*. By this victory over the *Assyrians*, and subversion of their Empire seated at *Nineveh*, and the ensuing conquests of *Armenia*, *Cappadocia* and *Persia*, he began to extend the Reign of one man over all *Asia*; and his son *Darius* the *Mede*, by conquering the Kingdoms of *Lydia* and *Babylon*, finished the work: and the third King was *Cyrus*, a happy man for his great successes under and against *Darius*, and large and peaceable dominion in his own Reign.

Cyrus lived seventy years, according to *Cicero*, and Reigned nine years over *Babylon*, according to *Ptolemy*'s Canon, and therefore was 61 years old at the taking of *Babylon*; at which time *Darius* the *Mede* was 62 years old, according to *Daniel*: and therefore *Darius* was two Generations younger than *Astyages*, the grandfather of *Cyrus*: for *Astyages*, according to both [401]* *Herodotus* and *Xenophon*, gave his daughter *Mandane* to *Cambyses* a Prince of *Persia*, and by them became the grandfather of

Cyrus; and *Cyaxeres* was the son of *Astyages*, according [402]* to *Xenophon*, and gave his Daughter to *Cyrus*. This daughter, [403]* saith *Xenophon*, was reported to be very handsome, and used to play with *Cyrus* when they were both children, and to say that she would marry him: and therefore they were much of the same age. *Xenophon* saith that *Cyrus* married her after the taking of *Babylon*; but she was then an old woman: it's more probable that he married her while she was young and handsome, and he a young man; and that because he was the brother-in-law of *Darius* the King, he led the armies of the Kingdom until he revolted: so then *Astyages*, *Cyaxeres* and *Darius* Reigned successively over the *Medes*; and *Cyrus* was the grandson of *Astyages*, and married the sister of *Darius*, and succeeded him in the Throne.

Herodotus therefore [404]* hath inverted the order of the Kings *Astyages* and *Cyaxeres*, making *Cyaxeres* to be the son and successor of *Phraortes*, and the father and predecessor of *Astyages* the father of *Mandane*, and grandfather of *Cyrus*, and telling us, that this *Astyages* married *Ariene* the daughter of *Alyattes* King of *Lydia*, and was at length taken prisoner and deprived of his dominion by *Cyrus*: and *Pausanias* hath copied after *Herodotus*, in telling us that *Astyages* the son of *Cyaxeres* Reigned in *Media* in the days of *Alyattes* King of *Lydia*. *Cyaxeres* had a son who married *Ariene* the daughter of *Alyattes*; but this son was not the father of *Mandane*, and grandfather of *Cyrus*, but of the same age with *Cyrus*: and his true name is preserved in the name of the *Darics*, which upon the conquest of *Crœsus* by the conduct of his General *Cyrus*, he coyned out of the gold and silver of the conquered *Lydians*: his name was therefore *Darius*, as he is called by *Daniel*; for *Daniel* tells us, that this *Darius* was a *Mede*, and that his father's name was *Assuerus*, that is *Axeres* or *Cyaxeres*, as above: considering therefore that *Cyaxeres* Reigned long, and that no author mentions more Kings of *Media* than one called *Astyages*, and that *Æschylus* who lived in those days knew but of two great Monarchs of *Media* and *Persia*, the father and the son, older than *Cyrus*; it seems to me that *Astyages*, the father of *Mandane* and grandfather of *Cyrus*, was the father and predecessor of *Cyaxeres*; and that the son and successor of *Cyaxeres* was called *Darius*. *Cyaxeres*, [405]* according to *Herodotus*, Reigned 40 years, and his successor 35, and *Cyrus*, according to *Xenophon*, seven:

Cyrus died *Anno Nabonass.* 219, according to the Canon, and therefore *Cyaxeres* died *Anno Nabonass.* 177, and began his Reign *Anno Nabonass.* 137, and his father *Astyages* Reigned 26 years, beginning his Reign at the death of *Phraortes*, who was slain by the *Assyrians*, *Anno Nabonass.* 111, as above.

Of all the Kings of the *Medes*, *Cyaxeres* was greatest warrior. *Herodotus* [406]* saith that he was much more valiant than his ancestors, and that he was the first who divided the Kingdom into provinces, and reduced the irregular and undisciplined forces of the *Medes* into discipline and order: and therefore by the testimony of *Herodotus* he was that King of the *Medes* whom *Æschylus* makes the first conqueror and founder of the Empire; for *Herodotus* represents him and his son to have been the two immediate predecessors of *Cyrus*, erring only in the name of the son. *Astyages* did nothing glorious: in the beginning of his Reign a great body of *Scythians* commanded by *Madyes*, [407]* invaded *Media* and *Parthia*, as above, and Reigned there about 28 years; but at length his son *Cyaxeres* circumvented and slew them in a feast, and made the rest fly to their brethren in *Parthia*; and immediately after, in conjunction with *Nebuchadnezzar*, invaded and subverted the Kingdom of *Assyria*, and destroyed *Nineveh*.

In the fourth year of *Jehoiakim*, which the *Jews* reckon to be the first of *Nebuchadnezzar*, dating his Reign from his being made King by his father, or from the month *Nisan* preceding, when the victors had newly shared the Empire of the *Assyrians*, and in prosecuting their victory were invading *Syria* and *Phœnicia*, and were ready to invade the nations round about; God [408]* threatned that *he would take all the families of the North,* that is, the armies of the *Medes*, *and* Nebuchadnezzar *the King of* Babylon*, and bring them against* Judæa *and against the nations round about, and utterly destroy those nations, and make them an astonishment and lasting desolations, and cause them all to drink the wine-cup of his fury*; and in particular, he names *the Kings of* Judah *and* Egypt*, and those of* Edom*, and* Moab*, and* Ammon*, and* Tyre*, and* Zidon*, and the Isles of the Sea, and* Arabia*, and* Zimri*, and all the Kings of* Elam*, and all the Kings of the* Medes*, and all the Kings of the North, and the King of* Sesac*; and that after seventy years, he would also punish the King of* Babylon. Here, in numbering the nations which should suffer, he omits the *Assyrians* as fallen

already, and names the Kings of *Elam* or *Persia*, and *Sesac* or *Susa*, as distinct from those of the *Medes* and *Babylonians*; and therefore the *Persians* were not yet subdued by the *Medes*, nor the King of *Susa* by the *Chaldæans*; and as by the punishment of the King of *Babylon* he means the conquest of *Babylon* by the *Medes*; so by the punishment of the *Medes* he seems to mean the conquest of the *Medes* by *Cyrus*.

After this, in the beginning of the Reign of *Zedekiah*, that is, in the ninth year of *Nebuchadnezzar,* God threatned that *he would give the Kingdoms of* Edom*,* Moab*, and* Ammon*, and* Tyre *and* Zidon*, into the hand of* Nebuchadnezzar *King of* Babylon*, and that all the nations should serve him, and his son, and his son's son until the very time of his land should come, and many nations and great Kings should serve themselves of him*, Jer. xxvii. And at the same time God thus predicted the approaching conquest of the *Persians* by the *Medes* and their confederates: *Behold*, saith he, *I will break the bow of* Elam*, the chief of their might: and upon* Elam *will I bring the four winds from the four quarters of heaven, and will scatter them towards all those winds, and there shall be no nation whither the outcasts of* Elam *shall not come: for I will cause* Elam *to be dismayed before their enemies, and before them that seek their life; and I will bring evil upon them, even my fierce anger, saith the Lord; and I will send the sword after them 'till I have consumed them; and I will set my throne in* Elam*, and will destroy from thence the King and the Princes, saith the Lord: but it shall come to pass in the latter days,* viz. in the Reign of *Cyrus*, *that I will bring again the captivity of* Elam*, saith the Lord.* Jer. xlix. 35, *&c.* The *Persians* were therefore hitherto a free nation under their own King, but soon after this were invaded, subdued, captivated, and dispersed into the nations round about, and continued in servitude until the Reign of *Cyrus*: and since the *Medes* and *Chaldæans* did not conquer the *Persians* 'till after the ninth year of *Nebuchadnezzar*, it gives us occasion to enquire what that active warrior *Cyaxeres* was doing next after the taking of *Nineveh*.

When *Cyaxeres* expelled the *Scythians*, [409]* some of them made their peace with him, and staid in *Media*, and presented to him daily some of the venison which they took in hunting: but happening one day to catch nothing, *Cyaxeres* in a passion treated them with opprobrious language: this

they resented, and soon after killed one of the children of the *Medes*, dressed it like venison, and presented it to *Cyaxeres*, and then fled to *Alyattes* King of *Lydia*; whence followed a war of five years between the two Kings *Cyaxeres* and *Alyattes*: and thence I gather that the Kingdoms of the *Medes* and *Lydians* were now contiguous, and by consequence that *Cyaxeres*, soon after the conquest of *Nineveh*, seized the regions belonging to the *Assyrians*, as far as to the river *Halys*. In the sixth year of this war, in the midst of a battel between the two Kings, there was a total Eclipse of the Sun, predicted by *Thales*; [410]* and this Eclipse fell upon the 28th of *May*, *Anno Nabonass.* 163, forty and seven years before the taking of *Babylon*, and put an end to the battel: and thereupon the two Kings made peace by the mediation of *Nebuchadnezzar* King of *Babylon*, and *Syennesis* King of *Cilicia*; and the peace was ratified by a marriage, between *Darius* the son of *Cyaxeres* and *Ariene* the daughter of *Alyattes*: *Darius* was therefore fifteen or sixteen years old at the time of this marriage; for he was 62 years old at the taking of *Babylon*.

In the eleventh year of *Zedekiah's* Reign, the year in which *Nebuchadnezzar* took *Jerusalem* and destroyed the Temple, *Ezekiel* comparing the Kingdoms of the East to trees in the garden of *Eden*, thus mentions their being conquered by the Kings of the *Medes* and *Chaldæans: Behold*, saith he, *the* Assyrian *was a Cedar in* Lebanon *with fair branches, — his height was exalted above all the trees of the field, — and under his shadow dwelt all great nations, — not any tree in the garden of God was like unto him in his beauty: — but I have delivered him into the hand of the mighty one of the heathen, — I made the nations to shake at the sound of his fall, when I cast him down to the grave with them that descend into the pit: and all the trees of* Eden*, the choice and best of* Lebanon*, all that drink water, shall be comforted in the nether parts of the earth: they also went down into the grave with him, unto them that be slain with the sword, and they that were his arm, that dwelt under his shadow in the midst of the heathen,* Ezek. xxxi.

The next year *Ezekiel*, in another prophesy, thus enumerates the principal nations who had been subdued and slaughtered by the conquering sword of *Cyaxeres* and *Nebuchadnezzar*. Asthur *is there and all her company,* viz. in *Hades* or the lower parts of the earth, where the dead bodies lay buried*, his*

graves are about him; all of them slain, fallen by the sword, which caused their terrour in the land of the living. There is Elam*, and all her multitude round about her grave, all of them slain, fallen by the sword, which are gone down uncircumcised into the nether parts of the earth, which caused their terrour in the land of the living: yet have they born their shame with them that go down into the pit. — There is* Meshech*,* Tubal*, and all her multitude [411]*; her graves are round about him: all of them uncircumcised, slain by the sword, though they caused their terrour in the land of the living. — There is* Edom*, her Kings, and all her Princes, which with their might are laid by them that were slain by the sword. — There be the Princes of the North all of them, and all the* Zidonians*, which with their terrour are gone down with the slain*, Ezek. xxxii. Here by the Princes of the North I understand those on the north of *Judæa*, and chiefly the Princes of *Armenia* and *Cappadocia*, who fell in the wars which *Cyaxeres* made in reducing those countries after the taking of *Nineveh*. *Elam* or *Persia* was conquered by the *Medes*, and *Susiana* by the *Babylonians*, after the ninth, and before the nineteenth year of *Nebuchadnezzar*: and therefore we cannot err much if we place these conquests in the twelfth or fourteenth year of *Nebuchadnezzar*: in the nineteenth, twentieth, and one and twentieth year of this King, he invaded and [412]* conquered *Judæa*, *Moab*, *Ammon*, *Edom*, the *Philistims* and *Zidon*; and [413]* the next year he besieged *Tyre*, and after a siege of thirteen years he took it, in the 35th year of his Reign; and then he [414]* invaded and conquered *Egypt*, *Ethiopia* and *Libya*; and about eighteen or twenty years after the death of this King, *Darius* the *Mede* conquered the Kingdom of *Sardes*; and after five or six years more he invaded and conquered the Empire of *Babylon*: and thereby finished the work of propagating the *Medo-Persian* Monarchy over all *Asia*, as *Æschylus* represents.

Now this is that *Darius* who coined a great number of pieces of pure gold called *Darics*, or *Stateres Darici:* for *Suidas*, *Harpocration*, and the Scholiast of *Aristophanes*> [415]* tell us, that these were coined not by the father of *Xerxes*, but by an earlier *Darius*, by *Darius* the first, by the first King of the *Medes* and *Persians* who coined gold money. They were stamped on one side with the effigies of an Archer, who was crowned with a spiked crown, had a bow in his left hand, and an arrow in his right, and was

cloathed with a long robe; I have seen one of them in gold, and another in silver: they were of the same weight and value with the *Attic Stater* or piece of gold money weighing two *Attic* drachms. *Darius* seems to have learnt the art and use of money from the conquered Kingdom of the *Lydians*, and to have recoined their gold: for the *Medes*, before they conquered the *Lydians*, had no money. *Herodotus* [416]* tells us, that *when* Crœsus *was preparing to invade* Cyrus, *a certain* Lydian *called* Sandanis *advised him, that he was preparing an expedition against a nation who were cloathed with leathern breeches, who eat not such victuals as they would, but such as their barren country afforded; who drank no wine, but water only, who eat no figs nor other good meat, who had nothing to lose, but might get much from the* Lydians: *for the* Persians, saith *Herodotus*, *before they conquered the* Lydians*, had nothing rich or valuable*: and [417]* *Isaiah* tells us, that *the* Medes *regarded not silver, nor delighted in gold*; but the *Lydians* and *Phrygians* were exceeding rich, even to a proverb: *Midas & Crœsus*, saith [418]* *Pliny, infinitum possederant. Jam Cyrus devicta Asia* [auri] *pondo xxxiv millia invenerat, prœter vasa aurea aurumque factum, & in eo folia ac platanum vitemque. Qua victoria argenti quingenta millia talentorum reportavit, & craterem Semiramidis cujus pondus quindecim talentorum colligebat. Talentum autem Ægyptium pondo octoginta capere Varro tradit.* What the conqueror did with all this gold and silver appears by the *Darics*. The *Lydians*, according to [419]* *Herodotus*, were the first who coined gold and silver, and *Crœsus* coined gold monies in plenty, called *Crœsei*; and it was not reasonable that the monies of the Kings of *Lydia* should continue current after the overthrow of their Kingdom, and therefore *Darius* recoined it with his own effigies, but without altering the current weight and value: he Reigned then from before the conquest of *Sardes* ‘till after the conquest of *Babylon*.

And since the cup of *Semiramis* was preserved ‘till the conquest of *Crœsus* by *Darius*, it is not probable that she could be older than is represented by *Herodotus*.

This conquest of the Kingdom of *Lydia* put the *Greeks* into fear of the *Medes*: for *Theognis*, who lived at *Megara* in the very times of these wars, writes thus, [420]*

Πινωμεν, χαριεντα μετ’ αλληλοισι λεγοντες,

Μηδεν τον Μηδων δειδιοτες πολεμον.
Let us drink, talking pleasant things with one another,
Not fearing the war of the Medes.
And again, [421]*
Αυτος δε στρατον 'υβριστην Μηδων απερυκε
Τησδε πολευς, 'ινα σοι λαοι εν ευφροσυνηι
Ηρος επερχομενου κλειτας πεμπωσ' 'εκατομβας,
Τερπομενοι κιθαρη και ερατηι θαλιηι,
Παιανωντε χοροις, ιαχωσι τε, σον περι βωμον.
Η γαρ εγωγε δεδοικ', αφραδιην εσορων
Και στασιν 'Ελληνων λαοφθορον· αλλα συ Φοιβε,
'Ιλαος 'ημετερην τηνδε φυλασσε πολιν.
Thou Apollo *drive away the injurious army of the* Medes
From this city, that the people may with joy
Send thee choice hecatombs in the spring,
Delighted with the harp and chearful feasting,
And chorus's of Pœans *and acclamations about thy altar.*
For truly I am afraid, beholding the folly
And sedition of the Greeks*, which corrupts the people: but thou* Apollo*,*
Being propitious, keep this our city.

The Poet tells us further that discord had destroyed *Magnesia*, *Colophon*, and *Smyrna*, cities of *Ionia* and *Phrygia*, and would destroy the *Greeks*; which is as much as to say that the *Medes* had then conquered those cities.

The *Medes* therefore Reigned 'till the taking of *Sardes*: and further, according to *Xenophon* and the Scriptures, they Reigned 'till the taking of *Babylon*: for *Xenophon* [422]* tells us, that after the taking of *Babylon*, *Cyrus* went to the King of the *Medes* at *Ecbatane* and succeeded him in the Kingdom: and *Jerom*, [423]* *that* Babylon *was taken by* Darius *King of the* Medes *and his kinsman* Cyrus: and the Scriptures tell us, that *Babylon* was destroyed by *a nation out of the north*, *Jerem*. l. 3, 9, 41. by *the Kingdoms of* Ararat Minni, or *Armenia, and* Ashchenez, or *Phrygia minor*, *Jer*. li. 27. by the *Medes*, *Isa.* xiii. 17, 19. *by the Kings of the* Medes *and the captains and rulers thereof, and all the land of his dominion*, *Jer*. li. 11, 28. The Kingdom of *Babylon* was *numbred and finished and broken and given to the* Medes *and* Persians, *Dan.* v. 26. 28. first to the *Medes* under *Darius*,

and then to the *Persians* under *Cyrus*: for *Darius* Reigned over *Babylon* like a conqueror, not observing the laws of the *Babylonians*, but introducing the immutable laws of the conquering nations, the *Medes* and *Persians*, *Dan.* vi. 8, 12, 15; and the *Medes* in his Reign are set before the *Persians*, *Dan.* ib. & v. 28, & viii. 20. as the *Persians* were afterwards in the Reign of *Cyrus* and his successors set before the *Medes*, *Esther* i. 3, 14, 18, 19. *Dan.* x. 1, 20. and xi. 2. which shews that in the Reign of *Darius* the *Medes* were uppermost.

You may know also by the great number of provinces in the Kingdom of *Darius*, that he was King of the *Medes* and *Persians*: for upon the conquest of *Babylon*, he set over the whole Kingdom an hundred and twenty Princes, *Dan.* vi. 1. and afterwards when *Cambyses* and *Darius Hystaspis* had added some new territories, the whole contained but 127 provinces.

The extent of the *Babylonian* Empire was much the same with that of *Nineveh* after the revolt of the *Medes*. *Berosus* saith that *Nebuchadnezzar* held *Egypt*, *Syria*, *Phœnicia* and *Arabia*: and *Strabo* adds *Arbela* to the territories of *Babylon*; and saying that *Babylon* was anciently the metropolis of *Assyria*, he thus describes the limits of this *Assyrian* Empire. *Contiguous*, [424]* saith he, *to* Persia *and* Susiana *are the* Assyrians*: for so they call* Babylonia*, and the greatest part of the region about it: part of which is* Arturia*, wherein is* Ninus [*or* Nineveh;] *and* Apolloniatis*, and the* Elymæans*, and the* Parætacæ*, and* Chalonitis *by the mountain* Zagrus*, and the fields near* Ninus*, and* Dolomene*, and* Chalachene*, and* Chazene*, and* Adiabene*, and the nations of* Mesopotamia *near the* Gordyæans*, and the* Mygdones *about* Nisibis*, unto* Zeugma *upon* Euphrates*; and a large region on this side* Euphrates *inhabited by the* Arabians *and* Syrians *properly so called, as far as* Cilicia *and* Phœnicia *and* Libya *and the sea of* Egypt *and the* Sinus Issicus: and a little after describing the extent of the *Babylonian* region, he bounds it on the north, with the *Armenians* and *Medes* unto the mountain *Zagrus*; on the east side, with *Susa* and *Elymais* and *Parætacene*, inclusively; on the south, with the *Persian Gulph* and *Chaldæa*; and on the west, with the *Arabes Scenitæ* as far as *Adiabene* and *Gordyæa*: afterwards speaking of *Susiana* and *Sitacene*, a region between *Babylon* and *Susa*, and of *Parætacene* and *Cossæa* and *Elymais*, and of the *Sagapeni* and *Siloceni*, two little adjoining Provinces, he concludes, [425]* *and these are the nations*

which inhabit Babylonia *eastward: to the north are* Media *and* Armenia*,* exclusively*, and westward are* Adiabene *and* Mesopotamia*,* inclusively*; the greatest part of* Adiabene *is plain, the same being part of* Babylonia*: in same places it borders on* Armenia*: for the* Medes*,* Armenians *and* Babylonians *warred frequently on one another*. Thus far *Strabo*.

When *Cyrus* took *Babylon*, he changed the Kingdom into a Satrapy or Province: whereby the bounds were long after known: and by this means *Herodotus* [426]* gives us an estimate of the bigness of this Monarchy in proportion to that of the *Persians*, telling us that *whilst every region over which the King of* Persia *Reigned in his days, was distributed for the nourishment of his army, besides the tributes, the* Babylonian *region nourished him four months of the twelve in the year, and all the rest of* Asia *eight: so the power of the region*, saith he, *is equivalent to the third part of* Asia*, and its Principality, which the* Persians *call a* Satrapy*, is far the best of all the Provinces*.

Babylon [427]* was a square city of 120 furlongs, or 15 miles on every side, compassed first with a broad and deep ditch, and then with a wall fifty cubits thick, and two hundred high. *Euphrates* flowed through the middle of it southward, a few leagues on this side *Tigris*: and in the middle of one half westward stood the King's new Palace, built by *Nebuchadnezzar*; and in the middle of the other half stood the Temple of *Belus*, with the old Palace between that Temple and the river: this old Palace was built by the *Assyrians*, according to [428]* *Isaiah*, and by consequence, by *Pul* and his son *Nabonassar*, as above: *they founded the city for the* Arabians*, and set up the towers thereof, and raised the Palaces thereof*: and at that time *Sabacon* the *Ethiopian* invaded *Egypt*, and made great multitudes of *Egyptians* fly from him into *Chaldæa*, and carry thither their Astronomy, and Astrology, and Architecture, and the form of their year, which they preserved there in the *Æra* of *Nabonassar*: for the practice of observing the Stars began in *Egypt* in the days of *Ammon*, as above, and was propagated from thence in the Reign of his son *Sesac* into *Afric*, *Europe*, and *Asia* by conquest; and then *Atlas* formed the Sphere of the *Libyans*, and *Chiron* that of the *Greeks*, and the *Chaldæans* also made a Sphere of their own. But Astrology was invented in *Egypt* by *Nichepsos*, or *Necepsos*, one of the Kings of the lower *Egypt*, and *Petosiris* his Priest, a little before the days of

Sabacon, and propagated thence into *Chaldæa*, where *Zoroaster* the Legislator of the *Magi* met with it: so *Paulinus*,

Quique magos docuit mysteria vana Necepsos:

And *Diodorus*, [429]* *they say that the* Chaldæans *in* Babylonia *are colonies of the* Egyptians*, and being taught by the Priests of* Egypt *became famous for Astrology*. By the influence of the same colonies, the Temple of *Jupiter Belus* in *Babylon* seems to have been erected in the form of the *Egyptian* Pyramids: for [430]* this Temple was a solid Tower or Pyramid a furlong square, and a furlong high, with seven retractions, which made it appear like eight towers standing upon one another, and growing less and less to the top: and in the eighth tower was a Temple with a bed and a golden table, kept by a woman, after the manner of the *Egyptians* in the Temple of *Jupiter Ammon* at *Thebes*; and above the Temple was a place for observing the Stars: they went up to the top of it by steps on the outside, and the bottom was compassed with a court, and the court with a building two furlongs in length on every side.

The *Babylonians* were extreamly addicted to Sorcery, Inchantments, Astrology and Divinations, *Isa.* xlvii. 9, 12, 13. *Dan.* ii. 2, & v. 11. and to the worship of Idols, *Jer.* l. 2, 40. and to feasting, wine and women. *Nihil urbis ejus corruptius moribus, nec ad irritandas illiciendasque immodicas voluptates instructius. Liberos conjugesque cum hospitibus stupro coire, modo pretium flagitii detur, parentes maritique patiuntur. Convivales ludi tota Perside regibus purpuratisque cordi sunt: Babylonii maxime in vinum & quæ ebrietatem sequuntur effusi sunt. Fæminarum convivia ineuntium in principio modestus est habitus; dein summa quæque amicula exuunt, paulatimque pudorem profanant: ad ultimum, honos auribus sit, ima corporum velamenta projiciunt. Nec meretricum hoc dedecus est, sed matronarum virginumque, apud quas comitas habetur vulgati corporis vilitas. Q. Curtius*, lib. v. ca. And this lewdness of their women, coloured over with the name of civility, was encouraged even by their religion: for it was the custom for their women once in their life to sit in the Temple of *Venus* for the use of strangers; which Temple they called *Succoth Benoth*, the Temple of Women: and when any woman was once sat there, she was not to depart ‘till some stranger threw money into her bosom, took her away

and lay with her; and the money being for sacred uses, she was obliged to accept of it how little soever, and follow the stranger.

The *Persians* being conquered by the *Medes* about the middle of the Reign of *Zedekiah*, continued in subjection under them ‘till the end of the Reign of *Darius* the *Mede*: and *Cyrus*, who was of the Royal Family of the *Persians*, might be *Satrapa* of *Persia*, and command a body of their forces under *Darius*; but was not yet an absolute and independant King: but after the taking of *Babylon*, when he had a victorious army at his devotion, and *Darius* was returned from *Babylon* into *Media*, he revolted from *Darius*, in conjunction with the *Persians* under him; [431]* they being incited thereunto by *Harpagus* a *Mede*, whom *Xenophon* calls *Artagerses* and *Atabazus*, and who had assisted *Cyrus* in conquering *Crœsus* and *Asia minor*, and had been injured by *Darius*. *Harpagus* was sent by *Darius* with an army against *Cyrus*, and in the midst of a battel revolted with part of the army to *Cyrus*: *Darius* got up a fresh army, and the next year the two armies fought again: this last battel was fought at *Pasargadæ* in *Persia*, according to [432]* *Strabo*; and there *Darius* was beaten and taken Prisoner by *Cyrus*, and the Monarchy was by this victory translated to the *Persians*. The last King of the *Medes* is by *Xenophon* called *Cyaxares*, and by *Herodotus*, *Astyages* the father of *Mandane*: but these Kings were dead before, and *Daniel* lets us know that *Darius* was the true name of the last King, and *Herodotus*, [433]* that the last King was conquered by *Cyrus* in the manner above described; and the *Darics* coined by the last King testify that his name was *Darius*.

This victory over *Darius* was about two years after the taking of *Babylon*: for the Reign or *Nabonnedus* the last King of the *Chaldees*, whom *Josephus* calls *Naboandel* and *Belshazzar*, ended in the year of *Nabonassar* 210, nine years before the death of *Cyrus*, according to the Canon: but after the translation of the Kingdom of the *Medes* to the *Persians*, *Cyrus* Reigned only seven years, according to [434]* *Xenophon*; and spending the seven winter months yearly at *Babylon*, the three spring months yearly at *Susa*, and the two Summer months at *Ecbatane*, he came the seventh time into *Persia*, and died there in the spring, and was buried at *Pasargadae*. By the Canon and the common consent of all Chronologers, he died in the year of *Nabonassar* 219, and therefore conquered *Darius* in the year of *Nabonassar* 212, seventy and two years after the destruction of *Nineveh*, and beat him

the first time in the year of *Nabonassar* 211, and revolted from him, and became King of the *Persians*, either the same year, or in the end of the year before. At his death he was seventy years old according to *Herodotus*, and therefore he was born in the year of *Nabonassar* 149, his mother *Mandane* being the sister of *Cyaxeres*, at that time a young man, and also the sister of *Amyite* the wife of *Nebuchadnezzar*, and his father *Cambyses* being of the old Royal Family of the *Persians*.

CHAP. V.

A Description of the TEMPLE *of* Solomon.

[435]* The Temple of *Solomon* being destroyed by the *Babylonians*, it may not be amiss here to give a description of that edifice.

This [436]* Temple looked eastward, and stood in a square area, called the *Separate Place*: and [437]* before it stood the *Altar*, in the center of another square area, called the *Inner Court*, or *Court of the Priests*: and these two square areas, being parted only by a marble rail, made an area 200 cubits long from west to east, and 100 cubits broad: this area was compassed on the west with a wall, and [438]* on the other three sides with a pavement fifty cubits broad, upon which stood the buildings for the Priests, with cloysters under them: and the pavement was faced on the inside with a marble rail before the cloysters: the whole made an area 250 cubits long from west to east, and 200 broad, and was compassed with an outward Court, called also the *Great Court*, or *Court of the People*, [439]* which was an hundred cubits on every side; for there were but two Courts built by *Solomon*: and the outward Court was about four cubits lower than the inward, and was compassed on the west with a wall, and on the other three sides [440]* with a pavement fifty cubits broad, upon which stood the buildings for the People. All this was the [441]* *Sanctuary*, and made a square area 500 cubits long, and 500 broad, and was compassed with a walk, called the *Mountain of the House*: and this walk being 50 cubits broad, was compassed with a wall six cubits broad, and six high, and six hundred long on every side: and the cubit was about 21½, or almost 22 inches of the *English* foot, being the sacred cubit of the *Jews*, which was an hand-breadth, or the sixth part of its length bigger than the common cubit.

The *Altar* stood in the center of the whole; and in the buildings of [442]* both Courts over against the middle of the *Altar*, eastward, southward, and northward, were gates [443]* 25 cubits broad between the buildings, and 40 long; with porches of ten cubits more, looking towards the *Altar Court*, which made the whole length of the gates fifty cubits cross the pavements.

Every gate had two doors, one at either [444]* end, ten cubits wide, and twenty high, with posts and thresholds six cubits broad: within the gates was an area 28 cubits long between the thresholds, and 13 cubits wide: and on either side of this area were three posts, each six cubits square, and twenty high, with arches five cubits wide between them: all which posts and arches filled the 28 cubits in length between the thresholds; and their breadth being added to the thirteen cubits, made the whole breadth of the gates 25 cubits. These posts were hollow, and had rooms in them with narrow windows for the porters, and a step before them a cubit broad: and the walls of the porches being six cubits thick, were also hollow for several uses. [445]* At the east gate of the *Peoples Court*, called the *King's gate*, [446]* were six porters, at the south gate were four, and at the north gate were four: the people [447]* went in and out at the south and north gates: the [448]* east gate was opened only for the King, and in this gate he ate the Sacrifices. There were also four gates or doors in the western wall of the *Mountain of the House*: of these [449]* the most northern, called *Shallecheth*, or the *gate of the causey*, led to the King's palace, the valley between being filled up with a causey: the next gate, called *Parbar*, led to the suburbs *Millo*: the third and fourth gates, called *Asuppim*, led the one to *Millo*, the other to the city of *Jerusalem*, there being steps down into the valley and up again into the city. At the gate *Shallecheth* were four porters; at the other three gates were six porters, two at each gate: the house of the porters who had the charge of the north gate of the *People's Court*, had also the charge of the gates *Shallecheth* and *Parbar*: and the house of the porters who had the charge of the south gate of the *People s Court*, had also the charge of the other two gates called *Asuppim*.

They came through the four western gates into the *Mountain of the House*, and [450]* went up from the *Mountain of the House*, to the gates of the *People's Court* by seven steps, and from the *People's Court* to the gates of the *Priest's Court* by eight steps: [451]* and the arches in the sides of the gates of both courts led into cloysters [452]* under a double building, supported by three rows of marble pillars, which butted directly upon the middles of the square posts, ran along from thence upon the pavements towards the corners of the Courts: the axes of the pillars in the middle row being eleven cubits distant from the axes of the pillars in the other two rows

on either hand; and the building joining to the sides of the gates: the pillars were three cubits in diameter below, and their bases four cubits and an half square. The gates and buildings of both Courts were alike, and [453]* faced their Courts: the cloysters of all the buildings, and the porches of all the gates looking towards the *Altar*. The row of pillars on the backsides of the cloysters adhered to marble walls, which bounded the cloysters and supported the buildings: [454]* these buildings were three stories high above the cloysters, and [455]* were supported in each of those stories by a row of cedar beams, or pillars of cedar, standing above the middle row of the marble pillars: the buildings on either side of every gate of the *People's Court*, being 187½ cubits long, were distinguished into five chambers on a floor, running in length from the gates to the corners or the Courts: there [456]* being in all thirty chambers in a story, where the People ate the Sacrifices, or thirty exhedras, each of which contained three chambers, a lower, a middle, and an upper: every exhedra was 37½ cubits long, being supported by four pillars in each row, [457]* whose bases were 4½ cubits square, and the distances between their bases 6½ cubits, and the distances between the axes of the pillars eleven cubits: and where two [458]* exhedras joyned, there the bases of their pillars joyned; the axes of those two pillars being only 4½ cubits distant from one another: and perhaps for strengthning the building, the space between the axes of these two pillars in the front was filled up with a marble column 4½ cubits square, the two pillars standing half out on either side of the square column. At the ends of these buildings [459]* in the four corners of the *Peoples Court*, were little Courts fifty cubits square on the outside of their walls, and forty on the inside thereof, for stair-cases to the buildings, and kitchins to bake and boil the Sacrifices for the People, the kitchin being thirty cubits broad, and the stair-case ten. The buildings on either side of the gates of the *Priests Court* were also 37½ cubits long, and contained each of them one great chamber in a story, subdivided into smaller rooms, for the Great Officers of the Temple, and Princes of the Priests: and in the south-east and north-east corners of this court, at the ends of the buildings, were kitchins and stair-cases for the Great Officers; and perhaps rooms for laying up wood for the *Altar*.

In the eastern gate of the *Peoples Court*, sat a Court of Judicature, composed of 23 Elders. The eastern gate of the *Priests Court*, with the

buildings on either side, was for the High-Priest, and his deputy the *Sagan*, and for the *Sanhedrim* or Supreme Court of Judicature, composed of seventy Elders. [460]* The building or exhedra on the eastern side of the southern gate, was for the Priests who had the oversight of the charge of the *Sanctuary* with its treasuries: and these were, first, two *Catholikim*, who were High-Treasurers and Secretaries to the High-Priest, and examined, stated, and prepared all acts and accounts to be signed and sealed by him; then seven *Amarcholim*, who kept the keys of the seven locks of every gate of the *Sanctuary*, and those also of the treasuries, and had the oversight, direction, and appointment of all things in the *Sanctuary*; then three or more *Gisbarim*, or Under-Treasurers, or Receivers, who kept the Holy Vessels, and the Publick Money, and received or disposed of such sums as were brought in for the service of the Temple, and accounted for the same. All these, with the High-Priest, composed the Supreme Council for managing the affairs of the Temple.

The Sacrifices [461]* were killed on the northern side of the *Altar*, and flea'd, cut in pieces and salted in the northern gate of the Temple; and therefore the building or exhedra on the eastern side of this gate, was for the Priests who had the oversight of the charge of the *Altar*, and Daily Service: and these Officers were, He that received money of the People for purchasing things for the Sacrifices, and gave out tickets for the same; He that upon sight of the tickets delivered the wine, flower and oyl purchased; He that was over the lots, whereby every Priest attending on the *Altar* had his duty assigned; He that upon sight of the tickets delivered out the doves and pigeons purchased; He that administred physic to the Priests attending; He that was over the waters; He that was over the times, and did the duty of a cryer, calling the Priests or Levites to attend in their ministeries; He that opened the gates in the morning to begin the service, and shut them in the evening when the service was done, and for that end received the keys of the *Amarcholim*, and returned them when he had done his duty; He that visited the night-watches; He that by a Cymbal called the Levites to their stations for singing; He that appointed the Hymns and set the Tune; and He that took care of the Shew-Bread: there were also Officers who took care of the Perfume, the Veil, and the Wardrobe of the Priests.

The exhedra on the western side of the south gate, and that on the western side of the north gate, were for the Princes of the four and twenty courses of the Priests, one exhedra for twelve of the Princes, [462]* and the other exhedra for the other twelve: and upon the pavement on either side of the *Separate Place* [463]* were other buildings without cloysters, for the four and twenty courses of the Priests to eat the Sacrifices, and lay up their garments and the most holy things: each pavement being 100 cubits long, and 50 broad, had buildings on either side of it twenty cubits broad, with a walk or alley ten cubits broad between them: the building which bordered upon the *Separate Place* was an hundred cubits long, and that next the *Peoples Court* but fifty, the other fifty cubits westward [464]* being for a stair-case and kitchin: these buildings [465]* were three stories high, and the middle story was narrower in the front than the lower story, and the upper story still narrower, to make room for galleries; for they had galleries before them, and under the galleries were closets for laying up the holy things, and the garments of the Priests, and these galleries were towards the walk or alley, which ran between the buildings.

They went up from the *Priests Court* to the Porch of the Temple by ten steps: and the [466]* House of the Temple was twenty cubits broad, and sixty long within; or thirty broad, and seventy long, including the walls; or seventy cubits broad, and 90 long, including a building of treasure-chambers which was twenty cubits broad on three sides of the House; and if the Porch be also included, the Temple was [467]* an hundred cubits long. The treasure-chambers were built of cedar, between the wall of the Temple, and another wall without: they were [468]* built in two rows three stories high, and opened door against door into a walk or gallery which ran along between them, and was five cubits broad in every story; So that the breadth of the chambers on either side of the gallery, including the breadth of the wall to which they adjoined, was ten cubits; and the whole breadth of the gallery and chambers, and both walls, was five and twenty cubits: the chambers [469]* were five cubits broad in the lower story, six broad in the middle story, and seven broad in the upper story; for the wall of the Temple was built with retractions of a cubit, to rest the timber upon. *Ezekiel* represents the chambers a cubit narrower, and the walls a cubit thicker than they were in *Solomon*'s Temple: there were [470]* thirty chambers in a story,

in all ninety chambers, and they were five cubits high in every story. The [471]* Porch of the Temple was 120 cubits high, and its length from south to north equalled the breadth of the House: the House was three stories high, which made the height of the *Holy Place* three times thirty cubits, and that of the *Most Holy* three times twenty: the upper rooms were treasure-chambers; they [472]* went up to the middle chamber by winding stairs in the southern shoulder of the House, and from the middle into the upper.

Some time after this Temple was built, the *Jews* [473]* added a *New Court*, on the eastern side of the *Priests Court*, before the *King's gate*, and therein built [474]* a covert for the Sabbath: this Court was not measured by *Ezekiel*, but the dimensions thereof may be gathered from those of the *Womens Court*, in the second Temple, built after the example thereof: for when *Nebuchadnezzar* had destroyed the first Temple, *Zerubbabel*, by the commissions of *Cyrus* and *Darius*, built another upon the same area, excepting the *Outward Court*, which was left open to the *Gentiles*: and this Temple [475]* was sixty cubits long, and sixty broad, being only two stories in height, and having only one row of treasure-chambers about it: and on either side of the *Priests Court* were double buildings for the Priests, built upon three rows of marble pillars in the lower story, with a row of cedar beams or pillars in the stories above: and the cloyster in the lower story looked towards the *Priests Court*: and the *Separate Place*, and *Priests Court*, with their buildings on the north and south sides, and the *Womens Court*, at the east end, took up an area three hundred cubits long, and two hundred broad, the *Altar* standing in the center of the whole. The *Womens Court* was so named, because the women came into it as well as the men: there were galleries for the women, and the men worshipped upon the ground below: and in this state the second Temple continued all the Reign of the *Persians*; but afterwards suffered some alterations, especially in the days of *Herod*.

This description of the Temple being taken principally from *Ezekiel*'s Vision thereof; and the ancient *Hebrew* copy followed by the Seventy, differing in some readings from the copy followed by the editors of the present *Hebrew*, I will here subjoin that part of the Vision which relates to the *Outward Court*, as I have deduced it from the present *Hebrew*, and the version of the Seventy compared together.

Ezekiel chap. xl. ver. 5, &c.

[476]* *And behold a wall on the outside of the House round about*, at the distance of fifty cubits from it, aabb: *and in the man's hand a measuring reed six cubits long by the cubit, and an hand-breadth: so he measured the breadth of the building,* or wall*, one reed, and the height one reed.* [477]* *Then came he unto the gate* of the House*, which looketh towards the east, and went up the seven steps thereof,* AB*, and measured the threshold of the gate,* CD*, which was one reed broad, and the* Porters *little chamber,* EFG*, one reed long, and one reed broad; and the arched passage between the little chambers,* FH*, five cubits: and the second little chamber,* HIK*, a reed broad and a reed long; and the arched passage,* IL*, five cubits: and the third little chamber* LMN*, a reed long and a reed broad: and the threshold of the gate next the porch of the gate within,* OP*, one reed: and he measured the porch of the gate,* QR*, eight cubits; and the posts thereof* ST*,* st*, two cubits; and the porch of the gate,* QR*, was inward,* or toward the inward court*; and the little chambers,* EF*,* HI*,* LM*,* ef*,* hi*,* lm*, were* outward, or *to the east; three on this side, and three on that side* of the gate. *There was one measure of the three, and one measure of the posts on this side, and on that side; and he measured the breadth of the door of the gate,* Cc*, or* Dd*, ten cubits; and the breadth of the gate* within between the little chambers, Ee or Ff*, thirteen cubits; and the limit, or margin, or step before the little chambers,* EM*, one cubit on this side, and the step,* em*, one cubit on the other side; and the little chambers,* EFG*,* HIK*,* LMN*,* efg*,* hik*,* lmn*, were six cubits* broad *on this side, and six cubits* broad *on that side: and he measured* the whole breadth of *the gate, from the* further *wall of one little chamber to the* further *wall of another little chamber: the breadth,* Gg, or Kk, or Nn*, was twenty and five cubits* through*; door,* FH*, against door,* fh*: and he measured the posts,* EF*,* HI*, and* LM*,* ef*,* hi*, and* lm*, twenty cubits* high*; and at the posts there were gates,* or arched passages, FH, IL, fh, il*, round about; and from the* eastern *face of the gate at the entrance,* Cc*, to the* western *face of the porch of the gate within,* Tt*, were fifty cubits: and there were narrow windows to the little chambers, and to the porch within the gate, round about, and likewise to the posts; even windows were round about within: and upon each post were palm trees.*

Then he brought me into the Outward Court, and lo there were chambers, and a pavement with pillars upon it in the court round about, [478]* *thirty chambers* in length *upon the pavement, supported by the pillars,* ten chambers on every side, except the western*: and the pavement butted upon the shoulders or sides of the gates below,* every gate having five chambers or exhedræ on either side*. And he measured the breadth* of the Outward Court*, from the fore-front of the lower-gate, to the fore-front of the inward court, an hundred cubits eastward.*

Then he brought me northward, and there was a gate that looked towards the north; he measured the length thereof, and the breadth thereof, and the little chambers thereof, three on this side, and three on that side, and the posts thereof, and the porch thereof, and it was according to the measures of the first gate; its length was fifty cubits, and its breadth was five and twenty: and the windows thereof, and the porch and the palm-trees thereof were *according to the measures of the gate which looked to the east, and they went up to it by seven steps: and its porch was before them,* that is inward*. And there was a gate of the inward court over against* this *gate of the north, as* in the gates *to the eastward: and he measured from gate to gate an hundred cubits.*

A Description of THE TEMPLE OF SOLOMON

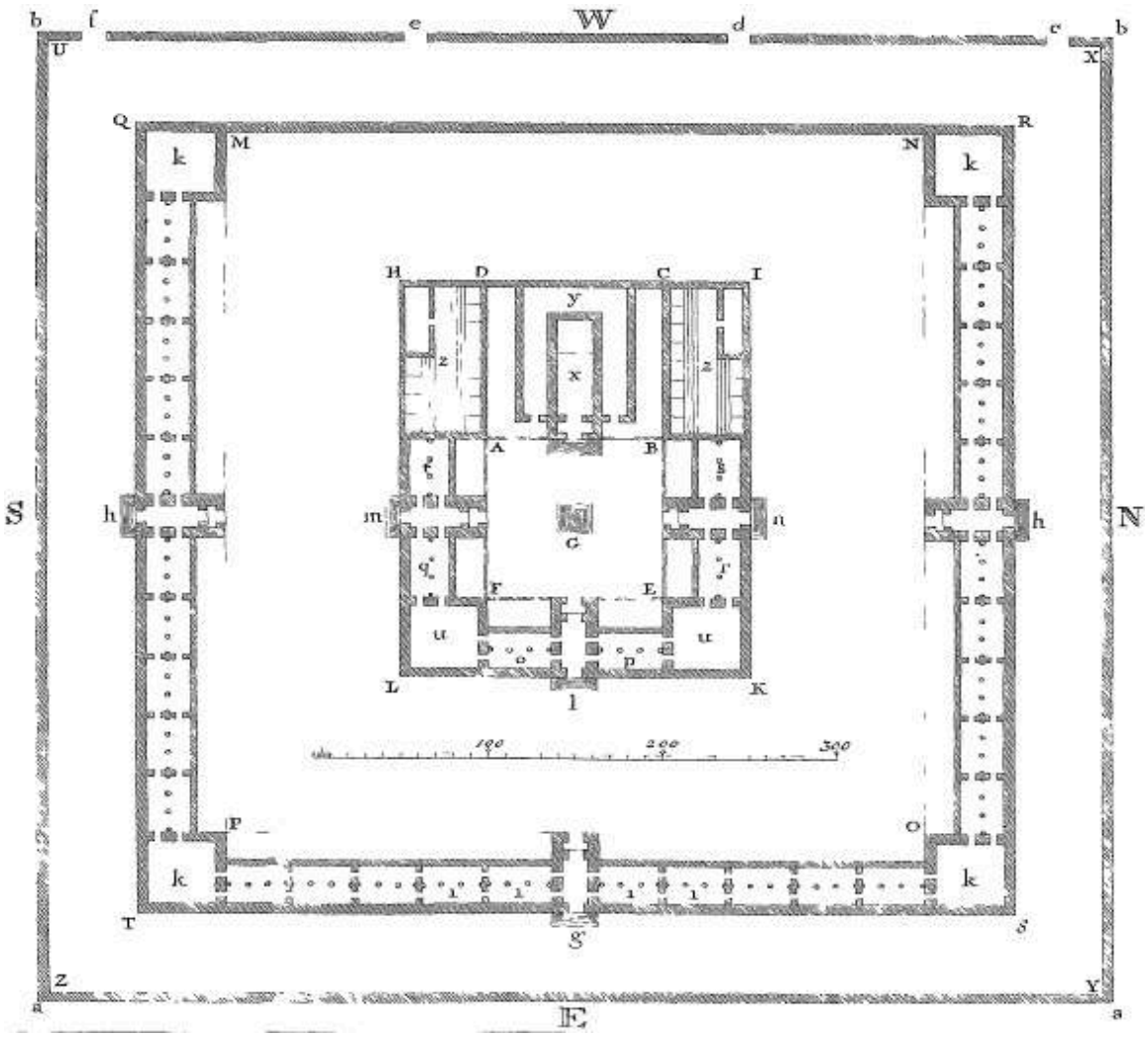


Plate I. .

ABCD. *The Separate Place in which stood the Temple.*

ABEF. *The Court of y^{e} Priests.*

G. *The Altar.*

DHLKICEFD. *A Pavement compassing three sides of the forementionʼd Courts, and upon which stood the Buildings for the Priests, with Cloysters under them.*

MNOP. *The Court of the People.*

MQTSRN. *A Pavement compassing three sides of the Peoples Court, upon which stood the Buildings for the People, with Cloysters under them.*

UXYZ. *The Mountain of the House.*

aabb. *A Wall enclosing the whole.*

c. *The Gate Shallecheth.*

d. *The Gate Parbar.*

ef. *The two Gates Assupim.*

g. *The East Gate of the Peoples Court, call'd the Kings Gate.*

hh. *The North and South Gates of the same Court.*

iiii. *The chambers over the Cloysters of the Peoples Court where the People ate the Sacrifices, 30 Chambers in each Story.*

kkkk. *Four little Courts serving for Stair Cases and Kitchins for the People.*

l. *The Eastern Gate of the Priests Court, over which sate the Sanhedrin.*

m. *The Southern Gate of the Priests Court.*

n. *The Northern Gate of the same Court, where the Sacrifices were flea'd &c.*

opqrst. *The Buildings over the Cloysters for the Priests, viz six large Chambers (subdivided) in each Story, whereof* o *and* p *were for the High Priest and Sagan,* q *for the Overseers of the Sanctuary and Treasury,* r *for the Overseers of the Altar and Sacrifice and* s *and* t *for the Princes of the twenty four Courses of Priests.*

uu. *Two Courts in which were Stair Cases and Kitchins for the Priests.*

x. *The House or Temple which (together with the Treasure Chambers* y*, and Buildings* zz *on each side of the Separate Place) is more particularly describ'd on the second Plate.*

A Description of the Inner Court & Buildings for the Priests in Solomons Temple.

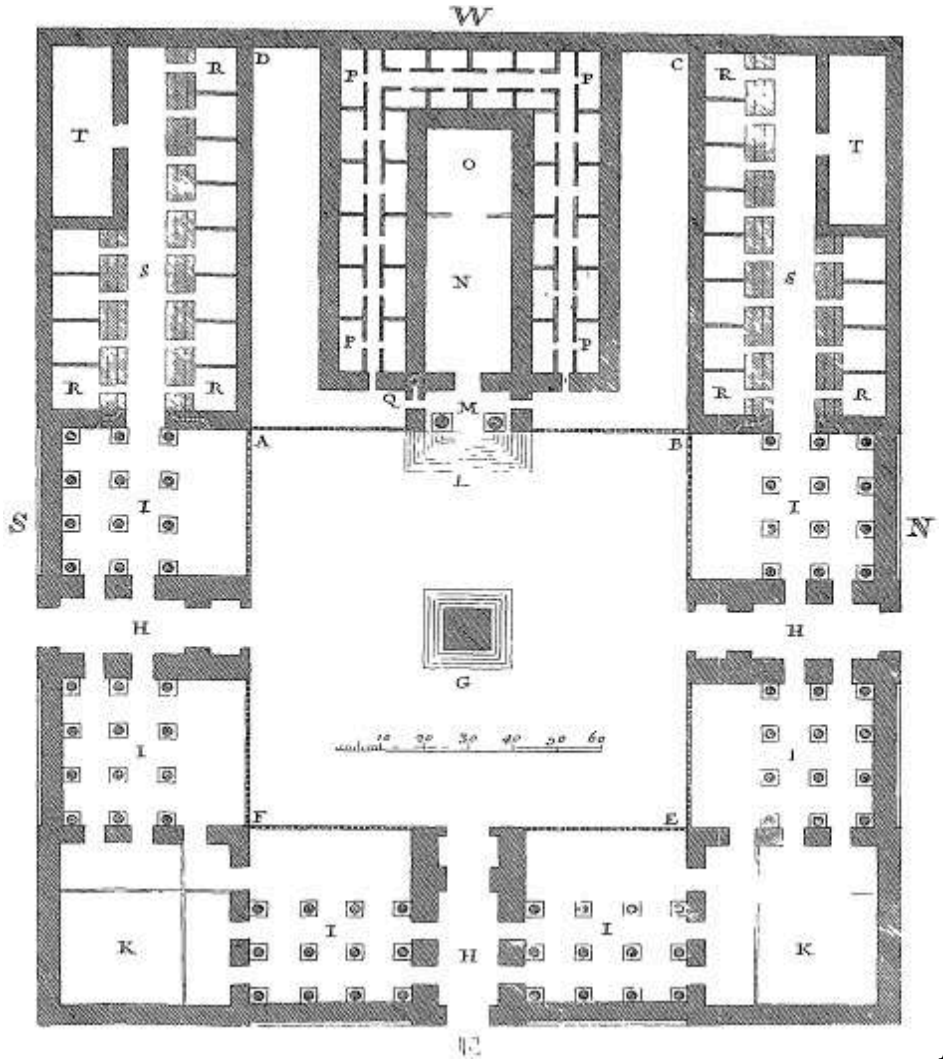


Plate II. .

ABCD. *The Separate Place.*

ABEF. *The Inner Court, or Court of the Priests, parted from the Separate Place, and and Pavement on the other three sides, by a marble rail.*

G. *The Altar.*

HHH. *The East, South, & North Gates of the Priests Court.*

III. *&c. The Cloysters supporting the Buildings for the Priests.*

KK. *Two Courts in which were Stair Cases and Kitchins for the Priests.*

L. *Ten Steps to the Porch of the Temple.*

M. *The Porch of the Temple.*

N. *The Holy Place.*

O. *The most Holy Place.*

PPPP. *Thirty Treasure-Chambers, in two rows, opening into a gallery, door against door, and compassing three sides of the Holy & most Holy Places.*

Q. *The Stairs leading to the Middle Chamber.*

RRRR. *&c. The buildings for the four and twenty Courses of Priests, upon the Pavement on either side of the Separate Place, three Stories high without Cloysters, but the upper Stories narrower than the lower, to make room for Galleries before them. There were 24 Chambers in each Story and they opend into a walk or alley,* SS. *between the Buildings.*

TT. *Two Courts in which were Kitchins for the Priests of the twenty four Courses.*

A Particular Description of one of the Gates of the Peoples Court, with part of the Cloyster adjoyning.

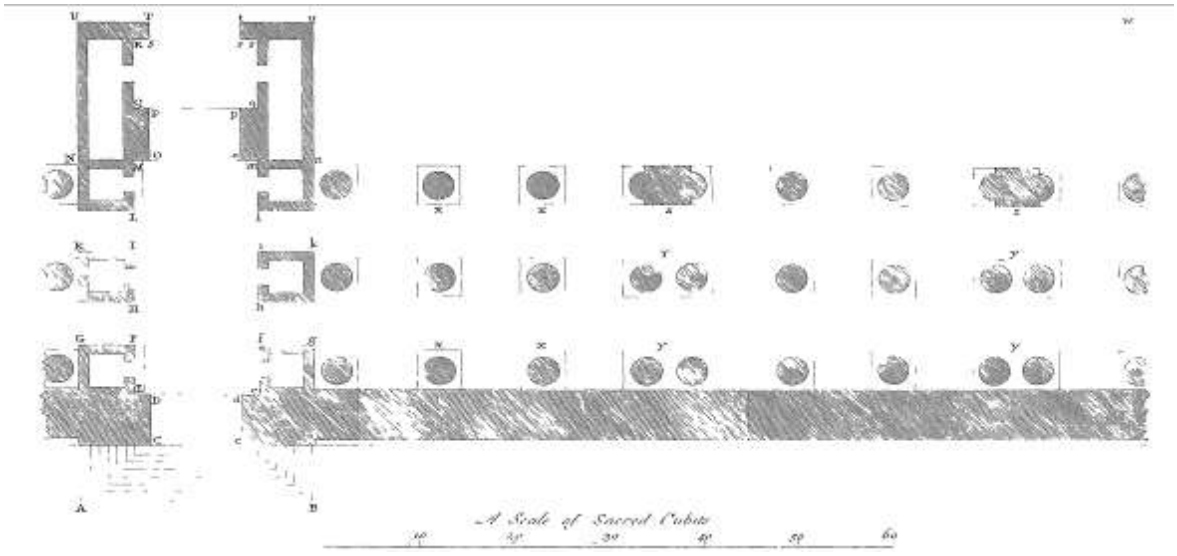


Plate III. .

uw. *The inner margin of the Pavement compassing three sides of the Peoples Court.*

xxx. *&c. The Pillars of the Cloyster supporting the Buildings for the People.*

yyyy. *Double Pillars where two Exhedræ joyned, and whose interstices in the front* zz *were filled up with a square Column of Marble.*

Note *The preceding letters of this Plate refer to the description in pag. 344 345.*

CHAP. VI.

Of the Empire of the Persians.

Cyrus having translated the Monarchy to the *Persians*, and Reigned seven years, was succeeded by his son *Cambyses*, who Reigned seven years and five months, and in the three last years of his Reign subdued *Egypt*: he was succeeded by *Mardus*, or *Smerdis* the *Magus*, who feigned himself to be *Smerdis* the brother of *Cambyses*.

Smerdis Reigned seven months, and in the eighth month being discovered, was slain, with a great number of the *Magi*; so the *Persians* called their Priests, and in memory of this kept an anniversary day, which they called, *The slaughter of the* Magi. Then Reigned *Maraphus* and *Artaphernes* a few days, and after them *Darius* the son of *Hystaspes*, the son of *Arsamenes*, of the family of *Achæmenes*, a *Persian*, being chosen King by the neighing of his horse: before he Reigned his [479]* name was *Ochus*. He seems on this occasion to have reformed the constitution of the *Magi*, making his father *Hystaspes* their Master, or *Archimagus*; for *Porphyrius* tells us, [480]* that *the* Magi *were a sort of men so venerable amongst the* Persians*, that* Darius *the son of* Hystaspes *wrote on the monument of his father*, amongst other things, *that he had been the Master of the* Magi. In this reformation of the *Magi*, *Hystaspes* was assisted by *Zoroastres*: so *Agathias*; *The* Persians *at this day say simply that* Zoroastres *lived under* Hystaspes: and *Apuleius*; *Pythagoram, aiunt, inter captivos Cambysæ Regis* [ex Ægypto Babylonem abductos] *doctores habuisse Persarum Magos, & præcipue Zoroastrem, omnis divini arcani Antistitem*. By *Zoroastres*'s conversing at *Babylon* he seems to have borrowed his skill from the *Chaldæans*; for he was skilled in Astronomy, and used their year: so *Q. Curtius*; [481]* *Magi proximi patrium carmen canebant: Magos trecenti & sexaginta quinque juvenes sequebantur, puniceis amiculis velati, diebus totius anni pares numero*: and *Ammianus*; *Scientiæ multa ex Chaldæorum arcanis Bactrianus addidit Zoroastres*. From his conversing in several places he is reckoned a *Chaldæan*, an *Assyrian*, a *Mede*, a *Persian*, a *Bactrian*. *Suidas* calls him [482]* a *Perso-Mede*, and saith that he was *the*

most skilful of Astronomers, and first author of the name of the Magi *received among them*. This skill in Astronomy he had doubtless from the *Chaldæans*, but *Hystaspes* travelled into *India*, to be instructed by the *Gymnosophists*: and these two conjoyning their skill and authority, instituted a new set of Priests or *Magi*, and instructed them in such ceremonies and mysteries of Religion and Philosophy as they thought fit to establish for the Religion and Philosophy of that Empire; and these instructed others, 'till from a small number they grew to a great multitude: for *Suidas* tells us, that *Zoroastres gave a beginning to the name of the* Magi: and *Elmacinus*; that *he reformed the religion of the* Persians*, which before was divided into many sects*: and *Agathias*; that *he introduced the religion of the* Magi *among the* Persians*, changing their ancient sacred rites, and bringing in several opinions*: and *Ammianus* [483]* tells us, *Magiam esse divinorum incorruptissimum cultum, cujus scientiæ seculis priscis multa ex Chaldæorum arcanis Bactrianus addidit Zoroastres: deinde Hystaspes Rex prudentissimus Darii pater; qui quum superioris Indiæ secreta fidentius penetraret, ad nemorosam quamdam venerat solitudinem, cujus tranquillis silentiis præcelsa Brachmanorum ingenia potiuntur; eorumque monitu rationes mundani motus & siderum, purosque sacrorum ritus quantum colligere potuit eruditus, ex his quæ didicit, aliqua sensibus Magorum infudit; quæ illi cum disciplinis præsentiendi futura, per suam quisque progeniem, posteris ætatibus tradunt. Ex eo per sæcula multa ad præsens, una eademque prosapia multitudo creata, Deorum cultibus dedicatur. Feruntque, si justum est credi, etiam ignem cœlitus lapsum apud se sempiternis foculis custodiri, cujus portionem exiguam ut faustam præisse quondam Asiaticis Regibus dicunt: Hujus originis apud veteres numerus erat exilis, ejusque mysteriis Persicæ potestates in faciendis rebus divinis solemniter utebantur. Eratque piaculum aras adire, vel hostiam contrectare, antequam Magus conceptis precationibus libamenta diffunderet præcursoria. Verum aucti paullatim, in amplitudinem gentis solidæ concesserunt & nomen: villasque inhabitantes nulla murorum firmitudine communitas & legibus suis uti permissi, religionis respectu sunt honorati*. So this Empire was at first composed of many nations, each of which had hitherto its own religion: but now *Hystaspes* and *Zoroastres* collected what they conceived to be best, established it by law, and taught it to others, and

those to others, ‘till their disciples became numerous enough for the Priesthood of the whole Empire; and instead of those various old religions, they set up their own institutions in the whole Empire, much after the manner that *Numa* contrived and instituted the religion of the *Romans*: and this religion of the *Persian* Empire was composed partly of the institutions of the *Chaldæans*, in which *Zoroastres* was well skilled; and partly of the institutions of the ancient *Brachmans*, who are supposed to derive even their name from the *Abrahamans*, or sons of *Abraham*, born of his second wife *Keturah*, instructed by their father in the worship of ONE GOD without images, and sent into the east, where *Hystaspes* was instructed by their successors. About the same time with *Hystapes* and *Zoroastres*, lived also *Ostanes*, another eminent *Magus*: *Pliny* places him under *Darius Hystaspis*, and *Suidas* makes him the follower of *Zoroastres*: he came into *Greece* with *Xerxes*, and seems to be the *Otanes* of *Herodotus*, who discovered *Smerdis*, and formed the conspiracy against him, and for that service was honoured by the conspirators, and exempt from subjection to *Darius*.

In the sacred commentary of the *Persian* rites these words are ascribed to *Zoroastres*; [484]* 'Ο Θεος εστι κεφαλην εχων 'ιερακος. 'ουτος εστιν 'ο πρωτος, αφθαρτος, αιδιος, αγενητος, αμερης, ανομοιοτατος, 'ηνιοχος παντος καλου, αδωροδοκητος, αγαθων αγαθωτατος, φρονιμων φρονιμωτατος· εστι δε και πατηρ ευνομιας και δικαιοσυνης, αυτοδιδακτος, φυσικος, και τελειος, και σοφος, και 'ιερου φυσικου μονος 'ευρετης. *Deus est accipitris capite: hic est primus, incorruptibilis, æternus, ingenitus, sine partibus, omnibus aliis dissimillimus, moderator omnis boni, donis non capiendus, bonorum optimus, prudentium prudentissimus, legum æquitatis ac justitiæ parens, ipse sui doctor, physicus & perfectus & sapiens & sacri physici unicus inventor*: and the same was taught by *Ostanes*, in his book called *Octateuchus*. This was the Antient God of the *Persian Magi*, and they worshipped him by keeping a perpetual fire for Sacrifices upon an Altar in the center of a round area, compassed with a ditch, without any Temple in the place, and without paying any worship to the dead, or any images. But in a short time they declined from the worship of this Eternal, Invisible God, to worship the Sun, and the Fire, and dead men, and images, as the *Egyptians*, *Phœnicians*, and *Chaldæans* had done before: and from these

superstitions, and the pretending to prognostications, the words *Magi* and *Magia*, which signify the Priests and Religion of the *Persians*, came to be taken in an ill sense.

Darius, or *Darab*, began his Reign in spring, in the sixteenth year of the Empire of the *Persians*, *Anno Nabonass.* 227, and Reigned 36 years, by the unanimous consent of all Chronologers. In the second year of his Reign the *Jews* began to build the Temple, by the prophesying of *Haggai* and *Zechariah*, and finished it in the sixth. He fought the *Greeks* at *Marathon* in *October*, *Anno Nabonass.* 258, ten years before the battel at *Salamis*, and died in the fifth year following, in the end of winter, or beginning of spring, *Anno Nabonass.* 263. The years of *Cambyses* and *Darius* are determined by three Eclipses of the Moon recorded by *Ptolemy*, so that they cannot be disputed: and by those Eclipses, and the Prophesies of *Haggai* and *Zechariah* compared together, it is manifest that the years of *Darius* began after the 24th day of the eleventh *Jewish* month, and before the 24th day of *April*, and by consequence in *March* or *April*.

Xerxes, *Achschirosch*, *Achsweros*, or *Oxyares*, succeeded his father *Darius*, and spent the first five years of his Reign, and something more, in preparations for his Expedition against the *Greeks*: and this Expedition was in the time of the Olympic Games, in the beginning of the first year of the 75th Olympiad, *Callias* being *Archon* at *Athens*; as all Chronologers agree. The great number of people which he drew out of *Susa* to invade *Greece*, made *Æschylus* the Poet say [485]*:

Το δ’ αστυ Σουσων εξεκεινωσεν πεσον.

It emptied the falling city of Susa.

The passage of his army over the *Hellespont* began in the end of the fourth year of the 74th Olympiad, that is in *June*, *Anno Nabonass.* 268, and took up a month; and in autumn, after three months more, on the 16th day of the month *Munychion*, at the full moon, was the battel at *Salamis*; and a little after that an Eclipse of the Moon, which by the calculation fell on *Octob.* 2. His first year therefore began in spring, *Anno Nabonass.* 263, as above: he Reigned almost twenty one years by the consent of all writers, and was murdered by *Artabanus*, captain of his guards; towards the end of winter, *Anno Nabonass.* 284.

Artabanus Reigned seven months, and upon suspicion of treason against *Xerxes*, was slain by *Artaxerxes Longimanus*, the son of *Xerxes*.

Artaxerxes began his Reign in the autumnal half year, between the 4th and 9th *Jewish* months, *Nehem.* i. 1. & ii. 1, & v. 14. and *Ezra* vii. 7, 8, 9. and his 20th year fell in with the 4th year of the 83d Olympiad, as *Africanus* [486]* informs us, and therefore his first year began within a month or two or the autumnal Equinox, *Anno Nabonass.* 284. *Thucydides* relates that the news of his death came to *Athens* in winter, in the seventh year of the *Peloponnesian* war, that is *An.* 4. Olym. and by the Canon he Reigned forty one years, including the Reign of his predecessor *Artabanus*, and died about the middle of winter, *Anno Nabonass.* 325 *ineunte*: the *Persians* now call him *Ardschir* and *Bahaman*, the Oriental Christians *Artahascht*.

Then Reigned *Xerxes*, two months, and *Sogdian* seven months, and *Darius Nothus*, the bastard son of *Artaxerxes*, nineteen years wanting four or five months; and *Darius* died in summer, a little after the end of the *Peloponnesian* war, and in the same Olympic year, and by consequence in *May* or *June*, *Anno Nabonass.* 344. The 13th year of his Reign was coincident in winter with the 20th of the *Peloponnesian* war, and the years of that war are stated by indisputable characters, and agreed on by all Chronologers: the war began in spring, *Ann.* 1. Olym, lasted 27 years, and ended *Apr.* 14. *An.* 4. Olym.

The next King was *Artaxerxes Mnemon*, the son of *Darius*: he Reigned forty six years, and died *Anno Nabonass.* 390. Then Reigned *Artaxerxes Ochus* twenty one years; *Arses*, or *Arogus*, two years, and *Darius Codomannus* four years, unto the battel of *Arbela*, whereby the *Persian* Monarchy was translated to the *Greeks*, *Octob.* 2. *An. Nabonass.* 417; but *Darius* was not slain untill a year and some months after.

I have hitherto stated the times of this Monarchy out of the *Greek* and *Latin* writers: for the *Jews* knew nothing more of the *Babylonian* and *Medo-Persian* Empires than what they have out of the sacred books of the old Testament; and therefore own no more Kings, nor years of Kings, than they can find in those books: the Kings they reckon are only *Nebuchadnezzar*, *Evilmerodach*, *Belshazzar*, *Darius* the *Mede*, *Cyrus*, *Ahasuerus*, and *Darius* the *Persian*; this last *Darius* they reckon to be the *Artaxerxes*, in whose Reign *Ezra* and *Nehemiah* came to *Jerusalem*, accounting *Artaxerxes* a

common name of the *Persian* Kings: *Nebuchadnezzar*, they say, Reigned forty five years, 2 *King.* xxv. 27. *Belshazzar* three years, *Dan.* viii. 1. and therefore *Evilmerodach* twenty three, to make up the seventy years captivity; excluding the first year of *Nebuchadnezzar*, in which they say the Prophesy of the seventy years was given. To *Darius* the *Mede* they assign one year, or at most but two, *Dan.* ix. 1. to *Cyrus* three years incomplete, *Dan.* x. 1. to *Ahasuerus* twelve years 'till the casting of *Pur*, *Esth.* iii. 7. one year more 'till the *Jews* smote their enemies, *Esth.* ix. 1. and one year more 'till *Esther* and *Mordecai* wrote the second letter for the keeping of *Purim*, *Esth.* ix. 29. in all fourteen years: and to *Darius* the *Persian* they allot thirty two or rather thirty six years, *Nehem.* xiii. 6. So that the *Persian* Empire from the building of the Temple in the Second year of *Darius Hystaspis*, flourished only thirty four years, until *Alexander* the great overthrew it: thus the *Jews* reckon in their greater Chronicle, *Seder Olam Rabbah*. *Josephus*, out of the sacred and other books, reckons only these Kings of *Persia*; *Cyrus*, *Cambyses*, *Darius Hystaspis*, *Xerxes*, *Artaxerxes*, and *Darius*: and taking this *Darius*, who was *Darius Nothus*, to be one and the same King with the last *Darius*, whom *Alexander* the great overcame; by means of this reckoning he makes *Sanballat* and *Jaddua* alive when *Alexander* the great overthrew the *Persian* Empire. Thus all the *Jews* conclude the *Persian* Empire with *Artaxerxes Longimanus*, and *Darius Nothus*, allowing no more Kings of *Persia*, than they found in the books of *Ezra* and *Nehemiah*; and referring to the Reigns of this *Artaxerxes*, and this *Darius*, whatever they met with in profane history concerning the following Kings of the same names: so as to take *Artaxerxes Longimanus*, *Artaxerxes Mnemon* and *Artaxerxes Ochus*, for one and the same *Artaxerxes*; and *Darius Nothus*, and *Darius Codomannus*, for one and the same *Darius*; and *Jaddua*, and *Simeon Justus*, for one and the same High-Priest. Those *Jews* who took *Herod* for the *Messiah*, and were thence called *Herodians*, seem to have grounded their opinion upon the seventy weeks of years, which they found between the Reign of *Cyrus* and that of *Herod*: but afterwards, in applying the Prophesy to *Theudas*, and *Judas* of *Galilee*, and at length to *Barchochab*, they seem to have shortned the Reign of the Kingdom of *Persia*. These accounts being very imperfect, it was necessary to have recourse to the records of the *Greeks* and *Latines*, and to the Canon recited by *Ptolemy*, for stating the times of this Empire. Which being done, we

have a better ground for understanding the history of the *Jews* set down in the books of *Ezra* and *Nehemiah*, and adjusting it; for this history having suffered by time, wants some illustration: and first I shall state the history of the *Jews* under *Zerubbabel*, in the Reigns of *Cyrus*, *Cambysis*, and *Darius Hystaspis*.

This history is contained partly in the three first chapters of the book of *Ezra*, and first five verses of the fourth; and partly in the book of *Nehemiah*, from the 5th verse of the seventh chapter to the 9th verse of the twelfth: for *Nehemiah* copied all this out of the Chronicles of the *Jews*, written before his days; as may appear by reading the place, and considering that the Priests and Levites who sealed the Covenant on the 24th day of the seventh month, *Nehem.* x. were the very same with those who returned from captivity in the first year of *Cyrus*, *Nehem.* xii. and that all those who returned sealed it: this will be perceived by the following comparison of their names.

The Priests who returned.

The Priests who sealed.

Nehemiah. Ezra ii. 2.
Nehemiah.

Serajah.
Serajah.

*

Azariah.

Jeremiah.
Jeremiah.

Ezra.
Ezra. Nehem. 8.

*

Pashur.

Amariah.
Amariah.

Malluch: or *Melicu*, *Neh.* xii. 2, 14.
Malchijah.

Hattush.
Hattush.

Shechaniah or *Shebaniah*, *Neh.* xii. 3, 14.
Shebaniah.

*

Malluch.

Rehum: or *Harim*, *ib.* 3, 15.
Harim.

Meremoth.

Meremoth.

Iddo.
Obadiah or *Obdia*.

*

Daniel.

Ginnetho: or *Ginnethon*, *Neh.* xii. 4, 16.
Ginnethon.

*

Baruch.

*

Meshullam.

Abijah.
Abijah.

Miamin.
Mijamin.

Maadiah.
Maaziah.

Bilgah.
Bilgai.

Shemajah.
Shemajah.

Jeshua.
Jeshua.

Binnui.
Binnui.

Kadmiel.
Kadmiel.

Sherebiah. שרביה.
Shebaniah. שבניה.

Judah: or *Hodaviah*, *Ezra* ii. 40. & iii. 9. Ωδουια; *Septuag.*
Hodijah.

The *Levites*, *Jeshua*, *Kadmiel*, and *Hodaviah* or *Judah*, here mentioned, are reckoned chief fathers among the people who returned with *Zerubbabel*, *Ezra* ii. 40. and they assisted as well in laying the foundation of the Temple, *Ezra* iii. 9. as in reading the law, and making and sealing the covenant, *Nehem.* viii. 7. & ix. 5. & x. 9, 10.

Comparing therefore the books of *Ezra* and *Nehemiah* together; the history of the *Jews* under *Cyrus*, *Cambyses*, and *Darius Hystaspis*, is that they returned from captivity under *Zerubbabel*, in the first year of *Cyrus*, with the Holy Vessels and a commission to build the Temple; and came to *Jerusalem* and *Judah*, every one to his city, and dwelt in their cities untill the seventh month; and then coming to *Jerusalem*, they first built the Altar, and on the first day of the seventh month began to offer the daily burnt-offerings, and read in the book of the Law, and they kept a solemn fast, and sealed a Covenant; and thenceforward the Rulers of the people dwelt at *Jerusalem*, and the rest of the people cast lots, to dwell one in ten at *Jerusalem*, and the rest in the cities of *Judah*: and in the second year of their coming, in the second month, which was six years before the death of *Cyrus*, they laid the foundation of the Temple; but *the adversaries of* Judah *troubled them in building, and hired counsellors against them all the days of* Cyrus, and longer, *even until the Reign of* Darius *King of* Persia: but in the second year of his Reign, by the prophesying of *Haggai* and *Zechariah*, they returned to the work; and by the help of a new decree from *Darius*, finished it on the third day of the month *Adar*, in the sixth year of his Reign, and kept the Dedication with joy, and the Passover, and Feast of Unleavened Bread.

Now this *Darius* was not *Darius Nothus*, but *Darius Hystaspis*, as I gather by considering that the second year of this *Darius* was the seventieth of the indignation against *Jerusalem*, and the cities of *Judah*, which indignation commenced with the invasion of *Jerusalem*, and the cities of *Judah* by *Nebuchadnezzar*, in the ninth year of *Zedekiah*, *Zech.* i. 12. *Jer.* xxxiv. 1, 7, 22. & xxxix. 1. and that the fourth year of this *Darius*, was the seventieth from the burning of the Temple in the eleventh year of *Zedekiah*, *Zech.* vii. 5. & *Jer.* lii. 12. both which are exactly true of *Darius Hystaspis*: and that in the second year of this *Darius* there were men living who had seen the first Temple, *Hagg.* ii. 3. whereas the second year of *Darius Nothus* was 166 years after the desolation of the Temple and City. And further, if the finishing of the Temple be deferred to the sixth year of *Darius Nothus*, *Jeshua* and *Zerubbabel* must have been the one High-Priest, the other Captain of the people an hundred and eighteen years together, besides their ages before; which is surely too long: for in the first year of *Cyrus* the chief Priests were *Serajah*, *Jeremiah*, *Ezra*, *Amariah*, *Malluch*, *Shechaniah*,

Rehum, *Meremoth*, *Iddo*, *Ginnetho*, *Abijah*, *Miamin*, *Maadiah*, *Bilgah*, *Shemajah*, *Joiarib*, *Jedaiah*, *Sallu*, *Amok*, *Hilkiah*, *Jedaiah*: these were Priests in the days of *Jeshua*, and the eldest sons of them all, *Merajah* the son of *Serajah*, *Hananiah* the son of *Jeremiah*, *Meshullam* the son of *Ezra*, &c. were chief Priests in the days of *Joiakim* the son of *Jeshua*: *Nehem.* xii. and therefore the High Priesthood of *Jeshua* was but of an ordinary length.

I have now stated the history of the *Jews* in the Reigns of *Cyrus*, *Cambyses*, and *Darius Hystaspis*: it remains that I state their history in the Reigns of *Xerxes*, and *Artaxerxes Longimanus*: for I place the history of *Ezra* and *Nehemiah* in the Reign of this *Artaxerxes*, and not in that of *Artaxerxes Mnemon*: for during all the *Persian* Monarchy, until the last *Darius* mentioned in Scripture, whom I take to be *Darius Nothus*, there were but six High-Priests in continual succession of father and son, namely, *Jeshua*, *Joiakim*, *Eliashib*, *Joiada*, *Jonathan*, *Jaddua*, and the seventh High-Priest was *Onias* the son of *Jaddua*, and the eighth was *Simeon Justus*, the Son of *Onias*, and the ninth was *Eleazar* the younger brother of *Simeon*. Now, at a mean reckoning, we should allow about 27 or 28 years only to a Generation by the eldest sons of a family, one Generation with another, as above; but if in this case we allow 30 years to a Generation, and may further suppose that *Jeshua*, at the return of the captivity in the first year of the Empire of the *Persians*, was about 30 or 40 years old; *Joiakim* will be of about that age in the 16th year of *Darius Hystaspis*, *Eliashib* in the tenth year of *Xerxes*, *Joiada* in the 19th year of *Artaxerxes Longimanus*, *Jonathan* in the 8th year of *Darius Nothus*, *Jaddua* in the 19th year of *Artaxerxes Mnemon*, *Onias* in the 3d year of *Artaxerxes Ochus*, and *Simeon Justus* two years before the death of *Alexander* the Great: and this reckoning, as it is according to the course of nature, so it agrees perfectly well with history; for thus *Eliashib* might be High-Priest, and have grandsons, before the seventh year of *Artaxerxes Longimanus*, *Ezra* x. 6. and without exceeding the age which many old men attain unto, continue High-Priest ‘till after the 32d year of that King, *Nehem.* xiii. 6, 7. and his grandson *Johanan*, or *Jonathan*, might have a chamber in the Temple in the seventh year of that King, *Ezra* x. 6. and be High-Priest before *Ezra* wrote the sons of *Levi* in the book of *Chronicles*; *Nehem.* xii. 23. and in his High-Priesthood, he might slay his younger brother *Jesus* in the Temple, before the end of the Reign of *Artaxerxes Mnemon*: *Joseph. Antiq.* l. xi. c. 7. and

Jaddua might be High-Priest before the death of *Sanballat*, *Joseph. ib.* and before the death of *Nehemiah*, *Nehem.* xii. 22. and also before the end of the Reign of *Darius Nothus*; and he might thereby give occasion to *Josephus* and the later *Jews*, who took this King for the last *Darius*, to fall into an opinion that *Sanballat, Jaddua*, and *Manasseh* the younger brother of *Jaddua*, lived till the end of the Reign of the last *Darius*: *Joseph. Antiq.* l. xi. c. 7, 8. and the said *Manasseh* might marry *Nicaso* the daughter of *Sanballat*, and for that offence be chased from *Nehemiah*, before the end of the Reign of *Artaxerxes Longimanus*; *Nehem*. xiii. 28. *Joseph. Antiq.* l. xi. c. 7, 8. and *Sanballat* might at that time be *Satrapa* of *Samaria*, and in the Reign of *Darius Nothus*, or soon after, build the Temple of the *Samaritans* in *Mount Gerizim*, for his son-in-law *Manasseh*, the first High-Priest of that Temple; *Joseph. ib.* and *Simeon Justus* might be High-Priest when the *Persian* Empire was invaded by *Alexander* the Great, as the *Jews* represent, *Joma* fol. 69. 1. *Liber Juchasis. R. Gedaliah*, &c. and for that reason he might be taken by some of the *Jews* for the same High-Priest with *Jaddua*, and be dead some time before the book of *Ecclesiasticus* was writ in *Hebrew* at *Jerusalem*, by the grandfather of him, who in the 38th year of the *Egyptian* Æra of *Dionysius*, that is in the 77th year after the death of *Alexander* the Great, met with a copy of it in *Egypt*, and there translated it into *Greek: Ecclesiast.* ch. 50. & *in Prolog.* and *Eleazar*, the younger brother and successor of *Simeon*, might cause the Law to be translated into *Greek*, in the beginning of the Reign of *Ptolemaus Philadelphus*: *Joseph. Antiq.* l. xii. c. 2. and *Onias* the son of *Simeon Justus*, who was a child at his father's death, and by consequence was born in his father's old age, might be so old in the Reign of *Ptolemæus Euergetes*, as to have his follies excused to that King, by representing that he was then grown childish with old age. *Joseph. Antiq.* l. xii. c. 4. In this manner the actions of all these High-Priests suit with the Reigns of the Kings, without any straining from the course of nature: and according to this reckoning the days of *Ezra* and *Nehemiah* fall in with the Reign of the first *Artaxerxes*; for *Ezra* and *Nehemiah* flourished in the High Priesthood of *Eliashib*, *Ezra* x. 6. *Nehem.* iii. 1. & xiii. 4, 28. But if *Eliashib*, *Ezra* and *Nehemiah* be placed in the Reign of the second *Artaxerxes*, since they lived beyond the 32d year of *Artaxerxes*, *Nehem.* xiii. 28, there must be at least 160 years allotted to the three first High-Priests, and but 42 to the four or five last, a division too

unequal: for the High Priesthoods of *Jeshua*, *Joiakim*, and *Eliashib*, were but of an ordinary length, that of *Jeshua* fell in with one Generation of the chief Priests, and that of *Joiakim* with the next Generation, as we have shewed already; and that of *Eliashib* fell in with the third Generation: for at the dedication of the wall, *Zechariah* the son of *Jonathan*, the son of *Shemaiah*, was one of the Priests, *Nehem.* xii. 35, and *Jonathan* and his father *Shemaiah*, were contemporaries to *Joiakim* and his father *Jeshua*: *Nehem.* xii. 6, 18. I observe further that in the first year of *Cyrus*, *Jeshua*, and *Bani*, or *Binnui*, were chief fathers of the *Levites*, *Nehem*. vii. 7. 15. & *Ezra* ii. 2. 10. & iii. 9. and that *Jozabad* the son of *Jeshua*, and *Noadiah* the son of *Binnui*, were chief Levites in the seventh year of *Artaxerxes*, when *Ezra* came to *Jerusalem*, *Ezra* viii. 33. so that this *Artaxerxes* began his Reign before the end of the second Generation: and that he Reigned in the time of the third Generation is confirmed by two instances more; for *Meshullam* the son of *Berechiah*, the son of *Meshezabeel*, and *Azariah* the son of *Maaseiah*, the son of *Ananiah*, were fathers of their houses at the repairing of the wall; *Nehem.* iii. 4, 23. and their grandfathers, *Meshazabeel* and *Hananiah*, subscribed the covenant in the Reign of *Cyrus*: *Nehem.* x. 21, 23. Yea *Nehemiah*, this same *Nehemiah* the son of *Hachaliah*, was the *Tirshatha*, and subscribed it, *Nehem.* x. 1, & viii. 9, & *Ezra* ii. 2, 63. and therefore in the 32d year of *Artaxerxes Mnemon*, he will be above 180 years old, an age surely too great. The same may be said of *Ezra*, if he was that Priest and Scribe who read the Law, *Nehem.* viii. for he is the son of *Serajah*, the son of *Azariah*, the son of *Hilkiah*, the son of *Shallum*, &c. *Ezra* vii. 1. and this *Serajah* went into captivity at the burning of the Temple, and was there slain, 1 *Chron.* vi. 14. 2 *King.* xxv. 18. and from his death, to the twentieth year of *Artaxerxes Mnemon*, is above 200 years; an age too great for *Ezra*.

I consider further that *Ezra*, chap. iv. names *Cyrus*, *, *Darius*, *Ahasuerus*, and *Artaxerxes*, in continual order, as successors to one another, and these names agree to *Cyrus*, *, *Darius Hystaspis*, *Xerxes*, and *Artaxerxes Longimanus*, and to no other Kings of *Persia*: some take this *Artaxerxes* to be not the Successor, but the Predecessor of *Darius Hystaspis*, not considering that in his Reign the *Jews* were busy in building the City and the Wall, *Ezra* iv. 12. and by consequence had finished the Temple before. *Ezra* describes first how the people of the land hindered the building

of the Temple all the days of *Cyrus*, and further, untill the Reign of *Darius*; and after the Temple was built, how they hindered the building of the city in the Reign of *Ahasuerus* and *Artaxerxes*, and then returns back to the story of the Temple in the Reign of *Cyrus* and *Darius*; and this is confirmed by comparing the book of *Ezra* with the book of *Esdras*: for if in the book of *Ezra* you omit the story of *Ahasuerus* and *Artaxerxes*, and in that of *Esdras* you omit the same story of *Artaxerxes*, and that of the three wise men, the two books will agree: and therefore the book of *Esdras*, if you except the story of the three wise men, was originally copied from authentic writings of Sacred Authority. Now the story of *Artaxerxes*, which, with that of *Ahasuerus*, in the book of *Ezra* interrupts the story of *Darius*, doth not interrupt it in the book of *Esdras*, but is there inferred into the story of *Cyrus*, between the first and second chapter of *Ezra*; and all the rest of the story of *Cyrus*, and that of *Darius*, is told in the book of *Esdras* in continual order, without any interruption: so that the *Darius* which in the book of *Ezra* precedes *Ahasuerus* and *Artaxerxes*, and the *Darius* which in the same book follows them, is, by the book of *Esdras*, one and the same *Darius*; and I take the book of *Esdras* to be the best interpreter of the book of *Ezra*: so the *Darius* mentioned between *Cyrus* and *Ahasuerus*, is *Darius Hysaspis*; and therefore *Ahasuerus* and *Artaxerxes* who succeed him, are *Xerxes* and *Artaxerxes Longimanus*; and the *Jews* who came up from *Artaxerxes* to *Jerusalem*, and began to build the city and the wall, *Ezra* iv. 13. are *Ezra* with his companions: which being understood, the history of the *Jews* in the Reign of these Kings will be as follows.

After the Temple was built, and *Darius Hystaspis* was dead, the enemies of the *Jews* in the beginning of the Reign of his successor *Ahasuerus* or *Xerxes*, wrote unto him an accusation against them; *Ezra* iv. 6. but in the seventh year of his successor *Artaxerxes*, *Ezra* and his companions went up from *Babylon* with Offerings and Vessels for the Temple, and power to bestow on it out of the King's Treasure what should be requisite; *Ezra* vii. whence the Temple is said to be finished, *according to the commandment of* Cyrus*, and* Darius*, and* Artaxerxes *King of* Persia: *Ezra* vi. 14. Their commission was also to set Magistrates and Judges over the land, and thereby becoming a new Body Politic, they called a great Council or Sanhedrim to separate the people from strange wives; and they were also encouraged to attempt the building of *Jerusalem* with its wall: and thence

Ezra saith in his prayer, that *God had extended mercy unto them in the sight of the Kings of* Persia*, and given them a reviving to set up the house of their God, and to repair the desolations thereof, and to give them a WALL in* Judah*, even in* Jerusalem. *Ezra* ix. 9. But when they had begun to repair the wall, their enemies wrote against them to *Artaxerxes*: *Be it known*, say they, *unto the King, that the* Jews *which came up from thee to us, are come unto* Jerusalem*, building the rebellious and the bad city, and have set up the walls thereof, and joined the foundations*, &c. And the King wrote back that the *Jews* should cease and the city not be built, until another commandment should be given from him: whereupon their enemies *went up to* Jerusalem*, and made them cease by force and power*; *Ezra* iv. but in the twentieth year of the King, *Nehemiah* hearing that the *Jews* were in great affliction and distress, and that the wall of *Jerusalem*, that wall which had been newly repaired by *Ezra*, *was broken down, and the gates thereof burnt wth fire*; he obtained leave of the King to go and build the city, and the Governour's house, *Nehem.* i. 3. & ii. 6, 8, 17. and coming to *Jerusalem* the same year, he continued Governor twelve years, and built the wall; and being opposed by *Sanballat*, *Tobiah* and *Geshem*, he persisted in the work with great resolution and patience, until the breaches were made up: then *Sanballat* and *Geshem* sent messengers unto him five times to hinder him from setting up the doors upon the gates: but notwithstanding he persisted in the work, until the doors were also set up: so the wall was finished in the eight and twentieth year of the King, *Joseph. Antiq.* l. xi. c. 5. in the five and twentieth day of the month *Elul*, or sixth month, in fifty and two days after the breaches were made up, and they began to work upon the gates. While the timber for the gates was preparing and seasoning, they made up the breaches of the wall; both were works of time, and are not jointly to be reckoned within the 52 days: this is the time of the last work of the wall, the work of setting up the gates after the timber was seasoned and the breaches made up. When he had set up the gates, he dedicated the wall with great solemnity, and appointed Officers *over the chambers for the Treasure, for the Offerings, for the First-Fruits, and for the Tithes, to gather into them out of the fields of the cities, the portions appointed by the law for the Priests and Levites; and the Singers and the Porters kept the ward of their God*; Nehem. xii. *but the people in the city were but few, and the houses were unbuilt*: *Nehem.* vii. 1, 4. and in this condition he left *Jerusalem* in the 32d

year of the King; and after sometime returning back from the King, he reformed such abuses as had been committed in his absence. *Nehem.* xiii. In the mean time, the Genealogies of the Priests and Levites were recorded in the book of the *Chronicles*, in the days of *Eliashib*, *Joiada*, *Jonathan*, and *Jaddua*, until the Reign of the next King *Darius Nothus*, whom *Nehemiah* calls *Darius* the *Persian*: *Nehem.* xii. 11, 22, 23. whence it follows that *Nehemiah* was Governor of the *Jews* until the Reign of *Darius Nothus*. And here ends the Sacred History of the *Jews*.

The histories of the *Persians* now extant in the East, represent that the oldest Dynasties of the Kings of *Persia*, were those whom they call *Pischdadians* and *Kaianides*, and that the Dynasty of the *Kaianides* immediately succeeded that of the *Pischdadians*. They derive the name *Kaianides* from the word *Kai*, which, they say, in the old *Persian* language signified a Giant or great King; and they call the first four Kings of this Dynasty, *Kai-Cobad, Kai-Caus, Kai-Cosroes*, and *Lohorasp*, and by *Lohorasp* mean *Kai-Axeres*, or *Cyaxeres*: for they say that *Lohorasp* was the first of their Kings who reduced their armies to good order and discipline, and *Herodotus* affirms the same thing of *Cyaxeres*: and they say further, that *Lohorasp* went eastward, and conquered many Provinces of *Persia*, and that one of his Generals, whom the *Hebrews* call *Nebuchadnezzar*, the *Arabians Bocktanassar*, and others *Raham* and *Gudars*, went westward, and conquered all *Syria* and *Judæa*, and took the city of *Jerusalem* and destroyed it: they seem to call *Nebuchadnezzar* the General of *Lohorasp*, because he assisted him in some of his wars. The fifth King of this Dynasty, they call *Kischtasp*, and by this name mean sometimes *Darius Medus*, and sometimes *Darius Hystaspis*: for they say that he was contemporary to *Ozair* or *Ezra*, and to *Zaradust* or *Zoroastres*, the Legislator of the *Ghebers* or fire-worshippers, and established his doctrines throughout all *Persia*; and here they take him for *Darius Hystaspis*: they say also that he was contemporary to *Jeremiah*, and to *Daniel*, and that he was the son and successor of *Lohorasp*, and here they take him for *Darius* the *Mede*. The sixth King of the *Kaianides*, they call *Bahaman*, and tell us that *Bahaman* was *Ardschir Diraz*, that is *Artaxerxes Longimanus*, so called from the great extent of his power: and yet they say that *Bahaman* went westward into *Mesopotamia* and *Syria*, and conquered *Belshazzar* the son of *Nebuchadnezzar*, and gave the Kingdom to *Cyrus* his

Lieutenant-General over *Media*: and here they take *Bahaman* for *Darius Medus*. Next after *Ardschir Diraz*, they place *Homai* a Queen, the mother of *Darius Nothus*, tho' really she did not Reign: and the two next and last Kings of the *Kaianides*, they call *Darab* the bastard son of *Ardschir Diraz*, and *Darab* who was conquered by *Ascander Roumi*, that is *Darius Nothus*, and *Darius* who was conquered by *Alexander* the *Greek*: and the Kings between these two *Darius's* they omit, as they do also *Cyrus*, *Cambyses*, and *Xerxes*. The Dynasty of the *Kaianides*, was therefore that of the *Medes* and *Persians*, beginning with the defection of the *Medes* from the *Assyrians*, in the end of the Reign of *Sennacherib*, and ending with the conquest of *Persia* by *Alexander* the Great. But their account of this Dynasty is very imperfect, some Kings being omitted, and others being confounded with one another: and their Chronology of this Dynasty is still worse; for to the first King they assign a Reign of 120 years, to the second a Reign of 150 years, to the third a Reign of 60 years, to the fourth a Reign of 120 years, to the fifth as much, and to the sixth a Reign of 112 years.

This Dynasty being the Monarchy of the *Medes*, and *Persians*; the Dynasty of the *Pischdadians* which immediately preceded it, must be that of the *Assyrians*: and according to the oriental historians this was the oldest Kingdom in the world, some of its Kings living a thousand years a-piece, and one of them Reigning five hundred years, another seven hundred years, and another a thousand years.

We need not then wonder, that the *Egyptians* have made the Kings in the first Dynasty of their Monarchy, that which was seated at *Thebes* in the days of *David*, *Solomon*, and *Rehoboam*, so very ancient and so long lived; since the *Persians* have done the like to their Kings, who began to Reign in *Assyria* two hundred years after the death of *Solomon*; and the *Syrians* of *Damascus* have done the like to their Kings *Adar* and *Hazael*, who Reigned an hundred years after the death of *Solomon*, *worshipping them as Gods, and boasting their antiquity, and not knowing*, saith *Josephus*, *that they were but modern*.

And whilst all these nations have magnified their Antiquities so exceedingly, we need not wonder that the *Greeks* and *Latines* have made their first Kings a little older than the truth.

FINIS.

NOTES.

[1] *In the life of* Lycurgus.

[2] In the life of *Solon*.

[3] Herod. l. 2.

[4] Plutarch. de Pythiæ Oraculo.

[5] Plutarch. in Solon

[6] Apud Diog. Laert. in Solon .

[7] Plin. nat. hist. l. 7. c. 56.

[8] Ib. l. 5. c. 29.

[9] Cont. Apion. sub initio.

[10] In Ακουσιλαος.

[11] Joseph. cont. Ap. l. 1.

[12] Dionys. l. 1. initio.

[13] Plutarch. in Numa.

[14] Diodor. l. 16. . Edit. Steph.

[15] Polyb. . B.

[16] In vita Lycurgi, sub initio.

[17] In Solone.

[18] Plutarch. in Romulo & Numa.

[19] In Æneid. 7. v. 678.

[20] Diodor. l. 1.

[21] Plutarch. in Romulo.

[22] Lib. I. in Proæm.

[23] Plutarch. in Lycurgo sub initio.

[24] Pausan. l. 4. c. 13. . & c. 7. & l. 3. c. 15. .

[25] Pausan. l. 4. c. 7. .

[26] Herod. l. 7.

[27] Herod. l. 8.

[28] Plato in Minoe.

[29] Thucyd. l. 1. .

[30] Athen. l. 14

[31] Pausan. l. 5. c. 8.

[32] Pausan. l. 6. c. 19.

[33] Plutarch. de Musica. Clemens Strom. l. 1. .

[34] Herod. l. 6. c. 52.

[35] Pausan. l. 5. c. 4.

[36] Pausan. l. 5. c. 1, 3, 8. Strabo, l. 8, .

[37] Pausan. l. 5. c.4.

[38] Pausan. l. 5. c.18.

[39] Solin. c. 30.

[40] Dionys. l. 1. .

[41] Apollon. Argonaut. l. 1. v. 101.

[42] Plutarch. in Theseo.

[43] Diodor. l. 1. .

[44] Joseph. Antiq. l. 4. c. 8

[45] Contra Apion. l. 1.

[46] Hygin. Fab. 144.

[47] Gen. i. 14. & viii. 22. Censorinus c. 19 & 20. Cicero in Verrem. Geminus c. 6.

[48] Cicero in Verrem.

[49] Diodor. l. 1.

[50] Cicero in Verrem.

[51] Gem. c. 6.

[52] Apud Laertium, in Cleobulo.

[53] Apud Laertium, in Thalete. Plutarch. in Solone.

[54] Censorinus c. 18. Herod. l. 2. prope initium.

[55] Apollodor l. 3. . Strabo l. 16. . Homer. Odyss. T. v. 179.

[56] Herod. l. 1.

[57] Plutarch. in Numa.

[58] Diodor. l. 3. .

[59] Diodor. l. 1. .

[60] Apud Theodorum Gazam de mentibus.

[61] Apud Athenæum, l. 14.

[62] Suidas in Σαροι.

[63] Herod. l. 1.

[64] Julian. Or: 4.

[65] Strabo l. 17. .

[66] Diodor. l. 1. .

[67] Plutarch de Osiride & Iside. Diodor. l. 1. .

[68] Hecatæus apud Diodor. l. 1. .

[69] Isagoge Sect. 23, a Petavio edit.

[70] Hipparch. ad Phænom. l.2. Sect. 3. a Petavio edit.

[71] Hipparch. ad Phænom. l.1. Sect. 2.

[72] Strom. 1. , 352.

[73] Laertius Proem. l. 1.

[74] Apollodor. l. 1. c. 9. Sect. 16.

[75] Suidas in Αναγαλλις.

[76] Apollodor. l. 1. c. 9. Sect. 25.

[77] Laert. in Thalete. Plin. l. 2. c. 12.

[78] Plin. l. 18. c. 23.

[79] Petav. Var. Disl. l. 1. c. 5.

[80] Petav. Doct. Temp. l. 4. c. 26.

[81] Columel. l. 9. c. 14. Plin. l. 18. c. 25.

[82] Arrian. l. 7.

[83] In Moph.

[84] Euanthes apud Athenæum, l. 67. .

[85] Hyginus Fab. 14.

[86] Homer. Odyss. l. 8. v. 292.

[87] Hesiod. Theogon. v. 945.

[88] Pausan. l. 2. c. 23.

[89] Strabo l. 16.

[90] Isa. xxiii. 2. 12.

[91] 1 Kings v. 6

[92] Steph. in Azoth.

[93] Conon. Narrat. 37.

[94] Nonnus Dionysiac l. 13 v. 333 α sequ.

[95] Athen. l. 4. c. 23.

[96] Strabo. l. 10. . Herod. l. 1.

[97] Strabo. l. 16.

[98] 2 Chron. xxi. 8, 10. & 2 Kings. viii. 20, 22.

[99] Herod. l. 1. initio, & l. 7. circa medium.

[100] Solin. c. 23, Edit. Salm.

[101] Plin. l. 4. c. 22.

[102] Strabo. l. 9. . & l. 10. .

[103] Herod. l. 5.

[104] Strabo. l. 1. .

[105] Strabo. l. 1. .

[106] Bochart. Canaan. l. 1. c. 34.

[107] Strabo. l. 3. .

[108] Vid. Phil. Transact. Nº. 359.

[109] Canaan, l. 1. c. 34. .

[110] Aristot. de Mirab.

[111] Plin. l. 7. c. 56.

[112] Canaan. l. 1. c. 39.

[113] Philostratus in vita Apollonii l. 5. c. 1. apud Photium.

[114] Arnob. l. 1.

[115] Bochart. in Canaan. l. 1. c. 24.

[116] Oros. l. 5. c. 15. Florus l. 3. c. 1. Sallust. in Jugurtha.

[117] Antiq. l. 8. c. 2, 5. & l. 9. c. 14.

[118] Thucyd. l. 6. initio. Euseb. Chr.

[119] Thucyd. ib.

[120] Apud Dionys. l. 1. .

[121] Herod. l. 8. c. 137.

[122] Herod. l. 8.

[123] Herod. l. 8. c. 139.

[124] Thucyd. l. 2. prope finem.

[125] Herod l. 6. c. 127.

[126] Strabo. l. 8. .

[127] Pausan. l. 6. c. 22.

[128] Pausan. l. 5. c. 9.

[129] Strabo. l. 8. .

[130] Phanias Eph. ap. Plut. in vita Solonis.

[131] Vid. Dionys. Halicarnass. l. 1. , 45.

[132] Pausan. l. 2. c. 6.

[133] Hygin. Fab. 7 & 8.

[134] Homer. Iliad. O.

[135] Homer. Odys. H. Diodor. l. 5. p.237.

[136] Diodor. l. 1. p.17.

[137] Pausan. l. 2. c. 25.

[138] Apollodor. l. 2. Sect. 5.

[139] Herod l. 7.

[140] Bochart. Canaan part. 2. ca.

[141] Apollon. Argonaut. l. 1. v. 77.

[142] Conon. Narrat. 13.

[143] Pausan. l. 5. c. 1. Apollodor. l. 1. c. 7.

[144] Pausan. l. 7. c. 1.

[145] Pausan. l. 1. c. 37. & l. 10. c. 29.

[146] Pausan. l. 7. c. 1.

[147] Hesych. in Κραναος.

[148] Themist. Orat. 19.

[149] Plato in Alcib. 1.

[150] Pausan. l. 8. c. 1, 2, 3, 4, 5.

[151] Pausan. l. 8. c. 4. Apollon. Argonaut. l. 1. v. 161.

[152] Pausan. l. 8. c. 4.

[153] Herod. l. 5. c. 58.

[154] Strabo l. 10. , 465, 466.

[155] Solin. Polyhist. c. 11.

[156] Isidor. originum. lib. xi. c. 6.

[157] Clem. Strom. l. 1.

[158] Pausan. l. 9. c. 11.

[159] Strabo l. 10. , 473. Diodor. l. 5. c. 4.

160 Strabo l. 10. . 472. Diodor. l. 5. c. 4.

161 Lucian de sacrificiis. Apollod. l. 1. c. 1. sect. 3. & c. 2. sect. 1.

162 Boch. in Canaan. l. 1. c. 15.

163 Athen. l. 13. .

164 Plutarch in Theseo.

165 Homer Il. N. & Ξ. & Odys. Λ. & T.

166 Herod. l. 1.

167 Apollod. l. 3. c. 1. Hygin. Fab. 40, 41, 42. 178.

168 Lucian. de Dea Syria.

169 Diodor. l. 5. c. 4,

170 Argonaut. l. 2. v. 1236.

171 Lucian. de sacrificiis.

172 Porphyr. in vita Pythag.

173 Cicero de Nat. Deor. l. 3.

174 Callimac. Hymn 1. v. 8.

175 Cypr. de Idolorum vanitate.

176 Tert. Apologet. c. 10.

177 Macrob. Saturnal. lib. 1. c. 7.

178 Pausan. l. 5. c. 7, vid. et. c. 13. 14. & l. 8. c. 2.

179 Pausan. l. 8. c. 29.

180 Diodor. l. 5. .

181 Pausan. l. 5. c. 8. 14.

182 Herod. l. 2. c. 44.

[183] Cic. de natura Deorum. lib. 3.

[184] Diodor. .

[185] Dionys. l. 1. , 42.

[186] Lucian. de saltatione.

[187] Arnob. adv. gent. l. 6. .

[188] Herod. l. 2. initio.

[189] Diodor. l. 1. .

[190] Hesiod. opera. v. 108.

[191] Apollon. Argonaut. l. 4. v. 1643.

[192] Vita Homeri Herodoto adfer.

[193] Herod. l. 2.

[194] 1 Sam. ix. 16. & xiii. 5. 19, 20.

[195] Clem. Al. Strom. 1. .

[196] Plin. l. 7.

[197] Plato in Timæo.

[198] Apollodor. l. 3. c. 1.

[199] Herod. l. 2.

[200] Hygin. Fab. 7.

[201] Apollodor. l. 3. c. 6.

[202] Homer. Il. Γ. vers 572.

[203] Thucyd. l. 2. . & Plutarch. in Theseo.

[204] Strabo. l. 9. .

[205] Apud Strabonem, l. 9. .

206 Pausan. l. 2. c. 15.

207 Strabo. l. 8. .

208 Pausan. l. 8. c. 1. 2.

209 Plin. l. 7. c. 56.

210 Dionys. l. 1. .

211 Dionys. l. 2. .

212 Diodor l. 5. . 225. 240.

213 Ammian. l. 17. c. 7.

214 Plin. l. 2. c. 87.

215 Diodor. l. 5. . 204.

216 Apud Diodor. l. 5. .

217 Dionys. l. 1. .

218 Dionys. l. 1. . 34.

219 Dionys. ib.

220 Ptol. Hephæst. l. 2.

221 Dionys. l. 2. .

222 Diodor. l. 5. .

223 Ister apud Porphyr. abst. l. 2. s. 56.

224 Bochart. Canaan. l. 1. c. 15.

225 Apud Strabonem. lib. 14. .

226 Strabo. l. 17. .

227 Diodor. l. 3. .

228 Herod. l. 1.

229 1 King. xx. 16.

230 Genes. xiv. Deut ii. 9. 12. 19.-22.

231 Exod. i. 9. 22.

232 Job xxxi. 11.

233 Job xxxi. 26.

234 1 Chron. xi. 4. 5. Judg. i. 21. 2 Sam v. 6.

235 Vide Hermippum apud Athenæum, I.

236 Argonaut. l. 4. v. 272.

237 Diodor. l. 1. .

238 Apud Diodorum l. 3. .

239 Diodor. l. 3. . 132.

240 Pausan. l. 2. c. 20. .

241 Diodor. l. 3. & Schol. Apollonii. l. 2.

242 Ammian. l. 22. c. 8.

243 Justin. l. 2. c. 4.

244 Diodor. l. 1. .

245 Apud Diodor. l. 3. .

246 Step. in Αμμωνια.

247 Plin. l. 6. c. 28.

248 Ptol. l. 6. c. 7.

249 D. Augustin. in exposit. epist. ad Rom. sub initio.

250 Procop. de bello Vandal. l. 2. c. 10.

251 Chron. l. 1. .

[252] Gemar. ad tit. Shebijth. ca.

[253] Manetho apud Josephum cont. Appion. l. 1. .

[254] Herod. l. 2.

[255] Jerem. xliv. 1. Ezek. xxix. 14.

[256] Menetho apud Porphyrium περι απονης* * l. 1. Sect. 55. Et. Euseb. Præp. l. 4. c. 16. .

[257] Diodor. l. 3. .

[258] Diodor. apud Photium in Biblioth.

[259] Herod. l. 2.

[260] Plutarch. de Iside. . Diodor. l. 1. .

[261] Augustin. de Civ. Dei. l. 18. c. 47.

[262] Apud Photium, c. 279.

[263] Fab. 274.

[264] Apud Euseb. Chron.

[265] Plin. l. 6. c. 23, 28. & l. 7. c. 56.

[266] Diodor. l. 1. .

[267] Pausan. l. 4. c. 23.

[268] Apollodor. l. 2. c. 1.

[269] Dionys. in Perie. v. 623.

[270] Fab. 275.

[271] Saturnal. l. 5. c. 21.

[272] Lucan. l. 10.

[273] Lucan. l. 9.

[274] Herod. l. 1.

[275] Diodor. l. 1. . Herod. l. 2 c. 102, 103, 106.

[276] Pausan. l. 10. Suidas in Παρνασιοι.

[277] Lucan l. 5.

[278] Argonaut. l. 4. v. 272.

[279] Herod. l. 2. c. 109.

[280] In vita Pythag. c. 29.

[281] Diodor. l. 1.

[282] Dionys. de situ Orbis.

[283] Diodor. l. 1. .

[284] Plutarch. de Iside & Osiride.

[285] Diodor. l. 1. .

[286] Lucian. de Dea Syria

[287] Exod. xxxiv. 13. Num. xxxiii. 52. Deut. vii. 5. & xii. 3.

[288] 2 Sam. viii. 10. & 1 King. xi. 23.

[289] Antiq l. 9. c. 2.

[290] Justin. l. 36.

[291] Diodor. l. 5. .

[292] Suidas in Σαρδαναπαλος.

[293] Apollod. l. 3.

[294] Argonaut. l. 4. v. 424. & l. 1. v. 621.

[295] Homer Odyss. Θ. v. 268. 292. & Hymn. 1. & 2. in Venerem. & Hesiod. Theogon. v. 192.

[296] Pausan. l. 1. c. 20.

[297] Clem. Al. Admon. ad Gent. . Apollodor. l. 3. c. 13. Pindar. Pyth. Ode 2. Hesych. in Κινυραδαι. Steph. in Αμαθους. Strabo. l. 16, .

[298] Clem. Al. Admon. ad Gent. . Plin. l. 7. c. 56.

[299] Herod. l. 2.

[300] Herod. l. 3. c. 37.

[301] Bochart. Canaan. l. 1. c. 4.

[302] Apud Athenæum l. 9. .

[303] Ptol. l. 2.

[304] Diod. l. 3. .

[305] Vas. Chron. Hisp. c. 10.

[306] Strabo l. 16. .

[307] Homer.

[308] Diodor. l. 3. p.132, 133

[309] Plato in Timæo. & Critia.

[310] Apud Diodor. l. 5. .

[311] Pamphus apud Pausan. l. 7. c. 21.

[312] Herod. l. 2. c. 50.

[313] Plutarch in Iside.

[314] Lucian de Saltatione.

[315] Agatharc. apud Photium.

[316] Hygin. Fab. 150.

[317] Plutarch. in Iside.

[318] Diodor. l. 1. .

[319] Pindar. Pyth. Ode 9.

[320] Diodor. l. 1. .

[321] Plin. l. 6. c. 29.

[322] Herod. l. 2. c. 110.

[323] Manetho apud Josephum cont. Apion. , 1053.

[324] Diodor. l. 1. .

[325] Herod. l. 2.

[326] Strabo. l. 1. .

[327] Pindar. Pyth. Ode 4.

[328] Strabo. l. 1. , 45, 46.

[329] Diodor. l. 1. .

[330] Manetho

[331] Herod. l. 2

[332] Herod. l. 2.

[333] Ammian. l. 17. c. 4.

[334] Strabo. l. 17. .

[335] Annal. l. 2. c. 60.

[336] Diodor. l. 1. .

[337] Diodor. l. 1. .

[338] Joseph. Ant. l. 1. c. 4.

[339] Heordot. l. 2. c. 141.

[340] Isa. xix. 2, 4, 11, 13, 23.

[341] Herod. l. 2. c. 148, &c.

[342] Plin. l. 36. c. 8. 9.

[343] Diodor. l. 1 , &c.

[344] Diodor. l. 2, .

[345] Amos vi. 13, 14.

[346] Amos vi. 2.

[347] 2 Chron. xxvi. 6.

[348] 2 King. xiv. 25.

[349] 2 King. xix. 11.

[350] Isa. x. 8.

[351] 1 Chron. v. 26. 2 King. xvi. 9 & xvii. 6, 24. & Ezra iv. 9.

[352] Isa. xxii. 6.

[353] 2 King. xvii. 24, 30, 31. & xviii. 33, 34, 35. 2 Chron. xxxii. 15.

[354] 2 Chron. xxxii. 13, 15.

[355] Hosea v. 13. & x. 6, 14.

[356] Herod. l. iii. c. 155.

[357] Herod. l. i. c. 184.

[358] Beros. apud Josep. contr. Appion. l. 1.

[359] Curt. l. 5. c. 1.

[360] Apud Euseb. Præp. l. 9. c. 41.

[361] Doroth. apud Julium Firmicum.

[362] Heren. apud Steph. in Bαβ.

[363] Abyden apud Euseb. Præp. l. 9. c. 41.

[364] Isa. xxiii. 13.

[365] Tobit. i. 13. Annal. Tyr. apud Joseph. Ant. l. 9. c. 14.

[366] Hosea x. 14.

[367] Tobit. i. 15.

[368] Tobit. i. 21. 2 King. xix. 37. Ptol. Canon.

[369] Isa. xx. 1, 3, 4.

[370] Herod. l. 1. c. 72. & l. 7. c. 63.

[371] Apud Athenæum l. xii. .

[372] Herod. l. 1. c. 96. &c.

[373] Athenæus l. 12. , 530.

[374] Herod. l. 1. c. 102.

[375] Herod. l. 1. c. 103. Steph. in Παρθυαιοι.

[376] Alexander Polyhist. apud Euseb. in Chron. & apud Syncellum. .

[377] 2 Kings xxiv. 7. Jer. xlvi. 2. Eupolemus apud Euseb. Præp. l. 9. c. 35.

[378] 2 King. xxiii. 29, &c.

[379] Eupolemus apud Euseb. Præp. l. 9. c. 39. 2 King. xxv. 2, 7.

[380] Dan. i. 1.

[381] Dan. i. 2. 2 Chron. xxxvi. 6.

[382] Jer. xlvi. 2.

[383] Apud Joseph. Antiq. l. 10. c. 11.

[384] Beros. apud Joseph. Ant. l. 10. c. 11.

[385] 2 King. xxiv. 12, 14. 2 Chron. xxxvi. 10.

[386] 2 Kings xxiv. 17. Ezek. xvii. 13, 16, 18.

[387] Ezek. xvii. 15.

[388] 2 King. xxv. 1, 2, 8. Jer. xxxii. 1, & xxxix 1, 2.

[389] Canon. & Beros.

[390] 2 King. xxv. 27.

[391] Hieron. in Isa. xiv. 19.

[392] 2 King. xxv. 27. 29, &c.

[393] Dan. v. 2.

[394] Jos. Ant. l. 10. c. 11.

[395] Herod. l. 1. c. 184, 185.

[396] Philost. in vita Apollonii. l. 1. c. 15.

[397] Jos. cont. Apion. l. 1. c. 21.

[398] Herod. l. 1. c. 189, 190, 191. Xenoph. l. 7. , 191, 192. Ed. Paris.

[399] Dan. v. 30, 31. Joseph. Ant. l. 10. c. 11.

[400] Æsch. Persæ v. 761.

[401] Herod. l. 1. c. 107, 108. Xenophon Cyropæd. l. 1. .

[402] Cyropæd. l. 1. .

[403] Cyropæd. l. viii. , 229.

[404] Herod. l. 1. c. 73.

[405] Herod. l. 1. c. 106, 130.

[406] Herod. l. 1. c. 103.

[407] Herod. ib.

[408] Jer. xxv.

[409] Herod. l. 1. c. 73, 74.

[410] Herod. Ibid. Plin. l. 2. c. 12.

[411] *The* Scythians.

[412] Jer. xxvii. 3, 6. Ezek. xxi. 19, 20 & xxv. 2, 8, 12.

413 Ezek. xxvi. 2. & xxix. 17, 19.

414 Ezek. xxix. 19. & xxx. 4, 5.

415 Suid. in Δαρεικος & Δαρεικους. Harpocr. in Δαρεικος. Scoliast in Aristophanis. Εκκλησιαζουστον. v. 598.

416 Herod. l. 1. c. 71.

417 Isa. xiii. 17.

418 Plin. l. 33. c. 3.

419 Herod. l. 1. c. 94.

420 Theogn. Γνωμαι, v. 761.

421 Ibid. v. 773.

422 Cyrop. l. 8.

423 Comment. in Dan. v.

424 Strabo. l. 16. initio.

425 Strab. l. 16. .

426 Herod. l. 1. c. 192.

427 Herod. l. 1. c. 178, &c.

428 Isa. xxiii. 13.

429 Diod. l. 1. .

430 Herod. l. 1. c. 181.

431 Suidas in Αριστταρχος. Herod. l. 1. c. 123, &c.

432 Strabo. l. 15. .

433 Herod. l. 1. c. 127, &c.

434 Cyrop. l. 8. .

435 See Plate I. & II.

436 Ezek. xli. 13, 14.

437 Ezek. xl. 47

438 Ezek. xl. 29, 33, 36.

439 Ezek. xl. 19, 23, 27. 2 King xxi. 5. 2 Chron. iv. 9.

440 Ezek. xl. 15, 17, 21. 1 Chron. xxviii. 12.

441 Ezek. xl 5, xlii. 20, & xlv. 2.

442 2 King. xxi.5.

443 Ezek. xl.

444 Plate III.

445 Plate I.

446 1 Chron. xxvi. 17.

447 Ezek. xlvi. 8, 9.

448 Ezek. xliv. 2, 3.

449 1 Chron. xxvi. 15, 16, 17, 18.

450 Ezek. xl. 22, 26, 31, 34, 37.

451 Plate II & III.

452 1 King. vi. 36. & vii. 13. Ezek. xl. 17, 18.

453 Ezek. xl. 10, 31, 34, 37.

454 Plate I.

455 1 King. vi. 36, & vii. 12.

456 Ezek. xl. 17.

457 Plate III.

458 Plate I & II.

[459] Ezek. xlvi. 21, 22.

[460] Ezek. xl. 45.

[461] Ezek. xl. 39, 41, 42, 46.

[462] Plate II.

[463] Ezek. xlii. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 13, 14.

[464] Ezek. xlvi. 19, 20.

[465] Ezek. xlii. 5, 6.

[466] 1 King. vi. 2. Ezek. xli. 2, 4, 12, 13, 14.

[467] 1 King. vi. 3. Ezek. xli. 13.

[468] Ezek. xli. 6, 11.

[469] 1 King. vi. 6.

[470] Ezek. xli. 6.

[471] 2 Chron. iii. 4.

[472] 1 King. vi. 8.

[473] 2 Chron. xx. 5.

[474] 2 King. xvi. 18.

[475] Ezra vi. 3, 4.

[476] Plate I

[477] Plate III.

[478] Plate I.

[479] Valer. Max. l. 9. c. 2.

[480] Porph. de Abstinentia, lib. 4.

[481] Q. Curt. Lib. iii. c. 3.

[482] Suidas in Ζωροαστρης.

[483] Ammian. l. 23. c. 6.

[484] Euseb. Præp. Evang. l. 1. c. ult.

[485] Æsch. Persæ v. 763.

[486] Apud. Hieron in Dan. viii.

OBSERVATIONS ON DANIEL AND THE APOCALYPSE OF ST. JOHN

Observations upon the Prophecies of Daniel and the Apocalypse of St. John was originally published in 1733 in English. Again, like much of Newton's theology, it was published after his death (a safe option, considering his somewhat heretical views!). The majority of the work is devoted to Daniel's prophecies. A flavour of the text can be sensed from the Chapter titles, which include: "Of the vision of the image composed of four metals", "Of the vision of the four beasts", "Of the ten kingdoms represented by the ten horns" and "Of the prophecy of the seventy weeks". This is a work of theology and most definitely not of science. Sir Isaac Newton accepted the books under consideration as revelations from God, prophesising both the first and second coming of Christ. Modern scientists will probably not consider this as a work worthy of serious consideration. The following quotation gives a sense of the text, "For as the few and obscure Prophecies concerning Christ's first coming were for setting up the Christian religion, many and clear Prophecies concerning the things to be done at Christ's second coming, are not only for predicting but also for effecting a recovery and re-establishment of the long-lost truth, and setting up a kingdom wherein dwells righteousness. The event will prove the Apocalypse; and this Prophecy, thus proved and understood, will open the old Prophets, and all together will make known the true religion, and establish it." Not to everyone's taste!

CONTENTS

TO THE RIGHT HONOURABLE
CONTENTS.

PART I.

CHAP. I.
CHAP. II.
CHAP. III.
CHAP. IV.
CHAP. V.
CHAP. VI.
CHAP. VII.
CHAP. VIII.
CHAP. IX.
CHAP. X.
CHAP. XI.
CHAP. XII.
CHAP. XIII.
CHAP. XIV.

PART II.

CHAP. I.
CHAP. II.
CHAP. III.
ADVERTISEMENT.

OBSERVATIONS

upon the

PROPHECIES

of

DANIEL, and the

APOCALYPSE

of

St. *JOHN*.

In Two PARTS.

By Sir ISAAC NEWTON.

LONDON, Printed by J. DARBY and T. BROWNE in *Bartholomew-Close.*

And Sold by J. ROBERTS in *Warwick-lane*, J. TONSON in the *Strand*, W. INNYS and R. MANBY at the West End of St. *Paul's Church-Yard*, J. OSBORN and T. LONGMAN in *Pater-Noster-Row*, J. NOON near *Mercers Chapel* in *Cheapside*, T. HATCHETT at the *Royal Exchange*, S. HARDING in St. *Martin's lane*, J. STAGG in *Westminster-Hall*, J. PARKER in *Pall-mall*, and J. BRINDLEY in *New Bond-Street*.

M.DCC.XXXIII.

TO THE RIGHT HONOURABLE

P E T E R

Lord *K I N G*, Baron of *Ockham*, Lord High Chancellor of *Great-Britain.*

My Lord,

I shall make no Apology for addressing the following Sheets to Your Lordship, who lived in a long Intercourse of Friendship with the Author; and, like him, amidst occupations of a different nature, made Religion your voluntary Study; and in all your Enquiries and Actions, have shewn the same inflexible Adherence to Truth and Virtue.

I shall always reckon it one of the Advantages of my Relation to Sir Isaac Newton*, that it affords me an opportunity of making this publick acknowledgment of the unfeigned Respect of*, My Lord,

Your Lordship's most obedient, and most humble Servant, Benj. Smith.

CONTENTS.

PART I.

Observations upon the Prophecies of *Daniel*.

CHAP. I. Introduction concerning, the Compilers of the Books of the Old Testament.

CHAP. II. Of the Prophetic Language.

CHAP. III. Of the vision of the Image composed of four Metals.

CHAP. IV. Of the vision of the four Beasts.

CHAP. V. Of the Kingdoms represented by the feet of the Image composed of iron and clay.

CHAP. VI. Of the ten Kingdoms represented by the ten horns of the fourth Beast.

CHAP. VII. Of the eleventh horn of *Daniel*'s fourth Beast.

CHAP. VIII. Of the power of the eleventh horn of *Daniel*'s fourth Beast, to change times and laws.

CHAP. IX. Of the Kingdoms represented in *Daniel* by the Ram and He-Goat.

CHAP. X. Of the Prophecy of the Seventy Weeks.

CHAP. XI. Of the Times of the Birth and Passion of Christ.

CHAP. XII. Of the Prophecy of the Scripture of Truth.

CHAP. XIII. Of the King who did according to his will, and magnified himself above every God, and honoured *Mahuzzims*, and regarded not the desire of women.

CHAP. XIV. Of the *Mahuzzims*, honoured by the King who doth according to his will.

PART II.

Observations upon the *Apocalypse* of St. *John*.

CHAP. I. Introduction, concerning the time when the *Apocalypse* was written.

CHAP. II. Of the relation which the *Apocalypse* of *John* hath to the Book of the Law of *Moses*, and to the worship of God in the Temple.

CHAP. III. Of the relation which the Prophecy of *John* hath to those of *Daniel*; and of the Subject of the Prophecy.

PART I.

CHAP. I.

Introduction concerning the Compilers of the books of the Old Testament.

When *Manasses* [1] set up a carved image in the house of the Lord, and built altars in the two courts of the house, to all the host of Heaven, and us'd inchantments and witchcraft, and familiar spirits, and for his great wickedness was invaded by the army of *Asserhadon* King of *Assyria*, and carried captive to *Babylon*; the book of the Law was lost till the eighteenth year of his grandson *Josiah*. Then [2] *Hilkiah* the High Priest, upon repairing the Temple, found it there: and the King lamented that their fathers had not done after the words of the book, and commanded that it should be read to the people, and caused the people to renew the holy covenant with God. This is the book of the Law now extant.

When [3] *Shishak* came out of *Egypt* and spoil'd the temple, and brought *Judah* into subjection to the monarchy of *Egypt*, (which was in the fifth year of *Rehoboam*) the *Jews* continued under great troubles for about twenty years; being *without the true God, and without a teaching Priest, and without Law: and in those times there was no peace to him that went out, nor to him that came in, but great vexations were upon all the inhabitants of the countries, and nation was destroyed of nation, and city of city, for God did vex them with all adversity*. But [4] when *Shishak* was dead, and *Egypt* fell into troubles, *Judah* had quiet ten years; and in that time *Asa* built fenced cities in *Judah*, and got up an army of 580000 men, with which, in the 15th year of his reign, he met and overcame *Zerah* the *Ethiopian*, who had conquered *Egypt* and *Lybia*, and *Troglodytica*, and came out with an army of 1000000 *Lybians* and *Ethiopians*, to recover the countries conquered by *Sesac*. And after this victory [5] *Asa* dethroned his mother for idolatry, and he renewed the Altar, and brought new vessels of gold and silver into the Temple; and he and the people entered into a new covenant to seek the Lord God of their fathers, upon pain of death to those who worshiped other Gods; and his son *Jehosaphat* took away the high places, and in the third year of his reign sent some of his Princes, and of the Priests and Levites, to teach in the cities of *Judah*: and they had the book of the

Law with them, and went about throughout all the cities of *Judah*, and taught the people. This is that book of the Law which was afterwards lost in the reign of *Manasses*, and found again in the reign of *Josiah*, and therefore it was written before the third year of *Jehosaphat*.

The same book of the Law was preserved and handed down to posterity by the *Samaritans*, and therefore was received by the ten Tribes before their captivity. For [6] when the ten Tribes were captivated, a Priest or the captivity was sent back to *Bethel*, by order of the King of *Assyria*, to instruct the new inhabitants of *Samaria*, in *the manner of the God of the land*; and the *Samaritans* had the *Pentateuch* from this Priest, as containing the law or *manner of the God of the land*, which he was to teach them. For [7] they persevered in the religion which he taught them, joining with it the worship of their own Gods; and by persevering in what they had been taught, they preserved this book of their Law in the original character of the *Hebrews*, while the two Tribes, after their return from *Babylon*, changed the character to that of the *Chaldees*, which they had learned at *Babylon*.

And since the *Pentateuch* was received as the book of the Law, both by the two Tribes and by the ten Tribes, it follows that they received it before they became divided into two Kingdoms. For after the division, they received not laws from one another, but continued at variance. *Judah* could not reclaim *Israel* from the sin of *Jeroboam*, and *Israel* could not bring *Judah* to it. The *Pentateuch* therefore was the book of the Law in the days of *David* and *Solomon*. The affairs of the Tabernacle and Temple were ordered by *David* and *Solomon*, according to the Law of this book; and *David* in the 78th Psalm, admonishing the people to give ear to the Law of God, means the Law of this book. For in describing how their forefathers kept it not, he quotes many historical things out of the books of *Exodus* and *Numbers*.

The race of the Kings of *Edom*, before there reigned any King over *Israel*, is set down in the book of [8] *Genesis*; and therefore that book was not written entirely in the form now extant, before the reign of *Saul*. The writer set down the race of those Kings till his own time, and therefore wrote before *David* conquered *Edom*. The *Pentateuch* is composed of the Law and the history of God's people together; and the history hath been collected from several books, such as were the history of the Creation

composed by *Moses*, *Gen*. ii. 4. the book of the generations of *Adam*, *Gen.* v. i. and the book of the wars of the Lord, *Num.* xxi. 14. This book of wars contained what was done at the Red-sea, and in the journeying of *Israel* thro' the Wilderness, and therefore was begun by *Moses*. And *Joshua* might carry it on to the conquest of *Canaan*. For *Joshua* wrote some things in the book of the Law of God, *Josh.* xxiv. 26 and therefore might write his own wars in the book of wars, those being the principal wars of God. These were publick books, and therefore not written without the authority of *Moses* and *Joshua*. And *Samuel* had leisure in the reign of *Saul*, to put them into the form of the books of *Moses* and *Joshua* now extant, inserting into the book of *Genesis*, the race of the Kings of *Edom*, until there reigned a King in *Israel*.

The book of the *Judges* is a continued history of the *Judges* down to the death of *Sampson*, and therefore was compiled after his death, out of the Acts of the *Judges*. Several things in this book are said to be done *when there was no King in* Israel, *Judg.* xvii. 6. xviii. 1. xix. 1. xxi. 25. and therefore this book was written after the beginning of the reign of *Saul*. When it was written, the *Jebusites* dwelt in *Jerusalem*, *Jud.* i. 21 and therefore it was written before the eighth year of *David*, 2 *Sam.* v. 8. and 1 *Chron.* xi. 6. The books of *Moses*, *Joshua*, and *Judges*, contain one continued history, down from the Creation to the death of *Sampson*. Where the *Pentateuch* ends, the book of *Joshua* begins; and where the book of *Joshua* ends, the book of *Judges* begins. Therefore all these books have been composed out of the writings of *Moses*, *Joshua*, and other records, by one and the same hand, after the beginning of the reign of *Saul*, and before the eighth year of *David*. And *Samuel* was a sacred writer, 1 *Sam.* x. 25. acquainted with the history of *Moses* and the *Judges*, 1 *Sam.* xii. 8, 9, 10, 11, 12. and had leisure in the reign of *Saul*, and sufficient authority to compose these books. He was a Prophet, and judged *Israel* all the days of his life, and was in the greatest esteem with the people; and the Law by which he was to judge the people was not to be published by less authority than his own, the Law-maker being not inferior to the judge. And the book of *Jasher*, which is quoted in the book of *Joshua*, *Josh.* x. 13. was in being at the death of *Saul*, 2 *Sam.* i. 18.

At the dedication of the Temple of *Solomon*, when the Ark was brought into the most holy place, there was nothing in it but the two tables, 1 *Kings*

viii. 9. and therefore when the *Philistines* took the Ark, they took out of it the book of the Law, and the golden pot of Manna, and *Aaron*'s Rod. And this and other losses in the desolation of *Israel*, by the conquering *Philistines*, might give occasion to *Samuel*, after some respite from those enemies, to recollect the scattered writings of *Moses* and *Joshua*, and the records of the Patriarchs and Judges, and compose them in the form now extant.

The book of *Ruth* is a history of things done in the days of the *Judges*, and may be looked upon as an addition to the book of the *Judges*, written by the same author, and at the same time. For it was written after the birth of *David*, *Ruth* iv. 17, 22. and not long after, because the history of *Boaz* and *Ruth*, the great grandfather and great grandmother of *David*, and that of their contemporaries, could not well be remembered above two or three generations. And since this book derives the genealogy of *David* from *Boaz* and *Ruth*, and omits *David*'s elder brothers and his sons; it was written in honour of *David*, after he was anointed King by *Samuel*, and before he had children in *Hebron*, and by consequence in the reign of *Saul*. It proceeds not to the history of *David*, and therefore seems to have been written presently after he was anointed. They judge well therefore who ascribe to *Samuel* the books of *Joshua*, *Judges*, and *Ruth*.

Samuel is also reputed the author of the first book of *Samuel*, till the time of his death. The two books of *Samuel* cite no authors, and therefore seem to be originals. They begin with his genealogy, birth and education, and might be written partly in his lifetime by himself or his disciples the Prophets at *Naioth* in *Ramah*, 1 *Sam.* xix. 18, 19, 20. and partly after his death by the same disciples.

The books of the *Kings* cite other authors, as the book of the Acts of *Solomon*, the book of the *Chronicles* of the Kings of *Israel*, and the book of the *Chronicles* of the Kings of *Judah*. The books of the *Chronicles* cite the book of *Samuel* the Seer, the book of *Nathan* the Prophet, and the book of *Gad* the Seer, for the Acts of *David*; the book of *Nathan* the Prophet, the Prophecy of *Ahijah* the *Shilonite*, and the visions of *Iddo* the Seer, for the Acts of *Solomon*; the book of *Shemajah* the Prophet, and the book of *Iddo* the Seer concerning genealogies, for the Acts of *Rehoboam* and *Abijah*; the book of the Kings of *Judah* and *Israel* for the Acts of *Asa*, *Joash*, *Amaziah*, *Jotham*, *Ahaz*, *Hezekiah*, *Manasseh*, and *Josiah*; the book of *Hanani* the

Seer, for the Acts of *Jehosaphat*; and the visions of *Isaiah* for the Acts of *Uzziah* and *Hezekiah*. These books were therefore collected out of the historical writings of the antient Seers and Prophets. And because the books of the *Kings* and *Chronicles* quote one another, they were written at one and the same time. And this time was after the return from the *Babylonian* captivity, because they bring down the history of *Judah*, and the genealogies of the Kings of *Judah*, and of the High Priests, to that captivity. The book of *Ezra* was originally a part of the book of the *Chronicles*, and has been divided from it. For it begins with the two last verses of the books of *Chronicles*, and the first book of *Esdras* begins with the two last chapters thereof. *Ezra* was therefore the compiler of the books of *Kings* and *Chronicles*, and brought down the history to his own time. He was a ready Scribe in the Law of God; and for assisting him in this work *Nehemias* founded a library, and *gathered together the Acts of the Kings and the Prophets, and of* David*, and the Epistles of the Kings, concerning the holy gifts*, 2 *Maccab.* ii. 13. By the Acts of *David* I understand here the two books of *Samuel*, or at least the second book. Out of the Acts of the *Kings*, written from time to time by the Prophets, he compos'd the books of the Kings of *Judah* and *Israel*, the *Chronicles* of the Kings of *Judah*, and the *Chronicles* of the Kings of *Israel*. And in doing this he joined those Acts together, in due order of time, copying the very words of the authors, as is manifest from hence, that the books of the *Kings* and *Chronicles* frequently agree with one another in words for many sentences together. Where they agree in sense, there they agree in words also.

So the Prophecies of *Isaiah*, written at several times, he has collected into one body. And the like he did for those of *Jeremiah*, and the rest of the Prophets, down to the days of the second Temple. The book of *Jonah* is the history of *Jonah* written by another hand. The book of *Daniel* is a collection of papers written at several times. The six last chapters contain Prophecies written at several times by *Daniel* himself: the six first are a collection of historical papers written by others. The fourth chapter is a decree of *Nebuchadnezzar*. The first chapter was written after *Daniel*'s death: for the author saith, that *Daniel* continued to the first year of *Cyrus*; that is, to his first year over the *Persians* and *Medes*, and third year over *Babylon*. And, for the same reason, the fifth and sixth chapters were also written after his death. For they end with these words: *So this* Daniel *prospered in the reign*

of Darius *and in the reign of* Cyrus *the* Persian. Yet these words might be added by the collector of the papers, whom I take to be *Ezra*.

The Psalms composed by *Moses*, *David*, and others, seem to have been also collected by *Ezra* into one volume. I reckon him the collector, because in this collection I meet with Psalms as late as the *Babylonian* captivity, but with none later.

After these things *Antiochus Epiphanes* spoiled the Temple, commanded the *Jews* to forsake the Law upon pain of death, and caused the sacred books to be burnt wherever they could be found: and in these troubles the book of the *Chronicles* of the Kings of *Israel* was entirely lost. But upon recovering from this oppression, *Judas Maccabæus* gathered together all those writings that were to be met with, 2 *Maccab.* ii. 14. and in reducing them into order, part of the Prophecies of *Isaiah*, or some other Prophet, have been added to the end of the Prophecies of *Zechariah*; and the book of *Ezra* has been separated from the book of *Chronicles*, and set together in two different orders; in one order in the book of *Ezra*, received into the Canon, and in another order in the first book of *Esdras*.

After the *Roman* captivity, the *Jews* for preserving their traditions, put them in writing in their *Talmud*, and for preserving their scriptures, agreed upon an Edition, and pointed it, and counted the letters of every sort in every book: and by preserving only this Edition, the antienter various lections, except what can be discovered by means of the *Septuagint* Version, are now lost; and such marginal notes, or other corruptions, as by the errors of the transcribers, before this Edition was made, had crept into the text, are now scarce to be corrected.

The *Jews* before the *Roman* captivity, distinguished the sacred books into the Law, the Prophets, and the *Hagiographa*, or holy writings; and read only the Law and the Prophets in their Synagogues. And Christ and his Apostles laid the stress of religion upon the Law and the Prophets, *Matt.* vii. 12. xxii. 4. *Luke* xvi. 16, 29, 31. xxiv. 44. *Acts* xxiv. 14. xxvi. 22. *Rom.* iii. 21. By the *Hagiographa* they meant the historical books called *Joshua*, *Judges*, *Ruth*, *Samuel*, *Kings*, *Chronicles*, *Ezra*, *Nehemiah*, and *Esther*, the book of *Job*, the *Psalms*, the books of *Solomon*, and the *Lamentations*. The Samaritans read only the *Pentateuch*: and when *Jehosaphat* sent men to teach in the cities, they had with them only the book of the Law; for the Prophecies now extant were not then written. And upon the return from the

Babylonian captivity, *Ezra* read only the book of the Law to the people, from morning to noon on the first day of the seventh month; and from day to day in the feast of Tabernacles: for he had not yet collected the writings of the Prophets into the volume now extant; but instituted the reading of them after the collection was made. By reading the Law and the Prophets in the Synagogues, those books have been kept freer from corruption than the *Hagiographa*.

In the infancy of the nation of *Israel*, when God had given them a Law, and made a covenant with them to be their God if they would keep his commandments, he sent Prophets to reclaim them, as often as they revolted to the worship of other Gods: and upon their returning to him, they sometimes renewed the covenant which they had broken. These Prophets he continued to send, till the days of *Ezra*: but after their Prophecies were read in the Synagogues, those Prophecies were thought sufficient. For if the people would not hear *Moses* and the old Prophets, they would hear no new ones, no not *tho they should rise from the dead*. At length when a new truth was to be preached to the *Gentiles*, namely, *that Jesus was the Christ*, God sent new Prophets and Teachers: but after their writings were also received and read in the Synagogues of the Christians, Prophecy ceased a second time. We have *Moses*, the Prophets, and Apostles, and the words of Christ himself; and if we will not hear them, we shall be more inexcusable than the *Jews*. For the Prophets and Apostles have foretold, that as *Israel* often revolted and brake the covenant, and upon repentance renewed it; so there should be a falling away among the Christians, soon after the days of the Apostles; and that in the latter days God would destroy the impenitent revolters, and make a new covenant with his people. And the giving ear to the Prophets is a fundamental character of the true Church. For God has so ordered the Prophecies, that in the latter days *the wise may understand, but the wicked shall do wickedly, and none of the wicked shall understand*, Dan. xii. 9, 10. The authority of Emperors, Kings, and Princes, is human. The authority of Councils, Synods, Bishops, and Presbyters, is human. The authority of the Prophets is divine, and comprehends the sum of religion, reckoning *Moses* and the Apostles among the Prophets; and *if an Angel from Heaven preach any other gospel*, than what they have delivered, *let him be accursed*. Their writings contain the covenant between God and his people, with instructions for keeping this covenant; instances of God's judgments

upon them that break it: and predictions of things to come. While the people of God keep the covenant, they continue to be his people: when they break it they cease to be his people or church, and become *the Synagogue of Satan, who say they are* Jews *and are not.* And no power on earth is authorized to alter this covenant.

The predictions of things to come relate to the state of the Church in all ages: and amongst the old Prophets, *Daniel* is most distinct in order of time, and easiest to be understood: and therefore in those things which relate to the last times, he must be made the key to the rest.

Notes to Chap. I.

[1] 2 Chron. xxxiii. 5, 6, 7.
[2] 2 Chron. xxxiv.
[3] 2 Chron. xii. 2, 3, 4, 8, 9. & xv. 3, 5, 6.
[4] 2 Chron. xiv. 1, 6, 7, 8, 9, 12.
[5] 2 Chron. xv. 3, 12, 13, 16, 18.
[6] 2 Kings xvii. 27, 28, 32, 33.
[7] 2 Kings xvii. 34, 41.
[8] Gen. xxxvi. 31.

CHAP. II.

Of the Prophetic Language.

For understanding the Prophecies, we are, in the first place, to acquaint ourselves with the figurative language of the Prophets. This language is taken from the analogy between the world natural, and an empire or kingdom considered as a world politic.

Accordingly, the whole world natural consisting of heaven and earth, signifies the whole world politic, consisting of thrones and people, or so much of it as is considered in the Prophecy: and the things in that world signify the analogous things in this. For the heavens, and the things therein, signify thrones and dignities, and those who enjoy them; and the earth, with the things thereon, the inferior people; and the lowest parts of the earth, called *Hades* or Hell, the lowest or most miserable part of them. Whence ascending towards heaven, and descending to the earth, are put for rising and falling in power and honour: rising out of the earth, or waters, and falling into them, for the rising up to any dignity or dominion, out of the inferior state of the people, or falling down from the same into that inferior state; descending into the lower parts of the earth, for descending to a very low and unhappy estate; speaking with a faint voice out of the dust, for being in a weak and low condition; moving from one place to another, for translation from one office, dignity, or dominion, to another; great earthquakes, and the shaking of heaven and earth, for the shaking of kingdoms, so as to distract or overthrow them; the creating a new heaven and earth, and the passing away of an old one, or the beginning and end of the world, for the rise and ruin of the body politic signified thereby.

In the heavens, the Sun and Moon are, by interpreters of dreams, put for the persons of Kings and Queens; but in sacred Prophecy, which regards not single persons, the Sun is put for the whole species and race of Kings, in the kingdom or kingdoms of the world politic, shining with regal power and glory; the Moon for the body of the common people, considered as the King's wife; the Stars for subordinate Princes and great men, or for Bishops and Rulers of the people of God, when the Sun is Christ; light for the glory,

truth, and knowledge, wherewith great and good men shine and illuminate others; darkness for obscurity of condition, and for error, blindness and ignorance; darkning, smiting, or setting of the Sun, Moon, and Stars, for the ceasing of a kingdom, or for the desolation thereof, proportional to the darkness; darkning the Sun, turning the Moon into blood, and falling of the Stars, for the same; new Moons, for the return of a dispersed people into a body politic or ecclesiastic.

Fire and meteors refer to both heaven and earth, and signify as follows; burning any thing with fire, is put for the consuming thereof by war; a conflagration of the earth, or turning a country into a lake of fire, for the consumption of a kingdom by war; the being in a furnace, for the being in slavery under another nation; the ascending up of the smoke of any burning thing for ever and ever, for the continuation of a conquered people under the misery of perpetual subjection and slavery; the scorching heat of the sun, for vexatious wars, persecutions and troubles inflicted by the King; riding on the clouds, for reigning over much people; covering the sun with a cloud, or with smoke, for oppression of the King by the armies of an enemy; tempestuous winds, or the motion of clouds, for wars; thunder, or the voice of a cloud, for the voice of a multitude; a storm of thunder, lightning, hail, and overflowing rain, for a tempest of war descending from the heavens and clouds politic, on the heads of their enemies; rain, if not immoderate, and dew, and living water, for the graces and doctrines of the Spirit; and the defect of rain, for spiritual barrenness.

In the earth, the dry land and congregated waters, as a sea, a river, a flood, are put for the people of several regions, nations, and dominions; embittering of waters, for great affliction of the people by war and persecution; turning things into blood, for the mystical death of bodies politic, that is, for their dissolution; the overflowing of a sea or river, for the invasion of the earth politic, by the people of the waters; drying up of waters, for the conquest of their regions by the earth; fountains of waters for cities, the permanent heads of rivers politic; mountains and islands, for the cities of the earth and sea politic, with the territories and dominions belonging to those cities; dens and rocks of mountains, for the temples of cities; the hiding of men in those dens and rocks, for the shutting up of Idols in their temples; houses and ships, for families, assemblies, and towns, in

the earth and sea politic; and a navy of ships of war, for an army of that kingdom that is signified by the sea.

Animals also and vegetables are put for the people of several regions and conditions; and particularly, trees, herbs, and land animals, for the people of the earth politic: flags, reeds, and fishes, for those of the waters politic; birds and insects, for those of the politic heaven and earth; a forest for a kingdom; and a wilderness for a desolate and thin people.

If the world politic, considered in prophecy, consists of many kingdoms, they are represented by as many parts of the world natural; as the noblest by the celestial frame, and then the Moon and Clouds are put for the common people; the less noble, by the earth, sea, and rivers, and by the animals or vegetables, or buildings therein; and then the greater and more powerful animals and taller trees, are put for Kings, Princes, and Nobles. And because the whole kingdom is the body politic of the King, therefore the Sun, or a Tree, or a Beast, or Bird, or a Man, whereby the King is represented, is put in a large signification for the whole kingdom; and several animals, as a Lion, a Bear, a Leopard, a Goat, according to their qualities, are put for several kingdoms and bodies politic; and sacrificing of beasts, for slaughtering and conquering of kingdoms; and friendship between beasts, for peace between kingdoms. Yet sometimes vegetables and animals are, by certain epithets or circumstances, extended to other significations; as a Tree, when called the *tree of life* or *of knowledge*; and a Beast, when called *the old serpent*, or worshipped.

When a Beast or Man is put for a kingdom, his parts and qualities are put for the analogous parts and qualities of the kingdom; as the head of a Beast, for the great men who precede and govern; the tail for the inferior people, who follow and are governed; the heads, if more than one, for the number of capital parts, or dynasties, or dominions in the kingdom, whether collateral or successive, with respect to the civil government; the horns on any head, for the number of kingdoms in that head, with respect to military power; seeing for understanding, and the eyes for men of understanding and policy, and in matters of religion for Επισκοποι, Bishops; speaking, for making laws; the mouth, for a law-giver, whether civil or sacred; the loudness of the voice, for might and power; the faintness thereof, for weakness; eating and drinking, for acquiring what is signified by the things eaten and drank; the hairs of a beast, or man, and the feathers of a bird, for

people; the wings, for the number of kingdoms represented by the beast; the arm of a man, for his power, or for any people wherein his strength and power consists; his feet, for the lowest of the people, or for the latter end of the kingdom; the feet, nails, and teeth of beasts of prey, for armies and squadrons of armies; the bones, for strength, and for fortified places; the flesh, for riches and possessions; and the days of their acting, for years; and when a tree is put for a kingdom, its branches, leaves and fruit, signify as do the wings, feathers, and food of a bird or beast.

When a man is taken in a mystical sense, his qualities are often signified by his actions, and by the circumstances of things about him. So a Ruler is signified by his riding on a beast; a Warrior and Conqueror, by his having a sword and bow; a potent man, by his gigantic stature; a Judge, by weights and measures; a sentence of absolution, or condemnation, by a white or a black stone; a new dignity, by a new name; moral or civil qualifications, by garments; honour and glory, by splendid apparel; royal dignity, by purple or scarlet, or by a crown; righteousness, by white and clean robes; wickedness, by spotted and filthy garments; affliction, mourning, and humiliation, by clothing in sackcloth; dishonour, shame, and want of good works, by nakedness; error and misery, by drinking a cup of his or her wine that causeth it; propagating any religion for gain, by exercising traffick and merchandize with that people whose religion it is; worshipping or serving the false Gods of any nation, by committing adultery with their princes, or by worshipping them; a Council of a kingdom, by its image; idolatry, by blasphemy; overthrow in war, by a wound of man or beast; a durable plague of war, by a sore and pain; the affliction or persecution which a people suffers in labouring to bring forth a new kingdom, by the pain of a woman in labour to bring forth a man-child; the dissolution of a body politic or ecclesiastic, by the death of a man or beast; and the revival of a dissolved dominion, by the resurrection of the dead.

CHAP. III.

Of the vision of the Image composed of four Metals.

The Prophecies of *Daniel* are all of them related to one another, as if they were but several parts of one general Prophecy, given at several times. The first is the easiest to be understood, and every following Prophecy adds something new to the former. The first was given in a dream to *Nebuchadnezzar*, King of *Babylon*, in the second year of his reign; but the King forgetting his dream, it was given again to *Daniel* in a dream, and by him revealed to the King. And thereby, *Daniel* presently became famous for wisdom, and revealing of secrets: insomuch that *Ezekiel* his contemporary, in the nineteenth year of *Nebuchadnezzar*, spake thus of him to the King of *Tyre*: *Behold*, saith he, *thou art wiser than* Daniel*, there is no secret that they can hide from thee*, Ezek. xxviii. 3. And the same *Ezekiel*, in another place, joins *Daniel* with *Noah* and *Job*, as most high in the favour of God, *Ezek.* xiv. 14, 16, 18, 20. And in the last year of *Belshazzar*, the Queen-mother said of him to the King: *Behold there is a man in thy kingdom, in whom is the spirit of the holy gods; and in the days of thy father, light and understanding and wisdom, like the wisdom of the gods, was found in him; whom the king* Nebuchadnezzar *thy father, the king, I say, thy father made master of the magicians, astrologers,* Chaldeans *and soothsayers: forasmuch as an excellent spirit, and knowledge, and understanding, interpreting of dreams, and shewing of hard sentences, and dissolving of doubts, were found in the same* Daniel*, whom the king named* Belteshazzar, Dan. v. 11, 12. *Daniel* was in the greatest credit amongst the *Jews*, till the reign of the *Roman* Emperor *Hadrian*: and to reject his Prophecies, is to reject the Christian religion. For this religion is founded upon his Prophecy concerning the *Messiah*.

Now in this vision of the Image composed of four Metals, the foundation of all *Daniel*'s Prophecies is laid. It represents a body of four great nations, which should reign over the earth successively, *viz.* the people of *Babylonia*, the *Persians*, the *Greeks*, and the *Romans*. And by a stone cut out without hands, which fell upon the feet of the Image, and brake all the four Metals

to pieces, and *became a great mountain, and filled the whole earth*; it further represents that a new kingdom should arise, after the four, and conquer all those nations, and grow very great, and last to the end of all ages.

The head of the Image was of gold, and signifies the nations of *Babylonia*, who reigned first, as *Daniel* himself interprets. *Thou art this head of gold*, saith he to *Nebuchadnezzar*. These nations reigned till *Cyrus* conquered *Babylon*, and within a few months after that conquest revolted to the *Persians*, and set them up above the *Medes*. The breast and arms of the Image were of silver, and represent the *Persians* who reigned next. The belly and thighs of the Image were of brass, and represent the *Greeks*, who, under the dominion of *Alexander* the great, conquered the *Persians*, and reigned next after them. The legs were of iron, and represent the *Romans* who reigned next after the *Greeks*, and began to conquer them in the eighth year of *Antiochus Epiphanes*. For in that year they conquered *Perseus* King of *Macedon*, the fundamental kingdom of the *Greeks*; and from thence forward grew into a mighty empire, and reigned with great power till the days of *Theodosius* the great. Then by the incursion of many northern nations, they brake into many smaller kingdoms, which are represented by the feet and toes of the Image, composed part of iron, and part of clay. For then, saith *Daniel*, [1] *the kingdom shall be divided, and there shall be in it of the strength of iron, but they shall not cleave one to another.*

And in the days of these Kings, saith *Daniel*, *shall the God of heaven set up a kingdom which shall never be destroyed: and the kingdom shall not be left to other people; but it shall break in pieces, and consume all these kingdoms, and it shall stand for ever. Forasmuch as thou sawest that the stone was cut out of the mountains without hands, and that it brake in pieces the iron, the brass, the clay, the silver and the gold.*

Notes to Chap. III.

[1] Chap. ii. 41, &c.

CHAP. IV.

Of the vision of the four Beasts.

In the next vision, which is of the four Beasts, the Prophecy of the four Empires is repeated, with several new additions; such as are the two wings of the Lion, the three ribs in the mouth of the Bear, the four wings and four heads of the Leopard, the eleven horns of the fourth Beast, and the son of man coming in the clouds of Heaven, to the Antient of Days sitting in judgment.

The first Beast was like a lion, and had eagle's wings, to denote the kingdoms of *Babylonia* and *Media*, which overthrew the *Assyrian* Empire, and divided it between them, and thereby became considerable, and grew into great Empires. In the former Prophecy, the Empire of *Babylonia* was represented by the head of gold; in this both Empires are represented together by the two wings of the lion. *And I beheld,* saith [1] *Daniel*, *till the wings thereof were pluckt, and it was lifted up from the earth, and made to stand upon the feet as a man, and a man's heart was given to it*; that is, till it was humbled and subdued, and made to know its human state.

The second Beast was like a bear, and represents the Empire which reigned next after the *Babylonians*, that is, the Empire of the *Persians*. *Thy kingdom is divided*, or broken, saith *Daniel* to the last King of *Babylon*, *and given to the* Medes *and* Persians, *Dan.* v. 28. This Beast *raised itself up on one side*; the *Persians* being under the *Medes* at the fall of *Babylon*, but presently rising up above them. [2] *And it had three ribs in the mouth of it, between the teeth of it*, to signify the kingdoms of *Sardes*, *Babylon*, and *Egypt*, which were conquered by it, but did not belong to its proper body. And it devoured much flesh, the riches of those three kingdoms.

The third Beast was the kingdom which succeeded the *Persian*; and this was the empire of the *Greeks*, *Dan.* viii. 6, 7, 20, 21. It was *like a Leopard*, to signify its fierceness; and had four heads and four wings, to signify that it should become divided into four kingdoms, *Dan.* viii 22. for it continued in a monarchical form during the reign of *Alexander* the great, and his brother *Aridæus*, and young sons *Alexander* and *Hercules*; and then brake into four

kingdoms, by the governors of provinces putting crowns on their own heads, and by mutual consent reigning over their provinces. *Cassander* reigned over *Macedon*, *Greece*, and *Epirus*; *Lysimachus* over *Thrace* and *Bithynia*; *Ptolemy* over *Egypt*, *Lybia*, *Arabia*, *Cœlosyria*, and *Palestine*; and *Seleucus* over *Syria*.

The fourth Beast was the empire which succeeded that of the *Greeks*, and this was the *Roman*. This beast was exceeding dreadful and terrible, and had great iron teeth, and devoured and brake in pieces, and stamped the residue with its feet; and such was the *Roman* empire. It was larger, stronger, and more formidable and lasting than any of the former. It conquered the kingdom of *Macedon*, with *Illyricum* and *Epirus*, in the eighth year of *Antiochus Epiphanes*, *Anno Nabonass.*. 580; and inherited that of *Pergamus*, *Anno Nabonass.* 615; and conquered that of *Syria*, *Anno Nabonass.* 679, and that of *Egypt*, *Anno Nabonass.* 718. And by these and other conquests it became greater and more terrible than any of the three former Beasts. This Empire continued in its greatness till the reign of *Theodosius* the great; and then brake into ten kingdoms, represented by the ten horns of this Beast; and continued in a broken form, till the Antient of days sat in a throne like fiery flame, and *the judgment was set, and the books were opened, and the Beast was slain and his body destroyed, and given to the burning flames; and one like the son of man came with the clouds of heaven, and came to the Antient of days* [3], and received dominion over all nations, and judgment was given to the saints of the most high, and the time came that they possessed the kingdom.

I beheld, saith [4] *Daniel*, *till the Beast was slain, and his body destroyed, and given to the burning flames. As concerning the rest of the Beasts, they had their dominion taken away: yet their lives were prolonged for a season and a time*. And therefore all the four Beasts are still alive, tho the dominion of the three first be taken away. The nations of *Chaldea* and *Assyria* are still the first Beast. Those of *Media* and *Persia* are still the second Beast. Those of *Macedon*, *Greece* and *Thrace*, *Asia* minor, *Syria* and *Egypt*, are still the third. And those of *Europe*, on this side *Greece*, are still the fourth. Seeing therefore the body of the third Beast is confined to the nations on this side the river *Euphrates*, and the body of the fourth Beast is confined to the nations on this side *Greece*; we are to look for all the four heads of the third

Beast, among the nations on this side of the river *Euphrates*; and for all the eleven horns of the fourth Beast, among the nations on this side of *Greece*. And therefore, at the breaking of the *Greek* empire into four kingdoms of the *Greeks*, we include no part of the *Chaldeans*, *Medes* and *Persians* in those kingdoms, because they belonged to the bodies of the two first Beasts. Nor do we reckon the *Greek* empire seated at *Constantinople*, among the horns of the fourth Beast, because it belonged to the body of the third.

Notes to Chap. IV.

[1] Chap. vii. 4.

[2] Chap. vii. 5.

[3] Chap. vii. 13.

[4] Chap. vii. 11, 12.

CHAP. V.

Of the Kingdoms represented by the feet of the Image composed of iron and clay.

Dacia was a large country bounded on the south by the *Danube*, on the east by the *Euxine* sea, on the north by the river *Neister* and the mountain *Crapac*, and on the west by the river *Tibesis*, or *Teys*, which runs southward into the *Danube* a little above *Belgrade*. It comprehended the countries now called *Transylvania*, *Moldavia*, and *Wallachia*, and the eastern part of the upper *Hungary*. Its antient inhabitants were called *Getæ* by the *Greeks*, *Daci* by the *Latins*, and *Goths* by themselves. *Alexander* the great attacked them, and *Trajan* conquered them, and reduced their country into a Province of the *Roman* Empire: and thereby the propagation of the Gospel among them was much promoted. They were composed of several *Gothic* nations, called *Ostrogoths*, *Visigoths*, *Vandals*, *Gepides*, *Lombards*, *Burgundians*, *Alans*, &c. who all agreed in their manners, and spake the same language, as *Procopius* represents. While they lived under the *Romans*, the *Goths* or *Ostrogoths* were seated in the eastern parts of *Dacia*, the *Vandals* in the western part upon the river *Teys*, where the rivers *Maresh* and *Keresh* run into it. The *Visigoths* were between them. The *Gepides*, according to *Jornandes*, were upon the *Vistula*. The *Burgundians*, a *Vandalic* nation, were between the *Vistula* and the southern fountain of the *Boristhenes*, at some distance from the mountain *Crapac* northwards, where *Ptolemy* places them, by the names of *Phrugundiones* and *Burgiones*.[1] The *Alans*, another *Gothic* nation, were between the northern fountain of the *Boristhenes* and the mouth of the river *Tanais*, where *Ptolemy* placeth the mountain *Alanus*, and western side of the *Palus Mæotis*.

These nations continued under the dominion of the *Romans* till the second year of the Emperor *Philip*, and then for want of their military pay began to revolt; the *Ostrogoths* setting up a kingdom, which, under their Kings *Ostrogotha*, *Cniva*, *Araric*, *Geperic*, and *Hermanaric*, increased till the year of Christ 376; and then by an incursion of the *Huns* from beyond the *Tanais*, and the death of *Hermanaric*, brake into several smaller

kingdoms. *Hunnimund*, the son of *Hermanaric*, became King over the *Ostrogoths*; *Fridigern* over the *Visigoths*; *Winithar*, or *Vinithar*, over a part of the *Goths* called *Gruthungi* by *Ammian*, *Gothunni* by *Claudian*, and *Sarmatæ* and *Scythians* by others: *Athanaric* reign'd over another part of the *Goths* in *Dacia*, called *Thervingi*; *Box* over the *Antes* in *Sarmatia*; and the *Gepides* had also their King. The *Vandals* fled over the *Danube* from *Geberic* in the latter end of the reign of *Constantine* the great, and had seats granted them in *Pannonia* by that Emperor, where they lived quietly forty years, *viz.* till the year 377, when several *Gothic* nations flying from the *Hunns* came over the *Danube*, and had seats granted them in *Mæsia* and *Thrace* by the *Greek* Emperor *Valens*. But the next year they revolted, called in some *Goths*, *Alans* and *Hunns*, from beyond the *Danube*, and routed the *Roman* army, slew the Emperor *Valens*, and spread themselves into *Greece* and *Pannonia* as far as the *Alps*. In the years 379 and 380 they were checkt by the arms of the Emperors *Gratian* and *Theodosius*, and made a submissive peace; the *Visigoths* and *Thervingi* returned to their seats in *Mæsia* and *Thrace*, the *Hunns* retired over the *Danube*, and the *Alans* and *Gruthingi* obtained seats in *Pannonia*.

About the year 373, or 374, the *Burgundians* rose from their seats upon the *Vistula*, with an army of eighty thousand men to invade *Gallia*; and being opposed, seated themselves upon the northern side of the *Rhine* over against *Mentz*. In the year 358, a body of the *Salian Franks*, with their King, coming from the river *Sala*, were received into the Empire by the Emperor *Julian*, and seated in *Gallia* between *Brabant* and the *Rhine*: and their King *Mellobaudes* was made *Comes domesticorum*, by the Emperor *Gratian*. *Richomer*, another noble *Salian Frank*, was made *Comes domesticorum*, and *Magister utriusque Militiæ*, by *Theodosius*; and A.C. 384, was Consul with *Clearchus*. He was a great favourite of *Theodosius*, and accompanied him in his wars against *Eugenius*, but died in the expedition, and left a son called *Theudomir*, who afterwards became King of the *Salian Franks* in *Brabant*. In the time of this war some *Franks* from beyond the *Rhine* invaded *Gallia* under the conduct of *Genobald*, *Marcomir* and *Suno*, but were repulsed by *Stilico*; and *Marcomir* being slain, was succeeded in *Germany* by his son *Pharamond*.

While these nations remained quiet within the Empire, subject to the *Romans*, many others continued so beyond the *Danube* till the death of the

Emperor *Theodosius*, and then rose up in arms. For *Paulus Diaconus* in his *Historia Miscell. lib.* xiv. speaking of the times next after the death of this Emperor, tells us: *Eodem tempore erant Gothi & aliæ gentes maximæ trans Danubium habitantes: ex quibus rationabiliores quatuor sunt, Gothi scilicet, Huisogothi, Gepides & Vandali; & nomen tantum & nihil aliud mutantes. Isti sub Arcadia & Honorio Danubium transeuntes, locati sunt in terra Romanorum: & Gepides quidem, ex quibus postea divisi sunt Longobardi & Avares, villas, quæ sunt circa Singidonum & Sirmium, habitavere:* and *Procopius* in the beginning of his *Historia Vandalica* writes to the same purpose. Hitherto the *Western Empire* continued entire, but now brake into many kingdoms.

Theodosius died A.C. 395; and then the *Visigoths*, under the conduct of *Alaric* the successor of *Fridigern*, rose from their seats in *Thrace* and wasted *Macedon*, *Thessaly*, *Achaia*, *Peloponnesus*, and *Epirus*, with fire and sword for five years together; when turning westward, they invaded *Dalmatia*, *Illyricum* and *Pannonia*; and from thence went into *Italy* A.C. 402; and the next year were so beaten at *Pollentia* and *Verona*, by *Stilico* the commander of the forces of the *Western Empire*, that *Claudian* calls the remainder of the forces of *Alaric*, *tanta ex gente reliquias breves*, and *Prudentius*, *Gentem deletam*. Thereupon *Alaric* made peace with the Emperor, being so far humbled, that *Orosius* saith, he did, *pro pace optima & quibuscunque sedibus suppliciter & simpliciter orare*. This peace was ratified by mutual hostages; *Ætius* was sent hostage to *Alaric*; and *Alaric* continued a free Prince in the seats now granted to him.

When *Alaric* took up arms, the nations beyond the *Danube* began to be in motion; and the next winter, between A.C. 395 and 396, a great body of *Hunns*, *Alans*, *Ostrogoths*, *Gepides*, and other northern nations, came over the frozen *Danube*, being invited by *Rufinus*: when their brethren, who had obtained seats within the Empire, took up arms also. *Jerome* calls this great multitude, *Hunns*, *Alans*, *Vandals*, *Goths*, *Sarmatians*, *Quades*, and *Marcomans*; and saith, that they invaded all places between *Constantinople* and the *Julian Alps*, wasting *Scythia*, *Thrace*, *Macedon*, *Dardania*, *Dacia*, *Thessaly*, *Achaia*, *Epirus*, *Dalmatia*, and all *Pannonia*. The *Suevians* also invaded *Rhætia*: for when *Alaric* ravaged *Pannonia*, the *Romans* were defending *Rhætia*; which gave *Alaric* an opportunity of invading *Italy*, as *Claudian* thus mentions.

Non nisi perfidiâ nacti penetrabile tempus,
Irrupere Getæ, nostras dum Rhætia vires
Occupat, atque alio desudant Marte cohortes.

And when *Alaric* went from those parts into *Italy*, some other barbarous nations invaded *Noricum* and *Vindelicia*, as the same Poet *Claudian* thus writes:

—— *Jam fœdera gentes*
Exuerant, Latiique auditâ clade feroces
Vendelicos saltus & Norica rura tenebant.

This was in the years 402 and 403. And among these nations I reckon the *Suevians*, *Quades*, and *Marcomans*; for they were all in arms at this time. The *Quades* and *Marcomans* were *Suevian* nations; and they and the *Suevians* came originally from *Bohemia*, and the river *Suevus* or *Sprake* in *Lusatia*; and were now united under one common King called *Ermeric*, who soon after led them into *Gallia*. The *Vandals* and *Alans* might also about this time extend themselves into *Noricum*. *Uldin* also with a great body of *Hunns* passed the *Danube* about the time of *Chrysostom*'s banishment, that is, A.C. 404, and wasted *Thrace* and *Mœsia*. *Radagaisus*, King of the *Gruthunni* and succesor of *Winithar*, inviting over more barbarians from beyond the *Danube*, invaded *Italy* with an army of above two hundred thousand *Goths*; and within a year or two, A.C. 405 or 406., was overcome by *Stilico*, and perished with his army. In this war *Stilico* was assisted with a great body of *Hunns* and *Ostrogoths*, under the conduct of *Uldin* and *Sarus*, who were hired by the Emperor *Honorius*. In all this confusion it was necessary for the *Lombards* in *Pannonia* to arm themselves in their own defence, and assert their liberty, the *Romans* being no longer able to protect them.

And now *Stilico* purposing to make himself Emperor, procured a military prefecture for *Alaric*, and sent him into the *East* in the service of *Honorius* the *Western* Emperor, committing some *Roman* troops to his conduct to strengthen his army of *Goths*, and promising to follow soon after with his own army. His pretence was to recover some regions of *Illyricum*, which the *Eastern* Emperor was accused to detain injuriously from the *Western*; but his secret design was to make himself Emperor, by the assistance of the *Vandals* and their allies: for he himself was a *Vandal*. For facilitating this design, he invited a great body of the barbarous nations to invade the

Western Empire, while he and *Alaric* invaded the *Eastern*. And these nations under their several Kings, the *Vandals* under *Godegisilus*, the *Alans* in two bodies, the one under *Goar*, the other under *Resplendial*, and the *Suevians*, *Quades*, and *Marcomans*, under *Ermeric*, marched thro' *Rhætia* to the side of the *Rhine*, leaving their seats in *Pannonia* to the *Hunns* and *Ostrogoths*, and joined the *Burgundians* under *Gundicar*, and ruffled the *Franks* in their further march. On the last of *December* A.C. 406, they passed the *Rhine* at *Ments*, and spread themselves into *Germania prima* and the adjacent regions; and amongst other actions the *Vandals* took *Triers*. Then they advanced into *Belgium*, and began to waste that country. Whereupon the *Salian Franks* in *Brabant* took up arms, and under the conduct of *Theudomir*, the son of *Ricimer*, or *Richomer*, abovementioned, made so stout a resistance, that they slew almost twenty thousand of the *Vandals*, with their King *Godegesilus*, in battel; the rest escaping only by a party of *Resplendial*'s *Alans* which came timely to their assistance.

Then the *British* soldiers, alarm'd by the rumour of these things, revolted, and set up Tyrants there; first *Marcus*, whom they slew presently; then *Gratian*, whom they slew within four months; and lastly *Constantine*, under whom they invaded *Gallia* A.C. 408, being favoured by *Goar* and *Gundicar*. And *Constantine* having possessed a good part of *Gallia*, created his son *Constans Cæsar*, and sent him into *Spain* to order his affairs there, A.C. 409.

In the mean time *Resplendial*, seeing the aforesaid disaster of the *Vandals*, and that *Goar* was gone over to the *Romans*, led his army from the *Rhine*; and, together with the *Suevians* and residue of the *Vandals*, went towards *Spain*; the *Franks* in the mean time prosecuting their victory so far as to retake *Triers*, which after they had plundered they left to the *Romans*. The *Barbarians* were at first stopt by the *Pyrenean* mountains, which made them spread themselves into *Aquitain*: but the next year they had the passage betrayed by some soldiers of *Constans*; and entring *Spain* 4 Kal. *Octob.* A.C. 409, they conquered every one what he could; and at length, A.C. 411, divided their conquests by lot; the *Vandals* obtained *Bœtica*, and part of *Gallæcia*; the *Suevians* the rest of *Gallæcia*; and the *Alans Lusitania* and the *Carthaginian* Province: the Emperor for the sake of peace confirming them in those seats by grant A.C. 413.

The *Roman Franks* abovementioned, having made *Theudomir* their King, began strait after their conquest of the *Vandals* to invade their neighbours also. The first they set upon were the *Gauls* of *Brabant*[2]: but meeting with notable resistance, they desired their alliance: and so those *Gauls* fell off from the *Romans*, and made an intimate league with the *Franks* to be as one people, marrying with one another, and conforming to one another's manners, till they became one without distinction. Thus by the access of these *Gauls*, and of the foreign *Franks* also, who afterwards came over the *Rhine*, the *Salian* kingdom soon grew very great and powerful.

Stilico's expedition against the *Greek* Emperor was stopt by the order of *Honorius*; and then *Alaric* came out of *Epirus* into *Noricum*, and requested a sum of money for his service. The Senate were inclined to deny him, but by *Stilico*'s mediation granted it. But after some time *Stilico* being accused of a traiterous conspiracy with *Alaric*, and slain 10 Kal. *Sept.* A.C. 408; *Alaric* was thereby disappointed of his money, and reputed an enemy to the Empire; he then broke strait into *Italy* with the army he brought out of *Epirus*, and sent to his brother *Adolphus* to follow him with what forces he had in *Pannonia*, which were not great, but yet not to be despised. Thereupon *Honorius* fearing to be shut up in *Rome*, retired to *Ravenna* in *October* A.C. 408. And from that time *Ravenna* continued to be the seat of the *Western* Emperors. In those days the *Hunns* also invaded *Pannonia*; and seizing the deserted seats of the *Vandals*, *Alans*, and *Goths*, founded a new kingdom there. *Alaric* advancing to *Rome* besieged it, and 9 Kal. *Sept.* A.C. 410 took it: and afterwards attempting to pass into *Africa*, was shipwrackt. After which *Honorius* made peace with him, and got up an army to send against the Tyrant *Constantine*.

At the same time *Gerontius*, one of *Constantine*'s captains, revolted from him, and set up *Maximus* Emperor in *Spain*. Whereupon *Constantine* sent *Edobec*, another of his captains, to draw to his assistance, the *Barbarians* under *Goar* and *Gundicar* in *Gallia*, and supplies of *Franks* and *Alemans* from beyond the *Rhine*; and committed the custody of *Vienne* in *Gallia Narbonensis* to his son *Constans*. *Gerontius* advancing, first slew *Constans* at *Vienne*, and then began to besiege *Constantine* at *Arles*. But *Honorius* at the same time sending *Constantius* with an army on the same errand,

Gerontius fled, and *Constantius* continued the siege, strengthned by the access of the greatest part of the soldiers of *Gerontius*. After four months siege, *Edobec* having procured succours, the *Barbarian* Kings at *Ments*, *Goar* and *Gundicar*, constitute *Jovinus* Emperor, and together with him set forward to relieve *Arles*. At their approach *Constantius* retired. They pursued, and he beat them by surprize; but not prosecuting his victory, the *Barbarians* soon recovered themselves; yet not so as to hinder the fall of the tyrants *Constantine*, *Jovinus* and *Maximus*. *Britain* could not be recovered to the Empire, but remained ever after a distinct kingdom.

The next year, A.C. 412, the *Visigoths* being beaten in *Italy*, had *Aquitain* granted them to retire into: and they invaded it with much violence, causing the *Alans* and *Burgundians* to retreat, who were then depopulating of it. At the same time the *Burgundians* were brought to peace; and the Emperor granted them for inheritance a region upon the *Rhine* which they had invaded: and the same, I presume, he did with the *Alans*. But the *Franks* not long after retaking and burning *Triers*, *Castinus*, A.C. 415, was sent against them with an army, who routed them and slew *Theudomir* their King This was the second taking of *Triers* by the *Franks*. It was therefore taken four times, once by the *Vandals* and thrice by the *Franks*. *Theudomir* was succeeded by *Pharamond*, the Prince or King of the *Salian Franks* in *Germany*. From thence he brought new forces, reigned over the whole, and had seats granted to his people within the Empire near the *Rhine*.

And now the *Barbarians* were all quieted, and settled in several kingdoms within the Empire, not only by conquest, but also by the grants of the Emperor *Honorius*. For *Rutilius* in his *Itinerary*, written in Autumn, *Anno Urbis* 1169, that is, according to *Varro*'s computation then in use, A.C. 416, thus laments the wasted fields:

Illa quidem longis nimium deformia bellis;

And then adds,

Jam tempus laceris post longa incendia fundis
Vel pastorales ædificare casas.

And a little after,

Æternum tibi Rhenus aret.

And *Orosius* in the end of his history, which was finished A.C. 417, represents now a general pacification of the barbarous nations by the words *comprimere*, *coangustare*, *addicere gentes immanissimas*; terming them

imperio addictas, because they had obtained seats in the Empire by league and compact; and *coangustatas*, because they did no longer invade all regions at pleasure, but by the same compact remained quiet in the seats then granted them. And these are the kingdoms, of which the feet of the Image were henceforward composed, and which are represented by iron and clay intermixed, which did not stick one to another, and were of different strength.

Notes to Chap. V.

[1] Procop. l. 1. de Bello Vandalico.

[2] Galli Arborici: *whence the region was named* Arboricbant*, and by contraction* Brabant.

CHAP. VI.

Of the ten Kingdoms represented by the ten horns of the fourth Beast.

Now by the wars above described the *Western* Empire of the *Romans*, about the time that *Rome* was besieged and taken by the *Goths*, became broken into the following ten kingdoms.

1. The kingdom of the *Vandals* and *Alans* in *Spain* and *Africa*.
2. The kingdom of the *Suevians* in *Spain*.
3. The kingdom of the *Visigoths*.
4. The kingdom of the *Alans* in *Gallia*.
5. The kingdom of the *Burgundians*.
6. The kingdom of the *Franks*.
7. The kingdom of the *Britains*.
8. The kingdom of the *Hunns*.
9. The kingdom of the *Lombards*.
10. The kingdom of *Ravenna*.

Seven of these kingdoms are thus mentioned by *Sigonius*. [1]*Honorio regnante*, *in Pannoniam* [2]*Hunni*, *in Hispaniam* [3]*Vandali*, [4]*Alani*, [5]*Suevi* & [6]*Gothi*, *in Galliam* [4]*Alani* [7]*Burgundiones* & [6]*Gothi*, *certis sedibus permissis, accepti*. Add the *Franks*, *Britains*, and *Lombards*, and you have the ten: for these arose about the same time with the seven. But let us view them severally.

1. The Kings of the *Vandals* were, A.C. 407 *Godegesilus*, 407 *Gunderic*, 426 *Geiseric*, 477 *Hunneric*, 484 *Gundemund*, 496 *Thrasamund*, 513 *Geiseric*, 530 *Gelimer*. *Godegesilus* led them into *Gallia* A.C. 406, *Gunderic* into *Spain* A.C. 409, *Geiseric* into *Africa* A.C. 427; and *Gelimer* was conquered by *Belisarius* A.C. 533. Their kingdom lasted in *Gallia*, *Spain* and *Africa* together 126 years; and in *Africa* they were very potent. The *Alans* had only two Kings of their own in *Spain*, *Resplendial*, and *Ataces*, *Utacus* or *Othacar*. Under *Resplendial* they went into *France* A.C. 407, and into *Spain* A.C. 409. *Ataces* was slain with almost all his army by *Vallia* King of the *Visigoths* A.C. 419. And then the remainder of these *Alans* subjected themselves to *Gunderic* King of the *Vandals* in *Bœtica*, and

went afterwards with them into *Africa*, as I learn out of *Procopius*. Whence the Kings of the *Vandals* styled themselves Kings of the *Vandals* and *Alans*; as may be seen in the Edict of *Hunneric* recited by *Victor* in his *Vandalic* persecution. In conjunction with the *Chatti*, these *Alans* gave the name of *Cathalaunia*, or *Catth-Alania*, to the Province which is still so called. These *Alans* had also *Gepides* among them; and therefore the *Gepides* came into *Pannonia* before the *Alans* left it. There they became subject to the *Hunns* till the death of *Attila* A.C. 454, and at length were conquered by the *Ostrogoths*.

2. The Kings of the *Suevians* were, A.C. 407 *Ermeric*, 458 *Rechila*, 448 *Rechiarius*, 458 *Maldra*, 460 *Frumarius*, 463 *Regismund*. And after some other Kings who are unknown, reigned A.C. 558 *Theudomir*, 568 *Miro*, 582 *Euboricus*, and 583 *Andeca*. This kingdom, after it had been once seated in *Spain*, remained always in *Gallæcia* and *Lusitania*. *Ermeric* after the fall of the *Alan* kingdom, enlarged it into all *Gallæcia*, forcing the *Vandals* to retire into *Bœtica* and the *Carthaginian* Province. This kingdom lasted 177 years according to *Isidorus*, and then was subdued by *Leovigildus* King of the *Visigoths*, and made a Province of his kingdom A.C. 585.

3. The Kings of the *Visigoths* were, A.C. 400 *Alaric*, 410 *Athaulphus*, 415 *Sergeric* and *Vallia*, 419 *Theoderic*, 451 *Thorismund*, 452 *Theoderic*, 465 *Euric*, 482 *Alaric*, 505 *Gensalaric*, 526 *Amalaric*, 531 *Theudius*, 548 *Theudisclus*, &c. I date this kingdom from the time that *Alaric* left *Thrace* and *Greece* to invade the *Western Empire*. In the end of the reign of *Athaulphus* the *Goths* were humbled by the *Romans*, and attempted to pass out of *France* into *Spain*. *Sergeric* reigned but a few days. In the beginning of *Vallia*'s reign they assaulted the *Romans* afresh, but were again repulsed, and then made peace on this condition, that they should on the behalf of the Empire invade the *Barbarian* kingdoms in *Spain*: and this they did, together with the *Romans*, in the years 417 and 418, overthrowing the *Alans* and part of the *Vandals*. Then they received *Aquitain* of the Emperor by a full donation, leaving their conquests in *Spain* to the Emperor: and thereby the seats of the conquered *Alans* came into the hands of the *Romans*. In the year 455, *Theoderic*, assisted by the *Burgundians*, invaded *Spain*, which was then almost all subject to the *Suevians*, and took a part of it from them. A.C. 506, the *Goths* were driven out of *Gallia* by the *Franks*. A.C. 585, they conquered the *Suevian* kingdom, and became Lords of all *Spain*. A.C. 713,

the *Saracens* invaded them, but in time they recovered their dominions, and have reigned in *Spain* ever since.

4. The Kings of the *Alans* in *Gallia* were *Goar*, *Sambida*, *Eocharic*, *Sangibanus*, *Beurgus*, &c. Under *Goar* they invaded *Gallia* A.C. 407, and had seats given them near the *Rhine*, A.C. 412. Under *Sambida*, whom *Bucher* makes the successor, if not the son of *Goar*, they had the territories of *Valence* given them by *Ætius* the Emperor's General, A.C. 440. Under *Eocharic* they conquered a region of the rebelling *Galli Arborici*, given them also by *Ætius*. This region was from them named *Alenconium, quasi Alanorum conventus*. Under *Sangibanus* they were invaded, and their regal city *Orleans* was besieged by *Attila* King of the *Hunns*, with a vast army of 500000 men. *Ætius* and the *Barbarian* Kings of *Gallia* came to raise the siege, and beat the *Hunns* in a very memorable battle, A.C. 451, *in campis Catalaunicis*, so called from these *Alans* mixt with the *Chatti*. The region is now called *Campania* or *Champagne*. In that battle were slain on both sides 162000 men. A year or two after, *Attila* returned with an immense army to conquer this kingdom, but was again beaten by them and the *Visigoths* together in a battle of three days continuance, with a slaughter almost as great as the former. Under *Beurgus*, or *Biorgor*, they infested *Gallia* round about, till the reign of *Maximus* the Emperor; and then they passed the *Alps* in winter, and came into *Liguria*, but were there beaten, and *Beurgus* slain, by *Ricimer* commander of the Emperor's forces, A.C. 464. Afterwards they were again beaten, by the joint force of *Odoacer* King of *Italy* and *Childeric* King of the *Franks*, about the year 480, and again by *Theudobert* King of the *Austrian Franks* about the year 511.

5. The Kings of the *Burgundians* were, A.C. 407 *Gundicar*, 436 *Gundioc*, 467 *Bilimer*, 473 *Gundobaldus* with his brothers, 510 *Sigismund*, 517 *Godomarus*. Under *Gundicar* they invaded *Gallia* A.C. 407, and had seats given them by the Emperor near the *Rhine* in *Gallia Belgica*, A.C. 412. They had *Saxons* among them, and were now so potent, that *Orosius* A.C. 417 wrote of them: '*Burgundionum esse prævalidam manum, Galliæ hodieque testes sunt, in quibus præsumpta possessione consistunt*. About the year 435 they received great overthrows by *Ætius*, and soon after by the *Hunns*: but five years after had *Savoy* granted them to be shared with the inhabitants; and from that time became again a potent kingdom, being bounded by the river *Rhodanus*, but afterwards extending much further into

the heart of *Gallia*. *Gundobald* conquered the regions about the rivers *Araris* and *Rhodanus*, with the territories of *Marseilles*; and invading *Italy* in the time of the Emperor *Glycerius*, conquered all his brethren. *Godomarus* made *Orleans* his royal seat: whence the kingdom was called *Regnum Aurelianorum*. He was conquered by *Clotharius* and *Childebert*, Kings of the *Franks*, A.C. 526. From thenceforward this kingdom was sometimes united to the kingdom of the *Franks*, and sometimes divided from it, till the reign of *Charles* the great, who made his son *Carolottus* King of *Burgundy*. From that time, for about 300 years together, it enjoyed its proper Kings; and was then broken into the Dukedom of *Burgundy*, County of *Burgundy*, and County of *Savoy*; and afterwards those were broken into other lesser Counties.

6. The Kings of the *Franks* were, A.C. 407 *Theudomir*, 417 *Pharamond*, 428 *Clodio*, 448 *Merovæus*, 456 *Childeric*, 482 *Clodovæus*, &c. *Windeline* and *Bucher*, two of the most diligent searchers into the originals of this kingdom, make it begin the same year with the *Barbarian* invasions of *Gallia*, that is, A.C. 407. Of the first Kings there is in *Labbe's Bibliotheca M.S.* this record.

Historica quædam excerpta ex veteri stemmate genealogico Regum Franciæ.

Genobaldus, Marcomerus, Suno, Theodemeris. Isti duces vel reguli extiterunt à principio gentis Francorum diversis temporibus. Sed incertum relinquunt historici quali sibi procreations lineâ successerunt.

Pharamundus: sub hoc rege suo primo Franci legibus se subdunt, quas primores eorum tulerunt Wisogastus, Atrogastus, Salegastus.

Chlochilo. Iste, transito Rheno, Romanos in Carbonaria sylva devicit, Camaracum cepit & obtinuit, annis 20 regnavit. Sub hoc rege Franci usque Summam progressi sunt.

Merovechus. Sub hoc rege Franci Trevirim destruunt, Metim succendunt, usque Aurelianum perveniunt.

Now for *Genobaldus*, *Marcomer* and *Suno*, they were captains of the *Transrhenane Franks* in the reign of *Theodosius*, and concern us not. We are to begin with *Theudomir* the first King of the rebelling *Salii*, called *Didio* by *Ivo Carnotensis*, and *Thiedo* and *Theudemerus* by *Rhenanus*. His face is extant in a coin of gold found with this inscription, THEUDEMIR REX, published by *Petavius*, and still or lately extant, as *Windeline* testifies:

which shews that he was a King, and that in *Gallia*; seeing that rude *Germany* understood not then the coining of money, nor used either *Latin* words or letters. He was the son of *Ricimer*, or *Richomer*, the favourite of the Emperor *Theodosius*; and so being a *Roman Frank*, and of the *Salian* royal blood, they therefore upon the rebellion made him King. The whole time of his reign you have stated in *Excerptis Gregorii Turonensis è Fredigario*, *ca*, 6, 7, 8. where the making him King, the tyranny of *Jovinus*, the slaughter of the associates of *Jovinus*, the second taking of *Triers* by the *Franks*, and their war with *Castinus*, in which this King was slain, are as a series of successive things thus set down in order. *Extinctis Ducibus in Francis, denuo Reges creantur ex eadem stirpe qua prius fuerant. Eodem tempore Jovinus ornatus regios assumpsit. Constantinus fugam versus Italiam dirigit; missis a Jovino Principe percussoribus super Mentio flumine, capite truncatur. Multi nobilium jussu Jovini apud Avernis capti, & a ducibus Honorii crudeliter interempti sunt. Trevirorum civitas, factione unius ex senatoribus nomine Lucii, à Francis captà & incensa est. — Castinus Domesticorum Comes expeditionem accipit contra Francos*, &c. Then returning to speak of *Theudomir*, he adds: *Franci electum à se regem, sicut prius fuerat, crinitum inquirentes diligenter ex genere Priami, Frigi & Francionis, super se crearunt nomine Theudemerum filium Richemeris, qui in hoc prælio quod supra memini, à Romanis interfectus est*; that is, in the battle with *Castinus*'s army. Of his death *Gregory Turonensis* makes this further mention: *In consularibus legimus Theodemerem regem Francorum filium Ricimeris quondam, & Ascilam matrem ejus, gladio interfectos*.

Upon this victory of the *Romans*, the *Franks* and rebelling *Gauls*, who in the time of *Theudomir* were at war with one another, united to strengthen themselves, as *Ordericus Vitalis*[1] thus mentions. *Cum Galli prius contra Romanos rebellâssent, Franci iis sociati sunt, & pariter juncti, Ferramundum Sunonis ducis filium, sibi regem præfecerunt*. *Prosper* sets down the time; *Anno 25 Honorii, Pharamundus regnat in Francia*. This, *Bucher* well observes, refers to the end of the year 416, or the beginning of the next year, dating the years of *Honorius* from the death of *Valentinian*; and argues well, that at this time *Pharamond* was not only King by the constitution of the *Franks*, but crowned also by the consent of *Honorius*, and had a part of *Gallia* assigned him by covenant. And this might be the

cause that *Roman* writers reckoned him the first King: which some not understanding, have reputed him the founder of this kingdom by an army of the *Transrhenane Franks*. He might come with such an army, but he succeeded *Theudomir* by right of blood and consent of the people. For the above cited passage of *Fredigarius*, *Extinctis Ducibus, in Francis denuo Reges creantur ex eadem stirpe quâ prius fuerant*, implies that the kingdom continued to this new elected family during the reign of more Kings than one. If you date the years of *Honorius* from the death of his father, the reign of *Pharamond* might begin two years later than is assigned by *Bucher*. The *Salique* laws made in his reign, which are yet extant, shew by their name that it was the kingdom of the *Salii* over which he reigned; and, by the pecuniary mulcts in them, that the place where he reigned abounded much with money, and consequently was within the Empire; rude *Germany* knowing not the use of money, till they mixed with the *Romans*. In the Preface also to the *Salique* laws, written and prefixed to them soon after the conversion of the *Franks* to the Christian religion, that is, in the end of the reign of *Merovæus*, or soon after, the original of this kingdom is thus described: *Hæc enim gens, quæ fortis dum esset & robore valida, Romanorum jugum durissimum de suis cervicibus excussit pugnando*, &c. This kingdom therefore was erected, not by invasion but by rebellion, as was described above. *Prosper* in registering their Kings in order, tells us: *Pharamundus regnat in Francia; Clodio regnat in Francia; Merovæus regnat in Francia*: and who can imagine but that in all these places he meant one and the same *Francia*? And yet 'tis certain that the *Francia* of *Merovæus* was in *Gallia*.

Yet the father of *Pharamond*, being king of a body of *Franks* in *Germany* in the reign of the Emperor *Theodosius*, as above, *Pharamond* might reign over the same *Franks* in *Germany* before he succeeded *Theudomir* in the kingdom of the *Salians* within the Empire, and even before *Theudomir* began his reign; suppose in the first year of *Honorius*, or when those *Franks* being repulsed by *Stilico*, lost their Kings *Marcomir* and *Suno*, one of which was the father of *Pharamond*: and the *Roman Franks*, after the death of *Theudomir*, might invite *Pharamond* with his people from beyond the *Rhine*. But we are not to regard the reign of *Pharamond* in *Germany*: we are to date this kingdom from its rise within the Empire, and to look upon it as strengthened by the access of other *Franks* coming from

beyond the *Rhine*, whether in the reign of this King or in that of his successor *Clodio*. For in the last year of *Pharamond*'s reign, *Ætius* took from him a part of his possession in *Gallia*: but his successor *Clodio*, whom *Fredigarius* represents as the son of *Theudomir*, and some call *Clogio*, *Cloio*, and *Claudius*, inviting from beyond the *Rhine* a great body of *Franks*, recovered all, and carried on their conquests as far as the river *Soame*. Then those *Franks* dividing conquests with him, erected certain new kingdoms at *Cologn* and *Cambray*, and some other cities: all which were afterwards conquered by *Clodovæus*, who also drove the *Goths* out of *Gallia*, and fix'd his seat at *Paris*, where it has continued ever since. And this was the original of the present kingdom of *France*.

7. The Kings of *Britain* were, A.C. 407 or 408, *Marcus*, *Gratian*, and *Constantine* successively; A.C. 425 *Vortigern*, 466 *Aurelius Ambrosius*, 498 *Uther Pendraco*, 508 *Arthur*, 542 *Constantinus*, 545 *Aurelius Cunanus*, 578 *Vortiporeus*, 581 *Malgo*, 586 *Careticus*, 613 *Cadwan*, 635 *Cadwalin*, 676 *Cadwallader*. The three first were *Roman* Tyrants, who revolted from the Empire. *Orosius*, *Prosper* and *Zosimus* connect their revolt with the irruptions of the *Barbarians* into *Gallia*, as consequent thereunto. *Prosper*, with whom *Zosimus* agrees, puts it in the year which began the day after that irruption. The just time I thus collect: *Marcus* reigned not many days, *Gratian* four months, and *Constantine* three years. He was slain the year after the taking of *Rome*, that is A.C. 411, 14 Kal. *Octob.* Whence the revolt was in Spring A.C. 408. *Sozomen* joins *Constantine*'s expedition into *Gallia* with *Arcadius*'s death, or the times a little after; and *Arcadius* died A.C. 408 *May* the 1st. Now tho the reign of these Tyrants was but short, yet they gave a beginning to the kingdom of *Britain*, and so may be reckoned the three first Kings, especially since the posterity of *Constantine*, *viz.* his sons *Aurelius Ambrosius*, and *Uther Pendraco*, and his grandson *Arthur*, reigned afterwards. For from the time of the revolt of these Tyrants *Britain* continued a distict kingdom absolved from subjection to the Empire, the Emperor not being able to spare soldiers to be sent thither to receive and keep the Island, and therefore neglecting it; as we learn by unquestionable records. For *Prosper* tells us; *A.C.* 410, *Variane Cos. Hac tempestate præ valetudine Romanorum, vires funditùs attenuatæ Britanniæ*. And *Sigebert*, conjoining this with the siege of *Rome*, saith: *Britannorum vires attenuatæ, & substrahunt se à Romanorum dominatione*. And *Zosimus lib.* 6. *The*

Transrhenane Barbarians *invading all places, reduced the inhabitants of the island of* Britain*, and also certain* Celtic *nations to that pass, that they fell off from the* Roman *Empire; and being no longer obedient to the* Roman *laws*, κατ' 'εαυτον βιατευειν, *they lived in separate bodies after their own pleasure. The* Britons *therefore taking up arms, and hazarding themselves for their own safety, freed their cities from the imminent* Barbarians. *In like manner all* Brabant *and some other Provinces of the* Gauls *imitating the* Britons*, freed themselves also, ejecting the* Roman *Presidents, and forming themselves into a sort of commonwealth according to their own pleasure. This rebellion of* Britain *and the* Celtic *nations happened when* Constantine *usurped the kingdom*. So also *Procopius*, *lib.* 1. *Vandal.* speaking of the same *Constantine*, saith: Constantine *being overcome in battle, was slain with his children:* Βρεταννιαν μεν τοι Ρωμαιοι ανασωσασθαι ουκετι εχον· αλλ' ουσα 'υπο τυραννους απ' αυτου εμενε. *Yet the* Romans *could not recover* Britain *any more, but from that time it remained under Tyrants*. And *Beda*, *l.* 1. *c.* 11. *Fracta est Roma à Gothis anno 1164 suæ conditionis; ex quo tempore Romani in Britannia regnare cessaverunt*. And *Ethelwaldus*: *A tempore Romæ à Gothis expugnatæ, cessavit imperium Romanorum à Britannia insula, & ab aliis; quas sub jugo servitutis tenebant, multis terris*. And *Theodoret*, *serm.* 9. *de curand. Græc. affect*. about the year 424, reckons the *Britons* among the nations which were not then in subjection to the *Roman* Empire. Thus *Sigonius*: *ad annum 411, Imperium Romanorum post excessum Constantini in Britannia nullum fuit*.

Between the death of *Constantine* and the reign of *Vortigern* was an interregnum of about 14 years, in which the *Britons* had wars with the *Picts* and *Scots*, and twice obtained the assistance of a *Roman* Legion, who drove out the enemy, but told them positively at their departure that they would come no more. Of *Vortigern*'s beginning to reign there is this record in an old Chronicle in *Nennius*, quoted by *Camden* and others: *Guortigernus tenuit imperium in Britannia, Theodosio & Valentiniano Coss.* [*viz.* A.C. 425.] *& in quarto anno regni sui Saxones ad Britanniam venerunt, Felice & Tauro Coss.* [*viz.* A.C. 428.] This coming of the *Saxons*, *Sigebert* refers to the 4th year of *Valentinian*, which falls in with the year 428 assigned by this Chronicle: and two years after, the *Saxons* together with the *Picts* were beaten by the *Britons*. Afterwards in the reign of *Martian* the Emperor, that is, between the years 450 and 456, the *Saxons* under *Hengist* were called in

by the *Britons*, but six years after revolted from them, made war upon them with various success, and by degrees succeeded them. Yet the *Britons* continued a flourishing kingdom till the reign of *Careticus*; and the war between the two nations continued till the pontificate of *Sergius* A.C. 688.[2]

8. The Kings of the *Hunns* were, A.C. 406 *Octar* and *Rugila*, 433 *Bleda* and *Attila*. *Octar* and *Rugila* were the brothers of *Munzuc* King of the *Hunns* in *Gothia* beyond the *Danube*; and *Bleda* and *Attila* were his sons, and *Munzuc* was the son of *Balamir*. The two first, as *Jornandes* tells us, were Kings of the *Hunns*, but not of them all; and had the two last for their successors. I date the reign of the *Hunns* in *Pannonia* from the time that the *Vandals* and *Alans* relinquished *Pannonia* to them, A.C. 407. *Sigonius* from the time that the *Visigoths* relinquished *Pannonia* A. C. 408. *Constat*, saith he, *quod Gothis ex Illyrico profectis, Hunni successerunt, atque imprimis Pannoniam tenuerunt. Neque enim Honorius viribus ad resistendum in tantis difficultatibus destitutus, prorsus eos prohibere potuit, sed meliore consilio, animo ad pacem converso, fœdus cum eis, datis acceptisque obsidibus fecit; ex quibus qui dati sunt, Ætius, qui etiam Alarico tributus fuerat, præcipue memoratur*. How *Ætius* was hostage to the *Goths* and *Hunns* is related by *Frigeridus*, who when he had mentioned that *Theodosius* Emperor of the *East* had sent grievous commands to *John*, who after the death of *Honorius* had usurped the crown of the *Western Empire*, he subjoins: *Iis permotus Johannes, Ætium id tempus curam palatii gerentem cum ingenti auri pondere ad Chunnos transmisit, notos sibi obsidiatûs sui tempore & familiari amicitiâ devinctos* — And a little after: *Ætius tribus annis Alarici obses, dehinc Chunnorum, postea Carpilionis gener ex Comite domesticorum & Joannis curopalatæ.* Now *Bucher* shews that *Ætius* was hostage to *Alaric* till the year 410, when *Alaric* died, and to the *Hunns* between the years 411 and 415, and son-in-law to *Carpilio* about the year 417 or 418, and *Curopalates* to *John* about the end of the year 423. Whence ’tis probable that he became hostage to the *Hunns* about the year 412 or 413, when *Honorius* made leagues with almost all the barbarous nations, and granted them seats: but I had rather say with *Sigonius*, that *Ætius* became hostage to *Alaric* A.C. 403. It is further manifest out of *Prosper*, that the *Hunns* were in quiet possession of *Pannonia* in the year 432. For in the first book of *Eusebius*’s Chronicle *Prosper* writes: *Anno*

decimo post obitum Honorii, cum ad Chunnorum gentem cui tunc Rugila præerat, post prælium cum Bonifacio se Ætius contulisset, impetrato auxilio ad Romanorum solum regreditur. And in the second book: *Ætio & Valerio Coss. Ætius depositâ potestate profugus ad Hunnos in Pannonia pervenit, quorum amicitiâ auxilioque usus, pacem principum interpellatæ potestatis obtinuit.* Hereby it appears that at this time *Rugila*, or as *Maximus* calls him, *Rechilla*, reigned over the *Hunns* in *Pannonia*; and that *Pannonia* was not now so much as accounted within the soil of the Empire, being formerly granted away to the *Hunns*; and that these were the very same body of *Hunns* with which *Ætius* had, in the time of his being an hostage, contracted friendship: by virtue of which, as he sollicited them before to the aid of *John* the Tyrant A.C. 424, so now he procured their intercession for himself with the Emperor. *Octar* died A.C. 430; for *Socrates* tells us, that about that time the *Burgundians* having been newly vext by the *Hunns*, upon intelligence of *Octar*'s death, seeing them without a leader, set upon them suddenly with so much vigour, that 3000 *Burgundians* slew 10000 *Hunns*. Of *Rugila*'s being now King in *Pannonia* you have heard already. He died A.C. 433, and was succeeded by *Bleda*, as *Prosper* and *Maximus* inform us. This *Bleda* with his brother *Attila* were before this time Kings of the *Hunns* beyond the *Danube*, their father *Munzuc*'s kingdom being divided between them; and now they united the kingdom *Pannonia* to their own. Whence *Paulus Diaconus* saith, they did *regnum intra Pannoniam Daciamque gerere*. In the year 441, they began to invade the Empire afresh, adding to the *Pannonian* forces new and great armies from *Scythia*. But this war was presently composed, and then *Attila*, seeing *Bleda* inclined to peace, slew him, A.C. 444, inherited his dominions, and invaded the Empire again. At length, after various great wars with the *Romans*, *Attila* perished A.C. 454; and his sons quarrelling about his dominions, gave occasion to the *Gepides*, *Ostrogoths* and other nations who were their subjects, to rebel and make war upon them. The same year the *Ostrogoths* had seats granted them in *Pannonia* by the Emperors *Marcian* and *Valentinian*; and with the *Romans* ejected the *Hunns* out of *Pannonia*, soon after the death of *Attila*, as all historians agree. This ejection was in the reign of *Avitus*, as is mentioned in the *Chronicum Boiorum*, and in *Sidonius, Carm. 7 in Avitum*, which speaks thus of that Emperor.

—— *Cujus solum amissas post sæcula multa*

Pannonias revocavit iter, jam credere promptum est.
Quid faciet bellis.

The Poet means, that by the coming of *Avitus* the *Hunns* yielded more easily to the *Goths*. This was written by *Sidonius* in the beginning of the reign of *Avitus*: and his reign began in the end of the year 455, and lasted not one full year.

Jornandes tells us: *Duodecimo anno regni Valiæ, quando & Hunni post pene quinquaginta annos invasa Pannonia, à Romanis & Gothis expulsi sunt.* And *Marcellinus*: *Hierio & Ardaburio Coss. Pannoniæ, quæ per quinquaginta annos ab Hunnis retinebantur, à Romanis receptæ sunt*: whence it should seem that the *Hunns* invaded and held *Pannonia* from the year 378 or 379 to the year 427, and then were driven out of it. But this is a plain mistake: for it is certain that the Emperor *Theodosius* left the Empire entire; and we have shewed out of *Prosper*, that the *Hunns* were in quiet possession of *Pannonia* in the year 432. The *Visigoths* in those days had nothing to do with *Pannonia*, and the *Ostrogoths* continued subject to the *Hunns* till the death of *Attila*, A.C. 454; and *Valia* King of the *Visigoths* did not reign twelve years. He began his reign in the end of the year 415, reigned three years, and was slain A.C. 419, as *Idacius*, *Isidorus*, and the *Spanish* manuscript Chronicles seen by *Grotius* testify. And *Olympiodorus*, who carries his history only to the year 425, sets down therein the death of *Valia* King of the *Visigoths*, and conjoins it with that of *Constantius* which happened A.C. 420. Wherefore the *Valia* of *Jornandes*, who reigned at the least twelve years, is some other King. And I suspect that this name hath been put by mistake for *Valamir* King of the *Ostrogoths*: for the action recorded was of the *Romans* and *Ostrogoths* driving the *Hunns* out of *Pannonia* after the death of *Attila*; and it is not likely that the historian would refer the history of the *Ostrogoths* to the years of the *Visigothic* Kings. This action happened in the end of the year 455, which I take to be the twelfth year of *Valamir* in *Pannonia*, and which was almost fifty years after the year 406, in which the *Hunns* succeeded the *Vandals* and *Alans* in *Pannonia*. Upon the ceasing of the line of *Hunnimund* the son of *Hermaneric*, the *Ostrogoths* lived without Kings of their own nation about forty years together, being subject to the *Hunns*. And when *Alaric* began to make war upon the *Romans*, which was in the year 444, he made *Valamir*, with his brothers *Theodomir* and *Videmir* the grandsons of *Vinethar*,

captains or kings of these *Ostrogoths* under him. In the twelfth year of *Valamir*'s reign dated from thence, the *Hunns* were driven out of *Pannonia*.

Yet the *Hunns* were not so ejected, but that they had further contests with the *Romans*, till the head of *Denfix* the son of *Attila*, was carried to *Constantinople*, A.C. 469, in the Consulship of *Zeno* and *Marcian*, as *Marcellinus* relates. Nor were they yet totally ejected the Empire: for besides their reliques in *Pannonia*, *Sigonius* tells us, that when the Emperors *Marcian* and *Valentinian* granted *Pannonia* to the *Goths*, which was in the year 454, they granted part of *Illyricum* to some of the *Hunns* and *Sarmatians*. And in the year 526, when the *Lombards* removing into *Pannonia* made war there with the *Gepides*, the *Avares*, a part of the *Hunns*, who had taken the name of *Avares* from one of their Kings, assisted the *Lombards* in that war; and the *Lombards* afterwards, when they went into *Italy*, left their seats in *Pannonia* to the *Avares* in recompence of their friendship. From that time the *Hunns* grew again very powerful; their Kings, whom they called *Chagan*, troubling the Empire much in the reigns of the Emperors *Mauritius*, *Phocas*, and *Heraclius*: and this is the original of the present kingdom of *Hungary*, which from these *Avares* and other *Hunns* mixed together, took the name of *Hun-Avaria*, and by contraction *Hungary*.

9. The *Lombards*, before they came over the *Danube*, were commanded by two captains, *Ibor* and *Ayon*: after whose death they had Kings, *Agilmund*, *Lamisso*, *Lechu*, *Hildehoc*, *Gudehoc*, *Classo*, *Tato*, *Wacho*, *Walter*, *Audoin*, *Alboin*, *Cleophis*, &c. *Agilmund* was the son of *Ayon*, who became their King, according to *Prosper*, in the Consulship of *Honorius* and *Theodosius* A.C. 389, reigned thirty three years, according to *Paulus Warnefridus*, and was slain in battle by the *Bulgarians*. *Prosper* places his death in the Consulship of *Marinianus* and *Asclepiodorus*, A.C. 413. *Lamisso* routed the *Bulgarians*, and reigned three years, and *Lechu* almost forty. *Gudehoc* was contemporary to *Odoacer* King of the *Heruli* in *Italy*, and led his people from *Pannonia* into *Rugia*, a country on the north side of *Noricum* next beyond the *Danube*; from whence *Odoacer* then carried his people into *Italy*. *Tato* overthrew the kingdom of the *Heruli* beyond the *Danube*. *Wacho* conquered the *Suevians*, a kingdom then bounded on the east by *Bavaria*, on the west by *France*, and on the south by the *Burgundians*. *Audoin* returned into *Pannonia* A.C. 526, and there overcame

the *Gepides*. *Alboin* A.C. 551 overthrew the kingdom of the *Gepides*, and slew their King *Chunnimund*: A.C. 563 he assisted the *Greek* Emperor against *Totila* King of the *Ostrogoths* in *Italy*; and A.C. 568 led his people out of *Pannonia* into *Lombardy*, where they reigned till the year 774.

According to *Paulus Diaconus*, the *Lombards* with many other *Gothic* nations came into the Empire from beyond the *Danube* in the reign of *Arcadius* and *Honorius*, that is, between the years 395 and 408. But they might come in a little earlier: for we are told that the *Lombards*, under their captains *Ibor* and *Ayon*, beat the *Vandals* in battle; and *Prosper* placeth this victory in the Consulship of *Ausonius* and *Olybrius*, that is, A.C. 379. Before this war the *Vandals* had remained quiet forty years in the seats granted them in *Pannonia* by *Constantine* the great. And therefore if these were the same *Vandals*, this war must have been in *Pannonia*; and might be occasioned by the coming of the *Lombards* over the *Danube* into *Pannonia*, a year or two before the battle; and so have put an end to that quiet which had lasted forty years. After *Gratian* and *Theodosius* had quieted the *Barbarians*, they might either retire over the *Danube*, or continue quiet under the *Romans* till the death of *Theodosius*; and then either invade the Empire anew, or throw off all subjection to it. By their wars, first with the *Vandals*, and then with the *Bulgarians*, a *Scythian* nation so called from the river *Volga* whence they came; it appears that even in those days they were a kingdom not contemptible.

10. These nine kingdoms being rent away, we are next to consider the residue of the *Western Empire*. While this Empire continued entire, it was the Beast itself: but the residue thereof is only a part of it. Now if this part be considered as a horn, the reign of this horn may be dated from the translation of the imperial seat from *Rome* to *Ravenna*, which was in *October* A.C. 408. For then the Emperor *Honorius*, fearing that *Alaric* would besiege him in *Rome*, if he staid there, retired to *Millain*, and thence to *Ravenna*: and the ensuing siege and sacking of *Rome* confirmed his residence there, so that he and his successors ever after made it their home. Accordingly *Macchiavel* in his *Florentine* history writes, that *Valentinian* having left *Rome*, translated the seat of the Empire to *Ravenna*.

Rhætia belonged to the *Western* Emperors, so long as that Empire stood; and then it descended, with *Italy* and the *Roman* Senate, to *Odoacer* King of the *Heruli* in *Italy*, and after him to *Theoderic* King of the *Ostrogoths* and

his successors, by the grant of the *Greek* Emperors. Upon the death of *Valentinian* the second, the *Alemans* and *Suevians* invaded *Rhætia* A.C. 455. But I do not find they erected any settled kingdom there: for in the year 457, while they were yet depopulating *Rhætia*, they were attacked and beaten by *Burto* Master of the horse to the Emperor *Majoranus*; and I hear nothing more of their invading *Rhætia*. *Clodovæus* King of *France*, in or about the year 496, conquered a kingdom of the *Alemans*, and slew their last King *Ermeric*. But this kingdom was seated in *Germany*, and only bordered upon *Rhætia*: for its people fled from *Clodovæus* into the neighbouring kingdom of the *Ostrogoths* under *Theoderic*, who received them as friends, and wrote a friendly letter to *Clodovæus* in their behalf: and by this means they became inhabitants of *Rhætia*, as subjects under the dominion of the *Ostrogoths*.

When the *Greek* Emperor conquered the *Ostrogoths*, he succeeded them in the kingdom of *Ravenna*, not only by right of conquest but also by right of inheritance, the *Roman* Senate still going along with this kingdom. Therefore we may reckon that this kingdom continued in the Exarchate of *Ravenna* and Senate of *Rome*: for the remainder of the *Western Empire* went along with the Senate of *Rome*, by reason of the right which this Senate still retained, and at length exerted, of chusing a new *Western* Emperor.

I have now enumerated the ten kingdoms, into which the *Western Empire* became divided at its first breaking, that is, at the time of *Rome*'s being besieged and taken by the *Goths*. Some of these kingdoms at length fell, and new ones arose: but whatever was their number afterwards, they are still called the *Ten Kings* from their first number.

Notes to Chap. VI.

[1] Apud Bucherum, l. 14. c. 9. n. 8.

[2] Rolevinc's Antiqua Saxon. l. 1. c. 6.

CHAP. VII.

Of the eleventh horn of Daniel's fourth Beast.

[1]*Now Daniel, considered the horns, and behold there came up among them another horn, before whom there were three of the first horns pluckt up by the roots; and behold in this horn were eyes like the eyes of a man, and a mouth speaking great things,* — and [2] his *look was more stout than his fellows, — and the same horn made war with the saints, and prevailed against them*: and one who stood by, and made *Daniel* know the interpretation of these things, told him, that [3] *the ten horns were ten kings that should arise, and another should arise after them, and be diverse from the first, and he should subdue three kings,* [4] *and speak great words against the most High, and wear out the saints, and think to change times and laws: and that they should be given into his hands until a time and times and half a time*. Kings are put for kingdoms, as above; and therefore the little horn is a little kingdom. It was a horn of the fourth Beast, and rooted up three of his first horns; and therefore we are to look for it among the nations of the *Latin* Empire, after the rise of the ten horns. But it was a kingdom of a different kind from the other ten kingdoms, having a life or soul peculiar to itself, with eyes and a mouth. By its eyes it was a Seer; and by its mouth speaking great things and changing times and laws, it was a Prophet as well as a King. And such a Seer, a Prophet and a King, is the Church of *Rome*.

A Seer, Επισκοπος, is a Bishop in the literal sense of the word; and this Church claims the universal Bishoprick.

With his mouth he gives laws to kings and nations as an Oracle; and pretends to Infallibility, and that his dictates are binding to the whole world; which is to be a Prophet in the highest degree.

In the eighth century, by rooting up and subduing the Exarchate of *Ravenna*, the kingdom of the *Lombards*, and the Senate and Dukedom of *Rome*, he acquired *Peter*'s Patrimony out of their dominions; and thereby rose up as a temporal Prince or King, or horn of the fourth Beast.

In a small book printed at *Paris* A.C. 1689, entitled, *An historical dissertation upon some coins of* Charles *the great,* Ludovicus Pius*,* Lotharius*, and their successors stamped at* Rome, it is recorded, that in the days of Pope *Leo* X, there was remaining in the *Vatican*, and till those days exposed to public view, an inscription in honour of *Pipin* the father of *Charles* the great, in these words: *Pipinum pium, primum fuisse qui amplificandæ Ecclesiæ Romanæ viam aperuerit, Exarchatu Ravennate, & plurimis aliis oblatis*; "That *Pipin* the pious was the first who opened a way to the grandeur of the Church of *Rome*, conferring upon her the Exarchate of *Ravenna* and many other oblations." In and before the reign of the Emperors *Gratian* and *Theodosius*, the Bishop of *Rome* lived splendidly; but this was by the oblations of the *Roman* Ladies, as *Ammianus* describes. After those reigns *Italy* was invaded by foreign nations, and did not get rid of her troubles before the fall of the kingdom of *Lombardy*. It was certainly by the victory of the see of *Rome* over the *Greek* Emperor, the King of *Lombardy*, and the Senate of *Rome*, that she acquired *Peter*'s Patrimony, and rose up to her greatness. The donation of *Constantine* the Great is a fiction, and so is the donation of the *Alpes Cottiæ* to the Pope by *Aripert* King of the *Lombards*: for the *Alpes Cottiæ* were a part of the Exarchate, and in the days of *Aripert* belonged to the *Greek* Emperor.

The invocation of the dead, and veneration of their images, being gradually introduced in the 4th, 5th, 6th and 7th centuries, the *Greek* Emperor *Philippicus* declared against the latter, A.C. 711 or 712. And [5] the Emperor *Leo Isaurus*, to put a stop to it, called a meeting of Counsellors and Bishops in his Palace, A.C. 726; and by their advice put out an Edict against that worship, and wrote to Pope *Gregory* II. that a general Council might be called. But the Pope thereupon called a Council at *Rome*, confirmed the worship of Images, excommunicated the *Greek* Emperor, absolved the people from their allegiance, and forbad them to pay tribute, or otherwise be obedient to him. Then the people of *Rome*, *Campania*, *Ravenna* and *Pentapolis*, with the cities under them, revolted and laid violent hands upon their magistrates, killing the Exarch *Paul* at *Ravenna*, and laying aside *Peter* Duke of *Rome* who was become blind: and when *Exhileratus* Duke of *Campania* incited the people against the Pope, the *Romans* invaded *Campania*, and slew him with his son *Hadrian*. Then a

new Exarch, *Eutychius*, coming to *Naples*, sent some secretly to take away the lives of the Pope and the Nobles of *Rome*: but the plot being discovered, the *Romans* revolted absolutely from the *Greek* Emperor, and took an oath to preserve the life of the Pope, to defend his state, and be obedient to his authority in all things. Thus *Rome* with its Duchy, including part of *Tuscany* and part of *Campania*, revolted in the year 726, and became a free state under the government of the Senate of this city. The authority of the Senate in civil affairs was henceforward absolute, the authority of the Pope extending hitherto no farther than to the affairs of the Church only.

At that time [6] the *Lombards* also being zealous for the worship of images, and pretending to favour the cause of the Pope, invaded the cities of the Exarchate: and at length, *viz.* A.C. 752, took *Ravenna*, and put an end to the Exarchate. And this was the first of the three kingdoms which fell before the little horn.

In the year 751 [7] Pope *Zechary* deposed *Childeric*, a slothful and useless King of *France*, and the last of the race of *Merovæus*; and absolving his subjects from their oath of allegiance, gave the kingdom to *Pipin* the major of the Palace; and thereby made a new and potent friend. His successor [8] Pope *Stephen* III, knowing better how to deal with the *Greek* Emperor than with the *Lombards*, went the next year to the King of the *Lombards*, to persuade him to return the Exarchate to the Emperor. But this not succeeding, he went into *France*, and persuaded *Pipin* to take the Exarchate and *Pentapolis* from the *Lombards*, and give it to St. *Peter*. Accordingly *Pipin* A.C. 754 came with an army into *Italy*, and made *Aistulphus* King of the *Lombards* promise the surrender: but the next year *Aistulphus*, on the contrary, to revenge himself on the Pope, besieged the city of *Rome*. Whereupon the Pope sent letters to *Pipin*, wherein he told him that if he came not speedily against the *Lombards*, *pro data sibi potentia, alienandum fore à regno Dei & vita æterna*, he should be excommunicated. *Pipin* therefore, fearing a revolt of his subjects, and being indebted to the Church of *Rome*, came speedily with an army into *Italy*, raised the siege, besieged the *Lombards* in *Pavia*, and forced them to surrender the Exarchate and region of *Pentapolis* to the Pope for a perpetual possession. Thus the Pope became Lord of *Ravenna*, and the Exarchate, some few cities excepted; and the keys were sent to *Rome*, and laid upon the confession of

St. *Peter*, that is, upon his tomb at the high Altar, *in signum veri perpetuique dominii, sed pietate Regis gratuita*, as the inscription of a coin of *Pipin* hath it. This was in the year of Christ 755. And henceforward the Popes being temporal Princes, left off in their Epistles and Bulls to note the years of the *Greek* Emperors, as they had hitherto done.

After this [9] the *Lombards* invading the Pope's countries, Pope *Adrian* sent to *Charles* the great, the son and successor of *Pipin*, to come to his assistance. Accordingly *Charles* entered *Italy* with an army, invaded the *Lombards*, overthrew their kingdom, became master of their countries, and restored to the Pope, not only what they had taken from him, but also the rest of the Exarchate which they had promised *Pipin* to surrender to him, but had hitherto detained; and also gave him some cities of the *Lombards*, and was in return himself made *Patricius* by the *Romans*, and had the authority of confirming the elections of the Popes conferred upon him. These things were done in the years 773 and 774. This kingdom of the *Lombards* was the second kingdom which fell before the little horn. But *Rome*, which was to be the seat of his kingdom, was not yet his own.

In the year 796, [10] *Leo* III being made Pope, notified his election to *Charles* the great by his Legates, sending to him for a present, the golden keys of the Confession of *Peter*, and the Banner of the city of *Rome*: the first as an acknowledgment of the Pope's holding the cities of the Exarchate and *Lombardy* by the grant of *Charles*; the other as a signification that *Charles* should come and subdue the Senate and people of *Rome*, as he had done the Exarchate and the kingdom of the *Lombards*. For the Pope at the same time desired *Charles* to send some of his Princes to *Rome*, who might subject the *Roman* people to him, and bind them by oath *in fide & subjectione*, in fealty and subjection, as his words are recited by *Sigonius*. An anonymous Poet, publish'd by *Boeclerus* at *Strasburg*, expresseth it thus:

Admonuitque piis precibus, qui mittere vellet
Ex propriis aliquos primoribus, ac sibi plebem
Subdere Romanam, servandaque fœdera cogens
Hanc fidei sacramentis promittere magnis.

Hence arose a misunderstanding between the Pope and the city: and the *Romans* about two or three years after, by assistance of some of the Clergy,

raised such tumults against him, as gave occasion to a new state of things in all the *West*. For two of the Clergy accused him of crimes, and the *Romans* with an armed force, seized him, stript him of his sacerdotal habit, and imprisoned him in a monastery. But by assistance of his friends he made his escape, and fled into *Germany* to *Charles* the great, to whom he complained of the *Romans* for acting against him out of a design to throw off all authority of the Church, and to recover their antient freedom. In his absence his accusers with their forces ravaged the possessions of the Church, and sent the accusations to *Charles*; who before the end of the year sent the Pope back to *Rome* with a large retinue. The Nobles and Bishops of *France* who accompanied him, examined the chief of his accusers at *Rome*, and sent them into *France* in custody. This was in the year 799. The next year *Charles* himself went to *Rome*, and upon a day appointed presided in a Council of *Italian* and *French* Bishops to hear both parties. But when the Pope's adversaries expected to be heard, the Council declared [11] that he who was the supreme judge of all men, was above being judged by any other than himself: whereupon he made a solemn declaration of his innocence before all the people, and by doing so was looked upon as acquitted.

Soon after, upon *Christmas*-day, the people of *Rome*, who had hitherto elected their Bishop, and reckoned that they and their Senate inherited the rights of the antient Senate and people of *Rome*, voted *Charles* their Emperor, and subjected themselves to him in such manner as the old *Roman* Empire and their Senate were subjected to the old *Roman* Emperors. The Pope crowned him, and anointed him with holy oil, and worshipped him on his knees after the manner of adoring the old *Roman* Emperors; as the aforesaid Poet thus relates:

Post laudes igitur dictas & summus eundem
Præsul adoravit, sicut mos debitus olim
Principibus fuit antiquis.

The Emperor, on the other hand, took the following oath to the Pope: *In nomine Christi spondeo atque polliceor, Ego Carolus Imperator coram Deo & beato Petro Apostolo, me protectorem ac defensorem fore hujus sanctæ Romanæ Ecclesiæ in omnibus utilitatibus, quatenùs divino fultus fuero adjutorio, prout sciero poteroque*. The Emperor was also made Consul of

Rome, and his son *Pipin* crowned King of *Italy*: and henceforward the Emperor stiled himself: *Carolus serenissimus, Augustus, à Deo coronatus, magnus, pacificus, Romæ gubernans imperium*, or *Imperator Romanorum*; and was prayed for in the Churches of *Rome*. His image was henceforward put upon the coins of *Rome*: while the enemies of the Pope, to the number of three hundred *Romans* and two or three of the Clergy, were sentenced to death. The three hundred *Romans* were beheaded in one day in the *Lateran* fields: but the Clergymen at the intercession of the Pope were pardoned, and banished into *France*. And thus the title of *Roman* Emperor, which had hitherto been in the *Greek* Emperors, was by this act transferred in the *West* to the Kings of *France*.

After these things [12] *Charles* gave the City and Duchy of *Rome* to the Pope, subordinately to himself as Emperor of the *Romans*; spent the winter in ordering the affairs of *Rome*, and those of the Apostolic see, and of all *Italy*, both civil and ecclesiastical, and in making new laws for them; and returned the next summer into *France*: leaving the city under its Senate, and both under the Pope and himself. But hearing that his new laws were not observed by the judges in dictating the law, nor by the people in hearing it; and that the great men took servants from free men, and from the Churches and Monasteries, to labour in their vineyards, fields, pastures and houses, and continued to exact cattle and wine of them, and to oppress those that served the Churches: he wrote to his son *Pipin* to remedy these abuses, to take care of the Church, and see his laws executed.

Now the Senate and people and principality of *Rome* I take to be the third King the little horn overcame, and even the chief of the three. For this people elected the Pope and the Emperor; and now, by electing the Emperor and making him Consul, was acknowledged to retain the authority of the old *Roman* Senate and people. This city was the Metropolis of the old *Roman* Empire, represented in *Daniel* by the fourth Beast; and by subduing the Senate and people and Duchy, it became the Metropolis of the little horn of that Beast, and completed *Peter*'s Patrimony, which was the kingdom of that horn. Besides, this victory was attended with greater consequences than those over the other two Kings. For it set up the *Western Empire*, which continues to this day. It set up the Pope above the judicature of the *Roman* Senate, and above that of a Council of *Italian* and *French* Bishops, and even

above all human judicature; and gave him the supremacy over the *Western* Churches and their Councils in a high degree. It gave him *a look more stout than his fellows*; so that when this new religion began to be established in the minds of men, he grappled not only with Kings, but even with the *Western* Emperor himself. It is observable also, that the custom of kissing the Pope's feet, an honour superior to that of Kings and Emperors, began about this time. There are some instances of it in the ninth century: *Platina* tells us, that the feet of Pope *Leo* IV were kissed, according to antient custom, by all who came to him: and some say that *Leo* III began this custom, pretending that his hand was infected by the kiss of a woman. The Popes began also about this time to canonize saints, and to grant indulgences and pardons: and some represent that *Leo* III was the first author of all these things. It is further observable, that *Charles* the great, between the years 775 and 796, conquered all *Germany* from the *Rhine* and *Danube* northward to the *Baltic* sea, and eastward to the river *Teis*; extending his conquests also into *Spain* as far as the river *Ebro*: and by these conquests he laid the foundation of the new Empire; and at the same time propagated the *Roman* Catholic religion into all his conquests, obliging the *Saxons* and *Hunns* who were heathens, to receive the *Roman* faith, and distributing his northern conquests into Bishopricks, granting tithes to the Clergy and *Peter-pence* to the Pope: by all which the Church of *Rome* was highly enlarged, enriched, exalted, and established.

In the forementioned *dissertation upon some coins of* Charles *the great,* Ludovicus Pius*,* Lotharius*, and their successors, stamped at* Rome, there is a draught of a piece of *Mosaic* work which Pope *Leo* III. caused to be made in his Palace near the Church of *John Lateran*, in memory of his sending the standard or banner of the city of *Rome* curiously wrought, to *Charles* the great; and which still remained there at the publishing of the said book. In the *Mosaic* work there appeared *Peter* with three keys in his lap, reaching the *Pallium* to the Pope with his right hand, and the banner of the city to *Charles* the great with his left. By the Pope was this inscription, SCISSIMUS D.N. LEO PP; by the King this, D.N. CARVLO REGI; and under the feet of *Peter* this, BEATE PETRE, DONA VITAM LEONI PP, ET BICTORIAM CARVLO REGI DONA. This Monument gives the title of King to *Charles*, and therefore was erected before he was Emperor. It was erected when *Peter* was reaching the *Pallium* to the Pope, and the Pope

was sending the banner of the city to *Charles*, that is, A.C. 796. The words above, *Sanctissimus Dominus noster Leo Papa Domino nostro Carolo Regi*, relate to the message; and the words below, *Beate Petre, dona vitam Leoni Papæ & victoriam Carolo regi dona*, are a prayer that in this undertaking God would preserve the life of the Pope, and give victory to the King over the *Romans*. The three keys in the lap of *Peter* signify the keys of the three parts of his Patrimony, that of *Rome* with its Duchy, which the Pope claimed and was conquering, those of *Ravenna* with the Exarchate, and of the territories taken from the *Lombards*; both which he had newly conquered. These were the three dominions, whose keys were in the lap of St. *Peter*, and whose Crowns are now worn by the Pope, and by the conquest of which he became the little horn of the fourth Beast. By *Peter*'s giving the *Pallium* to the Pope with his right hand, and the banner of the city to the King with his left, and by naming the Pope before the King in the inscription, may be understood that the Pope was then reckoned superior in dignity to the Kings of the earth.

After the death of *Charles* the great, his son and successor *Ludovicus Pius*, at the request of the Pope, [13] confirmed the donations of his grandfather and father to the see of *Rome*. And in the confirmation he names first *Rome* with its Duchy extending into *Tuscany* and *Campania*; then the Exarchate of *Ravenna*, with *Pentapolis*; and in the third place, the territories taken from the *Lombards*. These are his three conquests, and he was to hold them of the Emperor for the use of the Church *sub integritate*, entirely, without the Emperor's medling therewith, or with the jurisdiction or power of the Pope therein, unless called thereto in certain cases. This ratification the Emperor *Ludovicus* made under an oath: and as the King of the *Ostrogoths*, for acknowledging that he held his kingdom of *Italy* of the *Greek* Emperor, stamped the effigies of the Emperor on one side of his coins and his own on the reverse; so the Pope made the like acknowledgment to the *Western* Emperor. For the Pope began now to coin money, and the coins of *Rome* are henceforward found with the heads of the Emperors, *Charles*, *Ludovicus Pius*, *Lotharius*, and their successors, on the one side, and the Pope's inscription on the reverse, for many years.

Notes to Chap. VII.

[1] Chap. vii. 8.
[2] Ver. 20, 21.
[3] Ver. 24.
[4] Ver. 25.
[5] Sigonius de Regno Italiæ, ad Ann. 726.
[6] Sigonius ib. ad Ann. 726, 752.
[7] Sigon. ib. Ann. 750.
[8] Sigon. ib. Ann. 753, 754, 755.
[9] Sigon. ib. Ann. 773.
[10] Sigon. de Regno Ital. ad Ann. 796.
[11] Vide Anastasium.
[12] Sigon. de Regno Ital.
[13] Confirmationem recitat Sigonius, lib. 4. de Regno Italiæ, ad An. 817.

CHAP. VIII.

Of the power of the eleventh horn of Daniel's fourth Beast, to change times and laws.

In the reign of the *Greek* Emperor *Justinian*, and again in the reign of *Phocas*, the Bishop of *Rome* obtained some dominion over the *Greek* Churches, but of no long continuance. His standing dominion was only over the nations of the *Western Empire*, represented by *Daniel*'s fourth Beast. And this jurisdiction was set up by the following Edict of the Emperors *Gratian* and *Valentinian.* — [1] *Volumus ut quicunque judicio Damasi, quod ille cum Concilio quinque vel septem habuerit Episcoporum, vel eorum qui Catholici sunt judicio vel Concilio condemnatus fuerit, si juste voluerit Ecclesiam retentare, ut qui ad sacerdotale judicium per contumeliam non ivisset: ut ab illustribus viris Præfectis Prætorio Galliæ atque Italiæ, authoritate adhibitâ, ad Episcopale judicium remittatur, sive à Consularibus vel Vicariis, ut ad Urbem Romam sub prosecutione perveniat. Aut si in longinquioribus partibus alicujus ferocitas talis emerserit, omnis ejus causæ edictio ad Metropolitæ in eadem Provincia Episcopi deduceretur examen. Vel si ipse Metropolitanus est, Romam necessariò, vel ad eos quos Romanus Episcopus judices dederit, sine delatione contendat.* —— *Quod si vel Metropolitani Episcopi vel cujuscunque sacerdotis iniquitas est suspecta, aut gratia; ad Romanum Episcopum, vel ad Concilium quindecim finitimorum Episcoporum accersitum liceat provocare; modo ne post examen habitum, quod definitum fuerit, integretur*. This Edict wanting the name of both *Valens* and *Theodosius* in the Title, was made in the time between their reigns, that is, in the end of the year 378, or the beginning of 379. It was directed to the *Præfecti Prætorio Italiæ & Galliæ*, and therefore was general. For the *Præfectus Prætorio Italiæ* governed *Italy*, *Illyricum occidentale* and *Africa*; and the *Præfectus Prætorio Galliæ* governed *Gallia*, *Spain*, and *Britain*.

The granting of this jurisdiction to the Pope gave several Bishops occasion to write to him for his resolutions upon doubtful cases, whereupon he answered by decretal Epistles; and henceforward he gave laws to the

Western Churches by such Epistles. *Himerius* Bishop of *Tarraco*, the head city of a province in *Spain*, writing to Pope *Damasus* for his direction about certain Ecclesiastical matters, and the Letter not arriving at *Rome* till after the death of *Damasus*, A.C. 384; his successor *Siricius* answered the same with a legislative authority, telling him of one thing: *Cum hoc fieri — missa ad Provincias à venerandæ memoriæ prædecessore meo Liberio generalia decreta, prohibeant*. Of another: *Noverint se ab omni ecclesiastico honore, quo indignè usi sunt, Apostolicæ Sedis auctoritate, dejectos*. Of another: *Scituri posthac omnium Provinciarum summi Antistites, quod si ultrò ad sacros ordines quenquam de talibus esse assumendum, & de suo & de aliorum statu, quos contra Canones & interdicta nostra provexerint, congruam ab Apostolica Sede promendam esse sententiam*. And the Epistle he concludes thus: *Explicuimus, ut arbitror, frater charissime, universa quæ digesta sunt in querelam; & ad singulas causas, de quibus ad Romanam Ecclesiam, utpote ad caput tui corporis, retulisti; sufficientia, quantum opinor, responsa reddidimus. Nunc fraternitatis tuæ animum ad servandos canones, & tenenda decretalia constituta, magis ac magis incitamus: ad hæc quæ ad tua consulta rescripsimus in omnium Coepiscoporum perferri facias notionem; & non solum corum, qui in tua sunt diœcesi constituti, sed etiam ad universos Carthaginenses ac Bœticos, Lusitanos atque* [2] *Gallicos, vel eos qui vicinis tibi collimitant hinc inde Provinciis, hæc quæ a nobis sunt salubri ordinatione disposita, sub literarum tuarum prosecutione mittantur. Et quanquam statuta sedis Apostolicæ vel Canonum venerabilia definita, nulli Sacerdotum Domini ignorare sit liberum: utilius tamen, atque pro antiquitate sacerdotii tui, dilectioni tuæ esse admodùm poterit gloriosum, si ea quæ ad te speciali nomine generaliter scripta sunt, per unanimitatis tuæ sollicitudinem in universorum fratrum nostrorum notitiam perferantur; quatenus & quæ à nobis non inconsultè sed providè sub nimia cautela & deliberatione sunt salubriter constituta, intemerata permaneant, & omnibus in posterum excusationibus aditus, qui jam nulli apud nos patere poterit, obstruatur. Dat. 3 Id. Febr. Arcadio & Bautone viris clarissimis Consulibus*, A.C. 385. Pope *Liberius* in the reign of *Jovian* or *Valentinian* I. sent general Decrees to the Provinces, ordering that the *Arians* should not be rebaptized: and this he did in favour of the Council of *Alexandria*, that nothing more should be required of them than to renounce

their opinions. Pope *Damasus* is said to have decreed in a *Roman* Council, that *Tithes* and *Tenths* should be paid upon pain of an *Anathema*; and that *Glory be to the Father*, &c. should be said or sung at the end of the *Psalms*. But the first decretal Epistle now extant is this of *Siricius* to *Himerius*; by which the Pope made *Himerius* his Vicar over all *Spain* for promulging his Decrees, and seeing them observed. The Bishop of *Sevill* was also the Pope's Vicar sometimes; for *Simplicius* wrote thus to *Zeno* Bishop of that place: *Talibus idcirco gloriantes indiciis, congruum duximus vicariâ Sedis nostræ te auctoritate fulciri: cujus vigore munitus, Apostolicæ institutionis Decreta, vel sanctorum terminos Patrum, nullatenus transcendi permittas*. And Pope *Hormisda* [3] made the Bishop of *Sevill* his Vicar over *Bætica* and *Lusitania*, and the Bishop of *Tarraco* his Vicar over all the rest of *Spain*, as appears by his Epistles to them.

Pope *Innocent* the first, in his decretal Epistle to *Victricius* Bishop of *Rouen* in *France*, A.C. 404, in pursuance of the Edict of *Gratian*, made this Decree: *Si quæ autem causæ vel contentiones inter Clericos tam superioris ordinis quam etiam inferioris fuerint exortæ; ut secundum Synodum Nicenam congregatis ejusdem Provinciæ Episcopis jurgium terminetur: nec alicui liceat, [4] Romanæ Ecclesiæ, cujus in omnibus causis debet reverentia custodiri, relictis his sacerdotibus, qui in eadem Provincia Dei Ecclesiam nutu Divino gubernant, ad alias convolare Provincias. Quod siquis fortè præsumpserit; & ab officio Clericatûs summotus, & injuriarum reus judicetur. Si autem majores causæ in medium fuerint devolutæ, ad Sedem Apostolicam sicut Synodus statuit, & beata consuetudo exigit, post judicium Episcopale referantur*. By these Letters it seems to me that *Gallia* was now subject to the Pope, and had been so for some time, and that the Bishop of *Rouen* was then his Vicar or one of them: for the Pope directs him to refer the greater causes to the See of *Rome*, according to custom. But the Bishop of *Arles* soon after became the Pope's Vicar over all *Gallia*: for Pope *Zosimus*, A.C. 417, ordaining that none should have access to him without the credentials of his Vicars, conferred upon *Patroclus* the Bishop of *Arles* this authority over all *Gallia*, by the following Decree.

Zosimus universis Episcopis per Gallias & septem Provincias constitutis.

Placuit Apostolicæ Sedi, ut siquis ex qualibet Galliarum parte sub quolibet ecclesiastico gradu ad nos Romæ venire contendit, vel aliò

terrarum ire disponit, non aliter proficiscatur nisi Metropolitani Episcopi Formatas acceperit, quibus sacerdotium suum vel locum ecclesiasticum quem habet, scriptorum ejus adstipulatione perdoceat: quod ex gratia statuimus quia plures episcopi sive presbyteri sive ecclesiastici simulantes, quia nullum documentum Formatarum extat per quod valeant confutari, in nomen venerationis irrepunt, & indebitam reverentiam promerentur. Quisquis igitur, fratres charissimi, prætermissà supradicti Formatâ sive episcopus, sive presbyter, sive diaconus, aut deinceps inferiori gradu sit, ad nos venerit: sciat se omnino suscipi non posse. Quam auctoritatem ubique nos misisse manifestum est, ut cunctis regionibus innotescat id quod statuimus omnimodis esse servandum. Siquis autem hæc salubriter constituta temerare tentaverit sponte suâ, se a nostra noverit communione discretum. Hoc autem privilegium Formatarum sancto Patroclo fratri & coepiscopo nostro, meritorum ejus speciali contemplatione, concessimus. And that the Bishop of *Arles* was sometimes the Pope's Vicar over all *France*, is affirmed also by all the Bishops of the Diocess of *Arles* in their Letter to Pope *Leo* I. *Cui id etiam honoris dignitatisque collatum est*, say they, *ut non tantum has Provincias potestate propriâ gubernaret; verum etiam omnes Gallias sibi Apostolicæ Sedis vice mandatas, sub omni ecclesiastica regula contineret*. And Pope *Pelagius* I. A.C. 556, in his Epistle to *Sapaudus* Bishop of *Arles*: *Majorum nostrorum, operante Dei misericordiâ, cupientes inhærere vestigiis & eorum actus divino examine in omnibus imitari: Charitati tuæ per universam Galliam, sanctæ Sedis Apostolicæ, cui divinâ gratiâ præsidemus, vices injungimus*.

By the influence of the same imperial Edict, not only *Spain* and *Gallia*, but also *Illyricum* became subject to the Pope. *Damasus* made *Ascholius*, or *Acholius*, Bishop of *Thessalonica* the Metropolis of *Oriental Illyricum*, his Vicar for hearing of causes; and in the year 382, *Acholius* being summoned by Pope *Damasus*, came to a Council at *Rome*. Pope *Siricius* the successor of *Damasus*, decreed that no Bishop should be ordained in *Illyricum* without the consent of *Anysius* the successor of *Acholius*. And the following Popes gave *Rufus* the successor of *Anysius*, a power of calling Provincial Councils: for in the Collections of *Holstenius* there is an account of a Council of *Rome* convened under Pope *Boniface* II. in which were produced Letters of *Damasus*, *Syricius*, *Innocent* I. *Boniface* I. and *Cælestine* Bishops of *Rome*, to *Ascholius*, *Anysius* and *Rufus*, Bishops of *Thessalonica*: in

which Letters they commend to them the hearing of causes in *Illyricum*, granted by the Lord and the holy Canons to the Apostolic See thro'out that Province. And Pope *Siricius* saith in his Epistle to *Anysius*: *Etiam dudum, frater charissime, per Candidianum Episcopum, qui nos præcessit ad Dominum, hujusmodi literas dederamus, ut nulla licentia esset, sine consensu tuo in Illyrico Episcopos ordinare præsumere, quæ utrum ad te pervenerint scire non potui. Multa enim gesta sunt per contentionem ab Episcopis in ordinationibus faciendis, quod tua melius caritas novit*. And a little after: *Ad omnem enim hujusmodi audaciam comprimendam vigilare debet instantia tua, Spiritu in te Sancto fervente: ut vel ipse, si potes, vel quos judicaveris Episcopos idoneos, cum literis dirigas, dato consensu qui possit, in ejus locum qui defunctus vel depositus fuerit, Catholicum Episcopum vitâ & moribus probatum, secundum Nicænæ Synodi statuta vel Ecclesiæ Romanæ, Clericum de Clero meritum ordinare*. And Pope *Innocent* I. saith in his Epistle to *Anysius*: *Cui* [Anysio] *etiam anteriores tanti ac tales viri prædecessores mei Episcopi, id est, sanctæ memoriæ Damasus, Siricius, atque supra memoratus vir ita detulerunt; ut omnia quæ in omnibus illis partibus gererentur, Sanctitati tuæ, quæ plena justitiæ est, traderent cognoscenda*. And in his Epistle to *Rufus* the successor of *Anysius*: *Ita longis intervallis disterminatis à me ecclesiis discat consulendum; ut prudentiæ gravitatique tuæ committendam curam causasque, siquæ exoriantur, per Achaiæ, Thessaliæ, Epiri veteris, Epiri novæ, & Cretæ, Daciæ mediterraneæ, Daciæ ripensis, Mœsiæ, Dardaniæ, & Prævali ecclesias, Christo Domino annuente, censeam. Verè enim ejus sacratissimis monitis lectissimæ sinceritatis tuæ providentiæ & virtuti hanc injungimus sollicitudinem: non primitùs hæc statuentes, sed Præcessores nostros Apostolicos imitati, qui beatissimis Acholio & Anysio injungi pro meritis ista voluerunt*. And *Boniface* I. in his decretal Epistle to *Rufus* and the rest of the Bishops in *Illyricum*: *Nullus, ut frequenter dixi, alicujus ordinationem citra ejus* [Episcopi Thessalonicensis] *conscientiam celebrare præsumat: cui, ut supra dictum est, vice nostrâ cuncta committimus*. And Pope *Cœlestine*, in his decretal Epistle to the Bishops thro'out *Illyricum*, saith: *Vicem nostram per vestram Provinciam noveritis* [Rufo] *esse commissam, ita ut ad eum, fratres carissimi, quicquid de causis agitur, referatur. Sine ejus consilio nullus ordinetur. Nullus usurpet, eodem inconscio, commissam illi Provinciam; colligere nisi cum ejus voluntate*

Episcopus non præsumat. And in the cause of *Perigenes*, in the title of his Epistle, he thus enumerates the Provinces under this Bishop: *Rufo & cæteris Episcopis per Macedoniam, Achaiam, Thessaliam, Epirum veterem, Epirum novam, Prævalin, & Daciam constitutis*. And Pope *Xistus* in a decretal Epistle to the same Bishops: *Illyricanæ omnes Ecclesiæ, ut à decessoribus nostris recepimus, & nos quoque fecimus, ad curam nunc pertinent Thessalonicensis Antistitis, ut suâ sollicitudine, siquæ inter fratres nascantur, ut assolent, actiones distinguat atque definiat; & ad eum, quicquid à singulis sacerdotibus agitur, referatur. Sit Concilium, quotiens causæ fuerint, quotiens ille pro necessitatum emergentium ratione decreverit*. And Pope *Leo* I. in his decretal Epistle to *Anastasius* Bishop of *Thessalonica*: *Singulis autem Metropolitanis sicut potestas ista committitur, ut in suis Provinciis jus habeant ordinandi; ita eos Metropolitanos à te volumus ordinari; maturo tamen & decocto judicio*.

Occidental Illyricum comprehended *Pannonia prima* and *secunda*, *Savia*, *Dalmatia*, *Noricum mediterraneum*, and *Noricum ripense*; and its Metropolis was *Sirmium*, till *Attila* destroyed this city. Afterwards *Laureacum* became the Metropolis of *Noricum* and both *Pannonias*, and *Salona* the Metropolis of *Dalmatia*. Now [5] the Bishops of *Laureacum* and *Salona* received the *Pallium* from the Pope: and *Zosimus*, in his decretal Epistle to *Hesychius* Bishop of *Salona*, directed him to denounce the Apostolic decrees as well to the Bishops of his own, as to those of the neighbouring Provinces. The subjection of these Provinces to the See of *Rome* seems to have begun in *Anemius*, who was ordained Bishop of *Sirmium* by *Ambrose* Bishop of *Millain*, and who in the Council of *Aquileia* under Pope *Damasus*, A.C. 381, declared his sentence in these words: *Caput Illyrici non nisi civitas Sirmiensis: Ego igitur illius civitatis Episcopus sum. Eum qui non confitetur filium Dei æternum, & coeternum patri, qui est sempiternus, anathema dico*. The next year *Anemius* and *Ambrose*, with *Valerian* Bishop of *Aquileia*, *Acholias* Bishop of *Thessalonica,* and many others, went to the Council of *Rome*, which met for overruling the *Greek* Church by majority of votes, and exalting the authority of the Apostolic See, as was attempted before in the Council of *Sardica*.

Aquileia was the second city of the *Western Empire*, and by some called the second *Rome*. It was the Metropolis of *Istria*, *Forum Julium*, and *Venetia*; and its subjection to the See of *Rome* is manifest by the decretal Epistle of *Leo* I. directed to *Nicetas* Bishop of this city; for the Pope begins his Epistle thus: *Regressus ad nos filius meus Adeodatus Diaconus Sedis nostræ, dilectionem tuam poposcisse memorat, ut de his à nobis authoritatem Apostolicæ Sedis acciperes, quæ quidem magnam difficultatem dijudicationis videntur afferre*. Then he sets down an answer to the questions proposed by *Nicetas*, and concludes thus: *Hanc autem Epistolam nostram, quam ad consultationem tuæ fraternitatis emisimus, ad omnes fratres & comprovinciales tuos Episcopos facies pervenire, ut in omnium observantia, data profit authoritas. Data 1-2 Kal. Apr. Majorano Aug. Cos.* A.C. 458. *Gregory* the great A.C. 591, [6] cited *Severus* Bishop of *Aquileia* to appear before him in judgment in a Council at *Rome*.

The Bishops of *Aquileia* and *Millain* created one another, and therefore were of equal authority, and alike subject to the See of *Rome*. Pope *Pelagius* about the year 557, testified this in the following words: [7] *Mos antiquus fuit*, saith he, *ut quia pro longinquitate vel difficultate itineris, ab Apostolico illis onerosum fuerit ordinari, ipsi se invicem Mediolanensis & Aquileiensis ordinare Episcopos debuissent*. These words imply that the ordination of these two Bishops belonged to the See of *Rome*. When *Laurentius* Bishop of *Millain* had excommunicated *Magnus*, one of his Presbyters, and was dead, [8] *Gregory* the great absolved *Magnus*, and sent the *Pallium* to the new elected Bishop *Constantius*; whom the next year [9] he reprehended of partiality in judging *Fortunatus*, and commanded him to send *Fortunatus* to *Rome* to be judged there: four years after [10] he appointed the Bishops of *Millain* and *Ravenna* to hear the cause of one *Maximus*; and two years after, *viz.* A.C. 601, when *Constantius* was dead, and the people of *Millain* had elected *Deusdedit* his successor, and the *Lombards* had elected another, [11] *Gregory* wrote to the Notary, Clergy, and People of *Millain*, that by the authority of his Letters *Deusdedit* should be ordained, and that he whom the *Lombards* had ordained was an unworthy successor of *Ambrose*: whence I gather, that the Church of *Millain* had continued in this state of subordination to the See of *Rome* ever since the days of *Ambrose*; for *Ambrose* himself acknowledged the authority of that See. *Ecclesia Romana*,

[12] saith he, *hanc consuetudinem non habet, cujus typum in omnibus sequimur, & formam*. And a little after: *In omnibus cupio sequi Ecclesiam Romanam*. And in his Commentary upon 1 *Tim*. iii. *Cum totus mundus Dei sit, tamen domus ejus Ecclesia dicitur, cujus hodie rector est Damasus*. In his Oration on the death of his brother *Satyrus*, he relates how his brother coming to a certain city of *Sardinia*, *advocavit Episcopum loci, percontatusque est ex eo utrum cum Episcopis Catholicis hoc est cum Romana Ecclesia conveniret?* And in conjunction with the Synod of *Aquileia* A.C. 381, in a synodical Epistle to the Emperor *Gratian*, he saith: *Totius orbis Romani caput Romanam Ecclesiam, atque illam sacrosanctam Apostolorum fidem, ne turbari sineret, obsecranda fuit clementia vestra; inde enim in omnes venerandæ communionis jura dimanant*. The Churches therefore of *Aquileia* and *Millain* were subject to the See of *Rome* from the days of the Emperor *Gratian*. *Auxentius* the predecessor of *Ambrose* was not subject to the see of *Rome*, and consequently the subjection of the Church of *Millain* began in *Ambrose*. This Diocese of *Millain* contained *Liguria* with *Insubria*, the *Alpes Cottiæ* and *Rhætia*; and was divided from the Diocese of *Aquileia* by the river *Addua*. In the year 844, the Bishop of *Millain* broke off from the See of *Rome*, and continued in this separation about 200 years, as is thus related by [13] *Sigonius*: *Eodem anno Angilbertus Mediolanensis Archiepiscopus ab Ecclesia Romana parum comperta de causa descivit, tantumque exemplo in posterum valuit, ut non nisi post ducentos annos Ecclesia Mediolanensis ad Romanæ obedientiam auctoritatemque redierit*.

The Bishop of *Ravenna*, the Metropolis of *Flaminia* and *Æmilia*, was also subject to the Pope: for *Zosimus*, A.C. 417, excommunicated some of the Presbyters of that Church, and wrote a commonitory Epistle about them to the Clergy of that Church as a branch of the *Roman* Church: *In sua*, saith he, *hoc est, in Ecclesia nostra Romana*. When those of *Ravenna*, having elected a new Bishop, gave notice thereof to Pope *Sixtus*, the Pope set him aside, and [14] ordained *Peter Chrysologus* in his room. *Chrysologus* in his Epistle to *Eutyches*, extant in the Acts of the Council of *Chalcedon*, wrote thus: *Nos pro studio pacis & fidei, extra consensum Romanæ civitatis Episcopi, causas fidei audire non possumus*. Pope *Leo* I. being consulted by *Leo* Bishop of *Ravenna* about some questions, answered him by a decretal

Epistle A.C. 451. And Pope *Gregory* the great, [15] reprehending *John* Bishop of *Ravenna* about the use of the *Pallium*, tells him of a Precept of one of his Predecessors, Pope *John*, commanding that all the Privileges formerly granted to the Bishop and Church of *Ravenna* should be kept: to this *John* returned a submissive answer; and after his death Pope *Gregory* ordered a visitation of the Church of *Ravenna*, confirmed the privileges heretofore granted them, and sent his *Pallium*, as of antient custom, to their new Bishop *Marinian*. Yet this Church revolted sometimes from the Church of *Rome*, but returned again to its obedience.

The rest of *Italy*, with the Islands adjacent, containing the *suburbicarian* regions, or ten Provinces under the temporal Vicar of *Rome, viz.* [1]*Campania*, [2]*Tuscia* and *Umbria*, [3]*Picenum suburbicarium*, [4]*Sicily*, [5]*Apulia* and *Calabria*, [6]*Brutii* and *Lucania*, [7]*Samnium*, [8]*Sardinia*, [9]*Corsica*, and [10]*Valeria*, constituted the proper Province of the Bishop of *Rome*. For the Council of *Nice* in their fifth Canon ordained that Councils should be held every spring and autumn in every Province; and according to this Canon, the Bishops of this Province met at *Rome* every half year. In this sense Pope *Leo* I. applied this Canon to *Rome*, in a decretal Epistle to the Bishops of *Sicily*, written *Alippio & Ardabure Coss*. A.C. 447. *Quia saluberrime*, saith he, *à sanctis patribus constitutum est, binos in annis singulis Episcoporum debere esse conventus, terni semper ex vobis ad diem tertium Kalendarum Octobrium Romam æterno concilio sociandi occurrant. Et indissimulanter à vobis hæc consuetudo servetur, quoniam adjuvante Dei gratiâ, faciliùs poterit provideri, ut in Ecclesiis Christi nulla scandala, nulli nascantur errores; cum coram Apostolo Petro semper in communione tractatum fuerit, ut omnia Canonum Decreta apud omnes Domini sacerdotes inviolata permaneant*. The Province of *Rome* therefore comprehended *Sicily*, with so much of *Italy* and the neighbouring Islands as sent Bishops to the annual Councils of *Rome*; but extended not into the Provinces of *Ravenna*, *Aquileia*, *Millain*, *Arles*, &c. those Provinces having Councils of their own. The Bishops in every Province of the *Roman* Empire were convened in Council by the Metropolitan or Bishop of the head city of the Province, and this Bishop presided in that Council: but the Bishop of *Rome* did not only preside in his own Council of the Bishops of the *suburbicarian* regions, but also gave Orders to the Metropolitans of all the other Provinces in the

Western Empire, as their universal governor; as may be further perceived by the following instances.

Pope *Zosimus* A.C. 417, cited *Proculus* Bishop of *Marseilles* to appear before a Council at *Rome* for illegitimate Ordinations; and condemned him, as he mentions in several of his Epistles. Pope *Boniface* I. A.C. 419, upon a complaint of the Clergy of *Valentia* against *Maximus* a Bishop, summoned the Bishops of all *Gallia* and the seven Provinces to convene in a Council against him; and saith in his Epistle, that his Predecessors had done the like. Pope *Leo* I. called a general Council of all the Provinces of *Spain* to meet in *Gallæcia* against the *Manichees* and *Priscillianists*, as he says in his decretal Epistle to *Turribius* a *Spanish* Bishop. And in one of his decretal Epistles to *Nicetas* Bishop of *Aquileia*, he commands him to call a Council of the Bishops of that Province against the *Pelagians*, which might ratify all the Synodal Decrees which had been already ratified by the See of *Rome* against this heresy. And in his decretal Epistle to *Anastasius* Bishop of *Thessalonica*, he ordained that Bishop should hold two Provincial Councils every year, and refer the harder causes to the See of *Rome*: and if upon any extraordinary occasion it should be necessary to call a Council, he should not be troublesom to the Bishops under him, but content himself with two Bishops out of every Province, and not detain them above fifteen days. In the same Epistle he describes the form of Church-Government then set up, to consist in a subordination of all the Churches to the See of *Rome*: *De qua forma*, saith he, *Episcoporum quoque est orta distinctio, & magna dispositione provisum est ne omnes sibi omnia vindicarent, sed essent in singulis Provinciis singuli quorum inter fratres haberetur prima sententia, & rursus quidam in majoribus urbibus constituti sollicitudinem sumerent ampliorem, per quos ad unam Petri Sedem universalis Ecclesiæ cura conflueret, & nihil usque à suo capite dissideret. Qui ergo scit se quibusdam esse præpositum, non moleste ferat aliquem sibi esse præpositum; sed obedientiam quam exigit etiam ipse dependat; et sicut non vult gravis oneris sarcinam ferre, ita non audeat aliis importabile pondus imponere*. These words sufficiently shew the monarchical form of government then set up in the Churches of the *Western Empire* under the Bishop of *Rome*, by means of the imperial Decree of *Gratian*, and the appeals and decretal Epistles grounded thereupon.

The same Pope *Leo*, having in a Council at *Rome* passed sentence upon *Hilary* Bishop of *Arles*, for what he had done by a Provincial Council in *Gallia*, took occasion from thence to procure the following Edict from the *Western* Emperor *Valentinian* III. for the more absolute establishing the authority of his See over all the Churches of the *Western Empire*.

Impp. Theodosius & Valentinianus AA. Aetio Viro illustri, Comiti & Magistro utriusque militiæ & Patricio.

Certum est & nobis & imperio nostro unicum esse præsidium in supernæ Divinitatis favore, ad quem promerendum præcipue Christiana fides & veneranda nobis religio suffragatur. Cum igitur Sedis Apostolicæ Primatum sancti Petri meritum, qui princeps est Episcopalis coronæ & Romanæ dignitas civitatis, sacræ etiam Synodi firmavit auctoritas: ne quid præter auctoritatem Sedis istius illicitum præsumptio attemperare nitatur: tunc enim demum Ecclesiarum pax ubique servabitur, si Rectorem suum agnoscat Universitas. Hæc cum hactenus inviolabiliter suerint custodita, Hilarius Arelatensis, sicut venerabilis viri Leonis Romani Papæ fideli relatione comperimus, contumaci ausu illicita quædam præsumenda tentavit, & ideo Transalpinas Ecclesias abominabilis tumultus invasit, quod recens maximè testatur exemplum. Hilarius enim qui Episcopus Arelatensis vocatur, Ecclesiæ Romanæ urbis inconsulto Pontifice indebitas sibi ordinationes Episcoporum solâ temeritate usurpans invasit. Nam alios incompetenter removit; indecenter alios, invitis & repugnantibus civibus, ordinavit. Qui quidem, quoniam non facile ab his qui non elegerant, recipiebantur, manum sibi contrahebat armatam, & claustra murorum in hostilem morem vel obsidione cingebat, vel aggressione reserabat, & ad sedem quietis pacem prædicaturus per bella ducebat: His talibus contra Imperii majestatem, & contra reverentiam Apostolicæ Sedis admissis, per ordinem religiosi viri Urbis Papæ cognitione discussis, certa in eum, ex his quos malè ordinaverat, lata sententia est. Erat quidem ipsa sententia per Gallias etiam sine Imperiali Sanctione valitura: quid enim Pontificis auctoritate non liceret? Sed nostram quoque præceptionem hæc ratio provocavit. Nec ulterius vel Hilario, quem adhuc Episcopum nuncupare sola mansueta Præsulis permittit humanitas, nec cuiquam alteri ecclesiasticis rebus arma miscere, aut præceptis Romani Antistitis liceat obviare: ausibus enim talibus fides & reverentia nostri violatur Imperii. Nec hoc solum, quod est maximi criminis, submovemus: verum ne levis saltem

inter Ecclesias turba nascatur, vel in aliquo minui religionis disciplina videatur, hoc perenni sanctione discernimus; nequid tam Episcopis Gallicanis quam aliarum Provinciarum contra consuetudinem veterem liceat, sine viri venerabilis Papæ Urbis æternæ auctoritate, tentare. Sed illis omnibusque pro lege sit, quicquid sanxit vel sanxerit Apostolicæ Sedis auctoritas: ita ut quisquis Episcoporum ad judicium Romani Antistitis evocatus venire neglexerit, per Moderatorem ejusdem Provinciæ adesse cogatur, per omnia servatis quæ Divi parentes nostri Romanæ Ecclesiæ detulerunt, Aetî pater carissime Augusti. Unde illustris & præclara magnificentia tua præsentis Edictalis Legis auctoritate faciet quæ sunt superius statuta servari, decem librarum auri multa protinus exigenda ab unoquoque Judice qui passus fuerit præcepta nostra violari. Divinitas te servet per multos annos, parens carissime. Dat. viii. *Id. Jun. Romæ, Valentiniano A.* vi. *Consule*, A.C. 445. By this Edict the Emperor *Valentinian* enjoined an absolute obedience to the will of the Bishop of *Rome* thro'out all the Churches of his Empire; and declares, that for the Bishops to attempt any thing without the Pope's authority is contrary to antient custom, and that the Bishops summoned to appear before his judicature must be carried thither by the Governor of the Province; and he ascribes these privileges of the See of *Rome* to the concessions of his dead Ancestors, that is, to the Edict of *Gratian* and *Valentinian* II. as above: by which reckoning this dominion of the Church of *Rome* was now of 66 years standing: and if in all this time it had not been sufficiently established, this new Edict was enough to settle it beyond all question thro'out the *Western Empire*.

Hence all the Bishops of the Province of *Arles* in their Letter to Pope *Leo*, A.C. 450, petitioning for a restitution of the privileges of their Metropolitan, say: *Per beatum Petrum Apostolorum principem, sacrosancta Ecclesia Romana tenebat supra omnes totius mundi Ecclesias principatum*. And *Ceratius*, *Salonius* and *Veranus*, three Bishops of *Gallia*, say, in their Epistle to the same Pope: *Magna præterea & ineffabili quadam nos peculiares tui gratulatione succrescimus, quod illa specialis doctrinæ vestræ pagina ita per omnium Ecclesiarum conventicula celebratur, ut vere consona omnium sententia declaretur; merito illic principatum Sedis Apostolicæ constitutum, unde adhuc Apostolici spiritus oracula reserentur*.

And *Leo* himself, in [16] his Epistle to the metropolitan Bishops thro'out *Illyricum*: *Quia per omnes Ecclesias cura nostra distenditur, exigente hoc à nobis Domino, qui Apostolicæ dignitatis beatissimo Apostolo Petro primatum, fidei sui remuneratione commisit, universalem Ecclesiam in fundamenti ipsius soliditate constituens*.

While this Ecclesiastical Dominion was rising up, the northern barbarous nations invaded the *Western Empire*, and founded several kingdoms therein, of different religions from the Church of *Rome*. But these kingdoms by degrees embraced the *Roman* faith, and at the same time submitted to the Pope's authority. The *Franks* in *Gaul* submitted in the end of the fifth Century, the *Goths* in *Spain* in the end of the sixth; and the *Lombards* in *Italy* were conquered by *Charles* the great A.C. 774. Between the years 775 and 794, the same *Charles* extended the Pope's authority over all *Germany* and *Hungary* as far as the river *Theysse* and the *Baltic* sea; he then set him above all human judicature, and at the same time assisted him in subduing the City and Duchy of *Rome*. By the conversion of the ten kingdoms to the *Roman* religion, the Pope only enlarged his spiritual dominion, but did not yet rise up as a horn of the Beast. It was his temporal dominion which made him one of the horns: and this dominion he acquired in the latter half of the eighth century, by subduing three of the former horns as above. And now being arrived at a temporal dominion, and a power above all human judicature, he reigned [17] *with a look more stout than his fellows*, and [18] *times and laws were* henceforward *given into his hands, for a time times and half a time*, or three times and an half; that is, for 1260 solar years, reckoning a time for a Calendar year of 360 days, and a day for a solar year. After which [19] *the judgment is to sit, and they shall take away his dominion*, not at once, but by degrees, *to consume, and to destroy it unto the end.* [20] *And the kingdom and dominion, and greatness of the kingdom under the whole heaven shall*, by degrees, *be given unto the people of the saints of the most High, whose kingdom is an everlasting kingdom, and all dominions shall serve and obey him*.

Notes to Chap. VIII.

[1] *See the Annals of* Baronius, Anno 381. Sect. 6.

[2] Populos Galliciæ.
[3] Hormisd. Epist. 24. 26.
[4] *The words,* sine auctoritate*, seem wanting.*
[5] Vide Caroli a S. Paulo Geographiam sacram, , 73.
[6] Greg. M. lib. 1. Indic. 9. Epist. 16.
[7] Apud Gratianum de Mediolanensi & Aquileiensi Episcopis.
[8] Greg. M. lib. 3. Epist. 26. & lib. 4. Epist. 1.
[9] Greg. lib. 5. Epist. 4.
[10] Greg. lib. 9. Epist. 10 & 67.
[11] Greg. lib. 11. Epist. 3, 4.
[12] Ambros l. 3. de sacramentis, c. 1.
[13] Sigonius de Regno Italiæ, lib. 5.
[14] *See* Baronius, Anno 433. Sect. 24.
[15] Greg. M. lib. 3. Epist. 56, 57. & lib. 5. Epist. 25, 26, 56.
[16] Epist. 25. apud Holstenium.
[17] Dan. vii. 20.
[18] Ver. 25.
[19] Ver. 26.
[20] Ver. 27.

CHAP. IX.

Of the kingdoms represented in Daniel by the Ram and He-Goat.

The second and third Empires, represented by the Bear and Leopard, are again represented by the Ram and He-Goat; but with this difference, that the Ram represents the kingdoms of the *Medes* and *Persians* from the beginning of the four Empires, and the Goat represents the kingdom of the *Greeks* to the end of them. By this means, under the type of the Ram and He-Goat, the times of all the four Empires are again described: *I lifted up mine eyes*, saith [1] *Daniel*, *and saw*, *and behold there stood before the river* [Ulai] *a Ram which had two horns, and the two horns were high, but one was higher than the other, and the higher came up last. — And the Ram having two horns, are the kings of* Media *and* Persia: not two persons but two kingdoms, the kingdoms of *Media* and *Persia*; and the kingdom of *Persia* was the higher horn and came up last. The kingdom of *Persia* rose up, when *Cyrus* having newly conquered *Babylon*, revolted from *Darius* King of the *Medes*, and beat him at *Pasargadæ*, and set up the *Persians* above the *Medes*. This was the horn which came up last. And the horn which came up first was the kingdom of the *Medes*, from the time that *Cyaxares* and *Nebuchadnezzar* overthrew *Nineveh*, and shared the Empire of the *Assyrians* between them. The Empires of *Media* and *Babylon* were contemporary, and rose up together by the fall of the *Assyrian* Empire; and the Prophecy of the four Beasts begins with one of them, and that of the Ram and He-Goat with the other. As the Ram represents the kingdom of *Media* and *Persia* from the beginning of the four Empires; so the He-Goat represents the Empire of the *Greeks* to the end of those Monarchies. In the reign of his great horn, and of the four horns which succeeded it, he represents this Empire during the reign of the Leopard: and in the reign of his little horn, which stood up in the latter time of the kingdom of the four, and after their fall became mighty but not by his own power, he represents it during the reign of the fourth Beast.

The rough Goat, saith *Daniel, is the King of* Grecia, that is, the kingdom; *and the great horn between his eyes is the first King*: not the first Monarch,

but the first kingdom, that which lasted during the reign of *Alexander* the great, and his brother *Aridæus* and two young sons, *Alexander* and *Hercules*. [2] *Now that* [horn] *being broken off, whereas four* [horns] *stood up for it, four kingdoms shall stand up out of the nation* [of the *Greeks*], *but not in his* [the first horn's] *power*. The four horns are therefore four kingdoms; and by consequence, the first great horn which they succeeded is the first great kingdom of the *Greeks*, that which was founded by *Alexander* the great, *An. Nabonass.* 414, and lasted till the death of his son *Hercules*, *An. Nabonass.* 441. And the four are those of *Cassander*, *Lysimachus*, *Antigonus*, and *Ptolemy*, as above.

[3] *And in the latter time of their kingdom, when the transgressors are come to the full, a King* [or new kingdom] *of fierce countenance, and understanding dark sentences, shall stand up: and his power shall be mighty, but not by his own power*. This King was the last horn of the Goat, the little horn which came up out of one of the four horns, and waxed exceeding great. The latter time of their kingdom was when the *Romans* began to conquer them, that is, when they conquered *Perseus* King of *Macedonia*, the fundamental kingdom of the *Greeks*. And at that time the transgressors came to the full: for then the High-priesthood was exposed to sale, the Vessels of the Temple were sold to pay for the purchase; and the High-priest, with some of the *Jews*, procured a licence from *Antiochus Epiphanes* to do after the ordinances of the heathen, and set up a school at *Jerusalem* for teaching those ordinances. Then *Antiochus* took *Jerusalem* with an armed force, slew 4000 *Jews*, took as many prisoners and sold them, spoiled the Temple, interdicted the worship, commanded the Law of *Moses* to be burnt, and set up the worship of the heathen Gods in all *Judea*. In the very same year, *An. Nabonass.* 580, the *Romans* conquered *Macedonia*, the chief of the four horns. Hitherto the Goat was mighty by its own power, but henceforward began to be under the *Romans*. *Daniel* distinguishes the times, by describing very particularly the actions of the Kings of the north and south, those two of the four horns which bordered upon *Judea*, until the *Romans* conquered *Macedonia*; and thenceforward only touching upon the main revolutions which happened within the compass of the nations represented by the Goat. In this latter period of time the little horn was to stand up and grow mighty, but not by his own power.

The three first of *Daniel*'s Beasts had their dominions taken away, each of them at the rise of the next Beast; but their lives were prolonged, and they are all of them still alive. The third Beast, or Leopard, reigned in his four heads, till the rise of the fourth Beast, or Empire of the *Latins*; and his life was prolonged under their power. This Leopard reigning in his four heads, signifies the same thing with the He-Goat reigning in his four horns: and therefore the He-Goat reigned in his four horns till the rise of *Daniel*'s fourth Beast, or Empire of the *Latins*: then its dominion was taken away by the *Latins*, but its life was prolonged under their power. The *Latins* are not comprehended among the nations represented by the He-Goat in this Prophecy: their power over the *Greeks* is only named in it, to distinguish the times in which the He-Goat was mighty by his own power, from the times in which he was mighty but not by his own power. He was mighty by his own power till his dominion was taken away by the *Latins*; after that, his life was prolonged under their dominion, and this prolonging of his life was in the days of his last horn: for in the days of this horn the Goat became mighty, but not by his own power.

Now because this horn was a horn of the Goat, we are to look for it among the nations which composed the body of the Goat. Among those nations he was to rise up and grow mighty: he grew mighty [4] *towards the south, and towards the east, and towards the pleasant land*; and therefore he was to rise up in the north-west parts of those nations, and extend his dominion towards *Egypt*, *Syria* and *Judea*. In the latter time of the kingdom of the four horns, it was to rise up out of one of them and subdue the rest, but not by its own power. It was to be assisted by a foreign power, a power superior to itself, the power which took away the dominion of the third Beast, the power of the fourth Beast. And such a little horn was the kingdom of *Macedonia*, from the time that it became subject to the *Romans*. This kingdom, by the victory of the *Romans* over *Persius* King of *Macedonia*, *Anno Nabonass.* 580, ceased to be one of the four horns of the Goat, and became a dominion of a new sort: not a horn of the fourth Beast, for *Macedonia* belonged to the body of the third; but a horn of the third Beast of a new sort, a horn of the Goat which grew mighty but not by his own power, a horn which rose up and grew potent under a foreign power, the power of the *Romans*.

The *Romans*, by the legacy of *Attalus* the last King of *Pergamus*, *An. Nabonass.* 615, inherited that kingdom, including all *Asia Minor* on this side mount *Taurus*. *An. Nabonass.* 684 and 685 they conquered *Armenia*, *Syria* and *Judea*; *An. Nabonass.* 718, they subdued *Egypt*. And by these conquests the little horn [5] *waxed exceeding great towards the south, and towards the east, and towards the pleasant land. And it waxed great even to the host of heaven; and cast down some of the host and of the stars to the ground, and stamped upon them*, that is, upon the people and great men of the *Jews*. [6] *Yea, he magnified himself even to the Prince of the Host*, the *Messiah*, the Prince of the *Jews*, whom he put to death, *An. Nabonass.* 780. *And by him the daily sacrifice was taken away, and the place of his sanctuary was cast down*, *viz.* in the wars which the armies of the *Eastern* nations under the conduct of the *Romans* made against *Judea*, when *Nero* and *Vespasian* were Emperors, *An. Nabonass.* 816, 817, 818. [7] *And an host was given him against the daily sacrifice by reason of transgression, and it cast down the truth to the ground, and it practised and prospered*. This transgression is in the next words called *the transgression of desolation*; and in *Dan.* xi. 31. *the abomination which maketh desolate*; and in *Matth.* xxiv. 15. *the abomination of desolation, spoken of by* Daniel *the prophet, standing in the holy place*. It may relate chiefly to the worship of *Jupiter Olympius* in his Temple built by the Emperor *Hadrian*, in the place of the Temple of the *Jews*, and to the revolt of the *Jews* under *Barchochab* occasioned thereby, and to the desolation of *Judea* which followed thereupon; all the *Jews*, being thenceforward banished *Judea* upon pain of death. *Then I heard*, saith [8] *Daniel, one saint speaking, and another saint said unto that certain saint which spake, How long shall be the vision concerning the daily sacrifice, and the transgression of desolation, to give both the sanctuary and the host to be trodden under foot? And he said unto me, Unto two thousand and three hundred days; then shall the sanctuary be cleansed. Daniel*'s days are years; and these years may perhaps be reckoned either from the destruction of the Temple by the *Romans* in the reign of *Vespasian*, or from the pollution of the Sanctuary by the worship of *Jupiter Olympius*, or from the desolation of *Judea* made in the end of the *Jewish* war by the banishment of all the *Jews* out of their own country, or from some other period which time will discover. Henceforward the last horn of

the Goat continued mighty under the *Romans*, till the reign of *Constantine* the great and his sons: and then by the division of the *Roman* Empire between the *Greek* and *Latin* Emperors, it separated from the *Latins*, and became the *Greek* Empire alone, but yet under the dominion of a *Roman* family; and at present it is mighty under the dominion of the *Turks*.

This last horn is by some taken for *Antiochus Epiphanes*, but not very judiciously. A horn of a Beast is never taken for a single person: it always signifies a new kingdom, and the kingdom of *Antiochus* was an old one. *Antiochus* reigned over one of the four horns, and the little horn was a fifth under its proper kings. This horn was at first a little one, and waxed exceeding great, but so did not *Antiochus*. It is described great above all the former horns, and so was not *Antiochus*. His kingdom on the contrary was weak, and tributary to the *Romans*, and he did not enlarge it. The horn was a *King of fierce countenance, and destroyed wonderfully, and prospered and practised*; that is, he prospered in his practises against the holy people: but *Antiochus* was frighted out of *Egypt* by a mere message of the *Romans*, and afterwards routed and baffled by the *Jews*. The horn was mighty by another's power, *Antiochus* acted by his own. The horn stood up against the Prince of the Host of heaven, the Prince of Princes; and this is the character not of *Antiochus* but of *Antichrist*. The horn cast down the Sanctuary to the ground, and so did not *Antiochus*; he left it standing. The Sanctuary and Host were trampled under foot 2300 days; and in *Daniel*'s Prophecies days are put for years: but the profanation of the Temple in the reign of *Antiochus* did not last so many natural days. These were to last till the time of the end, till the last end of the indignation against the *Jews*; and this indignation is not yet at an end. They were to last till the Sanctuary which had been cast down should be cleansed, and the Sanctuary is not yet cleansed.

This Prophecy of the Ram and He-Goat is repeated in the last Prophecy of *Daniel*. There the Angel tells *Daniel*, that [9] *he stood up to strengthen* Darius *the* Mede*, and that there should stand up yet three kings in* Persia, [*Cyrus*, *Cambyses*, and *Darius Hystaspis*] *and the fourth* [*Xerxes*] *should be far richer than they all; and by his wealth thro' his riches he should stir up all against the realm of* Grecia. This relates to the Ram, whose two horns were the kingdoms of *Media* and *Persia*. Then he goes on to describe the

horns of the Goat by the [10] *standing up of a mighty king, which should rule with great dominion, and do according to his will*; and by the breaking of his kingdom into four smaller kingdoms, and not descending to his own posterity. Then he describes the actions of two of those kingdoms which bordered on *Judea*, *viz*. *Egypt* and *Syria*, calling them the Kings of the *South* and *North*, that is, in respect of *Judea*; and he carries on the description till the latter end of the kingdoms of the four, and till the reign of *Antiochus Epiphanes*, when transgressors were come to the full. In the eighth year of *Antiochus*, the year in which he profaned the Temple and set up the heathen Gods in all *Judea*, and the *Romans* conquered the kingdom of *Macedon*; the prophetic Angel leaves off describing the affairs of the kings of the *South* and *North*, and begins to describe those of the *Greeks* under the dominion of the *Romans*, in these words: [11] *And after him Arms* [the *Romans*] *shall stand up, and they shall pollute the sanctuary of strength*. As ממלך signifies *after the king*, Dan. xi. 8; so here ממנו may signify *after him*: and so מן־האחת may signify *after one of them*, Dan. viii. 9. Arms are every where in these Prophecies of *Daniel* put for the military power of a kingdom, and they stand up when they conquer and grow powerful. The *Romans* conquered *Illyricum*, *Epirus* and *Macedonia*, in the year of *Nabonassar* 580; and thirty five years after, by the last will and testament of *Attalus* the last King of *Pergamus*, they inherited that rich and flourishing kingdom, that is, all *Asia* on this side mount *Taurus*: and sixty nine years after, they conquered the kingdom of *Syria*, and reduced it into a Province: and thirty four years after they did the like to *Egypt*. By all these steps the *Roman* arms stood up over the *Greeks*. And after 95 years more, by making war upon the *Jews, they polluted the sanctuary of strength, and took away the daily sacrifice, and*, in its room soon after, *placed the abomination which made* the Land *desolate*: for this abomination was placed after the days of Christ, *Matth.* xxiv. 15. In the 16th year of the Emperor *Hadrian*, A. C. 132, they placed this abomination by building a Temple to *Jupiter Capitolinus*, where the Temple of God in *Jerusalem* had stood. Thereupon the *Jews* under the conduct of *Barchochab* rose up in arms against the *Romans*, and in that war had 50 cities demolished, 985 of their best towns destroyed, and 580000 men slain by the sword: and in the

end of the war, A.C. 136, they were all banished *Judea* upon pain or death; and that time the land hath remained desolate of its old inhabitants.

Now that the prophetic Angel passes in this manner from the four kingdoms of the *Greeks* to the *Romans* reigning over the *Greeks*, is confirmed from hence, that in the next place he describes the affairs of the *Christians* unto the time of the end, in these words: [12] *And they that understand among the people shall instruct many, yet they shall fall by the sword and by flame, by captivity and by spoil many days. Now when they shall fall they shall be holpen with a little help*, *viz*. in the reign of *Constantine* the great; *but many shall cleave to them with dissimulation. And some of them of understanding there shall fall to try them, and to purge* them from the dissemblers; *and to make them white even to the time of the end*. And a little after, the time of the end is said to be *a time, times, and half a time*: which is the duration of the reign of the last horn of *Daniel*'s fourth Beast, and of the *Woman* and her *Beast* in the *Apocalyps*.

Notes to Chap. IX.

[1] Chap. viii. 3.
[2] Ver. 22.
[3] Ver. 23.
[4] Chap. viii. 9.
[5] Chap. viii. 9, 10.
[6] Ver. 11.
[7] Ver. 12.
[8] Ver. 13, 14.
[9] Dan. xi. 1, 2.
[10] Ver. 3.
[11] Dan xi. 31.
[12] Chap. xi. 33, &c.

CHAP. X.

Of the Prophecy of the Seventy Weeks.

The Vision of the Image composed of four Metals was given first to *Nebuchadnezzar*, and then to *Daniel* in a dream: and *Daniel* began then to be celebrated for revealing of secrets, *Ezek.* xxviii. 3. The Vision of the four Beasts, and of *the Son of man* coming in the clouds of heaven, was also given to *Daniel* in a dream. That of the Ram and the He-Goat appeared to him in the day time, when he was by the bank of the river *Ulay*; and was explained to him by the prophetic Angel *Gabriel*. It concerns the *Prince of the host*, and the *Prince of Princes*: and now in the first year of *Darius* the *Mede* over *Babylon*, the same prophetic Angel appears to *Daniel* again, and explains to him what is meant by the *Son of man*, by the *Prince of the host*, and the *Prince of Princes*. The Prophecy of the *Son of man* coming in the clouds of heaven relates to the second coming of *Christ*; that of the *Prince of the host* relates to his first coming: and this Prophecy of the *Messiah*, in explaining them, relates to both comings, and assigns the times thereof.

This Prophecy, like all the rest of *Daniel*'s, consists of two parts, an introductory Prophecy and an explanation thereof; the whole I thus translate and interpret.

[1] '*Seventy weeks are [2] cut out upon thy people, and upon thy holy city, to finish transgression, and [3] to make an end of sins, to expiate iniquity, and to bring in everlasting righteousness, to consummate the Vision and [4] the Prophet, and to anoint the most Holy*.

'*Know also and understand, that from the going forth of the commandment to cause to return and to build* Jerusalem*, unto [5] the Anointed the Prince, shall be seven weeks*.

'*Yet threescore and two weeks shall [6] it return, and the street be built and the wall; but in troublesome times: and after the threescore and two weeks, the Anointed shall be cut off, and [6] it shall not be his; but the people of a Prince to come shall destroy the city and the sanctuary: and the end thereof shall be with a flood, and unto the end of the war, desolations are determined*.

'*Yet shall he confirm the covenant with many for one week: and in half a week he shall cause the sacrifice and oblation to cease: and upon a wing of abominations he shall make it desolate, even until the consummation, and that which is determined be poured upon the desolate*.'

Seventy weeks are cut out upon thy people, and upon thy holy city, to finish transgression, &c. Here, by putting a week for seven years, are reckoned 490 years from the time that the dispersed *Jews* should be re-incorporated into [7] a people and a holy city, until the death and resurrection of *Christ*; whereby *transgression should be finished, and sins ended, iniquity be expiated, and everlasting righteousness brought in, and this Vision be accomplished, and the Prophet consummated*, that Prophet whom the *Jews* expected; and whereby *the most Holy* should be *anointed*, he who is therefore in the next words called the *Anointed*, that is, the *Messiah*, or the *Christ*. For by joining the accomplishment of the vision with the expiation of sins, the 490 years are ended with the death of *Christ*. Now the dispersed *Jews* became a people and city when they first returned into a polity or body politick; and this was in the seventh year of *Artaxerxes Longimanus*, when *Ezra* returned with a body of *Jews* from captivity, and revived the *Jewish* worship; and by the King's commission created Magistrates in all the land, to judge and govern the people according to the laws of God and the King, *Ezra* vii. 25. There were but two returns from captivity, *Zerubbabel*'s and *Ezra*'s; in *Zerubbabel*'s they had only commission to build the Temple, in *Ezra*'s they first became a polity or city by a government of their own. Now the years of this *Artaxerxes* began about two or three months after the summer solstice, and his seventh year fell in with the third year of the eightieth *Olympiad*; and the latter part thereof, wherein *Ezra* went up to *Jerusalem*, was in the year of the *Julian Period* 4257. Count the time from thence to the death of *Christ*, and you will find it just 490 years. If you count in *Judaic* years commencing in autumn, and date the reckoning from the first autumn after *Ezra*'s coming to *Jerusalem*, when he put the King's decree in execution; the death of *Christ* will fall on the year of the *Julian Period* 4747, *Anno Domini* 34; and the weeks will be *Judaic* weeks, ending with sabbatical years; and this I take to be the truth: but if you had rather place the death of *Christ* in the year

before, as is commonly done, you may take the year of *Ezra*'s journey into the reckoning.

Know also and understand, that from the going forth of the commandment to cause to return and to build Jerusalem*, unto the Anointed the Prince, shall be seven weeks*. The former part of the Prophecy related to the first coming of *Christ*, being dated to his coming as a Prophet; this being dated to his coming to be Prince or King, seems to relate to his second coming. There, the Prophet was consummate, and the most holy anointed: here, he that was anointed comes to be Prince and to reign. For *Daniel*'s Prophecies reach to the end of the world; and there is scarce a Prophecy in the Old Testament concerning *Christ*, which doth not in something or other relate to his second coming. If divers of the antients, as [8] *Irenæus*, [9] *Julius Africanus*, *Hippolytus* the martyr, and *Apollinaris* Bishop of *Laodicea*, applied the half week to the times of *Antichrist*; why may not we, by the same liberty of interpretation, apply the seven weeks to the time when *Antichrist* shall be destroyed by the brightness of *Christ*'s coming?

The *Israelites* in the days of the antient Prophets, when the ten Tribes were led into captivity, expected a double return; and that at the first the *Jews* should build a new Temple inferior to *Solomon*'s, until the time of that age should be fulfilled; and afterwards they should return from all places of their captivity, and build *Jerusalem* and the Temple gloriously, *Tobit* xiv. 4, 5, 6: and to express the glory and excellence of this city, it is figuratively said to be built of precious stones, *Tobit* xiii. 16, 17, 18. *Isa.* liv. 11, 12. *Rev.* xi. and called the *New Jerusalem*, the *Heavenly Jerusalem*, the *Holy City*, the *Lamb's Wife*, the *City of the Great King*, the *City into which the Kings of the earth do bring their glory and honour*. *Now* while such a return from captivity was the expectation of *Israel*, even before the times of *Daniel*, I know not why *Daniel* should omit it in his Prophecy. This part of the Prophecy being therefore not yet fulfilled, I shall not attempt a particular interpretation of it, but content myself with observing, that as the *seventy* and the *sixty two weeks* were *Jewish* weeks, ending with sabbatical years; so the *seven weeks* are the compass of a *Jubilee*, and begin and end with actions proper for a *Jubilee*, and of the highest nature for which a *Jubilee* can be kept: and that since *the commandment to return and to build*

Jerusalem, precedes the *Messiah the Prince* 49 years; it may perhaps come forth not from the *Jews* themselves, but from some other kingdom friendly to them, and precede their return from captivity, and give occasion to it; and lastly, that this rebuilding of *Jerusalem* and the waste places of *Judah* is predicted in *Micah* vii. 11. *Amos* ix. 11, 14. *Ezek.* xxxvi. 33, 35, 36, 38. *Isa.* liv. 3, 11, 12. lv. 12. lxi. 4. lxv. 18, 21,22. and *Tobit* xiv. 5. and that the return from captivity and coming of the *Messiah* and his kingdom are described in *Daniel* vii. *Rev.* xix. *Acts* i. *Mat.* xxiv. *Joel* iii. *Ezek.* xxxvi. xxxvii. *Isa.* lx. lxii. lxiii. lxv. and lxvi. and many other places of scripture. The manner I know not. Let time be the Interpreter.

Yet threescore and two weeks shall it return, and the street be built and the wall, but in troublesome times: and after the threescore and two weeks the Messiah *shall be cut off, and it shall not be his; but the people of a Prince to come shall destroy the city and the sanctuary*, &c. Having foretold both comings of *Christ*, and dated the last from their returning and building *Jerusalem*; to prevent the applying that to the building *Jerusalem* by *Nehemiah*, he distinguishes this from that, by saying that from this period to the *Anointed* shall be, not seven weeks, but threescore and two weeks, and this not in prosperous but in troublesome times; and at the end of these Weeks the *Messiah* shall not be the Prince of the *Jews*, but be cut off; and *Jerusalem* not be his, but the city and sanctuary be destroyed. Now *Nehemiah* came to *Jerusalem* in the 20th year of this same *Artaxerxes*, while *Ezra* still continued there, *Nehem.* xii. 36, and found the city lying waste, and the houses and wall unbuilt, *Nehem.* ii. 17. vii. 4, and finished the wall the 25th day of the month *Elul*, *Nehem.* vi. 15, in the 28th year of the King, that is, in *September* in the year of the *Julian Period* 4278. Count now from this year threescore and two weeks of years, that is 434 years, and the reckoning will end in *September* in the year of the *Julian Period* 4712 which is the year in which *Christ* was born, according to *Clemens Alexandrinus*, *Irenæus*, *Eusebius*, *Epiphanius*, *Jerome*, *Orosius*, *Cassiodorus*, and other antients; and this was the general opinion, till *Dionysius Exiguus* invented the vulgar account, in which *Christ*'s birth is placed two years later. If with some you reckon that *Christ* was born three or four years before the vulgar account, yet his birth will fall in the latter part of the last week, which is enough. How after these weeks *Christ* was cut off and the city and sanctuary destroyed by the *Romans*, is well known.

Yet shall he confirm the covenant with many for one week. He kept it, notwithstanding his death, till the rejection of the *Jews*, and calling of *Cornelius* and the *Gentiles* in the seventh year after his passion.

And in half a week he shall cause the sacrifice and oblation to cease; that is, by the war of the *Romans* upon the *Jews*: which war, after some commotions, began in the 13th year of *Nero*, A.D. 67, in the spring, when *Vespasian* with an army invaded them; and ended in the second year of *Vespasian*, A.D. 70, in autumn, *Sept.* 7, when *Titus* took the city, having burnt the Temple 27 days before: so that it lasted three years and an half.

And upon a wing of abominations he shall cause desolation, even until the consummation, and that which is determined be poured upon the desolate. The Prophets, in representing kingdoms by Beasts and Birds, put their wings stretcht out over any country for their armies sent out to invade and rule over that country. Hence a wing of abominations is an army of false Gods: for an abomination is often put in scripture for a false God; as where *Chemosh* is called [10] the abomination of *Moab*, and *Molech* the abomination of *Ammon*. The meaning therefore is, that the people of a Prince to come shall destroy the sanctuary, and abolish the daily worship of the true God, and overspread the land with an army of false gods; and by setting up their dominion and worship, cause desolation to the *Jews*, until the times of the *Gentiles* be fulfilled. For *Christ* tells us, that the abomination of desolation spoken of by *Daniel* was to be set up in the times of the *Roman Empire*, *Matth.* xxiv. 15.

Thus have we in this short Prophecy, a prediction of all the main periods relating to the coming of the *Messiah*; the time of his birth, that of his death, that of the rejection of the *Jews*, the duration of the *Jewish* war whereby he caused the city and sanctuary to be destroyed, and the time of his second coming: and so the interpretation here given is more full and complete and adequate to the design, than if we should restrain it to his first coming only, as Interpreters usually do. We avoid also the doing violence to the language of *Daniel*, by taking the *seven weeks* and *sixty two weeks* for one number. Had that been *Daniel*'s meaning, he would have said *sixty and nine weeks*, and not *seven weeks* and *sixty two weeks*, a way of numbring used by no nation. In our way the years are *Jewish Luni-solar years*, [11] as they ought to be; and the *seventy weeks of years* are *Jewish weeks* ending with

sabbatical years, which is very remarkable. For they end either with the year of the birth of *Christ*, two years before the vulgar account, or with the year of his death, or with the seventh year after it: all which are *sabbatical years*. Others either count by Lunar years, or by weeks not *Judaic*: and, which is worst, they ground their interpretations on erroneous Chronology, excepting the opinion of *Funccius* about the *seventy weeks*, which is the same with ours. For they place *Ezra* and *Nehemiah* in the reign of *Artaxerxes Mnemon*, and the building of the Temple in the reign of *Darius Nothus*, and date the weeks of *Daniel* from those two reigns.

The grounds of the Chronology here followed, I will now set down as briefly as I can.

The *Peloponnesian* war began in spring *An.* 1 *Olym*, as *Diodorus*, *Eusebius*, and all other authors agree. It began two months before *Pythodorus* ceased to be *Archon*, *Thucyd. l.* 2. that is, in *April*, two months before the end of the *Olympic* year. Now the years of this war are most certainly determined by the 50 years distance of its first year from the transit of *Xerxes* inclusively, *Thucyd. l.* 2. or 48 years exclusively, *Eratosth. apud Clem. Alex.* by the 69 years distance of its end, or 27th year, from the beginning of *Alexander*'s reign in *Greece*; by the acting of the *Olympic* games in its 4th and 12th years, *Thucyd. l.* 5; and by three eclipses of the sun, and one of the moon, mentioned by *Thucydides* and *Xenophon*. Now *Thucydides*, an unquestionable witness, tells us, that the news of the death of *Artaxerxes Longimanus* was brought to *Ephesus*, and from thence by some *Athenians* to *Athens*, in the 7th year of this *Peloponnesian* war, when the winter half year was running; and therefore he died *An.* 4 *Olym*, in the end of *An. J.P.* 4289, suppose a month or two before midwinter; for so long the news would be in coming. Now *Artaxerxes Longimanus* reigned 40 years, by the consent of *Diodorus*, *Eusebius*, *Jerome*, *Sulpitius*; or 41, according to *Ptol. in can. Clem. Alexand. l.* 1. *Strom. Chron. Alexandr*. *Abulpharagius*, *Nicephorus*, including therein the reign of his successors *Xerxes* and *Sogdian*, as *Abulpharagius* informs us. After *Artaxerxes* reigned his son *Xerxes* two months, and *Sogdian* seven months; but their reign is not reckoned apart in summing up the years of the Kings, but is included in the 40 or 41 years reign of *Artaxerxes*: omit these nine months, and the precise reign of *Artaxerxes* will be thirty nine years and three months. And

therefore since his reign ended in the beginning of winter *An. J.P.* 4289, it began between midsummer and autumn, *An. J.P.* 4250.

The same thing I gather also thus. *Cambyses* began his reign in spring *An. J.P.* 4185, and reigned eight years, including the five months of *Smerdes*; and then *Darius Hystaspis* began in spring *An. J.P.* 4193, and reigned thirty six years, by the unanimous consent of all Chronologers. The reigns of these two Kings are determined by three eclipses of the moon observed at *Babylon*, and recorded by *Ptolemy*; so that it cannot be disputed. One was in the seventh year of *Cambyses*, *An. J.P.* 4191, *Jul.* 16, at 11 at night; another in the 20th year of *Darius*, *An. J.P.* 4212, *Nov.* 19, at $11^{h.}$ 45' at night; a third in the 31st year of *Darius*, *An. J.P.* 4223, *Apr.* 25, at $11^{h.}$ 30 at night. By these eclipses, and the Prophecies of *Haggai* and *Zechary* compared together, it is manifest that his years began after the 24th day of the 11th *Jewish* month, and before the 25th day of *April*, and by consequence about *March*. *Xerxes* therefore began in spring *An. J.P.* 4229: for *Darius* died in the fifth year after the battle at *Marathon*, as *Herodotus*, *lib.* 7, and *Plutarch* mention; and that battle was in *October An. J.P.* 4224, ten years before the battle at *Salamis*. *Xerxes* therefore began within less than a year after *October An. J.P.* 4228, suppose in the spring following: for he spent his first five years, and something more, in preparations for his expedition against the *Greeks*; and this expedition was in the time of the *Olympic* games, *An.* 1 *Olym*, *Calliade Athenis Archonte*, 28 years after the *Regifuge*, and Consulship of the first Consul *Junius Brutus*, *Anno Urbis conditæ* 273, *Fabio & Furio Coss.* The passage of *Xerxes*'s army over the *Hellespont* began in the end of the fourth year of the 74th *Olympiad*, that is, in *June An. J.P.* 4234, and took up one month: and in autumn, three months after, on the full moon, the 16th day of the month *Munychion*, was the battle at *Salamis*, and a little after that an eclipse of the sun, which by the calculation fell on *Octob.* 2. His sixth year therefore began a little before *June*, suppose in spring *An. J.P.* 4234, and his first year consequently in spring *An. J.P.* 4229, as above. Now he reigned almost twenty one years, by the consent of all writers. Add the 7 months of *Artabanus*, and the sum will be 21 years and about four or five months, which end between midsummer and autumn *An. J.P.* 4250. At this time therefore began the reign of his successor *Artaxerxes*, as was to be proved.

The same thing is also confirmed by *Julius Africanus*, who informs us out of former writers, that the 20th year of this *Artaxerxes* was the 115th year from the beginning of the reign of *Cyrus* in *Persia,* and fell in with *An.* 4 *Olym*. It began therefore with the *Olympic* year, soon after the summer Solstice, *An. J.P.* 4269. Subduct nineteen years, and his first year will begin at the same time of the year *An. J.P.* 4250, as above.

His 7th year therefore began after midsummer *An. J.P.* 4256; and the Journey of *Ezra* to *Jerusalem* in the spring following fell on the beginning of *An. J.P.* 4257, as above.

Notes to Chap. X.

[1] Chap. ix. 24, 25, 26, 27.

[2] *Cut upon*. A phrase in *Hebrew*, taken from the practise of numbring by cutting notches.

[3] Heb. *to seal*, i.e. to finish or consummate: a metaphor taken from sealing what is finished. So the *Jews* compute, *ad obsignatum Misna, ad obsignatum Talmud*, that is, *ad absolutum*.

[4] Heb. *the Prophet*, not the Prophecy.

[5] Heb. *the Messiah*, that is, in *Greek*, *the Christ*; in *English*, *the Anointed*. I use the *English* word, that the relation of this clause to the former may appear.

[6] *Jerusalem*.

[7] See *Isa.* xxiii. 13.

[8] Iren. l. 5. Hær. c. 25.

[9] Apud Hieron. in h. l.

[10] 1 Kings xi. 7.

[11] The antient solar years of the eastern nations consisted of 12 months, and every month of 30 days: and hence came the division of a circle into 360 degrees. This year seems to be used by *Moses* in his history of the Flood, and by *John* in the *Apocalypse*, where a time, times and half a time, 42 months and 1260 days, are put equipollent. But in reckoning by many of these years together, an account is to be kept of the odd days which were added to the end of these years. For the *Egyptians* added five days to the end of this year; and so did the *Chaldeans* long before the times of *Daniel*, as appears by the *Æra*, of *Nabonassar*: and the *Persian* Magi used the same

year of 365 days, till the Empire of the *Arabians*. The antient *Greeks* also used the same solar year of 12 equal months, or 360 days; but every other year added an intercalary month, consisting of 10 and 11 days alternately.

The year of the *Jews*, even from their coming out of *Egypt*, was Luni-solar. It was solar, for the harvest always followed the Passover, and the fruits of the land were always gathered before the feast of Tabernacles, *Levit.* xxiii. But the months were lunar, for the people were commanded by *Moses* in the beginning of every month to blow with trumpets, and offer burnt offerings with their drink offerings, *Num.* x. 10. xxviii. 11, 14. and this solemnity was kept on the new moons, *Psal.* lxxxi. 3,4,5. 1 *Chron.* xxiii. 31. These months were called by *Moses* the first, second, third, fourth month, *&c.* and the first month was also called *Abib*, the second *Zif*, the seventh *Ethanim*, the eighth *Bull*, *Exod.* xiii. 4. 1 *Kings* vi. 37, 38. viii. 2. But in the *Babylonian* captivity the *Jews* used the names of the *Chaldean* months, and by those names understood the months of their own year; so that the *Jewish* months then lost their old names, and are now called by those of the *Chaldeans*.

The *Jews* began their civil year from the autumnal Equinox, and their sacred year from the vernal: and the first day of the first month was on the visible new moon, which was nearest the Equinox.

Whether *Daniel* used the *Chaldaick* or *Jewish* year, is not very material; the difference being but six hours in a year, and 4 months in 480 years. But I take his months to be *Jewish*: first, because *Daniel* was a *Jew*, and the *Jews* even by the names of the *Chaldean* months understood the months of their own year: secondly, because this Prophecy is grounded on *Jeremiah*'s concerning the 70 years captivity, and therefore must be understood of the same sort of years with the seventy; and those are *Jewish*, since that Prophecy was given in *Judea* before the captivity: and lastly, because *Daniel* reckons by weeks of years, which is a way of reckoning peculiar to the *Jewish* years. For as their days ran by sevens, and the last day of every seven was a sabbath; so their years ran by sevens, and the last year of every seven was a sabbatical year, and seven such weeks of years made a *Jubilee*.

CHAP. XI.

Of the Times of the Birth and Passion of Christ.

The times of the Birth and Passion of *Christ*, with such like niceties, being not material to religion, were little regarded by the *Christians* of the first age. They who began first to celebrate them, placed them in the cardinal periods of the year; as the annunciation of the Virgin *Mary*, on the 25th of *March*, which when *Julius Cæsar* corrected the Calendar was the vernal Equinox; the feast of *John* Baptist on the 24th of *June*, which was the summer Solstice; the feast of St. *Michael* on *Sept.* 29, which was the autumnal Equinox; and the birth of *Christ* on the winter Solstice, *Decemb.* 25, with the feasts of St. *Stephen*, St. *John* and the *Innocents*, as near it as they could place them. And because the Solstice in time removed from the 25th of *December* to the 24th, the 23d, the 22d, and so on backwards, hence some in the following centuries placed the birth of *Christ* on *Decemb.* 23, and at length on *Decemb.* 20: and for the same reason they seem to have set the feast of St. *Thomas* on *Decemb.* 21, and that of St. *Matthew* on *Sept.* 21. So also at the entrance of the Sun into all the signs in the *Julian* Calendar, they placed the days of other Saints; as the conversion of *Paul* on *Jan.* 25, when the Sun entred; St. *Matthias* on *Feb.* 25, when he entred; St. *Mark* on *Apr.* 25, when he entred; *Corpus Christi* on *May* 26, when he entred; St. *James* on *July* 25, when he entred; St. *Bartholomew* on *Aug.* 24, when he entred; *Simon* and *Jude* on *Octob.* 28, when he entred: and if there were any other remarkable days in the *Julian* Calendar, they placed the Saints upon them, as St. *Barnabas* on *June* 11, where *Ovid* seems to place the feast of *Vesta* and *Fortuna*, and the goddess *Matuta*; and St. *Philip* and *James* on the first of *May*, a day dedicated both to the *Bona Dea*, or *Magna Mater*, and to the goddess *Flora*, and still celebrated with her rites. All which shews that these days were fixed in the first *Christian* Calendars by Mathematicians at pleasure, without any ground in tradition; and that the *Christians* afterwards took up with what they found in the Calendars.

Neither was there any certain tradition about the years of *Christ*. For the *Christians* who first began to enquire into these things, as *Clemens*

Alexandrinus, *Origen*, *Tertullian*, *Julius Africanus*, *Lactantius*, *Jerome*, St. *Austin*, *Sulpicius Severus*, *Prosper*, and as many as place the death of *Christ* in the 15th or 16th year of *Tiberius*, make *Christ* to have preached but one year, or at most but two. At length *Eusebius* discovered four successive Passovers in the Gospel of *John*, and thereupon set on foot an opinion that he preacht three years and an half; and so died in the 19th year of *Tiberius*. Others afterwards, finding the opinion that he died in the Equinox *Mar.* 25, more consonant to the times of the *Jewish* Passover, in the 17th and 20th years, have placed his death in one of those two years. Neither is there any greater certainty in the opinions about the time of his birth. The first *Christians* placed his baptism near the beginning of the 15th year of *Tiberius*; and thence reckoning thirty years backwards, placed his birth in the 43d *Julian* year, the 42d of *Augustus* and 28th of the *Actiac* victory. This was the opinion which obtained in the first ages, till *Dionysius Exiguus*, placing the baptism of *Christ* in the 16th year of *Tiberius*, and misinterpreting the text of *Luke*, iii. 23. as if *Jesus* was only beginning to be 30 years old when he was baptized, invented the vulgar account, in which his birth is placed two years later than before. As therefore relating to these things there is no tradition worth considering; let us lay aside all and examine what prejudices can be gathered from records of good account.

The fifteenth year of *Tiberius* began *Aug.* 28, *An. J.P.* 4727. So soon as the winter was over, and the weather became warm enough, we may reckon that *John* began to baptize; and that before next winter his fame went abroad, and all the people came to his baptism, and *Jesus* among the rest. Whence the first Passover after his baptism mentioned *John* ii. 13. was in the 16th year of *Tiberius*. After this feast *Jesus* came into the land of *Judea*, and staid there baptizing, whilst *John* was baptizing in *Ænon*, *John* iii. 22, 23. But when he heard that *John* was cast into prison, he departed into *Galilee*, *Mat.* iii. 12. being afraid, because the Pharisees had heard that he baptized more disciples than *John*, *John* iv. 1. and in his journey he passed thro' *Samaria* four months before the harvest, *John* iv. 35. that is, about the time of the winter Solstice. For their harvest was between *Easter* and *Whitsunday*, and began about a month after the vernal Equinox. *Say not ye*, saith he, *there are yet four months, and then cometh harvest? Behold I say unto you, lift up your eyes, and look on the fields, for they are white already to harvest*; meaning, that the people in the fields were ready for the Gospel,

as his next words shew[1]. *John* therefore was imprisoned about *November*, in the 17th year of *Tiberius*; and *Christ* thereupon went from *Judea* to *Cana* of *Galilee* in *December*, and was received there of the *Galileans*, who had seen all he did at *Jerusalem* at the Passover: and when a Nobleman of *Capernaum* heard he was returned into *Galilee*, and went to him and desired him to come and cure his son, he went not thither yet, but only said, *Go thy way, thy son liveth; and the Nobleman returned and found it so, and believed, he and his house*, John iv. This is the beginning of his miracles in *Galilee*; and thus far *John* is full and distinct in relating the actions of his first year, omitted by the other Evangelists. The rest of his history is from this time related more fully by the other Evangelists than by *John*; for what they relate he omits.

From this time therefore *Jesus* taught in the Synagogues of *Galilee* on the sabbath-days, being glorified of all: and coming to his own city *Nazareth*, and preaching in their Synagogue, they were offended, and thrust him out of the city, and led him to the brow of the hill on which the city was built to cast him headlong; but he passing thro' the midst of them, went his way, and came and dwelt at *Capernaum*, *Luke* iv. And by this time we may reckon the second Passover was either past or at hand.

All this time *Matthew* passeth over in few words, and here begins to relate the preaching and miracles of *Christ*. *When* Jesus, saith he, *had heard that* John *was cast into prison, he departed into* Galilee*; and leaving* Nazareth*, he came and dwelt at* Capernaum*, and from that time began to preach and say, Repent, for the kingdom of heaven is at hand*, Matth. iv. 12. Afterwards he called his disciples *Peter*, *Andrew*, *James* and *John*; and then *went about all* Galilee, *teaching in the Synagogues, — and healing all manner of sickness: — and his fame went thro'out all* Syria*; and they brought unto him all sick people, — and there followed him great multitudes of people from* Galilee*, and from* Decapolis*, and from* Jerusalem*, and from* Judea*, and from beyond* Jordan, Matth, iv. 18, 25. All this was done before the sermon in the mount: and therefore we may certainly reckon that the second Passover was past before the preaching of that sermon. The multitudes that followed him from *Jerusalem* and *Judea*, shew that he had lately been there at the feast. The sermon in the mount was made when great multitudes came to him from all places, and followed him in the open

fields; which is an argument of the summer-season: and in this sermon he pointed at the lilies of the field then in the flower before the eyes of his auditors. *Consider*, saith he, *the lilies of the field, how they grow; they toil not, neither do they spin; and yet* Solomon *in all his glory was not arayed like one of these. Wherefore if God so clothe the grass of the field, which to day is and to morrow is cast into the oven*, &c. *Matth.* vi. 28. So therefore the grass of the field was now in the flower, and by consequence the month of *March* with the Passover was past.

Let us see therefore how the rest of the feasts follow in order in *Matthew*'s Gospel: for he was an eye-witness of what he relates, and so tells all things in due order of time, which *Mark* and *Luke* do not.

Some time after the sermon in the mount, when the time came that he should be received, that is, when the time of a feast came that he should be received by the *Jews*, he set his face to go to *Jerusalem*: and as he went with his disciples in the way, when the *Samaritans* in his passage thro' *Samaria* had denied him lodgings, and a certain Scribe said unto him, *Master, I will follow thee whithersoever thou goest*, Jesus *said unto him, The foxes have holes, and the birds of the air have nests, but the Son of man hath not where to lay his head*, Matth. viii. 19. Luke ix. 51, 57. The Scribe told *Christ* he would bear him company in his journey, and *Christ* replied that he wanted a lodging. Now this feast I take to be the feast of Tabernacles, because soon after I find *Christ* and his Apostles on the sea of *Tiberias* in a storm so great, that the ship was covered with water and in danger of sinking, till *Christ rebuked the winds and the sea*, Matth. viii. 23. For this storm shews that winter was now come on.

After this *Christ* did many miracles, and *went about all the cities and villages of* Galilee*, teaching in their Synagogues, and preaching the gospel of the kingdom, and healing every sickness, and every disease among the people*, Matth. ix. he then sent forth the twelve to do the like, *Matth.* x. and at length when he had received a message from *John*, and answered it, he said to the multitudes, *From the days of* John *the Baptist until now the kingdom of heaven suffereth violence*; and upbraided the cities, *Chorazin*, *Bethsaida*, and *Capernaum*, wherein most of his mighty works were done, because they repented not, *Matth.* xi. Which several passages shew, that from the imprisonment of *John* till now there had been a considerable length of time: the winter was now past, and the next Passover was at hand;

for immediately after this, *Matthew*, in chap. xii. subjoins, that *Jesus went on the sabbath-day thro' the corn, and his disciples were an hungred, and began to pluck the ears of corn and to eat, — rubbing them*, saith *Luke*, *in their hands*: the corn therefore was not only in the ear, but ripe; and consequently the Passover, in which the first-fruits were always offered before the harvest, was now come or past. *Luke* calls this sabbath δευτεροπρωτον, the second prime sabbath, that is, the second of the two great feasts of the Passover. As we call *Easter* day high *Easter*, and its *octave* low *Easter* or *Lowsunday*: so *Luke* calls the feast on the seventh day of the unlevened bread, the second of the two prime sabbaths.

In one of the sabbaths following he went into a Synagogue, and healed a man with a withered hand, *Matth.* xii. 9. *Luke* vi. 6. And when the Pharisees took counsel to destroy him, *he withdrew himself from thence, and great multitudes followed him; and he healed them all, and charged them that they should not make him known*, Matth. xii. 14. Afterwards being in a ship, and the multitude standing on the shore, he spake to them three parables together, taken from the seeds-men sowing the fields, *Matth.* xiii. by which we may know that it was now seed-time, and by consequence that the feast of Tabernacles was past. After this he went *into his own country, and taught them in their Synagogue*, but *did not many mighty works there because of their unbelief*. Then the twelve having been abroad a year, returned, and told *Jesus* all that they had done: and at the same time *Herod* beheaded *John* in prison, and his disciples came and told *Jesus*; and when *Jesus* heard it, he took the twelve and departed thence privately by ship into a desert place belonging to *Bethsaida*: and the people when they knew it, followed him on foot out of the cities, the winter being now past; and he healed their sick, and in the desert fed them to the number of five thousand men, besides women and children, with only five loaves and two fishes, *Matth.* xiv. *Luke* ix. at the doing of which miracle the Passover of the *Jews* was nigh, *John* vi. 4. But *Jesus* went not up to this feast; but *after these things walked in* Galilee*, because the* Jews at the Passover before had taken counsel to destroy him, and still *sought to kill him*, John vii. i. Henceforward therefore he is found first in the coast of *Tyre* and *Sidon*, then by the sea of *Galilee*, afterwards in the coast of *Cæsarea Philippi*; and lastly at *Capernaum*, *Matth.* xv. 21, 29. xvi. 13. xvii. 34.

Afterwards when the feast of Tabernacles was at hand, his brethren upbraided him for walking secretly, and urged him to go up to the feast. But he went not till they were gone, and then went up privately, *John* vii. 2. and when the *Jews* sought to stone him, he escaped, *John* viii. 59. After this he was at the feast of the Dedication in winter, *John* x. 22. and when they sought again to take him, he fled beyond *Jordan*, *John* x. 39, 40. *Matth*. xix. 1. where he stayed till the death of *Lazarus*, and then came to *Bethany* near *Jerusalem*, and raised him, *John* xi. 7, 18. whereupon the *Jews* took counsel from that time to kill him: and *therefore* he *walked no more openly among the* Jews*, but went thence into a country near to the wilderness, into a city called* Ephraim*; and there continued with his disciples* till the last Passover, in which the *Jews* put him to death, *John* xi. 53, 54.

Thus have we, in the Gospels of *Matthew* and *John* compared together, the history of *Christ*'s actions in continual order during five Passovers. *John* is more distinct in the beginning and end; *Matthew* in the middle: what either omits, the other supplies. The first Passover was between the baptism of *Christ* and the imprisonment of *John, John* ii. 13. the second within four months after the imprisonment of *John*, and *Christ*'s beginning to preach in *Galilee*, *John* iv. 35. and therefore it was either that feast to which *Jesus* went up, when the Scribe desired to follow him, *Matth.* viii. 19. *Luke* ix. 51, 57. or the feast before it. The third was the next feast after it, when the corn was eared and ripe, *Matth*, xii. 1. *Luke* vi. 1. The fourth was that which was nigh at hand when *Christ* wrought the miracle of the five loaves, *Matth*. xiv. 15. *John* vi. 4, 5. and the fifth was that in which *Christ* suffered, *Matth.* xx. 17. *John* xii. 1.

Between the first and second Passover *John* and *Christ* baptized together, till the imprisonment of *John*, which was four months before the second. Then *Christ* began to preach, and call his disciples; and after he had instructed them a year, lent them to preach in the cities of the *Jews*: at the same time *John* hearing of the fame of *Christ*, sent to him to know who he was. At the third, the chief Priests began to consult about the death of *Christ*. A little before the fourth, the twelve after they had preached a year in all the cities, returned to *Christ*; and at the same time *Herod* beheaded *John* in prison, after he had been in prison two years and a quarter: and thereupon *Christ* fled into the desart for fear of *Herod*. The fourth *Christ* went not up to *Jerusalem* for fear of the *Jews*, who at the Passover before

had consulted his death, and because his time was not yet come. Thenceforward therefore till the feast of Tabernacles he walked in *Galilee*, and that secretly for fear of *Herod*: and after the feast of Tabernacles he returned no more into *Galilee*, but sometimes was at *Jerusalem*, and sometimes retired beyond *Jordan*, or to the city *Ephraim* by the wilderness, till the Passover in which he was betrayed, apprehended, and crucified.

John therefore baptized two summers, and *Christ* preached three. The first summer *John* preached to make himself known, in order to give testimony to *Christ*. Then, after *Christ* came to his baptism and was made known to him, he baptized another summer, to make *Christ* known by his testimony; and *Christ* also baptized the same summer, to make himself the more known: and by reason of *John*'s testimony there came more to *Christ*'s baptism than to *John*'s. The winter following *John* was imprisoned; and now his course being at an end, *Christ* entered upon his proper office of preaching in the cities. In the beginning of his preaching he completed the number of the twelve Apostles, and instructed them all the first year in order to send them abroad. Before the end of this year, his fame by his preaching and miracles was so far spread abroad, that the *Jews* at the Passover following consulted how to kill him. In the second year of his preaching, it being no longer safe for him to converse openly in *Judea*, he sent the twelve to preach in all their cities: and in the end of the year they returned to him, and told him all they had done. All the last year the twelve continued with him to be instructed more perfectly, in order to their preaching to all nations after his death. And upon the news of *John*'s death, being afraid of *Herod* as well as of the *Jews*, he walked this year more secretly than before; frequenting desarts, and spending the last half of the year in *Judea*, without the dominions of *Herod*.

Thus have we in the Gospels of *Matthew* and *John* all things told in due order, from the beginning of *John*'s preaching to the death of *Christ*, and the years distinguished from one another by such essential characters that they cannot be mistaken. The second Passover is distinguished from the first, by the interposition of *John*'s imprisonment. The third is distinguished from the second, by a double character: first, by the interposition of the feast to which *Christ* went up, *Mat.* viii. 19. *Luke* ix. 57. and secondly, by the distance of time from the beginning of *Christ*'s preaching: for the second was in the beginning of his preaching, and the third so long after, that

before it came *Christ* said, *from the days of* John *the Baptist until now*, &c. and upbraided the cities of *Galilee* for their not repenting at his preaching, and mighty works done in all that time. The fourth is distinguished from the third, by the mission of the twelve from *Christ* to preach in the cities of *Judea* in all the interval. The fifth is distinguished from all the former by the twelve's being returned from preaching, and continuing with *Christ* during all the interval, between the fourth and fifth, and by the passion and other infallible characters.

Now since the first summer of *John*'s baptizing fell in the fifteenth year of the Emperor *Tiberius*, and by consequence the first of these five Passovers in his sixteenth year; the last of them, in which *Jesus* suffered, will fall on the twentieth year of the same Emperor; and by consequence in the Consulship of *Fabius* and *Vitellius*, in the 79th *Julian* year, and year of *Christ* 34, which was the sabbatical year of the *Jews*. And that it did so, I further confirm by these arguments.

I take it for granted that the passion was on friday the 14th day of the month *Nisan*, the great feast of the Passover on saturday the 15th day of *Nisan*, and the resurrection on the day following. Now the 14th day of *Nisan* always fell on the full moon next after the vernal Equinox; and the month began at the new moon before, not at the true conjunction, but at the first appearance of the new moon: for the *Jews* referred all the time of the silent moon, as they phrased it, that is, of the moon's disappearing, to the old moon; and because the first appearance might usually be about 18 hours after the true conjunction, they therefore began their month from the sixth hour at evening, that is, at sun set, next after the eighteenth hour from the conjunction. And this rule they called יה *Jah*, designing by the letters י and ה the number 18.

I know that *Epiphanius* tells us, if some interpret his words rightly, that the *Jews* used a vicious cycle, and thereby anticipated the legal new moons by two days. But this surely he spake not as a witness, for he neither understood *Astronomy* nor *Rabbinical* learning, but as arguing from his erroneous hypothesis about the time of the passion. For the *Jews* did not anticipate, but postpone their months: they thought it lawful to begin their months a day later than the first appearance of the new moon, because the new moon continued for more days than one; but not a day sooner, lest they should celebrate the new moon before there was any. And the *Jews* still

keep a tradition in their books, that the *Sanhedrim* used diligently to define the new moons by sight: sending witnesses into mountainous places, and examining them about the moon's appearing, and translating the new moon from the day they had agreed on to the day before, as often as witnesses came from distant regions, who had seen it a day sooner than it was seen at *Jerusalem*. Accordingly *Josephus*, one of the *Jewish* Priests who ministred in the temple, tells us [2] that the Passover was kept *on the 14th day of* Nisan, κατα σεληνην *according to the moon, when the sun was in* Aries. This is confirmed also by two instances, recorded by him, which totally overthrow the hypothesis of the *Jews* using a vicious cycle. For that year in which *Jerusalem* was taken and destroyed, he saith, the Passover was on the 14th day of the month *Xanticus*, which according to *Josephus* is our *April*; and that five years before, it fell on the 8th day of the same month. Which two instances agree with the course of the moon.

Computing therefore the new moons of the first month according to the course of the moon and the rule *Jah*, and thence counting 14 days, I find that the 14th day of this month in the year of *Christ* 31, fell on tuesday *March* 27; in the year 32, on sunday *Apr.* 13; in the year 33, on friday *Apr.* 3; in the year 34, on wednesday *March* 24, or rather, for avoiding the Equinox which fell on the same day, and for having a fitter time for harvest, on thursday *Apr.* 22. also in the year 35, on tuesday *Apr.* 12. and in the year 36, on saturday *March* 31.

But because the 15th and 21st days of *Nisan*, and a day or two of *Pentecost*, and the 10th, 15th, and 22d of *Tisri*, were always sabbatical days or days of rest, and it was inconvenient on two sabbaths together to be prohibited burying their dead and making ready fresh meat, for in that hot region their meat would be apt in two days to corrupt: to avoid these and such like inconveniences, the *Jews* postponed their months a day, as often as the first day of the month *Tisri*, or, which is all one, the third of the month *Nisan*, was sunday, wednesday or friday: and this rule they called אדו *Adu*, by the letters א , ד , ו signifying the numbers 1, 4, 6; that is, the 1st, 4th, and 6th days of the week; which days we call sunday, wednesday and friday. Postponing therefore by this rule the months found above; the 14th day of the month *Nisan* will fall in the year of *Christ* 31, on wednesday *March* 28; in the year 32, on monday *Apr.* 14; in the year 33, on friday *Apr.*

3; in the year 34, on friday *Apr.* 23; in the year 35, on wednesday *Apr.* 13, and in the year 36, on saturday *March* 31.

By this computation therefore the year 32 is absolutely excluded, because the Passion cannot fall on friday without making it five days after the full moon, or two days before it; whereas it ought to be upon the day of the full moon, or the next day. For the same reason the years 31 and 35 are excluded, because in them the Passion cannot fall on friday, without making it three days after the full moon, or four days before it: errors so enormous, that they would be very conspicuous in the heavens to every vulgar eye. The year 36 is contended for by few or none, and both this and the year 35 may be thus excluded.

Tiberius in the beginning of his reign made *Valerius Gratus* President of *Judea*; and after 11 years, substituted *Pontius Pilate*, who governed 10 years. Then *Vitellius*, newly made President of *Syria*, deprived him of his honour, substituting *Marcellus*, and at length sent him to *Rome*: but, by reason of delays, *Tiberius* died before *Pilate* got thither. In the mean time *Vitellius*, after he had deposed *Pilate*, came to *Jerusalem* in the time of the Passover, to visit that Province as well as others in the beginning of his office; and in the place of *Caiaphas*, then High Priest, created *Jonathas* the son of *Ananus*, or *Annas* as he is called in scripture. Afterwards, when *Vitellius* was returned to *Antioch*, he received letters from *Tiberius*, to make peace with *Artabanus* king of the *Parthians*. At the same time the *Alans*, by the sollicitation of *Tiberius*, invaded the kingdom of *Artabanus*; and his subjects also, by the procurement of *Vitellius*, soon after rebelled: for *Tiberius* thought that *Artabanus*, thus pressed with difficulties, would more readily accept the conditions of peace. *Artabanus* therefore straightway gathering a greater army, opprest the rebels; and then meeting *Vitellius* at *Euphrates*, made a league with the *Romans*. After this *Tiberius* commanded *Vitellius* to make war upon *Aretas* King of *Arabia*. He therefore leading his army against *Aretas*, went together with *Herod* to *Jerusalem*, to sacrifice at the publick feast which was then to be celebrated. Where being received honourably, he stayed three days, and in the mean while translated the high Priesthood from *Jonathas* to his brother *Theophilus*: and the fourth day, receiving letters of the death of *Tiberius*, made the people swear allegiance to *Caius* the new Emperor; and recalling his army, sent them into quarters. All this is related by *Josephus Antiq. lib.* 18. *c.* 6, 7. Now *Tiberius* reigned

22 years and 7 months, and died *March* 16, in the beginning of the year of *Christ* 37; and the feast of the Passover fell on *April* 20 following, that is, 35 days after the death of *Tiberius*: so that there were about 36 or 38 days, for the news of his death to come from *Rome* to *Vitellius* at *Jerusalem*; which being a convenient time for that message, confirms that the feast which *Vitellius* and *Herod* now went up to was the Passover. For had it been the Pentecost, as is usually supposed, *Vitellius* would have continued three months ignorant of the Emperor's death: which is not to be supposed. However, the things done between this feast and the Passover which *Vitellius* was at before, namely, the stirring up a sedition in *Parthia*, the quieting that sedition, the making a league after that with the *Parthians*, the sending news of that league to *Rome*, the receiving new orders from thence to go against the *Arabians*, and the putting those orders in execution; required much more time than the fifty days between the Passover and Pentecost of the same year: and therefore the Passover which *Vitellius* first went up to, was in the year before. Therefore *Pilate* was deposed before the Passover A.C. 36, and by consequence the passion of *Christ* was before that Passover: for he suffered not under *Vitellius*, nor under *Vitellius* and *Pilate* together, but under *Pilate* alone.

Now it is observable that the high Priesthood was at this time become an annual office, and the Passover was the time of making a new high Priest. For *Gratus* the predecessor of *Pilate*, saith *Josephus*, made *Ismael* high Priest after *Ananus*; and a while after, suppose a year, deposed him, and substituted *Eleazar*, and a year after *Simon*, and after another year *Caiaphas*; and then gave way to *Pilate*. So *Vitellius* at one Passover made *Jonathas* successor to *Caiaphas*, and at the next *Theophilus* to *Jonathas*. Hence *Luke* tells us, that in the 15th year of *Tiberius*, *Annas* and *Caiaphas* were high Priests, that is, *Annas* till the Passover, and *Caiaphas* afterwards. Accordingly *John* speaks of the high Priesthood as an annual office: for he tells us again and again, in the last year of *Christ*'s preaching, that *Caiaphas* was high Priest for that year, *John* xi. 49, 51. xviii. 13. And the next year *Luke* tells you, that *Annas* was high Priest, *Acts* iv. 6. *Theophilus* was therefore made high Priest in the first year of *Caius*, *Jonathas* in the 22d year of *Tiberius*, and *Caiaphas* in the 21st year of the same Emperor: and therefore, allotting a year to each, the Passion, when *Annas* succeeded *Caiaphas*, could not be later than the 20th year of *Tiberius*, A.C. 34.

Thus there remain only the years 33 and 34 to be considered; and the year 33 I exclude by this argument. In the Passover two years before the Passion, when *Christ* went thro' the corn, and his disciples pluckt the ears, and rubbed them with their hands to eat; this ripeness of the corn shews that the Passover then fell late: and so did the Passover A.C. 32, *April 14*, but the Passover A.C. 31, *March 28th*, fell very early. It was not therefore two years after the year 31, but two years after 32 that *Christ* suffered.

Thus all the characters of the Passion agree to the year 34; and that is the only year to which they all agree.

Notes to Chap. XI.

[1] I observe, that *Christ* and his forerunner *John* in their parabolical discourses were wont to allude to things present. The old Prophets, when they would describe things emphatically, did not only draw parables from things which offered themselves, as from the rent of a garment, 1 *Sam.* xv. from the sabbatic year, *Isa.* xxxvii. from the vessels of a Potter, *Jer.* xviii, &c. but also when such fit objects were wanting, they supplied them by their own actions, as by rending a garment, 1 *Kings* xi. by shooting, 2 *Kings* xiii. by making bare their body, *Isa.* xx. by imposing significant names to their sons, *Isa.* viii. *Hos.* i. by hiding a girdle in the bank of *Euphrates*, *Jer.* xiii. by breaking a potter's vessel, *Jer.* xix. by putting on fetters and yokes, *Jer.* xxvii. by binding a book to a stone, and casting them both into *Euphrates*, *Jer.* li. by besieging a painted city, *Ezek.* iv. by dividing hair into three parts, *Ezek.* v. by making a chain, *Ezek.* vii. by carrying out houshold stuff like a captive and trembling, *Ezek.* xii, &c. By such kind of types the Prophets loved to speak. And *Christ* being endued with a nobler prophetic spirit than the rest, excelled also in this kind of speaking, yet so as not to speak by his own actions, that was less grave and decent, but to turn into parables such things as offered themselves. On occasion of the harvest approaching, he admonishes his disciples once and again of the spiritual harvest, *John* iv. 35. *Matth.* ix. 37. Seeing the lilies of the field, he admonishes his disciples about gay clothing, *Matth.* vi. 28. In allusion to the present season of fruits, he admonishes his disciples about knowing men by their fruits, *Matth.* vii. 16. In the time of the Passover, when trees put forth leaves, he bids his disciples *learn a parable from the fig tree: when its*

branch is yet tender and putteth forth leaves, ye know that summer is nigh, &c. *Matth.* xxiv. 32. *Luke* xxi. 29. The same day, alluding both to the season of the year and to his passion, which was to be two days after, he formed a parable of the time of fruits approaching, and the murdering of the heir, *Matth.* xxi. 33. Alluding at the same time, both to the money-changers whom he had newly driven out of the Temple, and to his passion at hand; he made a parable of a Nobleman going into a far country to receive a kingdom and return, and delivering his goods to his servants, and at his return condemning the slothful servant because he put not his money to the exchangers, *Matth.* xxv. 14. *Luke* xix. 12. Being near the Temple where sheep were kept in folds to be sold for the sacrifices, he spake many things parabolically of sheep, of the shepherd, and of the door of the sheepfold; and discovers that he alluded to the sheepfolds which were to be hired in the market-place, by speaking of such folds as a thief could not enter by the door, nor the shepherd himself open, but a porter opened to the shepherd, *John* x. 1, 3. Being in the mount of *Olives*, *Matth.* xxxvi. 30. *John* xiv. 31. a place so fertile that it could not want vines, he spake many things mystically of the Husbandman, and of the vine and its branches, *John* xv. Meeting a blind man, he admonished of spiritual blindness, *John* ix. 39. At the sight of little children, he described once and again the innocence of the elect, *Matth.* xviii. 2. xix. 13. Knowing that *Lazarus* was dead and should be raised again, he discoursed of the resurrection and life eternal, *John* xi. 25, 26. Hearing of the slaughter of some whom *Pilate* had slain, he admonished of eternal death, *Luke* xiii. 1. To his fishermen he spake of fishers of men, *Matth.* iv. 10. and composed another parable about fishes. *Matth.* xiii. 47. Being by the Temple, he spake of the Temple of his body, *John* ii. 19. At supper he spake a parable about the mystical supper to come in the kingdom of heaven, *Luke* xiv. On occasion of temporal food, he admonished his disciples of spiritual food, and of eating his flesh and drinking his blood mystically, *John* vi. 27, 53. When his disciples wanted bread, he bad them beware of the leven of the Pharisees, *Matth.* xvi. 6. Being desired to eat, he answered that he had other meat, *John* iv. 31. In the great day of the feast of Tabernacles, when the *Jews*, as their custom was, brought a great quantity of waters from the river *Shiloah* into the Temple, *Christ* stood and cried, saying, *If any man thirst let him come unto me and drink. He that believeth in me, out of his belly shall flow rivers of living water*, John vii. 37. The

next day, in allusion to the servants who by reason of the sabbatical year were newly set free, he said, *If ye continue in my word, the truth shall make you free*. Which the *Jews* understanding literally with respect to the present manumission of servants, answered, *We be* Abraham*'s seed, and were never in bondage to any man: how sayeth thou, ye shall be made free?* John viii. They assert their freedom by a double argument: first, because they were the seed of *Abraham*, and therefore newly made free, had they been ever in bondage; and then, because they never were in bondage. In the last Passover, when *Herod* led his army thro' *Judea* against *Aretas* King of *Arabia*, because *Aretas* was aggressor and the stronger in military forces, as appeared by the event; *Christ* alluding to that state of things, composed the parable of a weaker King leading his army against a stronger who made war upon him, *Luke* xiv. 31. And I doubt not but divers other parables were formed upon other occasions, the history of which we have not.

[2] Joseph. Antiq. lib. 3. c. 10.

CHAP. XII.

Of the Prophecy of the Scripture of Truth.

The kingdoms represented by the second and third Beasts, or the Bear and Leopard, are again described by *Daniel* in his last Prophecy written in the third year of *Cyrus* over *Babylon*, the year in which he conquered *Persia*. For this Prophecy is a commentary upon the Vision of the Ram and He-Goat.

Behold, saith [1] he, *there shall stand up yet three kings in* Persia, [*Cyrus*, *Cambyses*, and *Darius Hystaspes*] *and the fourth* [*Xerxes*] *shall be far richer than they all: and by his strength thro' his riches he shall stir up all against the realm of* Grecia. *And a mighty king* [*Alexander* the great] *shall stand up, that shall rule with great dominion, and do according to his will. And when he shall stand up, his kingdom shall be broken, and shall be divided towards the four winds of heaven; and not to his posterity* [but after their death,] *nor according to his dominion which he ruled: for his kingdom shall be pluckt up, even for others besides those*. *Alexander* the great having conquered all the *Persian* Empire, and some part of *India*, died at *Babylon* a month before the summer Solstice, in the year of *Nabonassar* 425: and his captains gave the monarchy to his bastard brother *Philip Aridæus*, a man disturbed in his understanding; and made *Perdiccas* administrator of the kingdom. *Perdiccas* with their consent made *Meleager* commander of the army, *Seleucus* master of the horse, *Craterus* treasurer of the kingdom, *Antipater* governor of *Macedon* and *Greece*, *Ptolemy* governor of *Egypt*; *Antigonus* governor of *Pamphylia*, *Lycia*, *Lycaonia*, and *Phrygia major*; *Lysimachus* governor of *Thrace*, and other captains governors of other Provinces; as many as had been so before in the days of *Alexander* the great. The *Babylonians* began now to count by a new *Æra*, which they called the *Æra* of *Philip*, using the years of *Nabonassar*, and reckoning the 425th year of *Nabonassar* to be the first year of *Philip*. *Roxana* the wife of *Alexander* being left big with child, and about three or four months after brought to bed of a son, they called him *Alexander*, saluted him King, and joined him with *Philip*, whom they had before placed in the throne. *Philip*

reigned three years under the administratorship of *Perdiccas*, two years more under the administratorship of *Antipater*, and above a year more under that of *Polyperchon*; in all six years and four months; and then was slain with his Queen *Eurydice* in *September* by the command of *Olympias* the mother of *Alexander* the great. The *Greeks* being disgusted at the cruelties of *Olympias*, revolted to *Cassander* the son and successor of *Antipater*. *Cassander* affecting the dominion of *Greece*, slew *Olympias*; and soon after shut up the young king *Alexander*, with his mother *Roxana*, in the castle of *Amphipolis*, under the charge of *Glaucias*, *An. Nabonass.* 432. The next year *Ptolemy*, *Cassander* and *Lysimachus*, by means of *Seleucus*, form'd a league against *Antigonus*; and after certain wars made peace with him, *An. Nabonass.* 438, upon these conditions: that *Cassander* should command the forces of *Europe* till *Alexander* the son of *Roxana* came to age; and that *Lysimachus* should govern *Thrace*, *Ptolemy Egypt* and *Lybia*, and *Antigonus* all *Asia*. *Seleucus* had possest himself of *Mesopotamia*, *Babylonia*, *Sustana* and *Media*, the year before. About three years after *Alexander*'s death he was made governor of *Babylon* by *Antipater*; then was expelled by *Antigonus*; but now he recovered and enlarged his government over a great part of the *East*: which gave occasion to a new *Æra*, called *Æra Seleucidarum*. Not long after the peace made with *Antigonus*, *Diodorus* saith the same *Olympic* year; *Cassander*, seeing that *Alexander* the son of *Roxana* grew up, and that it was discoursed thro'out *Macedonia* that it was fit he should be set at liberty, and take upon him the government of his father's kingdom, commanded *Glaucias* the governor of the castle to kill *Roxana* and the young king *Alexander* her son, and conceal their deaths. Then *Polyperchon* set up *Hercules*, the son of *Alexander* the great by *Barsinè*, to be king; and soon after, at the sollicitation of *Cassander*, caused him to be slain. Soon after that, upon a great victory at sea got by *Demetrius* the son of *Antigonus* over *Ptolemy*, *Antigonus* took upon himself the title of king, and gave the same title to his son. This was *An. Nabonass.* 441. After his example, *Seleucus*, *Cassander*, *Lysimachus* and *Ptolemy*, took upon themselves the title and dignity of kings, having abstained from this honour while there remained any of *Alexander*'s race to inherit the crown. Thus the monarchy of the *Greeks* for want of an heir was broken into several kingdoms; four of which, seated *to the four winds of heaven*, were very eminent. For *Ptolemy* reigned over *Egypt*, *Lybia* and *Ethiopia*; *Antigonus*

over *Syria* and the lesser *Asia*; *Lysimachus* over *Thrace*; and *Cassander* over *Macedon*, *Greece* and *Epirus*, as above.

Seleucus at this time reigned over the nations which were beyond *Euphrates*, and belonged to the bodies of the two first Beasts; but after six years he conquered *Antigonus*, and thereby became possest of one of the four kingdoms. For *Cassander* being afraid of the power of *Antigonus*, combined with *Lysimachus*, *Ptolemy* and *Seleucus*, against him: and while *Lysimachus* invaded the parts of *Asia* next the *Hellespont*, *Ptolemy* subdued *Phœnicia* and *Cœlosyria*, with the sea-coasts of *Asia*.

Seleucus came down with a powerful army into *Cappadocia*, and joining the confederate forces, fought *Antigonus* in *Phrygia* and flew him, and seized his kingdom, *An. Nabonass.* 447. After which *Seleucus* built *Antioch*, *Seleucia*, *Laodicea*, *Apamea*, *Berrhœa*, *Edessa*, and other cities in *Syria* and *Asia*; and in them granted the *Jews* equal privileges with the *Greeks*.

Demetrius the son of *Antigonus* retained but a small part of his father's dominions, and at length lost *Cyprus* to *Ptolemy*; but afterwards killing *Alexander*, the son and successor of *Cassander* king of *Macedon*, he seized his kingdom, *An. Nabonass.* 454. Sometime after, preparing a very great army to recover his father's dominions in *Asia*; *Seleucus*, *Ptolemy*, *Lysimachus* and *Pyrrhus* king of *Epirus*, combined against him; and *Pyrrhus* invading *Macedon*, corrupted the army of *Demetrius*, put him to flight, seized his kingdom, and shared it with *Lysimachus*. After seven months, *Lysimachus* beating *Pyrrhus*, took *Macedon* from him, and held it five years and a half, uniting the kingdoms of *Macedon* and *Thrace*. *Lysimachus* in his wars with *Antigonus* and *Demetrius*, had taken from them *Caria*, *Lydia*, and *Phrygia*; and had a treasury in *Pergamus*, a castle on the top of a conical hill in *Phrygia*, by the river *Caicus*, the custody of which he had committed to one *Philetærus*, who was at first faithful to him, but in the last year of his reign revolted. For *Lysimachus*, having at the instigation of his wife *Arsinoe*, slain first his own son *Agathocles*, and then several that lamented him; the wife of *Agathocles* fled with her children and brothers, and some others of their friends, and sollicited *Seleucus* to make war upon *Lysimachus*; whereupon *Philetærus* also, who grieved at the death of *Agathocles*, and was accused thereof by *Arsinoe*, took up arms, and sided with *Seleucus*. On this occasion *Seleucus* and *Lysimachus* met and fought in *Phrygia*; and *Lysimachus* being slain in the battel, lost his kingdom to

Seleucus, *An. Nabonass.* 465. Thus the Empire of the *Greeks*, which at first brake into four kingdoms, became now reduced into two notable ones, henceforward called by *Daniel* the kings of the *South* and *North*. For *Ptolemy* now reigned over *Egypt*, *Lybia*, *Ethiopia*, *Arabia*, *Phœnicia*, *Cœlosyria*, and *Cyprus*; and *Seleucus*, having united three of the four kingdoms, had a dominion scarce inferior to that of the *Persian* Empire, conquered by *Alexander* the great. All which is thus represented by *Daniel*: [2] *And the king of the* South [*Ptolemy*] *shall be strong, and one of his Princes* [*Seleucus*, one of *Alexander*'s Princes] *shall be strong above him, and have dominion; his dominion shall be a great dominion*.

After *Seleucus* had reigned seven months over *Macedon*, *Greece*, *Thrace*, *Asia*, *Syria*, *Babylonia*, *Media*, and all the *East* as far as *India*; *Ptolemy Ceraunus*, the younger brother of *Ptolemy Philadelphus* king of *Egypt*, slew him treacherously, and seized his dominions in *Europe*: while *Antiochus Soter*, the son of *Seleucus*, succeeded his father in *Asia*, *Syria*, and most of the *East*; and after nineteen or twenty years was succeeded by his son *Antiochus Theos*; who having a lasting war with *Ptolemy Philadelphus*, at length composed the same by marrying *Berenice* the daughter of *Philadelphus*: but after a reign of fifteen years, his first wife *Laodice* poisoned him, and set her son *Seleucus Callinicus* upon the throne. *Callinicus* in the beginning of his reign, by the impulse of his mother *Laodice*, besieged *Berenice* in *Daphne* near *Antioch*, and slew her with her young son and many of her women. Whereupon *Ptolemy Euergetes*, the son and successor of *Philadelphus*, made war upon *Callinicus*; took from him *Phœnicia*, *Syria*, *Cilicia*, *Mesopotamia*, *Babylonia*, *Sustana*, and some other regions; and carried back into *Egypt* 40000 talents of silver, and 2500 images of the Gods, amongst which were the Gods of *Egypt* carried away by *Cambyses*. *Antiochus Hierax* at first assisted his brother *Callinicus*, but afterwards contended with him for *Asia*. In the mean time *Eumenes* governor of *Pergamus* beat *Antiochus*, and took from them both all *Asia* westward of mount *Taurus*. This was in the fifth year of *Callinicus*, who after an inglorious reign of 20 years was succeeded by his son *Seleucus Ceraunus*; and *Euergetes* after four years more, *An. Nabonass.* 527, was succeeded by his son *Ptolemy Philopator*. All which is thus signified by *Daniel*:[3] *And in the end of years they* [the kings of the *South* and *North*]

shall join themselves together: for the king's daughter of the South [*Berenice*] *shall come to the king of the* North *to make an agreement, but she shall not retain the power of the arm; neither shall she stand, nor her seed, but she shall be delivered up, and he* [*Callinicus*] *that brought her, and he whom she brought forth, and they that strengthned her in* [those] *times*, [or defended her in the siege of *Daphne*.] *But out of a branch of her roots shall one stand up in his seat* [her brother *Euergetes*] *who shall come with an army, and shall enter into the fortress* [or fenced cities] *of the king of the* North*, and shall act against them and prevail: and shall carry captives into* Egypt*, their Gods with their Princes and precious vessels of silver and gold; and he shall continue some years after the king of the* North.

Seleucus Ceraunus, inheriting the remains of his father's kingdom, and thinking to recover the rest, raised a great army against the governor of *Pergamus*, now King thereof, but died in the third year of his reign. His brother and successor, *Antiochus Magnus*, carrying on the war, took from the King of *Pergamus* almost all the lesser *Asia*, recovering also the Provinces of *Media*, *Persia* and *Babylonia*, from the governors who had revolted: and in the fifth year of his reign invading *Cœlosyria*, he with little opposition possest himself of a good part thereof; and the next year returning to invade the rest of *Cœlosyria* and *Phœnicia*, beat the army of *Ptolemy Philopator* near *Berytus*; he then invaded *Palestine* and the neighbouring parts of *Arabia*, and the third year returned with an army of 78000: but *Ptolemy* coming out of *Egypt* with an army of 75000, fought and routed him at *Raphia* near *Gaza*, between *Palestine* and *Egypt*; and recovered all *Phœnicia* and *Cœlosyria*, *Ann. Nabonass.* 532. Being puffed up with this victory, and living in all manner of luxury, the *Egyptians* revolted, and had wars with him, but were overcome; and in the broils sixty thousand *Egyptian Jews* were slain. All which is thus described by *Daniel*: [4] *But his sons* [*Seleucus Ceraunus*, and *Antiochus Magnus*, the sons of *Callinicus*] *shall be stirred up, and shall gather a great army; and he* [*Antiochus Magnus*] *shall come effectually and overflow, and pass thro' and return, and* [again the next year] *be stirred up* [marching even] *to his fortress*, [the frontier towns of *Egypt*;] *and the King of the* South *shall be moved with choler, and come forth* [the third year] *and fight with him, even*

with the King of the North*; and he* [the King of the *North*] *shall lead forth a great multitude, but the multitude shall be given into his hand. And the multitude being taken away, his heart shall be lifted up, and he shall cast down many ten thousands; but he shall not be strengthned by it: for the king of the* North *shall return*, &c.

About twelve years after the battle between *Philopator* and *Antiochus*, *Philopator* died; and left his kingdom to his young son *Ptolemy Epiphanes*, a child of five years old. Thereupon *Antiochus Magnus* confederated with *Philip* king of *Macedon*, that they should each invade the dominions of *Epiphanes* which lay next to them. Hence arose a various war between *Antiochus* and *Epiphanes*, each of them seizing *Phœnicia* and *Cœlosyria* by turns; whereby those countries were much afflicted by both parties. First *Antiochus* seized them; then one *Scopas* being sent with the army of *Egypt*, recovered them from *Antiochus*: the next year, *An. Nabonass.* 550, *Antiochus* fought and routed *Scopas* near the fountains of *Jordan*, besieged him in *Sidon*, took the city, and recovered *Syria* and *Phœnicia* from *Egypt*, the *Jews* coming over to him voluntarily. But about three years after, preparing for a war against the *Romans*, he came to *Raphia* on the borders of *Egypt*; made peace with *Epiphanes*, and gave him his daughter *Cleopatra*: next autumn he passed the *Hellespont* to invade the cities of *Greece* under the *Roman* protection, and took some of them; but was beaten by the *Romans* the summer following, and forced to return back with his army into *Asia*. Before the end of the year the fleet of *Antiochus* was beaten by the fleet of the *Romans* near *Phocæa*: and at the same time *Epiphanes* and *Cleopatra* sent an embassy to *Rome* to congratulate the *Romans* on their success against their father *Antiochus*, and to exhort them to prosecute the war against him into *Asia*. The *Romans* beat *Antiochus* again at sea near *Ephesus*, past their army over the *Hellespont*, and obtain'd a great victory over him by land, took from him all *Asia* westward of mount *Taurus*, gave it to the King of *Pergamus* who assisted them in the war; and imposed a large tribute upon *Antiochus*. Thus the King of *Pergamus*, by the power of the *Romans*, recovered what *Antiochus* had taken from him; and *Antiochus* retiring into the remainder of his kingdom, was slain two years after by the *Persians*, as he was robbing the Temple of *Jupiter Belus* in *Elymais*, to raise money for the *Romans*. All which is thus described by *Daniel*. [5] *For the*

King of the North [*Antiochus*] *shall return, and shall set forth a multitude greater than the former; and shall certainly come, after certain years, with a great army and with much riches. And in those times there shall many stand up against the King of the* South, [particularly the *Macedonians*;] *also the robbers of thy people* [the *Samaritans*, &c.] *shall exalt themselves to establish the vision, but they shall fall. So the King of the* North *shall come, and cast up a mount, and take the most fenced cities; and the arms of the* South *shall not withstand, neither his chosen people, neither shall there he any strength to withstand. But he that cometh against him shall do according to his own will, and none shall stand before him: and he shall stand in the glorious land, which shall fail in his hand. He shall also set his face to go with the strength* [or army] *of all his kingdom, and make an agreement with him* [at *Raphia*;] *and he shall give him the daughter of women corrupting her; but she shall not stand his side, neither be for him. After this he shall turn his face unto the Isles, and shall take many: but a Prince for his own behalf* [the *Romans*] *shall cause the reproach offered by him to cease; without his own reproach he shall cause it to turn upon him. Then he shall turn his face towards the fort of his own land: but he shall stumble and fall, and not be found.*

Seleucus Philopator succeeded his father *Antiochus*, *Anno Nabonass.* 561, and reigned twelve years, but did nothing memorable, being sluggish, and intent upon raising money for the *Romans* to whom he was tributary. He was slain by *Heliodorus*, whom he had sent to rob the Temple of *Jerusalem*. *Daniel* thus describes his reign. [6] *Then shall stand up in his estate a raiser of taxes in the glory of the kingdom, but within few days be shall be destroyed, neither in anger nor in battle.*

A little before the death of *Philopator*, his son *Demetrius* was sent hostage to *Rome*, in the place of *Antiochus Epiphanes*, the brother of *Philopator*; and *Antiochus* was at *Athens* in his way home from *Rome*, when *Philopator* died: whereupon *Heliodorus* the treasurer of the kingdom, stept into the throne. But *Antiochus* so managed his affairs, that the *Romans* kept *Demetrius* at *Rome*; and their ally the King of *Pergamus* expelled *Heliodorus*, and placed *Antiochus* in the throne, while *Demetrius* the right heir remained an hostage at *Rome*. *Antiochus* being thus made King by the friendship of the King of *Pergamus* reigned powerfully over *Syria* and the

neighbouring nations: but carried himself much below his dignity, stealing privately out of his palace, rambling up and down the city in disguise with one or two of his companions; conversing and drinking with people of the lowest rank, foreigners and strangers; frequenting the meetings of dissolute persons to feast and revel; clothing himself like the *Roman* candidates and officers, acting their parts like a mimick, and in publick festivals jesting and dancing with servants and light people, exposing himself by all manner of ridiculous gestures. This conduct made some take him for a madman, and call him *Antiochus* Επιμενης. In the first year of his reign he deposed *Onias* the high-Priest, and sold the high-Priesthood to *Jason* the younger brother of *Onias*: for *Jason* had promised to give him 440 talents of silver for that office, and 15 more for a licence to erect a place of exercise for the training up of youth in the fashions of the heathen; which licence was granted by the King, and put in execution by *Jason*. Then the King sending one *Apollonius* into *Egypt* to the coronation of *Ptolemy Philometor*, the young son of *Philometor* and *Cleopatra*, and knowing *Philometor* not to be well affected to his affairs in *Phœnicia*, provided for his own safety in those parts; and for that end came to *Joppa* and *Jerusalem*, where he was honourably received; from thence he went in like manner with his little army to the cities of *Phœnicia*, to establish himself against *Egypt*, by courting the people, and distributing extraordinary favours amongst them. All which is thus represented by *Daniel*. [7] *And in his* [*Philometor*'s] *estate shall stand up a vile person, to whom they* [the *Syrians* who set up *Heliodorus*] *shall not give the honour of the kingdom. Yet he shall come in peaceably, and obtain the kingdom by flatteries* [made principally to the King of *Pergamus*;] *and the arms* [which in favour of *Heliodorus* oppose him] *shall be overflowed with a food from before him, and be broken; yea also* [*Onias* the high-Priest] *the Prince of the covenant. And after the league made with him,* [the King of *Egypt*, by sending *Apollonius* to his coronation] *he shall work deceitfully* [against the King of *Egypt*,] *for he shall come up and shall become strong* [in *Phœnicia*] *with a small people. And he shall enter into the quiet and plentiful cities of the Province* [of *Phœnicia*;] *and* [to ingratiate himself with the *Jews* of *Phœnicia* and *Egypt*, and with their friends] *he shall do that which his fathers have not done, nor his fathers fathers: he shall scatter among them the prey and the spoil, and the riches*

[exacted from other places;] *and shall forecast his devices against the strong holds* [of *Egypt*] *even for a time.*

These things were done in the first year of his reign, *An. Nabonass.* 573. And thenceforward he forecast his devices against the strong holds of *Egypt*, until the sixth year. For three years after, that is in the fourth year of his reign, *Menelaus* bought the high-Priesthood from *Jason*, but not paying the price was sent for by the King; and the King, before he could hear the cause, went into *Cilicia* to appease a sedition there, and left *Andronicus* his deputy at *Antioch*; in the mean time the brother of *Menelaus*, to make up the money, conveyed several vessels out of the Temple, selling some of them at *Tyre*, and sending others to *Andronicus*. When *Menelaus* was reproved for this by *Onias*, he caused *Onias* to be slain by *Andronicus*: for which fact the King at his return from *Cilicia* caused *Andronicus* to be put to death. Then *Antiochus* prepared his second expedition against *Egypt*, which he performed in the sixth year of his reign, *An. Nabonass.* 578: for upon the death of *Cleopatra*, the governors of her son the young King of *Egypt* claimed *Phœnicia* and *Cœlosyria* from him as her dowry; and to recover those countries raised a great army. *Antiochus* considering that his father had not quitted the possession of those countries[8], denied they were her dowry; and with another great army met and fought the *Egyptians* on the borders of *Egypt*, between *Pelusium* and the mountain *Casius*. He there beat them, and might have destroyed their whole army, but that he rode up and down, commanding his soldiers not to kill them, but to take them alive: by which humanity he gained *Pelusium*, and soon after all *Egypt*; entring it with a vast multitude of foot and chariots, elephants and horsemen, and a great navy. Then seizing the cities of *Egypt* as a friend, he marched to *Memphis*, laid the whole blame of the war upon *Eulæus* the King's governor, entred into outward friendship with the young King, and took upon him to order the affairs of the kingdom. While *Aniochus* was thus employ'd, a report being spread in *Phœnicia* that he was dead, *Jason* to recover the high-Priesthood assaulted *Jerusalem* with above a thousand men, and took the city: hereupon the King thinking *Judea* had revolted, came out of *Egypt* in a furious manner, re-took the city, slew forty thousand of the people, made as many prisoners, and sold them to raise money; went into the Temple, spoiled it of its treasures, ornaments, utensils, and vessels

of gold and silver, amounting to 1800 talents; and carried all away to *Antioch*. This was done in the year of *Nabonassar* 578, and is thus described by *Daniel*. [9] *And he shall stir up his power, and his courage against the King of the* South *with a great army; and the King of the* South *shall be stirrd up to battle with a very great and mighty army; but he shall not stand: for they*, even *Antiochus* and his friends, *shall forecast devices against him*, as is represented above; *yea, they that feed of the portion of his meat, shall* betray and *destroy him, and his army shall be overthrown, and many shall fall down slain. And both these Kings hearts shall be to do mischief; and they*, being now made friends, *shall speak lyes at one table*, against the *Jews* and against the holy covenant; *but it shall not prosper: for yet the end*, in which the setting up of the abomination of desolation is to prosper, *shall be at the time appointed. Then shall he return into his land with great riches, and his heart shall be against the holy covenant; and he shall act*, against it by spoiling the Temple, *and return into his own land*.

The *Egyptians* of *Alexandria* seeing *Philometor* first educated in luxury by the Eunuch *Eulæus*, and now in the hands of *Antiochus*, gave the kingdom to *Euergetes*, the younger brother of *Philometor*. Whereupon *Antiochus* pretending to restore *Philometor*, made war upon *Euergetes*; beat him at sea, and besieged him and his sister *Cleopatra* in *Alexandria*: while the besieged Princes sent to *Rome* to implore the assistance of the Senate. *Antiochus* finding himself unable to take the city that year, returned into *Syria*, leaving *Philometor* at *Memphis* to govern *Egypt* in his absence. But *Philometor* made friendship with his brother that winter; and *Antiochus*, returning the next spring *An. Nabonass.* 580, to besiege both the brothers in *Alexandria*, was met in the way by the *Roman* Ambassadors, *Popilius Læna*, *C. Decimius*, and *C. Hostilius*: he offered them his hand to kiss, but *Popilius* delivering to him the tables wherein the message of the Senate was written, bad him read those first. When he had read them, he replied he would consider with his friends what was fit to be done; but *Popilius* drawing a circle about him, bad him answer before he went out of it: *Antiochus*, astonished at this blunt and unusual imperiousness, made answer he would do what the *Romans* demanded; and then *Popilius* gave the King his hand to kiss, and he returned out of *Egypt*. The same year, *An. Nabonass.* 580, his captains by his order spoiled and slaughtered the *Jews*,

profaned the Temple, set up the worship of the heathen Gods in all *Judea*, and began to persecute and make war upon those who would not worship them: which actions are thus described by *Daniel*. [10] *At the time appointed he shall come* again *towards the* South*, but the latter shall not be as the former. For the ships of* Chittim *shall come*, with an embassy from *Rome*, *against him. Therefore he shall be grieved, and return, and have indignation against the holy covenant. So shall he do; he shall even return, and have intelligence with them that forsake the holy covenant.*

In the same year that *Antiochus* by the command of the *Romans* retired out of *Egypt*, and set up the worship of the *Greeks* in *Judea*; the *Romans* conquered the kingdom of *Macedon*, the fundamental kingdom of the Empire of the *Greeks*, and reduced it into a *Roman* Province; and thereby began to put an end to the reign of *Daniel*'s third Beast. This is thus exprest by *Daniel*. *And after him Arms*, that is the *Romans*, *shall stand up*. As ממלך signifies *after the King*, Dan. xi. 8; so ממנו may signify *after him*. *Arms* are every where in this Prophecy of *Daniel* put for the military power of a kingdom: and they stand up when they conquer and grow powerful. Hitherto *Daniel* described the actions of the Kings of the *North* and *South*; but upon the conquest of *Macedon* by the *Romans*, he left off describing the actions of the *Greeks*, and began to describe those of the *Romans* in *Greece*. They conquered *Macedon*, *Illyricum* and *Epirus*, in the year of *Nabonassar* 580. 35 years after, by the last will and testament of *Attalus* the last King of *Pergamus*, they inherited that rich and flourishing kingdom, that is, all *Asia* westward of mount *Taurus*; 69 years after they conquered the kingdom of *Syria*, and reduced it into a Province, and 34 years after they did the like to *Egypt*. By all these steps the *Roman* Arms stood up over the *Greeks*: and after 95 years more, by making war upon the *Jews*, *they polluted the sanctuary of strength, and took away the daily sacrifice, and then placed the abomination of desolation*. For this abomination was placed after the days of *Christ*, *Math.* xxiv. 15. In the 16th year of the Emperor *Adrian*, A.C. 132, they placed this abomination by building a Temple to *Jupiter Capitolinus*, where the Temple of God in *Jerusalem* had stood. Thereupon the *Jews* under the conduct of *Barchochab* rose up in arms against the *Romans*, and in the war had 50 cities demolished, 985 of their best towns destroyed, and 580000 men slain by the sword; and in the end of the war,

A.C. 136, were banished *Judea* upon pain of death, and thenceforward the land remained desolate of its old inhabitants.

In the beginning of the *Jewish* war in *Nero*'s reign, the Apostles fled out of *Judea* with their flocks; some beyond *Jordan* to *Pella* and other places, some into *Egypt*, *Syria*, *Mesopotamia*, *Asia minor*, and elsewhere. *Peter* and *John* came into *Asia*, and *Peter* went thence by *Corinth* to *Rome*; but *John* staying in *Asia*, was banished by the *Romans* into *Patmos*, as the head of a party of the *Jews*, whose nation was in war with the *Romans*. By this dispersion of the *Christian Jews*, the *Christian* religion, which was already propagated westward as far as *Rome*, spred fast into all the *Roman* Empire, and suffered many persecutions under it till the days of *Constantine* the great and his sons: all which is thus described by *Daniel*. [11] *And such as do wickedly against the covenant, shall he*, who places the abomination, *cause to dissemble*, and worship the heathen Gods; *but the people* among them *who do know their God, shall be strong and act. And they that understand among the people, shall instruct many: yet they shall fall by the sword, and by flame, and by captivity, and by spoil many days. Now when they shall fall, they shall be holpen with a little help, viz.* in the reign of *Constantine* the great; *and* at that time by reason of their prosperity, *many shall* come over to them from among the heathen, and *cleave to them with dissimulation. But of those of understanding there shall* still *fall to try* God's people *by them and to purge* them from the dissemblers, *and to make them white even to the time of the end: because it is yet for a time appointed.*

Hitherto the *Roman* Empire continued entire; and under this dominion, the little horn of the He-Goat continued *mighty, but not by his own power*. But now, by the building of *Constantinople*, and endowing it with a Senate and other like privileges with *Rome*; and by the division of the *Roman* Empire into the two Empires of the *Greeks* and *Latins*, headed by those two cities; a new scene of things commences, in which which [12] *a King*, the Empire of the *Greeks*, *doth according to his will, and*, by setting his own laws above the laws of God, *exalts and magnifies himself above every God, and speaks marvellous things against the God of Gods, and shall prosper till the indignation be accomplished. — Neither shall he regard the God of his fathers, nor the* lawful *desire of women* in matrimony, *nor any God, but shall magnify himself above all. And in his seat he shall honour*

Mahuzzims, that is, strong guardians, the souls of the dead; *even with a God whom his fathers knew not shall he honour them*, in their Temples, *with gold and silver, and with precious stones and valuable things*. All which relates to the overspreading of the *Greek* Empire with Monks and Nuns, who placed holiness in abstinence from marriage; and to the invocation of saints and veneration of their reliques, and such like superstitions, which these men introduced in the fourth and fifth centuries. [13] *And at the time of the end the King of the* South, or the Empire of the *Saracens*, *shall push at him*; *and the King of the* North, or Empire of the *Turks*, *shall come against him like a whirlwind, with chariots and with horsemen, and with many ships*; *and be shall enter into the countries* of the *Greeks*, *and shall overflow and pass over. He shall enter also into the glorious land, and many countries shall be overthrown; but these shall escape out of his hand, even* Edom *and* Moab*, and the chief of the children* Ammon: that is, those to whom his Caravans pay tribute. *He shall stretch forth his hand also upon the countries, and the land of* Egypt *shall not escape*; *but he shall have power over the treasures of gold and silver, and over all the precious things of* Egypt*; and the* Lybians *and* Ethiopians *shall be at his steps*. All these nations compose the Empire of the *Turks*, and therefore this Empire is here to be understood by the King of the *North*. They compose also the body of the He-Goat; and therefore the Goat still reigns in his last horn, but not by his own power.

Notes to Chap. XII.

[1] Chap. xi. 2, 3, 4.
[2] Chap. xi. 5.
[3] Chap. xi. 6, 7, 8.
[4] Chap. xi. 10, &c.
[5] Chap. xi. 13-19.
[6] Chap. xi. 20.
[7] Chap. xi. 21, &c.
[8] 2 Maccab. iii. 5, 8. & iv. 4.
[9] Chap. xi. 25, &c.
[10] Chap. xi. 29, 30.
[11] Chap. xi. 32, &c.

[12] Chap. xi. 36, &c.
[13] Chap. xi. 40, &c.

CHAP. XIII.

Of the King who did according to his will, and magnified himself above every God, and honoured Mahuzzims, and regarded not the desire of women.

In the first ages of the Christian religion the Christians of every city were governed by a Council of Presbyters, and the President of the Council was the Bishop of the city. The Bishop and Presbyters of one city meddled not with the affairs of another city, except by admonitory letters or messages. Nor did the Bishops of several cities meet together in Council before the time of the Emperor *Commodus*: for they could not meet together without the leave of the *Roman* governors of the Provinces. But in the days of that Emperor they began to meet in Provincial Councils, by the leave of the governors; first in *Asia*, in opposition to the *Cataphrygian* Heresy, and soon after in other places and upon other occasions. The Bishop of the chief city, or Metropolis of the *Roman* Province, was usually made President of the Council; and hence came the authority of Metropolitan Bishops above that of other Bishops within the same Province. Hence also it was that the Bishop of *Rome* in *Cyprian*'s days called himself the Bishop of Bishops. As soon as the Empire became Christian, the *Roman* Emperors began to call general Councils out of all the Provinces of the Empire; and by prescribing to them what points they should consider, and influencing them by their interest and power, they set up what party they pleased. Hereby the *Greek* Empire, upon the division of the *Roman* Empire into the *Greek* and *Latin* Empires, became *the King who*, in matters of religion, *did according to his will*; *and*, in legislature, *exalted and magnified himself above every God*: and at length, by the seventh general Council, established the worship of the images and souls of dead men, here called *Mahuzzims*.

The same King placed holiness in abstinence from marriage. *Eusebius* in his Ecclesiastical history [1] tells us, that *Musanus* wrote a tract against those who fell away to the heresy of the *Encratites*, which was then newly risen, and had introduced pernicious errors; and that *Tatian*, the disciple of *Justin*, was the author thereof; and that *Irenæus* in his first book against

heresies teaches this, writing of *Tatian* and his heresy in these words: *A Saturnino & Marcione profecti qui vocantur Continentes, docuerunt non contrahendum esse matrimonium; reprobantes scilicet primitivum illud opificium Dei, & tacitè accusantes Deum qui masculum & fœminam condidit ad procreationem generis humani. Induxerunt etiam abstinentiam ab esu eorum quæ animalia appellant, ingratos se exhibentes ergo eum qui universa creavit Deum. Negant etiam primi hominis salutem. Atque hoc nuper apud illos excogitatum est, Tatiano quodam omnium primo hujus impietatis auctore: qui Justini auditor, quamdiu cum illo versatus est, nihil ejusmodi protulit. Post martyrium autem illius, ab Ecclesia se abrumpens, doctoris arrogantia elatus ac tumidus, tanquam præstantior cæteris, novam quandam formam doctrinæ conflavit: Æonas invisibiles commentus perinde ac Valentinus: asserens quoque cum Saturnino & Marcione, matrimonium nihil aliud esse quam corruptionem ac stuprum: nova præterea argumenta ad subvertendam Adami salutem excogitans. Hæc Irenæus de Hæresi quæ tunc viguit Encratitarum.* Thus far *Eusebius*. But altho the followers of *Tatian* were at first condemned as hereticks by the name of *Encratites*, or *Continentes*; their principles could not be yet quite exploded: for *Montanus* refined upon them, and made only second marriages unlawful; he also introduced frequent fastings, and annual, fasting days, the keeping of *Lent*, and feeding upon dried meats. The *Apostolici*, about the middle of the third century, condemned marriage, and were a branch of the disciples of *Tatian*. The *Hierocitæ* in *Egypt*, in the latter end of the third century, also condemned marriage. *Paul* the *Eremite* fled into the wilderness from the persecution of *Decius*, and lived there a solitary life till the reign of *Constantine* the great, but made no disciples. *Antony* did the like in the persecution of *Dioclesian*, or a little before, and made disciples; and many others soon followed his example.

Hitherto the principles of the *Encratites* had been rejected by the Churches; but now being refined by the Monks, and imposed not upon all men, but only upon those who would voluntarily undertake a monastic life, they began to be admired, and to overflow first the *Greek* Church, and then the *Latin* also, like a torrent. *Eusebius* tells us, [2] that *Constantine* the great had those men in the highest veneration, who dedicated themselves wholly to the divine philosophy; and that he almost venerated the most holy

company of Virgins perpetually devoted to God; being certain that the God to whom he had consecrated himself did dwell in their minds. In his time and that of his sons, this profession of a single life was propagated in *Egypt* by *Antony*, and in *Syria* by *Hilarion*; and spred so fast, that soon after the time of *Julian* the Apostate a third part of the *Egyptians* were got into the desarts of *Egypt*. They lived first singly in cells, then associated into *cœnobia* or convents; and at length came into towns, and filled the Churches with Bishops, Presbyters and Deacons. *Athanasius* in his younger days poured water upon the hands of his master *Antony*; and finding the Monks faithful to him, made many of them Bishops and Presbyters in *Egypt*: and these Bishops erected new Monasteries, out of which they chose Presbyters of their own cities, and sent Bishops to others. The like was done in *Syria*, the superstition being quickly propagated thither out of *Egypt* by *Hilarion* a disciple of *Antony*. *Spiridion* and *Epiphanius* of *Cyprus*, *James* of *Nisibis*, *Cyril* of *Jerusalem*, *Eustathius* of *Sebastia* in *Armenia*, *Eusebius* of *Emisa*, *Titus* of *Bostra*, *Basilius* of *Ancyra*, *Acacius* of *Cæsarea* in *Palestine*, *Elpidius* of *Laodicea*, *Melitius* and *Flavian* of *Antioch*, *Theodorus* of *Tyre*, *Protogenes* of *Carrhæ*, *Acacius* of *Berrhæa*, *Theodotus* of *Hierapolis*, *Eusebius* of *Chalcedon*, *Amphilochius* of *Iconium*, *Gregory Nazianzen*, *Gregory Nyssen*, and *John Chrysostom* of *Constantinople*, were both Bishops and Monks in the fourth century. *Eustathius*, *Gregory Nazianzen*, *Gregory Nyssen*, *Basil*, &c. had Monasteries of Clergymen in their cities, out of which Bishops were sent to other cities; who in like manner erected Monasteries there, till the Churches were supplied with Bishops out of these Monasteries. Hence *Jerome*, in a Letter written about the year 385, [3] saith of the Clergy: *Quasi & ipsi aliud sint quam Monachi, & non quicquid in Monachos dicitur redundet in Clericos qui patres sunt Monachorum. Detrimentum pecoris pastoris ignominia est*. And in his book against *Vigilantius*: *Quid facient Orientis Ecclesiæ? Quæ aut Virgines Clericos accipiunt, aut Continentes, aut si uxores habuerint mariti esse desistunt*. Not long after even the Emperors commanded the Churches to chuse Clergymen out of the Monasteries by this Law.

Impp. Arcad & Honor. AA. Cæsario PF. P.

[4] *Si quos forte Episcopi deesse sibi Clericos arbitrantur, ex monachorum numero rectius ordinabunt: non obnoxios publicis privatisque*

rationibus cum invidia teneant, sed habeant jam probatos. Dat. vii. *Kal. Aug. Honorio A.* iv. *& Eutychianio Coss.* A.C. 598. The *Greek* Empire being now in the hands of these *Encratites*, and having them in great admiration, *Daniel* makes it a characteristick of the King who doth according to his will, that *he should not regard the desire of Women.*

Thus the Sect of the *Encratites*, set on foot by the *Gnosticks*, and propagated by *Tatian* and *Montanus* near the end of the second century; which was condemned by the Churches of that and the third century, and refined upon by their followers; overspread the *Eastern* Churches in the fourth century, and before the end of it began to overspread the *Western*. Henceforward the Christian Churches having a form of godliness, but denying the power thereof, came into the hands of the *Encratites*: and the Heathens, who in the fourth century came over in great numbers to the Christians, embraced more readily this sort of Christianity, as having a greater affinity with their old superstitions, than that of the sincere Christians; who by the lamps of the seven Churches of *Asia*, and not by the lamps of the Monasteries, had illuminated the Church Catholic during the three first centuries.

The *Cataphrygians* brought in also several other superstitions: such as were the doctrine of Ghosts, and of their punishment in Purgatory, with prayers and oblations for mitigating that punishment, as *Tertullian* teaches in his books *De Anima* and *De Monogamia*. They used also the sign of the cross as a charm. So *Tertullian* in his book *de Corona militis*: *Ad omnem progressum atque promotum, ad omnem aditum & exitum, ad vestitum, ad calceatum, ad lavacra, ad mensas, ad lamina, ad cubilia, ad sedilia, quacunque nos conversatio exercet, frontem crucis signaculo terimus*. All these superstitions the Apostle refers to, where he saith: *Now the Spirit speaketh expresly, that in the latter times some shall depart from the faith, giving heed to seducing spirits, and doctrines of devils*, the *Dæmons* and Ghosts worshipped by the heathens, *speaking lyes in hypocrisy*, about their apparitions, the miracles done by them, their reliques, and the sign of the cross, *having consciences seared with a hot iron*; *forbidding to marry, and commanding to abstain from meats*, &c. 1 Tim. iv. 1,2,3. From the *Cataphrygians* these principles and practices were propagated down to posterity. *For the mystery of iniquity* did *already work* in the *Apostles* days in the *Gnosticks*, continued to work very strongly in their offspring the

Tatianists and *Cataphrygians*, and was to work *till that man of sin* should *be revealed*; *whose coming is after the working of Satan, with all power and signs, and lying wonders, and all deceivableness of unrighteousness*; coloured over with a form of *Christian* godliness, but without the power thereof, 2 *Thess*. ii. 7-10.

For tho some stop was put to the *Cataphrygian* Christianity, by Provincial Councils, till the fourth century; yet the *Roman* Emperors then turning *Christians*, and great multitudes of heathens coming over in outward profession, these found the *Cataphrygian* Christianity more suitable to their old principles, of placing religion in outward forms and ceremonies, holy-days, and doctrines of Ghosts, than the religion of the sincere *Christians*: wherefore they readily sided with the *Cataphrygian Christians*, and established that Christianity before the end of the fourth century. By this means those of understanding, after they had been persecuted by the heathen Emperors in the three first centuries, and *were holpen with a little help*, by the conversion of *Constantine* the great and his sons to the *Christian* religion, fell under new persecutions, *to purge them* from the dissemblers, *and to make them white, even to the time of the end*.

Notes to Chap. XIII.

[1] Lib. 4. c. 28, 29.

[2] In vita Constantini, l. 4. c. 28.

[3] Epist. 10.

[4] L. 32. de Episcopis.

CHAP. XIV.

Of the Mahuzzims, honoured by the King who doth according to his will.

In scripture we are told of some *trusting in God* and others *trusting in idols*, and that *God is our refuge, our strength, our defense*. In this sense God is *the rock of his people*, and false Gods are called *the rock of those that trust in them*, Deut. xxxii. 4, 15, 18, 30, 31, 37. In the same sense the Gods of *the King* who *shall do according to his will* are called *Mahuzzims*, munitions, fortresses, protectors, guardians, or defenders. *In his estate*, saith [1] *Daniel*, *shall he honour* Mahuzzims*; even with a God whom his fathers knew not, shall he honour them with gold and silver, and with precious stones, and things of value. Thus shall he do in the most strong holds* or temples; — *and he shall cause them to rule over many, and divide the land* among them *for a possession*. Now this came to pass by degrees in the following manner.

Gregory Nyssen [2] tells us, that after the persecution of the Emperor *Decius*, *Gregory* Bishop of *Neocæsarea* in *Pontus*, *instituted among all people, as an addition or corollary of devotion towards God, that festival days and assemblies should be celebrated to them who had contended for the faith*, that is, to the *Martyrs*. And he adds this reason for the institution: *When he observed*, saith *Nyssen*, *that the simple and unskilful multitude, by reason of corporeal delights, remained in the error of idols; that the principal thing might be corrected among them, namely, that instead of their vain worship they might turn their eyes upon God; he permitted that at the memories of the holy Martyrs they might make merry and delight themselves, and be dissolved into joy*. The heathens were delighted with the festivals of their Gods, and unwilling to part with those delights; and therefore *Gregory*, to facilitate their conversion, instituted annual festivals to the *Saints* and *Martyrs*. Hence it came to pass, that for exploding the festivals of the heathens, the principal festivals of the *Christians* succeeded in their room: as the keeping of *Christmas* with ivy and feasting, and playing and sports, in the room of the *Bacchanalia* and *Saturnalia*; the celebrating of *May-day* with flowers, in the room of the *Floralia*; and the keeping of festivals to the Virgin *Mary*, *John* the Baptist, and divers of the

Apostles, in the room of the solemnities at the entrance of the Sun into the signs of the *Zodiac* in the old *Julian* Calendar. In the same persecution of *Decius*, *Cyprian* ordered the passions of the Martyrs in *Africa* to be registred, in order to celebrate their memories annually with oblations and sacrifices: and *Felix* Bishop of *Rome*, a little after, as *Platina* relates, *Martyrum gloria consulens, constituit at quotannis sacrificia eorum nomine celebrarentur*; "consulting the glory of the Martyrs, ordained that sacrifices should be celebrated annually in their name." By the pleasures of these festivals the *Christians* increased much in number, and decreased as much in virtue, until they were *purged and made white* by the persecution of *Dioclesian*. This was the first step made in the *Christian* religion towards the veneration of the Martyrs: and tho it did not yet amount to an unlawful worship; yet it disposed the *Christians* towards such a further veneration of the dead, as in a short time ended in the invocation of Saints.

The next step was the affecting to pray at the sepulchres of the Martyrs: which practice began in *Dioclesian*'s persecution. The Council of *Eliberis* in *Spain*, celebrated in the third or fourth year of *Dioclesian*'s persecution, A.C. 305, hath these Canons. Can. 34. *Cereos per diem placuit in Cœmeterio non incendi: inquietandi enim spiritus sanctorum non sunt. Qui hæc non observârint, arceantur ab Ecclesiæ communione.* Can. 35. *Placuit prohiberi ne fœminæ in Cœmeterio pervigilent, eò quod sæpe sub obtentu orationis latentèr scelera committant.* Presently after that persecution, suppose about the year 314, the Council of *Laodicea* in *Phrygia*, which then met for restoring the lapsed discipline of the Church, has the following Canons. Can. 9. *Those of the Church are not allowed to go into the* Cœmeteries *or* Martyries*, as they are called, of hereticks, for the sake of prayer or recovery of health: but such as go, if they be of the faithful, shall be excommunicated for a time*. Can. 34. *A* Christian *must not leave the Martyrs of* Christ*, and go to false Martyrs*, that is, to the Martyrs of the hereticks; *for these are alien from God: and therefore let those be anathema who go to them*. Can. 51. *The birth-days of the Martyrs shall not be celebrated in* Lent*, but their commemoration shall be made on the Sabbath-days and Lords days*. The Council of *Paphlagonia*, celebrated in the year 324, made this Canon: *If any man being arrogant, abominates the congregations of the Martyrs, or the Liturgies performed therein, or the memories of the Martyrs, let him be anathema*. By all which it is manifest

that the *Christians* in the time of *Dioclesian*'s persecution used to pray in the *Cœmeteries* or burying-places of the dead; for avoiding the danger of the persecution, and for want of Churches, which were all thrown down: and after the persecution was over, continued that practice in honour of the Martyrs, till new Churches could be built: and by use affected it as advantageous to devotion, and for recovering the health of those that were sick. It also appears that in these burying-places they commemorated the Martyrs yearly upon days dedicated to them, and accounted all these practices pious and religious, and anathematized those men as arrogant who opposed them, or prayed in the *Martyries* of the hereticks. They also lighted torches to the Martyrs in the day-time, as the heathens did to their Gods; which custom, before the end of the fourth century, prevailed much in the *West*. They sprinkled the worshipers of the Martyrs with holy-water, as the heathens did the worshipers of their Gods; and went in pilgrimage to see *Jerusalem* and other holy places, as if those places conferred sanctity on the visiters. From the custom of praying in the *Cœmeteries* and *Martyries*, came the custom of translating the bodies of the Saints and Martyrs into such Churches as were new built: the Emperor *Constantius* began this practice about the year 359, causing the bodies of *Andrew* the Apostle, *Luke* and *Timothy*, to be translated into a new Church at *Constantinople*: and before this act of *Constantius*, the *Egyptians* kept the bodies of their Martyrs and Saints unburied upon beds in their private houses, and told stories of their souls appearing after death and ascending up to heaven, as *Athanasius* relates in the life of *Antony*. All which gave occasion to the Emperor *Julian*, as *Cyril* relates, to accuse the *Christians* in this manner: *Your adding to that antient dead man, Jesus, many new dead men, who can sufficiently abominate? You have filled all places with sepulchres and monuments, altho you are no where bidden to prostrate yourselves to sepulchres, and to respect them officiously.* And a little after: *Since* Jesus *said that sepulchres are full of filthiness, how do you invoke God upon them*? and in another place he saith, that if *Christians* had adhered to the precepts of the *Hebrews*, *they would have worshiped one God instead of many, and not a man, or rather not many unhappy men*: And that they *adored the wood of the cross, making its images on their foreheads, and before their houses*.

After the sepulchres of Saints and Martyrs were thus converted into places of worship like the heathen temples, and the Churches into

sepulchres, and a certain sort of sanctity attributed to the dead bodies of the Saints and Martyrs buried in them, and annual festivals were kept to them, with sacrifices offered to God in their name; the next step towards the invocation of Saints, was the attributing to their dead bodies, bones and other reliques, a power of working miracles, by means of the separate souls, who were supposed to know what we do or say, and to be able to do us good or hurt, and to work those miracles. This was the very notion the heathens had of the separate souls of their antient Kings and Heroes, whom they worshiped under the names of *Saturn*, *Rhea*, *Jupiter*, *Juno*, *Mars*, *Venus*, *Bacchus*, *Ceres*, *Osiris*, *Isis*, *Apollo*, *Diana*, and the rest of their Gods. For these Gods being male and female, husband and wife, son and daughter, brother and sister, are thereby discovered to be antient men and women. Now as the first step towards the invocation of Saints was set on foot by the persecution of *Decius*, and the second by the persecution of *Dioclesian*; so this third seems to have been owing to the proceedings of *Constantius* and *Julian* the Apostate. When *Julian* began to restore the worship of the heathen Gods, and to vilify the Saints and Martyrs; the *Christians* of *Syria* and *Egypt* seem to have made a great noise about the miracles done by the reliques of the *Christian* Saints and Martyrs, in opposition to the powers attributed by *Julian* and the heathens to their Idols. For *Sozomen* and *Ruffinus* tell us, that when he opened the heathen Temples, and consulted the Oracle of *Apollo Daphnæus* in the suburbs of *Antioch*, and pressed by many sacrifices for an answer; the Oracle at length told him that the bones of the Martyr *Babylas* which were buried there hinder'd him from speaking. By which answer we may understand, that some *Christian* was got into the place where the heathen Priests used to speak thro' a pipe in delivering their Oracles: and before this, *Hilary* in his book against *Constantius*, written in the last year of that Emperor, makes the following mention of what was then doing in the *East* where he was. *Sine martyrio persequeris. Plus crudelitati vestræ* Nero*,* Deci*,* Maximiane*, debemus. Diabolum enim per vos vicimus. Sanctus ubique beatorum martyrum sanguis exceptus est, dum in his Dæmones mugiunt, dum ægritudines depelluntur, dum miraculorum opera cernuntur, elevari sine laqueis corpora, & dispensis pede fæminis vestes non defluere in faciem, uri sine ignibus spiritus, confiteri sine interrogantis incremento fidei*. And *Gregory Nazianzen*, in his first Oration against the Emperor *Julian* then

reigning, writes thus: *Martyres non extimuisti quibus præclari honores & festa constituta, à quibus Dæmones propelluntur & morbi curantur; quorum sunt apparitiones & prædictiones; quorum vel sola corpora idem possunt quod animæ sanctæ, sive manibus contrectentur, sive honorentur: quorum vel solæ sanguinis guttæ atque exigua passionis signa idem possunt quod corpora. Hæc non colis sed contemnis & aspernaris*. These things made the heathens in the reign of the same Emperor demolish the sepulchre of *John* the Baptist in *Phœnicia*, and burn his bones; when several *Christians* mixing themselves with the heathens, gathered up some of his remains, which were sent to *Athanasius*, who hid them in the wall of a Church; foreseeing by a prophetic spirit, as *Ruffinus* tells us, that they might be profitable to future generations.

The cry of these miracles being once set on foot, continued for many years, and encreased and grew more general. *Chrysostom*, in his second Oration on St. *Babylas*, twenty years after the silencing of the Oracle of *Apollo Daphnæus* as above, *viz.* A.C. 382, saith of the miracles done by the Saints and their reliques [3]: *Nulla est nostri hujus Orbis seu regio, seu gens, seu urbs, ubi nova & inopinata miracula hæc non decantentur; quæ quidem si figmenta fuissent, prorsus in tantam hominum admirationem non venissent*. And a little after: *Abunde orationi nostræ fidem faciunt quæ quotidiana à martyribus miracula eduntur, magna affatim ad illa hominum multitudine affluente*. And in his 66th Homily, describing how the Devils were tormented and cast out by the bones of the Martyrs, he adds: *Ob eam causam multi plerumque Reges peregrè profecti sunt, ut hoc spectaculo fruerentur. Siquidem sanctorum martyrum templa futuri judicii vestigia & signa exhibent, dum nimirum Dæmones flagris cæduntur, hominesque torquentur & liberantur. Vide quæ sanctorum vitâ functorum vis sit?* And *Jerom* in his Epitaph on *Paula*, thus [4] mentions the same things. *Paula vidit Samariam: ibi siti sunt Elisæus & Abdias prophetæ, & Joannes Baptista, ubi multis intremuit consternata miraculis. Nam cernebat variis dæmones rugire cruciatibus, & ante sepulchra sanctorum ululare, homines more luporum vocibus latrare canum, fremere leonum, sibilare serpentum, mugire taurorum, alios rotare caput & post tergum terram vertice tangere, suspensisque pede fæminis vestes non defluere in faciem*. This was about the year 384: and *Chrysostom* in his Oration on the *Egyptian* Martyrs, seems to

make *Egypt* the ringleader in these matters, saying [5]: *Benedictus Deus quandoquidem ex Ægypto prodeunt martyres, ex Ægypto illa cum Deo pugnante ac insanissima, & unde impia ora, unde linguæ blasphemæ; ex Ægypto martyres habentur; non in Ægypto tantum, nec in finitima vicinaque regione, sed* UBIQUE TERRARUM. *Et quemadmodum in annonæ summa ubertate, cum viderunt urbium incolæ majorem quam usus habitatorum postulat esse proventum, ad peregrinas etiam urbes transmittunt: cum & suam comitatem & liberalitatem ostendant, tum ut præter horum abundantiam cum facilitate res quibus indigent rursus ab illis sibi comparent: sic & Ægyptii, quod attinet ad religionis athletas, fecerunt. Cum apud se multam eorum Dei benignitate copiam cernerent, nequaquam ingens Dei munus sua civitate concluserunt, sed in* OMNES TERRÆ PARTES *bonorum thesauros effuderunt: cum ut suum in fratres amorem ostenderent, tum ut communem omnium dominum honore afficerent, ac civitati suæ gloriam apud omnes compararent, totiusque terrarum* ORBIS *esse* METROPOLIN *declararent. — Sanctorum enim illorum corpora quovis adamantino & inexpugnabili muro tutiùs nobis urbem communiunt, & tanquam excelsi quidam scopuli undique prominentes, non horum qui sub sensus cadunt & oculis cernuntur hostium impetus propulsant tantùm, sed etiam invisibilium dæmonum insidias, omnesque diaboli fraudes subvertunt ac dissipant. — Neque vero tantùm adversus hominum insidias aut adversus fallacias dæmonum utilis nobis est hæc possessio, sed si nobis communis dominus ob peccatorum multitudinem irascatur, his objectis corporibus continuo poterimus eum propitium reddere civitati*. This Oration was written at *Antioch*, while *Alexandria* was yet the Metropolis of the *East*, that is, before the year 381, in which *Constantinople* became the Metropolis: and it was a work of some years for the *Egyptians* to have distributed the miracle-working reliques of their Martyrs over all the world, as they had done before that year. *Egypt* abounded most with the reliques of Saints and Martyrs, the *Egyptians* keeping them embalmed upon beds even in their private houses; and *Alexandria* was eminent above all other cities for dispersing them, so as on that account to acquire glory with all men, and manifest herself to be the *Metropolis* of the world. *Antioch* followed the example of *Egypt*, in dispersing the reliques of the forty Martyrs: and the examples of *Egypt* and *Syria* were soon followed by the rest of the world.

The reliques of the forty Martyrs at *Antioch* were distributed among the Churches before the year 373; for *Athanasius* who died in that year, wrote an Oration upon them. This Oration is not yet published, but *Gerard Vossius* saw it in MS. in the Library of Cardinal *Ascanius* in *Italy*, as he says in his commentary upon the Oration of *Ephræm Syrus* on the same forty Martyrs. Now since the Monks of *Alexandria* sent the reliques of the Martyrs of *Egypt* into all parts of the earth, and thereby acquired glory to their city, and declared her in these matters the Metropolis of the whole world, as we have observed out of *Chrysostom*; it may be concluded, that before *Alexandria* received the forty Martyrs from *Antioch*, she began to send out the reliques of her own Martyrs into all parts, setting the first example to other cities. This practice therefore began in *Egypt* some years before the death of *Athanasius*. It began when the miracle-working bones of *John* the Baptist were carried into *Egypt*, and hid in the wall of a Church, *that they might be profitable to future generations*. It was restrained in the reign of *Julian* the Apostate: and then it spred from *Egypt* into all the Empire, *Alexandria* being the Metropolis of the whole world, according to *Chrysostom*, for propagating this sort of devotion, and *Antioch* and other cities soon following her example.

In propagating these superstitions, the ringleaders were the Monks, and *Antony* was at the head of them: for in the end of the life of *Antony*, *Athanasius* relates that these were his dying words to his disciples who then attended him. *Do you take care*, said *Antony*, *to adhere to* Christ *in the first place, and then to the Saints, that after death they may receive you as friends and acquaintance into the everlasting tabernacles, Think upon these things, perceive these things; and if you have any regard to me, remember me as a father*. This being delivered in charge to the Monks by *Antony* at his death, A.C. 356, could not but inflame their whole body with devotion towards the Saints, as the ready way to be received, by them into the eternal Tabernacles after death. Hence came that noise about the miracles, done by the reliques of the Saints in the time of *Constantius*: hence came the dispersion of the miracle-working reliques into all the Empire; *Alexandria* setting the example, and being renowned, for it above all other cities. Hence it came to pass in the days of *Julian*, A.C. 362, that *Athanasius* by a prophetic spirit, as *Ruffinus* tells us, hid the bones of *John* the Baptist from the Heathens, not in the ground to be forgotten, but in the hollow wall of a

Church before proper witnesses, that they might *be profitable to future generations*. Hence also came the invocation of the Saints for doing such miracles, and for assisting men in their devotions, and mediating with God. For *Athanasius*, even from his youth, looked upon the dead Saints and Martyrs as mediators of our prayers: in his Epistle to *Marcellinus*, written in the days of *Constantine* the great, he saith that the words of the *Psalms* are not to be transposed or any wise changed, but to be recited and sung without any artifice, as they are written, *that the holy men who delivered them, knowing them to be their own words, may pray with us; or rather, that the Holy Ghost who spake in the holy men, seeing his own words with which he inspired them, may join* with them *in assisting us*.

Whilst *Egypt* abounded with Monks above any other country, the veneration of the Saints began sooner, and spred faster there than in other places. *Palladius* going into *Egypt* in the year 388 to visit the Monasteries, and the sepulchres of *Apollonius* and other Martyrs of *Thebais* who had suffered under *Maximinus*, saith of them: *Iis omnibus Christiani fecerunt ædem unam, ubi nunc multæ virtutes peraguntur. Tanta autem fuit viri gratia, ut de iis quæ esset precatus statim exaudiretur, eum sic honorante servatore: quem etiam nos in martyrio precati vidimus, cum iis qui cum ipso fuerunt martyrio affecti; & Deum adorantes, eorum corpora salutavimus. Eunapius* also, a heathen, yet a competent witness of what was done in his own times, relating how the soldiers delivered the temples of *Egypt* into the hands of the Monks, which was done in the year 389, rails thus in an impious manner at the Martyrs, as succeeding in the room of the old Gods of *Egypt*. *Illi ipsi,* milites*, Monachos Canobi quoque collocârunt, ut pro Diis qui animo cernuntur, servos & quidem flagitiosos divinis honoribus percolerent, hominum mentibus ad cultum ceremoniasque obligatis. Ii namque condita & salita eorum capita, qui ob scelerum multitudinem à judicibus extremo judicio fuerant affecti, pro Divis ostentabant; iis genua submittebant, eos in Deorum numerum receptabant, ad illorum sepulchra pulvere sordibusque conspurcati. Martyres igitur vocabantur, & ministri quidem & legati arbitrique precum apud Deos; cum fuerint servilia infida & flagris pessimè subacta, quæ cicatrices scelerum ac nequitiæ vestigia corporibus circumferunt; ejusmodi tamen Deos fert tellus*. By these instances we may understand the invocation of Saints was now of some

standing in *Egypt*, and that it was already generally received and practised there by the common people.

Thus *Basil* a Monk, who was made Bishop of *Cæsarea* in the year 369, and died in the year 378, in his Oration on the Martyr *Mamas*, saith: *Be ye mindful of the Martyr; as many of you as have enjoyed him in your dreams, as many as in this place have been assisted by him in prayer, as many of you as upon invoking him by name have had him present in your works, as many as he has reduced into the way from wandering, as many as he has restored to health, as, many as have had their dead children restored by him to life, as many as have had their lives prolonged by him*: and a little after, he thus expresses the universality of this superstition in the regions of *Cappadocia* and *Bithynia*: *At the memory of the Martyr*, saith he, *the whole region is moved; at his festival the whole city is transported with joy. Nor do the kindred of the rich turn aside to the sepulchres of their ancestors, but all go to the place of devotion.* Again, in the end of the Homily he prays, that *God would preserve the Church, thus fortified with the great towers of the Martyrs*: and in his Oration on the forty Martyrs; *These are they*, saith he, *who obtaining our country, like certain towers afford us safety against our enemies. Neither are they shut up in one place only, but being distributed are sent into many regions, and adorn many countries. — You have often endeavoured, you have often laboured to find one who might pray for you: here are forty, emitting one voice of prayer. — He that is in affliction flies to these, he that rejoices has recourse to these: the first, that he may be freed from evil, the last that he may continue in happiness. Here a woman praying for her children is heard; she obtains a safe return for her husband from abroad, and health for him in his sickness. — O ye common keepers of mankind, the best companions of our cares, suffragans and coadjutors of our prayers, most powerful embassadors to God*, &c. By all which it is manifest, that before the year 378, the Orations and Sermons upon the Saints went much beyond the bounds of mere oratorical flourishes, and that the common people in the *East* were already generally corrupted by the Monks with Saint-worship.

Gregory Nazianzen a Monk, in his sixth Oration written A.C. 373, when he was newly made Bishop of *Sasima*, saith: *Let us purify ourselves to the Martyrs, or rather to the God of the Martyrs*: and a little after he calls the Martyrs *mediators of obtaining an ascension or divinity*. The same year, in

the end of his Oration upon *Athanasius* then newly dead, he thus invokes him: *Do thou look down upon us propitiously, and govern this people, as perfect adorers of the perfect Trinity, which in the Father, Son, and Holy Ghost, is contemplated and worshiped: if there shall be peace, preserve me, and feed my flock with me; but if war, bring me home, place me by thyself, and by those that are like thee; however great my request.* And in the end of the funeral Oration upon *Basil*, written A.C. 378, he thus addresses him: *But thou, O divine and sacred Head, look down upon us from heaven; and by thy prayers either take away that thorn of the flesh which is given us by God for exercise, or obtain that we may bear it with courage, and direct all our life to that which is most fitting for us. When we depart this life, receive us there in your Tabernacles, that living together and beholding the holy and blessed Trinity more purely and perfectly, whereof we have now but an imperfect view, we may there come to the end of our desires, and receive this reward of the wars which we have waged or suffered*: and in his Oration upon *Cyprian*, not the Bishop of *Carthage*, but a *Greek*, he invokes him after the same manner; and tells us also how a pious Virgin named *Justina*, was protected by invoking the Virgin *Mary*, and how miracles were done by the ashes of *Cyprian*.

Gregory Nyssen, another eminent Monk and Bishop, in the life of *Ephræm Syrus*, tells how a certain man returning from a far country, was in great danger, by reason all the ways were intercepted by the armies of barbarous nations; but upon invoking *Ephræm* by name, and saying, *Holy* Ephræm *assist me*, he escaped the danger, neglected the fear of death, and beyond his hope got safe home. In the end of this Oration *Gregory* calls upon *Ephræm* after the following manner: *But thou, O Ephræm, assisting now at the divine altar, and sacrificing to the Prince of life, and to the most holy Trinity, together with the Angels; remember us all, and obtain for us pardon of our sins, that we may enjoy the eternal happiness of the kingdom of heaven.* The same *Gregory*, in his Oration on the Martyr *Theodorus* written A.C. 381, thus describes the power of that Martyr, and the practice of the people. *This Martyr*, saith he, *the last year quieted the barbarous tempest, and put a stop to the horrid war of the fierce and cruel* Scythians. *— If any one is permitted to carry away the dust with which the tomb is covered, wherein the body of the Martyr rests; the dust is accepted as a gift, and gathered to be laid up as a thing of great price. For to touch the*

reliques themselves, if any such prosperous fortune shall at any time happen; how great a favour that is, and not to be obtained without the most earnest prayers, they know well who have obtained it. For as a living and florid body, they who behold it embrace it, applying to it the eyes, mouth, ears, and all the organs of sense; and then with affection pouring tears upon the Martyr, as if he was whole and appeared to them: they offer prayers with supplication, that he would intercede for them as an advocate, praying to him as an Officer attending upon God, and invoking him as receiving gifts whenever he will. At length *Gregory* concludes the Oration with this prayer: *O Theodorus, we want many blessings; intercede and beseech for thy country before the common King and Lord: for the country of the Martyr is the place of his passion, and they are his citizens, brethren and kindred, who have him, defend, adorn and honour him. We fear afflictions, we expect dangers: the wicked* Scythians *are not far off, ready to make war against us. As a soldier fight for us, as a Martyr use liberty of speech for thy fellow-servants. Pray for peace, that these publick meetings may not cease, that the furious and wicked barbarian may not rage against the temples and altars, that the profane and impious may not trample upon the holy things. We acknowledge it a benefit received from thee, that we are preserved safe and entire, we pray for freedom from danger in time to come: and if there shall be need of greater intercession and deprecation, call together the choir of thy brethren the Martyrs, and in conjunction with them all intercede for us. Let the prayers of many just ones attone for the sins of the multitudes and the people; exhort* Peter*, excite* Paul*, and also* John *the divine and beloved disciple, that they may be sollicitous for the Churches which they have erected, for which they have been in chains, for which they have undergone dangers and deaths; that the worship of idols may not lift up its head against us, that heresies may not spring up like thorns in the vineyard, that tares grown up may not choak the wheat, that no rock void of the fatness of true dew may be against us, and render the fruitful power of the word void of a root; but by the power of the prayers of thyself and thy companions, O admirable man and eminent among the Martyrs, the commonwealth of* Christians *may become a field of corn*. The same *Gregory Nyssen*, in his sermon upon the death of *Meletius* Bishop of *Antioch*, preached at *Constantinople* the same year, A.C. 381, before the Bishops of all the *East* assembled in the second general Council, spake thus

of *Meletius*. *The Bridegroom*, saith he, *is not taken from us: he stands in the midst of us, tho we do not see him: he is a Priest in the most inward places, and face to face intercedes before God for us and the sins of the people*. This was no oratorical flourish, but *Gregory*'s real opinion, as may be understood by what we have cited out of him concerning *Ephræm* and *Theodorus*: and as *Gregory* preached this before the Council of *Constantinople*, you may thence know, saith [6] *Baronius*, that he professed what the whole Council, and therewith the whole Church of those parts believed, namely, that the Saints in heaven offer prayers for us before God.

Ephræm Syrus, another eminent Monk, who was contemporary with *Basil*, and died the same year; in the end of his Encomium or Oration upon *Basil* then newly dead, invokes him after this manner: *Intercede for me, a very miserable man; and recal me by thy intercessions, O father; thou who art strong, pray for me who am weak; thou who art diligent, for me who am negligent; thou who art chearful, for me who am heavy; thou who art wise, for me who am foolish. Thou who hast treasured up a treasure of all virtues, be a guide to me who am empty of every good work*. In the beginning of his Encomium upon the forty Martyrs, written at the same time, he thus invokes them: *Help me therefore, O ye Saints, with your intercession; and O ye beloved, with your holy prayers, that* Christ *by his grace may direct my tongue to speak*, &c. and afterwards mentioning the mother of one of these forty Martyrs, he concludes the Oration with this prayer: *I entreat thee, O holy, faithful, and blessed woman, pray for me to the Saints, saying; Intercede ye that triumph in* Christ*, for the most little and miserable* Ephræm*, that he may find mercy, and by the grace of* Christ *may be saved*. Again, in his second Sermon or Oration on the praises of the holy Martyrs of *Christ*, he thus addresses them: *We entreat you most holy Martyrs, to intercede with the Lord for us miserable sinners, beset with the filthiness of negligence, that he would infuse his divine grace into us*: and afterwards, near the end of the same discourse; *Now ye most holy men and glorious Martyrs of God, help me a miserable sinner with your prayers, that in that dreadful hour I may obtain mercy, when the secrets of all hearts shall be made manifest. I am to day become to you, most holy Martyrs of* Christ*, as it were an unprofitable and unskilful cup-bearer: for I have delivered to the sons and brothers of your faith, a cup of the excellent wine of your warfare,*

with the excellent table of your victory, replenished with all sorts of dainties. I have endeavoured, with the whole affection and desire of my mind, to recreate your fathers and brothers, kindred and relations, who daily frequent the table. For behold they sing, and with exultation and jubilee glorify God, who has crown'd your virtues, by setting on your most sacred heads incorruptible and celestial crowns; they with excessive joy stand about the sacred reliques of your martyrdoms, wishing for a blessing, and desiring to bear away holy medicines both for the body and the mind. As good disciples and faithful ministers of our benign Lord and Saviour, bestow therefore a blessing on them all: and on me also, tho weak and feeble, who having received strength by your merits and intercessions, have with the whole devotion of my mind, sung a hymn to your praise and glory before your holy reliques. Wherefore I beseech you stand before the throne of the divine Majesty for me Ephræm*, a vile and miserable sinner, that by your prayers I may deserve to obtain salvation, and with you enjoy eternal felicity by the grace and benignity and mercy of our Lord and Saviour* Jesus Christ*, to whom with the Father and Holy Ghost be praise, honour and glory for ever and ever*. Amen.

By what has been cited out of *Basil*, the two *Gregories* and *Ephræm*, we may understand that Saint-worship was established among the Monks and their admirers in *Egypt*, *Phœnicia*, *Syria* and *Cappadocia*, before the year 378, this being the year in which *Basil* and *Ephræm* died. *Chrysostom* was not much later; he preached at *Antioch* almost all the time of *Theodosius* the great, and in his Sermons are many exhortations to this sort of superstition, as may be seen in the end of his Orations on S. *Julia*, on St. *Pelagia*, on the Martyr *Ignatius*, on the *Egyptian* Martyrs, on Fate and Providence, on the Martyrs in general, on St. *Berenice* and St. *Prosdoce*, on *Juventinus* and *Maximus*, on the name of *Cœmetery*, &c. Thus in his Sermon on *Berenice* and *Prosdoce*: *Perhaps*, saith he, *you are inflamed with no small love towards these Martyrs; therefore with this ardour let us fall down before their reliques, let us embrace their coffins. For the coffins of the Martyrs have great virtue, even as the bones of the Martyrs have great power. Nor let us only on the day of this festival, but also on other days apply to them, invoke them, and beseech them to be our patrons: for they have great power and efficacy, not only whilst alive, but also after death; and much more after death than before. For now they bear the marks or brands of* Christ*;*

and when they shew these marks, they can obtain all things of the King. Seeing therefore they abound with such efficacy, and have so much friendship with him; we also, when by continual attendance and perpetual visitation of them we have insinuated ourselves into their familiarity, may by their assistance obtain the mercy of God.

Constantinople was free from these superstitions till *Gregory Nazianzen* came thither A.D. 379; but in a few years it was also inflamed with it. *Ruffinus* [7] tells us, that when the Emperor *Theodosius* was setting out against the tyrant *Eugenius*, which was in the year 394, he went about with the Priests and people to all the places of prayer; lay prostrate in haircloth before the shrines of the Martyrs and Apostles, and pray'd for assistance by the intercession of the Saints. *Sozomen* [8] adds, that when the Emperor was marched seven miles from *Constantinople* against *Eugenius*, he went into a Church which he had built to *John* the Baptist, *and invoked the Baptist for his assistance. Chrysostom* [9] says: *He that is clothed in purple, approaches to embrace these sepulchres; and laying aside his dignity, stands supplicating the Saints to intercede for him with God: and he who goes crowned with a diadem, offers his prayers to the tent-maker and the fisherman as his Protestors.* And in [10] another place: *The cities run together to the sepulchres of the Martyrs, and the people are inflamed with the love of them*.

This practice of sending reliques from place to place for working miracles, and thereby inflaming the devotion of the nations towards the dead Saints and their reliques, and setting up the religion of invoking their souls, lasted only till the middle of the reign of the Emperor *Theodosius* the great; for he then prohibited it by the following Edict. *Humatum corpus, nemo ad alterum locum transferat; nemo Martyrem distrahat, nemo mercetur: Habeant verò in potestate, si quolibet in loco sanctorum est aliquis conditus, pro ejus veneratione, quod* Martyrium *vocandum sit, addant quod voluerint fabricarum. Dat.* iv. *Kal. Mart. Constantinopoli, Honorio nob. puero & Euodio Coss.* A.C. 386. After this they filled the fields and high-ways with altars erected to Martyrs, which they pretended to discover by dreams and revelations: and this occasioned the making the fourteenth Canon of the fifth Council of *Carthage*, A.C. 398. *Item placuit, ut altaria, quæ passim per agros aut vias, tanquam memoriæ Martyrum*

constituuntur, in quibus nullum corpus aut reliquiæ Martyrum conditæ probantur, ab Episcopis, qui illis locis præsunt, si fieri potest, evertantur. Si autem hoc propter tumultus populares non sinitur, plebes tamen admoneantur, ne illa loca frequentent, ut qui rectè sapiunt, nullâ ibi superstitione devincti teneantur. Et omnino nulla memoria Martyrum probabiliter acceptetur, nisi aut ibi corpus aut aliquæ certæ reliquiæ sint, aut ubi origo alicujus habitationis, vel possessionis, vel passionis fidelissima origine traditur. Nam quæ per somnia, & per inanes quasi revelationes quorumlibet hominum ubique constituuntur altaria, omnimodè reprobentur. These altars were for invoking the Saints or Martyrs buried or pretended to be buried under them. First they filled the Churches in all places with the reliques or pretended reliques of the Martyrs, for invoking them in the Churches; and then they filled the fields and high-ways with altars, for invoking them every where: and this new religion was set up by the Monks in all the *Greek* Empire before the expedition of the Emperor *Theodosius* against *Eugenius*, and I think before his above-mentioned Edict, A.C. 386.

The same religion of worshiping *Mahuzzims* quickly spred into the *Western Empire* also: but *Daniel* in this Prophecy describes chiefly the things done among the nations comprehended in the body of his third Beast.

Notes to Chap. XIV.

[1] Chap. xi. 38, 39

[2] Orat. de vita Greg. Thaumaturg. T. 3. .

[3] Vide Hom. 47. in. S. Julian.

[4] Epist. 27. ad Eustochium.

[5] Edit. Frontonis Ducæi, Tom. 1.

[6] Ad. an. 381, Sect. 41.

[7] Hist. Eccl. l. 2. c. 23.

[8] L. 4. c. 24.

[9] Hom. 66. ad. populum, circa finem. & Hom. 8, 27. in Matth. Hom. 42, 43. in Gen. Hom. 1. in 1 Thess.

[10] Exposit. in Psal. 114. sub finem.

PART II.

CHAP. I.

Introduction, concerning the time when the Apocalypse was written.

Irenæus introduced an opinion that the *Apocalypse* was written in the time of *Domitian*; but then he also postponed the writing of some others of the sacred books, and was to place the *Apocalypse* after them: he might perhaps have heard from his master *Polycarp* that he had received this book from *John* about the time of *Domitian*'s death; or indeed *John* might himself at that time have made a new publication of it, from whence *Irenæus* might imagine it was then but newly written. *Eusebius* in his *Chronicle* and *Ecclesiastical History* follows *Irenæus*; but afterwards [1] in his *Evangelical Demonstrations*, he conjoins the banishment of *John* into *Patmos*, with the deaths of *Peter* and *Paul*: and so do [2] *Tertullian* and *Pseudo-Prochorus*, as well as the first author, whoever he was, of that very antient fable, that *John* was put by *Nero* into a vessel of hot oil, and coming out unhurt, was banished by him into *Patmos.* Tho this story be no more than a fiction yet was it founded on a tradition of the first churches, that *John* was banished into *Patmos* in the days of *Nero*. *Epiphanius* represents the *Gospel of John* as written in the time of *Domitian*, and the *Apocalypse* even before that of *Nero*. [3] *Arethas* in the beginning of his Commentary quotes the opinion of *Irenæus* from *Eusebius*, but follows it not: for he afterwards affirms the *Apocalypse* was written before the destruction of *Jerusalem*, and that former commentators had expounded the sixth seal of that destruction.

With the opinion of the first Commentators agrees the tradition of the Churches of *Syria*, preserved to this day in the title of the *Syriac* Version of the *Apocalypse*, which title is this: *The Revelation which was made to* John *the Evangelist by God in the Island* Patmos*, into which he was banished by* Nero *the* Cæsar. The fame is confirmed by a story told by [4] *Eusebius* out of *Clemens Alexandrinus*, and other antient authors, concerning a youth, whom *John* some time after his return from *Patmos* committed to the care of the Bishop of a certain city. The Bishop educated, instructed, and at length baptized him; but then remitting of his care, the young man thereupon got into ill company, and began by degrees first to revel and grow

vitious, then to abuse and spoil those he met in the night; and at last grew so desperate, that his companions turning a band of high-way men, made him their Captain: and, saith [5] *Chrysostom*, he continued their Captain a long time. At length *John* returning to that city, and hearing what was done, rode to the thief; and, when he out of reverence to his old master fled, *John* rode after him, recalled him, and restored him to the Church. This is a story of many years, and requires that *John* should have returned from *Patmos* rather at the death of *Nero* than at that of *Domitian*; because between the death of *Domitian* and that of *John* there were but two years and an half; and *John* in his old age was [6] so infirm as to be carried to Church, dying above 90 years old, and therefore could not be then suppos'd able to ride after the thief.

This opinion is further supported by the allusions in the *Apocalypse* to the Temple and Altar, and holy City, as then standing; and to the *Gentiles*, who were soon after to tread under foot the holy City and outward Court. 'Tis confirmed also by the style of the *Apocalypse* itself, which is fuller of *Hebraisms* than his Gospel. For thence it may be gathered, that it was written when *John* was newly come out of *Judea*, where he had been used to the *Syriac* tongue; and that he did not write his Gospel, till by long converse with the *Asiatick* Greeks he had left off most of the *Hebraisms*. It is confirmed also by the many false *Apocalypses*, as those of *Peter*, *Paul*, *Thomas*, *Stephen*, *Elias* and *Cerinthus*, written in imitation of the true one. For as the many false Gospels, false Acts, and false Epistles were occasioned by true ones; and the writing many false *Apocalypses*, and ascribing them to Apostles and Prophets, argues that there was a true Apostolic one in great request with the first *Christians*: so this true one may well be suppos'd to have been written early, that there may be room in the Apostolic age for the writing of so many false ones afterwards, and fathering them upon *Peter*, *Paul*, *Thomas* and others, who were dead before *John*. *Caius*, who was contemporary with *Tertullian*, [7] tells us that *Cerinthus* wrote his Revelations as a great Apostle, and pretended the visions were shewn him by Angels, asserting a *millennium* of carnal pleasures at *Jerusalem* after the resurrection; so that his *Apocalypse* was plainly written in imitation of *John*'s: and yet he lived so early, that [8] he

resisted the Apostles at *Jerusalem* in or before the first year of *Claudius*, that is, 26 years before the death of *Nero*, and [9] died before *John*.

These reasons may suffice for determining the time; and yet there is one more, which to considering men may seem a good reason, to others not. I'll propound it, and leave it to every man's judgment. The *Apocalypse* seems to be alluded to in the Epistles of *Peter* and that to the *Hebrews* and therefore to have been written before them. Such allusions in the Epistle to the *Hebrews*, I take to be the discourses concerning the High-Priest in the heavenly Tabernacle, who is both Priest and King, as was *Melchisedec*; and those concerning the *word of God*, with the *sharp two-edged sword*, the σαββατισμος, or *millennial* rest, the *earth whose end is to be burned*, suppose by the lake of fire, *the judgment and fiery indignation which shall devour the adversaries*, the *heavenly City which hath foundations whose builder and maker is God*, the *cloud of witnesses, mount* Sion*, heavenly* Jerusalem*, general assembly, spirits of just men made perfect*, *viz.* by the resurrection, and *the shaking of heaven and earth, and removing them, that the new heaven, new earth and new kingdom which cannot be shaken, may remain*. In the first of *Peter* occur these: [10] *The Revelation of Jesus Christ*, twice or thrice repeated; [11] the *blood of* Christ *as of a Lamb foreordained before the foundation of the world*; [12] the *spiritual building* in heaven, 1 Pet. ii. 5. *an inheritance incorruptible and undefiled and that fadeth not away, reserved in heaven for us, who are kept unto the salvation, ready to be revealed in the last time*, 1 Pet. i. 4, 5. [13] the *royal Priesthood*, [14] the *holy Priesthood*, [15] the *judgment beginning at the house of God*, and [16] *the Church at* Babylon. These are indeed obscurer allusions; but the second Epistle, from the 19th verse of the first Chapter to the end, seems to be a continued Commentary upon the *Apocalypse*. There, in writing to the *Churches in* Asia, to whom *John* was commanded to send this Prophecy, he tells them, they *have a more sure word of Prophecy*, to be heeded by them, *as a light that shineth in a dark place, until the day dawn, and the day-star arise in their hearts*, that is, until they begin to understand it: for *no Prophecy*, saith he, *of the scripture is of any private interpretation; the Prophecy came not in old time by the will of man, but holy men of God spake, as they were moved by the Holy Ghost. Daniel* [17] himself professes that he understood not his own *Prophecies*; and therefore the Churches were

not to expect the interpretation from their Prophet *John*, but to study the Prophecies themselves. This is the substance of what *Peter* says in the first chapter; and then in the second he proceeds to describe, out of this *sure word of Prophecy*, how there should arise in the Church *false Prophets*, or *false teachers*, expressed collectively in the *Apocalypse* by the name of the false Prophet; who should *bring in damnable heresies, even denying the Lord that bought them*, which is the character of *Antichrist*: *And many*, saith he, *shall follow their lusts* [18]; they that dwell on the earth [19] shall be deceived by the false Prophet, and be made drunk with the wine of the Whore's fornication, *by reason of whom the way of truth shall be blasphemed*; for [20] the Beast is full of blasphemy: *and thro' covetousness shall they with feigned words make merchandize of you*; for these are the Merchants of the Earth, who trade with the great Whore, and their merchandize [21] is all things of price, with the bodies and souls of men: *whose judgment — lingreth not, and their damnation [22] slumbreth not*, but shall surely come upon them at the last day suddenly, as the flood upon *the old world*, and fire and brimstone upon *Sodom* and *Gomorrha*, when the just shall be delivered [23] like *Lot*; for *the Lord knoweth how to deliver the godly out of temptations, and to reserve the unjust unto the day of judgment to be punished*, in the lake of fire; *but chiefly them that walk after the flesh in the lust of uncleanness*, [24] being made drunk with the wine of the Whore's fornication; who *despise dominion, and are not afraid to blaspheme glories*; for the beast opened his mouth against God [25] to blaspheme his name and his tabernacle, and them that dwell in heaven. *These, as natural brute beasts*, the ten-horned beast and two-horned beast, or false Prophet, *made to be taken and destroyed*, in the lake of fire, *blaspheme the things they understand not*: — they count it pleasure to riot in the day-time — sporting themselves with their own deceivings, while they feast [26] with you, *having eyes full of an [27] Adulteress*: for the kingdoms of the beast live deliciously with the great Whore, and the nations are made drunk with the wine of her fornication. They *are gone astray, following the way of* Balaam*, the son of* Beor*, who loved the wages of unrighteousness*, the false Prophet [28] who taught *Balak* to cast a stumbling-block before the children of *Israel*. *These are*, not fountains of living water, but *wells without water*; not such clouds of Saints as the two

witnesses ascend in, but *clouds that are carried with a tempest*, &c. Thus does the author of this Epistle spend all the second Chapter in describing the qualities of the *Apocalyptic* Beasts and false Prophet: and then in the third he goes on to describe their destruction more fully, and the future kingdom. He saith, that because the coming of *Christ* should be long deferred, they should scoff, saying, *where is the promise of his coming*? Then he describes the sudden coming of the day of the Lord upon them, *as a thief in the night*, which is the *Apocalyptic* phrase; and the *millennium*, or *thousand years*, which *are with God but as a day*; the *passing away of the old heavens* and earth, by a conflagration in the lake of fire, and our *looking for new heavens and a new earth, wherein dwelleth righteousness*.

Seeing therefore *Peter* and *John* were Apostles of the circumcision, it seems to me that they staid with their Churches in *Judea* and *Syria* till the *Romans* made war upon their nation, that is, till the twelfth year of *Nero*; that they then followed the main body of their flying Churches into *Asia*, and that *Peter* went thence by *Corinth* to *Rome*; that the *Roman* Empire looked upon those Churches as enemies, because *Jews* by birth; and therefore to prevent insurrections, secured their leaders, and banished *John* into *Patmos*. It seems also probable to me that the *Apocalypse* was there composed, and that soon after the Epistle to the *Hebrews* and those of *Peter* were written to these Churches, with reference to this Prophecy as what they were particularly concerned in. For it appears by these Epistles, that they were written in times of general affliction and tribulation under the heathens, and by consequence when the Empire made war upon the *Jews*; for till then the heathens were at peace with the *Christian Jews*, as well as with the rest. The Epistle to the *Hebrews*, since it mentions *Timothy* as related to those *Hebrews*, must be written to them after their flight into *Asia*, where *Timothy* was Bishop; and by consequence after the war began, the *Hebrews* in *Judea* being strangers to *Timothy*. *Peter* seems also to call *Rome Babylon*, as well with respect to the war made upon *Judea*, and the approaching captivity, like that under old *Babylon*, as with respect to that name in the *Apocalypse*: and in writing *to the strangers scattered thro'out* Pontus, Galatia, Cappadocia, Asia *and* Bithynia, he seems to intimate that they were the strangers newly scattered by the *Roman* wars; for those were the only strangers there belonging to his care.

This account of things agrees best with history when duly rectified. For [29] *Justin* and [30] *Irenæus* say, that *Simon Magus* came to *Rome* in the reign of *Claudius*, and exercised juggling tricks there. *Pseudo-Clemens* adds, that he endeavoured there to fly, but broke his neck thro' the prayers of *Peter*. Whence [31] *Eusebius*, or rather his interpolator *Jerom*, has recorded, that *Peter* came to *Rome* in the second year of *Claudius*: but [32] *Cyril* Bishop of *Jerusalem*, *Philastrius*, *Sulpitius*, *Prosper*, *Maximus Taurinensis*, and *Hegesippus junior*, place this victory of *Peter* in the time of *Nero*. Indeed the antienter tradition was, that *Peter* came to *Rome* in the days of this Emperor, as may be seen in [33] *Lactantius*. *Chrysostom* [34] tells us, that the Apostles continued long in *Judea*, and that then being driven out by the *Jews* they went to the *Gentiles*. This dispersion was in the first year of the *Jewish* war, when the *Jews*, as *Josephus* tells us, began to be tumultuous and violent in all places. For all agree that the Apostles were dispersed into several regions at once; and *Origen* has set down the time, [35] telling us that in the beginning of the *Judaic* war, the Apostles and disciples of our Lord were scattered into all nations; *Thomas* into *Parthia*, *Andrew* into *Scythia*, *John* into *Asia*, and *Peter* first into *Asia*, where he preacht to the dispersion, and thence into *Italy*. [36] *Dionysius Corinthius* saith, that *Peter* went from *Asia* by *Corinth* to *Rome*, and all antiquity agrees that *Peter* and *Paul* were martyred there in the end of *Nero*'s reign. *Mark* went with *Timothy* to *Rome*, 2 *Tim.* iv. 11. *Colos.* iv. 10. *Sylvanus* was *Paul*'s assistant; and by the companions of *Peter*, mentioned in his first Epistle, we may know that he wrote from *Rome*; and the Antients generally agree, that in this Epistle he understood *Rome* by *Babylon*. His second Epistle was writ to the same dispersed strangers with the first, 2 *Pet.* iii. 1. and therein he saith, that *Paul* had writ of the same things to them, and also in his other Epistles, *ver.* 15, 16. Now as there is no Epistle of *Paul* to these strangers besides that to the *Hebrews*, so in this Epistle, chap. x. 11, 12. we find at large all those things which *Peter* had been speaking of, and here refers to; particularly the *passing away of the old heavens and earth*, and *establishing an inheritance immoveable*, with an exhortation to grace, because *God*, to the wicked, *is a consuming fire*, Heb. xii. 25, 26, 28, 29.

Having determined the time of writing the *Apocalyse*, I need not say much about the truth of it, since it was in such request with the first ages,

that many endeavoured to imitate it, by feigning *Apocalypses* under the Apostles names; and the Apostles themselves, as I have just now shewed, studied it, and used its phrases; by which means the style of the Epistle to the *Hebrews* became more mystical than that of *Paul*'s other Epistles, and the style of *John*'s Gospel more figurative and majestical than that of the other Gospels. I do not apprehend that *Christ* was called the word of God in any book of the New Testament written before the *Apocalypse*; and therefore am of opinion, the language was taken from this Prophecy, as were also many other phrases in this Gospel, such as those of *Christ*'s being *the light which enlightens the world, the lamb of God which taketh away the sins of the world, the bridegroom, he that testifieth, he that came down from heaven, the Son of God*, &c. *Justin Martyr*, who within thirty years after *John*'s death became a *Christian*, writes expresly that *a certain man among the* Christians *whose name was* John*, one of the twelve Apostles of* Christ*, in the Revelation which was shewed him, prophesied that those who believed in* Christ *should live a thousand years at* Jerusalem. And a few lines before he saith: *But I, and as many as are* Christians*, in all things right in their opinions, believe both that there shall be a resurrection of the flesh, and a thousand years life at* Jerusalem *built, adorned and enlarged*. Which is as much as to say, that all true *Christians* in that early age received this Prophecy: for in all ages, as many as believed the thousand years, received the *Apocalypse* as the foundation of their opinion: and I do not know one instance to the contrary. *Papias* Bishop of *Hierapolis*, a man of the Apostolic age, and one of *John*'s own disciples, did not only teach the doctrine of the thousand years, but also [37] asserted the *Apocalypse* as written by divine inspiration. *Melito*, who flourished next after *Justin*, [38] wrote a commentary upon this Prophecy; and he, being Bishop of *Sardis* one of the seven Churches, could neither be ignorant of their tradition about it, nor impose upon them. *Irenæus*, who was contemporary with *Melito*, wrote much upon it, and said, that *the number 666 was in all the antient and approved copies; and that he had it also confirmed to him by those who had seen* John *face to face*, meaning no doubt his master *Polycarp* for one. At the same time [39] *Theophilus* Bishop of *Antioch* asserted it, and so did *Tertullian*, *Clemens Alexandrinus*, and *Origen* soon after; and their contemporary *Hippolytus* the Martyr, Metropolitan of the *Arabians*, [40]

wrote a commentary upon it. All these were antient men, flourishing within a hundred and twenty years after *John*'s death, and of greatest note in the Churches of those times. Soon after did *Victorinus Pictaviensis* write another commentary upon it; and he lived in the time of *Dioclesian*. This may surely suffice to shew how the *Apocalypse* was received and studied in the first ages: and I do not indeed find any other book of the New Testament so strongly attested, or commented upon so early as this. The Prophecy said: *Blessed is he that readeth, and they that hear the words of this Prophecy, and keep the things which are written therein.* This animated the first *Christians* to study it so much, till the difficulty made them remit, and comment more upon the other books of the New Testament. This was the state of the *Apocalypse*, till the thousand years being misunderstood, brought a prejudice against it: and *Dionysius* of *Alexandria*, noting how it abounded with barbarisms, that is with *Hebraisms*, promoted that prejudice so far, as to cause many *Greeks* in the fourth century to doubt of the book. But whilst the *Latins*, and a great part of the *Greeks*, always retained the *Apocalypse*, and the rest doubted only out of prejudice, it makes nothing against its authority.

This Prophecy is called *the Revelation*, with respect to *the scripture of truth*, which *Daniel* [41] was commanded to *shut up and seal, till the time of the end*. *Daniel* sealed it *until the time of the end*; and until that time comes, the Lamb is opening the seals: and afterwards the two Witnesses prophesy out of it a long time in sack-cloth, before they ascend up to heaven in a cloud. All which is as much as to say, that these Prophecies of *Daniel* and *John* should not be understood till the time of the end: but then some should prophesy out of them in an afflicted and mournful state for a long time, and that but darkly, so as to convert but few. But in the very end, the Prophecy should be so far interpreted as to convince many. *Then*, saith *Daniel, many shall run to and fro, and knowledge shall be encreased*. For the Gospel must be preached in all nations before the great tribulation, and end of the world. The palm-bearing multitude, which come out of this great tribulation, cannot be innumerable out of all nations, unless they be made so by the preaching of the Gospel before it comes. There must be a stone cut out of a mountain without hands, before it can fall upon the toes of the Image, and become a great mountain and fill the earth. An Angel must fly

thro' the midst of heaven with the everlasting Gospel to preach to all nations, before *Babylon* falls, and the Son of man reaps his harvest. The two Prophets must ascend up to heaven in a cloud, before the kingdoms of this world become the kingdoms of *Christ*. 'Tis therefore a part of this Prophecy, that it should not be understood before the last age of the world; and therefore it makes for the credit of the Prophecy, that it is not yet understood. But if the last age, the age of opening these things, be now approaching, as by the great successes of late Interpreters it seems to be, we have more encouragement than ever to look into these things. If the general preaching of the Gospel be approaching, it is to us and our posterity that those words mainly belong: [42] *In the time of the end the wise shall understand, but none of the wicked shall understand.* [43] *Blessed is he that readeth, and they that hear the words of this Prophecy, and keep those things which are written therein.*

The folly of Interpreters has been, to foretel times and things by this Prophecy, as if God designed to make them Prophets. By this rashness they have not only exposed themselves, but brought the Prophecy also into contempt. The design of God was much otherwise. He gave this and the Prophecies of the Old Testament, not to gratify men's curiosities by enabling them to foreknow things, but that after they were fulfilled they might be interpreted by the event, and his own Providence, not the Interpreters, be then manifested thereby to the world. For the event of things predicted many ages before, will then be a convincing argument that the world is governed by providence. For as the few and obscure Prophecies concerning *Christ*'s first coming were for setting up the *Christian* religion, which all nations have since corrupted; so the many and clear Prophecies concerning the things to be done at *Christ*'s second coming, are not only for predicting but also for effecting a recovery and re-establishment of the long-lost truth, and setting up a kingdom wherein dwells righteousness. The event will prove the *Apocalypse*; and this Prophecy, thus proved and understood, will open the old Prophets, and all together will make known the true religion, and establish it. For he that will understand the old Prophets, must begin with this; but the time is not yet come for understanding them perfectly, because the main revolution predicted in them is not yet come to pass. *In the days of the voice of the seventh Angel,*

when he shall begin to sound, the mystery of God shall be finished, as he hath declared to his servants the Prophets: and then *the kingdoms of this world shall become the kingdoms of our Lord and his* Christ*, and he shall reign for ever*, Apoc. x. 7. xi. 15. There is already so much of the Prophecy fulfilled, that as many as will take pains in this study, may see sufficient instances of God's providence: but then the signal revolutions predicted by all the holy Prophets, will at once both turn mens eyes upon considering the predictions, and plainly interpret them. Till then we must content ourselves with interpreting what hath been already fulfilled.

Amongst the Interpreters of the last age there is scarce one of note who hath not made some discovery worth knowing; and thence I seem to gather that God is about opening these mysteries. The success of others put me upon considering it; and if I have done any thing which may be useful to following writers, I have my design.

Notes to Chap. I.

[1] Dem. Evang. l. 3.

[2] Vid. *Pamelium* in notis ad *Tertull.* de Præscriptionbus, n. 215 & *Hieron* l. 1. contra *Jovinianum*, c. 14. Edit.*Erasmi.*

[3] Areth. c. 18, 19.

[4] Hist. Eccl. l. 3. c. 23.

[5] Chrysost. ad Theodorum lapsum.

[6] Hieron. in Epist. ad Gal. l. 3. c. 6.

[7] Apud Euseb. Eccl. Hist. l. 3. c. 28. Edit. *Valesii*.

[8] Epiphan. Hæres. 28.

[9] Hieron. adv. Lucif.

[10] 1 Pet. i. 7, 13. iv. 13. & v. 1.

[11] Apoc. xiii. 8.

[12] Apoc. xxi.

[13] Apoc. i. 6. & v. 10.

[14] Apoc. xx. 6.

[15] Apoc. xx. 4, 12.

[16] Apoc. xvii.

[17] Dan. viii. 15, 16, 27. & xii. 8, 9.

[18] ασελγειας, *in many of the best MSS.*

[19] Apoc. xiii. 7, 12.
[20] Apoc. xiii. 1, 5, 6.
[21] Apoc. xviii. 12, 13.
[22] Apoc. xix. 20.
[23] Apoc. xxi. 3, 4.
[24] Apoc. ix. 21. *and* xvii. 2.
[25] Apoc. xiii. 6.
[26] Apoc. xviii. 3, 7, 9.
[27] μοιχαλιδος.
[28] Apoc. ii. 14.
[29] Apol. ad Antonin. Pium.
[30] Hæres. l. 1. c. 20. Vide etiam Tertullianum, Apol. c. 13.
[31] Euseb. Chron.
[32] Cyril Catech. 6. Philastr. de hæres. ca. Sulp. Hist. l. 2. Prosper de promiss. dimid. temp. ca. Maximus serm. 5. in Natal. Apost. Hegesip. l. 2. c. 2.
[33] Lactant de mortib. Persec. c. 2.
[34] Hom. 70. in Matt. c. 22.
[35] Apud Euseb. Eccl. Hist. l. 2. c. 25.
[36] Euseb. Hist. l. 2. c. 25.
[37] Arethas in Proæm. comment. in Apoc.
[38] Euseb. Hist. l. 4. ca. Hieron.
[39] Euseb. Hist. l. 4. c. 24.
[40] Hieron.
[41] Dan. x. 21. xii. 4, 9.
[42] Dan. xii. 4, 10.
[43] Apoc. i. 3.

CHAP. II.

Of the relation which the Apocalypse of John hath to the Book of the Law of Moses, and to the worship of God in the Temple.

The *Apocalypse* of *John* is written in the same style and language with the Prophecies of *Daniel*, and hath the same relation to them which they have to one another, so that all of them together make but one complete Prophecy; and in like manner it consists of two parts, an introductory Prophecy, and an Interpretation thereof.

The Prophecy is distinguish'd into seven successive parts, by the opening of the seven seals of the book which *Daniel* was commanded to seal up: and hence it is called the *Apocalypse* or *Revelation* of *Jesus Christ*. The time of the seventh seal is sub-divided into eight successive parts by the silence in heaven for half an hour, and the sounding of seven trumpets successively: and the seventh trumpet sounds to the battle of the great day of God Almighty, whereby *the kingdoms of this world become the kingdoms of the Lord and of his Christ*, and those are destroyed that destroyed the earth.

The Interpretation begins with the words, *And the temple of God was opened in heaven, and there was seen in his temple the Ark of his Testament*: and it continues to the end of the Prophecy. The Temple is the scene of the visions, and the visions in the Temple relate to the feast of the seventh month: for the feasts of the *Jews* were typical of things to come. The Passover related to the first coming of *Christ*, and the feasts of the seventh month to his second coming: his first coming being therefore over before this Prophecy was given, the feasts of the seventh month are here only alluded unto.

On the first day of that month, in the morning, the High-Priest dressed the lamps: and in allusion hereunto, this Prophecy begins with a vision of one like *the Son of man* in the High-Priest's habit, appearing as it were in the midst of the seven golden candlesticks, or over against the midst of them, dressing the lamps, which appeared like a rod of seven stars in his right hand: and this dressing was perform'd by the sending seven Epistles to

the Angels or Bishops of the seven Churches of *Asia*, which in the primitive times illuminated the Temple or Church Catholick. These Epistles contain admonitions against the approaching Apostacy, and therefore relate to the times when the Apostacy began to work strongly, and before it prevailed. It began to work in the Apostles days, and was to continue working *till the man of sin should be revealed*. It began to work in the disciples of *Simon*, *Menander*, *Carpocrates*, *Cerinthas*, and such sorts of men as had imbibed the metaphysical philosophy of the *Gentiles* and *Cabalistical Jews*, and were thence called *Gnosticks*. *John* calls them *Antichrists*, saying that in his days there were many *Antichrists*. But these being condemned by the Apostles, and their immediate disciples, put the Churches in no danger during the opening of the first four seals. The visions at the opening of these seals relate only to the civil affairs of the heathen *Roman* Empire. So long the Apostolic traditions prevailed, and preserved the Church in its purity: and therefore the affairs of the Church do not begin to be considered in this Prophecy before the opening of the fifth seal. She began then to decline, and to want admonitions; and therefore is admonished by these Epistles, till the Apostacy prevailed and took place, which was at the opening of the seventh seal. The admonitions therefore in these seven Epistles relate to the state of the Church in the times of the fifth and sixth seals. At the opening of the fifth seal, the Church is purged from hypocrites by a great persecution. At the opening of the sixth, that which letted is taken out of the way, namely the heathen *Roman* Empire. At the opening of the seventh, the man of sin is revealed. And to these times the seven Epistles relate.

The seven Angels, to whom these Epistles were written, answer to the seven *Amarc-holim*, who were Priests and chief Officers of the Temple, and had jointly the keys of the gates of the Temple, with those of the Treasuries, and the direction, appointment and oversight of all things in the Temple.

After the lamps were dresed, *John* saw *the door* of the Temple *opened*; and by *the voice as it were of a trumpet*, was called up to the eastern gate of the great court, to see the visions: and *behold a throne was set*, *viz.* the mercy-seat upon the Ark of the Testament, which the *Jews* respected as *the throne of God between the* Cherubims, *Exod.* xxv. 2. *Psal.* xcix. 1. *And he that sat on it was to look upon like* Jasper *and* Sardine *stone*, that is, of an olive colour, the people of *Judea* being of that colour. *And*, the Sun being then in the *East, a rainbow was about the throne*, the emblem of glory. *And*

round about the throne were four and twenty seats; answering to the chambers of the four and twenty Princes of the Priests, twelve on the south side, and twelve on the north side of the Priests Court. *And upon the seats were four and twenty Elders sitting, clothed in white rayment, with crowns on their heads*; representing the Princes of the four and twenty courses of the Priests clothed in linen. *And out of the throne proceeded lightnings and thunderings, and voices*, *viz.* the flashes of the fire upon the Altar at the morning-sacrifice, and the thundering voices of those that sounded the trumpets, and sung at the Eastern gate of the Priests Court; for these being between *John* and the throne appeared to him as proceeding from the throne. *And there were seven lamps of fire burning*, in the Temple, *before the throne, which are the seven spirits of God*, or Angels of the seven Churches, represented in the beginning of this Prophecy by seven stars. *And before the throne was a sea of glass clear as chrystal*; the brazen sea between the porch of the Temple and the Altar, filled with clear water. *And in the midst of the throne, and round about the throne, were four Beasts full of eyes before and behind*: that is, one Beast before the throne and one behind it, appearing to *John* as in the midst of the throne, and one on either side in the circle about it, to represent by the multitude of their eyes the people standing in the four sides of the peoples court. *And the first Beast was like a lion, and the second was like a calf, and the third had the face of a man, and the fourth was like a flying eagle*. The people of *Israel* in the wilderness encamped round about the tabernacle, and on the east side were three tribes under the standard of *Judah*, on the west were three tribes under the standard of *Ephraim*, on the south were three tribes under the standard of *Reuben*, and on the north were three tribes under the standard of *Dan*, *Numb.* ii. And the standard of *Judah* was a Lion, that of *Ephraim* an Ox, that of *Reuben* a Man, and that of *Dan* an Eagle, as the *Jews* affirm. Whence were framed the hieroglyphicks of *Cherubims* and *Seraphims*, to represent the people of *Israel*. A *Cherubim* had one body with four faces, the faces of a Lion, an Ox, a Man and an Eagle, looking to the four winds of heaven, without turning about, as in *Ezekiel*'s vision, chap. i. And four *Seraphims* had the same four faces with four bodies, one face to every body. The four Beasts are therefore four *Seraphims* standing in the four sides of the peoples court; the first in the eastern side with the head of a Lion, the second in the western side with the head of an Ox, the third in the southern

side with the head of a Man, the fourth in the northern side with the head of an Eagle: and all four signify together the twelve tribes of *Israel*, out of whom the hundred forty and four thousand were sealed, *Apoc.* vii. 4. *And the four Beasts had each of them six wings*, two to a tribe, in all twenty and four wings, answering to the twenty and four stations of the people. *And they were full of eyes within*, or under their wings. *And they rest not day and night*, or at the morning and evening-sacrifices, *saying, holy, holy, holy Lord God Almighty, which was, and is, and is to come*. These animals are therefore the Seraphims, which appeared to *Isaiah* [1] in a vision like this of the *Apocalypse*. For there also the Lord sat upon a throne in the temple; and the Seraphims each with six wings cried, *Holy, holy, holy Lord God of hosts. And when those animals give glory and honour and thanks to him that sitteth upon the throne, who liveth for ever and ever, the four and twenty Elders* go into the Temple, and there *fall down before him that sitteth on the throne, and worship him that liveth for ever and ever, and cast their crowns before the throne, saying, Thou art worthy, O Lord, to receive glory and honour and power: for thou hast created all things, and for thy pleasure they are and were created*. At the morning and evening-sacrifices, so soon as the sacrifice was laid upon the Altar, and the drink-offering began to be poured out, the trumpets sounded, and the *Levites* sang by course three times; and every time when the trumpets sounded, the people fell down and worshiped. Three times therefore did the people worship; to express which number, the Beasts cry *Holy, holy, holy*: and the song being ended, the people prayed standing, till the solemnity was finished. In the mean time the Priests went into the Temple, and there fell down before him that sat upon the throne, and worshiped.

And John *saw, in the right hand of him that sat upon the throne, a book written within and on the backside, sealed with seven seals*, *viz.* the book which *Daniel* was commanded to seal up, and which is here represented by the prophetic book of the Law laid up on the right side of the Ark, as it were in the right hand of him that sat on the throne: for the festivals and ceremonies of the Law prescribed to the people in this book, adumbrated those things which were predicted in the book of *Daniel*; and the writing within and on the backside of this book, relates to the synchronal Prophecies. [2] *And none was found worthy to open the book* but the Lamb

of God. *And lo, in the midst of the throne and of the four Beasts, and in the midst of the Elders*, that is, at the foot of the Altar, *stood a lamb as it had been slain*, the morning-sacrifice; *having seven horns*, which are the seven Churches, *and seven eyes, which are the seven spirits of God sent forth into all the earth. And he came, and took the book out of the right hand of him that sat upon the throne: And when he had taken the book, the four Beasts and four and twenty Elders fell down before the Lamb, having every one of them harps, and golden vials full of odours, which are the prayers of saints. And they sung a new song, saying, Thou art worthy to take the book, and to open the seals thereof: for thou wast slain, and hast redeemed us to God by thy blood out of every kindred, and tongue, and people, and nation; and hast made us, unto our God, Kings and Priests, and we shall reign on the earth.* The Beasts and Elders therefore represent the primitive *Christians* of all nations; and the worship of these *Christians* in their Churches is here represented under the form of worshiping God and the Lamb in the Temple: God for his benefaction in creating all things, and the Lamb for his benefaction in redeeming us with his blood: God as sitting upon the throne and living for ever, and the Lamb as exalted above all by the merits of his death. *And I heard*, saith *John*, *the voice of many Angels round about the throne, and the Beasts and the Elders: and the number of them was ten thousand times ten thousand, and thousands of thousands; saying with a loud voice, Worthy is the Lamb that was slain to receive power, and riches, and wisdom, and strength, and honour, and glory, and blessing. And every creature which is in heaven, and on the earth, and under the earth, and such as are in the sea, and all that are in them, heard I, saying, Blessing, honour, glory, and power, be unto him that sitteth upon the throne, and unto the Lamb for ever and ever. And the four Beasts said,* Amen*. And the four and twenty Elders fell down and worshiped him that liveth for ever and ever.* This was the worship of the primitive *Christians*.

It was the custom for the High-Priest, seven days before the fast of the seventh month, to continue constantly in the Temple, and study the book of the Law, that he might be perfect in it against the day of expiation; wherein the service, which was various and intricate, was wholly to be performed by himself; part of which service was reading the Law to the people: and to promote his studying it, there were certain Priests appointed by the *Sanhedrim* to be with him those seven days in one of his chambers in the

Temple, and there to discourse with him about the Law, and read it to him, and put him in mind of reading and studying it himself. This his opening and reading the Law those seven days, is alluded unto in the Lamb's opening the seals. We are to conceive that those seven days begin in the evening before each day; for the *Jews* began their day in the evening, and that the solemnity of the fast begins in the morning of the seventh day.

The seventh seal was therefore opened on the day of expiation, and then *there was silence in heaven for half an hour. And an Angel*, the High-Priest, *stood at the Altar, having a golden Censer; and there was given him much incense, that he should offer it with the prayers of all Saints, upon the golden Altar which was before the throne*. The custom was on other days, for one of the Priests to take fire from the great Altar in a silver Censer; but on this day, for the High-Priest to take fire from the great Altar in a golden Censer: and when he was come down from the great Altar, he took incense from one of the Priests who brought it to him, and went with it to the golden Altar: and while he offered the incense, the people prayed without in silence, which is the silence in heaven for half an hour. When the High-Priest had laid the incense on the Altar, he carried a Censer of it burning in his hand, into the most holy place before the Ark. *And the smoke of the incense, with the prayers of the Saints, ascended up before God out of the Angel's hand.* On other days there was a certain measure of incense for the golden Altar: on this day there was a greater quantity for both the Altar and the most holy Place, and therefore it is called *much incense*. After this *the Angel took the Censer, and filled it with fire from the* great *Altar, and cast it into the earth*; that is, by the hands of the Priests who belong to his mystical body, he cast it to the earth without the Temple, for burning the Goat which was the Lord's lot. *And* at this and other concomitant sacrifices, until the evening-sacrifice was ended, *there were voices, and thundrings, and lightnings, and an earthquake*; that is, the voice of the High-Priest reading the Law to the people, and other voices and thundrings from the trumpets and temple-musick at the sacrifices, and lightnings from the fire of the Altar.

The solemnity of the day of expiation being finished, the seven Angels found their trumpets at the great sacrifices of the seven days of the feast of tabernacles; and at the same sacrifices, the seven thunders utter their voices, which are the musick of the Temple, and singing of the *Levites*, intermixed

with the soundings of the trumpets: and the seven Angels pour out their vials of wrath, which are the drink-offerings of those sacrifices.

When six of the seals were opened, *John* said: [3] *And after these things*, that is, after the visions of the sixth seal, *I saw four Angels standing on the four corners of the earth, holding the four winds of the earth, that the wind should not blow on the earth, nor on the sea, nor on any tree. And I saw another Angel ascending from the* East*, having the seal of the living God: and he cried with a loud voice to the four Angels, to whom it was given to hurt the earth and the sea, saying, Hurt not the earth, nor the sea, nor the trees, till we have sealed the servants of our God in their foreheads.* This sealing alludes to a tradition of the *Jews*, that upon the day of expiation all the people of *Israel* are sealed up in the books of life and death. For the *Jews* in their *Talmud* [4] tell us, that in the beginning of every new year, or first day of the month *Tisri*, the seventh month of the sacred year, three books are opened in judgment; the book of life, in which the names of those are written who are perfectly just; the book of death, in which the names of those are written who are Atheists or very wicked; and a third book, of those whose judgment is suspended till the day of expiation, and whose names are not written in the book of life or death before that day. The first ten days of this month they call the penitential days; and all these days they fast and pray very much, and are very devout, that on the tenth day their sins may be remitted, and their names may be written in the book of life; which day is therefore called the day of expiation. And upon this tenth day, in returning home from the Synagogues, they say to one another, *God the creator seal you to a good year*. For they conceive that the books are now sealed up, and that the sentence of God remains unchanged henceforward to the end of the year. The same thing is signified by the two Goats, upon whose foreheads the High-Priest yearly, on the day of expiation, lays the two lots inscribed, *For God* and *For* Azazel; God's lot signifying the people who are sealed with the name of God in their foreheads; and the lot *Azazel*, which was sent into the wilderness, representing those who receive the mark and name of the Beast, and go into the wilderness with the great Whore.

The servants of God being therefore sealed in the day of expiation, we may conceive that this sealing is synchronal to the visions which appear

upon opening the seventh seal; and that when the Lamb had opened six of the seals and seen the visions relating to the inside of the sixth, he looked on the backside of the seventh leaf, and then saw *the four Angels holding the four winds of heaven, and another Angel ascending from the* East *with the seal of God*. Conceive also, that the Angels which held the four winds were the first four of the seven Angels, who upon opening the seventh seal were seen standing before God; and that upon their holding the winds, *there was silence in heaven for half an hour*; and that while the servants of God were sealing, the Angel with the golden Censer offered their prayers with incense upon the golden Altar, and read the Law: and that so soon as they were sealed, the winds hurt the earth at the sounding of the first trumpet, and the sea at the sounding of the second; these winds signifying the wars, to which the first four trumpets sounded. For as the first four seals are distinguished from the three last by the appearance of four horsemen towards the four winds of heaven; so the wars of the first four trumpets are distinguished from those of the three last, by representing these by *four winds*, and the others by *three great woes*.

In one of *Ezekiel*'s visions, when the *Babylonian* captivity was at hand, *six men* appeared *with slaughter-weapons*; *and a seventh*, who [5] appeared *among them clothed in white linen and a writer's ink-horn by his side*, is commanded to *go thro' the midst of* Jerusalem*, and set a mark upon the foreheads of the men that sigh and cry for all the abominations done in the midst thereof*: and then the six men, like the Angels of the first six trumpets, are commanded to slay those men who are not marked. Conceive therefore that the hundred forty and four thousand are sealed, to preserve them from the plagues of the first six trumpets; and that at length by the preaching of the everlasting gospel, they grow into *a great multitude, which no man could number, of all nations, and kindreds, and people and tongues*: and at the sounding of the seventh trumpet come out of the great tribulation *with Palms in their hands: the kingdoms of this world*, by the war to which that trumpet sounds, *becoming the kingdoms of God and his* Christ. For the solemnity of the great *Hosannah* was kept by the *Jews* upon the seventh or last day of the feast of tabernacles; the *Jews* upon that day carrying Palms in their hands, and crying *Hosannah*.

After six of the Angels, answering to the six men with slaughter-weapons, had sounded their trumpets, the Lamb in the form of *a mighty Angel cane down from heaven clothed with a cloud, and a rainbow was upon his head, and his face was as it were the Sun, and his feet as pillars of fire*, the shape in which *Christ* appeared in the beginning of this Prophecy; *and he had in his hand a little book open*, the book which he had newly opened; for he received but one book from him that sitteth upon the throne, and he alone was worthy to open and look on this book. *And he set his right foot upon the sea and his left foot on the earth, and cried with a loud voice, as when a lion roareth*. It was the custom for the High-Priest on the day of expiation, to stand in an elevated place in the peoples court, at the Eastern gate of the Priests court, and read the Law to the people, while the Heifer and the Goat which was the Lord's lot, were burning without the Temple. We may therefore suppose him standing in such a manner, that his right foot might appear to *John* as it were standing on the sea of glass, and his left foot on the ground of the house; and that he cried with a loud voice, in reading the Law on the day of expiation. *And when he had cried, seven thunders uttered their voices*. Thunders are the voice of a cloud, and a cloud signifies a multitude; and this multitude may be the *Levites*, who sang with thundering voices, and played with musical instruments at the great sacrifices, on the seven days of the feast of Tabernacles: at which times the trumpets also sounded. For the trumpets sounded, and the *Levites* sang alternately, three times at every sacrifice. The Prophecy therefore of the seven thunders is nothing else than a repetition of the Prophecy of the seven trumpets in another form. *And the Angel which I saw stand upon the sea and upon the earth, lifted up his hand to heaven, and sware by him that liveth for ever and ever, that* after the seven thunders *there should be time no longer; but in the days of the voice of the seventh Angel, when he shall begin to sound, the mystery of God should be finished, as he hath declared to his servants the Prophets*. The voices of the thunders therefore last to the end of this world, and so do those of the trumpets.

And the voice which I heard from heaven, saith *John*, *spake unto me again and said, Go and take the little book, &c. And I took the little book out of the Angel's hand, and ate it up; and it was in my mouth sweet as honey, and as soon as I had eaten it, my belly was bitter. And he said unto me, Thou must prophesy again before many peoples, and nations, and*

tongues, and kings. This is an introduction to a new Prophecy, to a repetition of the Prophecy of the whole book; and alludes to *Ezekiel*'s eating a roll or book spread open before him, and written within and without, full of lamentations and mourning and woe, but sweet in his mouth. Eating and drinking signify acquiring and possessing; and eating the book is becoming inspired with the Prophecy contained in it. It implies being inspired in a vigorous and extraordinary manner with the Prophecy of the whole book, and therefore signifies a lively repetition of the whole Prophecy by way of interpretation, and begins not till the first Prophecy, that of the seals and trumpets, is ended. It was sweet in *John*'s mouth, and therefore begins not with the bitter Prophecy of the *Babylonian* captivity, and the *Gentiles* being in the outward court of the Temple, and treading the holy city under foot; and the prophesying of the *two Witnesses* in sackcloth, and their smiting the earth with all plagues, and being killed by the Beast; but so soon as the Prophecy of the trumpets is ended, it begins with the sweet Prophecy of the glorious *Woman in heaven*, and the victory of *Michael* over the Dragon; and after that, it is bitter in *John*'s belly, by a large description of the times of the great Apostacy.

And the Angel stood, upon the earth and sea, *saying, Rise and measure the Temple of God and the Altar, and them that worship therein*, that is, their courts with the buildings thereon, *viz.* the square court of the Temple called the separate place, and the square court of the Altar called the Priests court, and the court of them that worship in the Temple called the new court: *but the* great *court which is without the Temple, leave out, and measure it not, for it is given to the* Gentiles*, and the holy city shall they tread under foot forty and two months*. This measuring hath reference to *Ezekiel*'s measuring the Temple *of Solomon*: there the whole Temple, including the outward court, was measured, to signify that it should be rebuilt in the latter days. Here the courts of the Temple and Altar, and they who worship therein, are only measured, to signify the building of a second Temple, for those that are sealed out of all the twelve tribes of *Israel*, and worship in the inward court of sincerity and truth: but *John* is commanded to leave out the outward court, or outward form of religion and Church-government, because it is given to the *Babylonian Gentiles*. For the glorious woman in heaven, the remnant of whole seed kept the commandments of God, and had the testimony of *Jesus*, continued the same woman in outward form after her

flight into the wilderness, whereby she quitted her former sincerity and piety, and became the great Whore. She lost her chastity, but kept her outward form and shape. And while the *Gentiles* tread the holy city underfoot, and worship in the outward court, the two witnesses, represented perhaps by the two feet of the Angel standing on the sea and earth, prophesied against them, and *had power*, like *Elijah* and *Moses*, *to consume their enemies with fire proceeding out of their mouth, and to shut heaven that it rain not in the days of their Prophecy, and to turn the waters into blood, and to smite the earth with all plagues as often as they will*, that is, with the plagues of the trumpets and vials of wrath; and at length they are slain, rise again from the dead, and ascend up to heaven in a cloud; and then the seventh trumpet sounds to the day of judgment.

The Prophecy being finished, *John* is inspired anew by the eaten book, and begins the Interpretation thereof with these words, *And the Temple of God was opened in heaven, and there was seen in his Temple the Ark of the Testament*. By the Ark, we may know that this was the first Temple; for the second Temple had no Ark. *And there were lightnings, and voices, and thundrings, and an earthquake, and great hail*. These answer to the wars in the *Roman* Empire, during the reign of the four horsemen, who appeared upon opening the first four seals. *And there appeared a great wonder in heaven, a woman clothed with the Sun*. In the Prophecy, the affairs of the Church begin to be considered at the opening of the fifth seal; and in the Interpretation, they begin at the same time with the vision of the Church in the form of a woman in heaven: there she is persecuted, and here she is pained in travail. The Interpretation proceeds down first to the sealing of the servants of God, and marking the rest with the mark of the Beast; and then to the day of judgment, represented by a harvest and vintage. Then it returns back to the times of opening the seventh seal, and interprets the Prophecy of the seven trumpets by the pouring out of seven vials of wrath. The Angels who pour them out, come out of the *Temple of the Tabernacle*; that is, out of the second Temple, for the Tabernacle had no outward court. Then it returns back again to the times of measuring the Temple and Altar, and of the *Gentiles* worshiping in the outward court, and of the Beast killing the witnesses in the streets of the great city; and interprets these things by the vision of *a woman sitting on the Beast, drunken with the blood of the*

Saints; and proceeds in the interpretation downwards to the fall of the great city and the day of judgment.

The whole Prophecy of the book, represented by the book of the Law, is therefore repeated, and interpreted in the visions which follow those of sounding the seventh trumpet, and begin with that of the Temple of God opened in heaven. Only the things, which the seven thunders uttered, were not written down, and therefore not interpreted.

Notes to Chap. II.

[1] Isa. vi.

[2] Apoc. v.

[3] Apoc. vii

[4] Buxtorf in Synogoga Judaica, c. 18, 21.

[5] Ezek. ix.

CHAP. III.

Of the relation which the Prophecy of John hath to those of Daniel; and of the Subject of the Prophecy.

The whole scene of sacred Prophecy is composed of three principal parts: the regions beyond *Euphrates*, represented by the two first Beasts of *Daniel*; the Empire of the *Greeks* on this side of *Euphrates*, represented by the Leopard and by the He-Goat; and the Empire of the *Latins* on this side of *Greece*, represented by the Beast with ten horns. And to these three parts, the phrases of the *third part of the earth, sea, rivers, trees, ships, stars, sun, and moon*, relate. I place the body of the fourth Beast on this side of *Greece*, because the three first of the four Beasts had their lives prolonged after their dominion was taken away, and therefore belong not to the body of the fourth. He only stamped them with his feet.

By the *earth*, the *Jews* understood the great continent of all *Asia* and *Africa*, to which they had access by land: and by the Isles of the *sea*, they understood the places to which they sailed by sea, particularly all *Europe*: and hence in this Prophecy, the *earth* and *sea* are put for the nations of the *Greek* and *Latin* Empires.

The third and fourth Beasts of *Daniel* are the same with the Dragon and ten-horned Beast of *John*, but with this difference: *John* puts the Dragon for the whole *Roman* Empire while it continued entire, because it was entire when that Prophecy was given; and the Beast he considers not till the Empire became divided: and then he puts the Dragon for the Empire of the *Greeks*, and the Beast for the Empire of the *Latins*. Hence it is that the Dragon and Beast have common heads and common horns: but the Dragon hath crowns only upon his heads, and the Beast only upon his horns; because the Beast and his horns reigned not before they were divided from the Dragon: and when the Dragon gave the Beast his throne, the ten horns received power as Kings, the same hour with the Beast. The heads are seven successive Kings. Four of them were the four horsemen which appeared at the opening of the first four seals. In the latter end of the sixth head, or seal, considered as present in the visions, it is said, *five* of the seven Kings *are*

fallen, and one is, and another is not yet come; and the Beast that was and is not, being wounded to death with a sword, *he is the eighth, and of the seven*: he was therefore a collateral part of the seventh. The horns are the same with those of *Daniel*'s fourth Beast, described above.

The four horsemen which appear at the opening of the first four seals, have been well explained by Mr. *Mede*; excepting that I had rather continue the third to the end of the reign of the three *Gordians* and *Philip* the *Arabian*, those being Kings from the *South*, and begin the fourth with the reign of *Decius*, and continue it till the reign of *Dioclesian*. For the fourth horseman *sat upon a pale* horse, *and his name was Death; and hell followed with him; and power was given them to kill unto the fourth part of the earth, with the sword, and with famine, and with the plague, and with the Beasts of the earth*, or armies of invaders and rebels: and as such were the times during all this interval. Hitherto the *Roman* Empire continued in an undivided monarchical form, except rebellions; and such it is represented by the four horsemen. But *Dioclesian* divided it between himself and *Maximianus*, A.C. 285; and it continued in that divided state, till the victory of *Constantine* the great over *Licinius*, A.C. 323, which put an end to the heathen persecutions set on foot by *Dioclesian* and *Maximianus*, and described at the opening of the fifth seal. But this division of the Empire was imperfect, the whole being still under one and the same Senate. The same victory of *Constantine* over *Licinius* a heathen persecutor, began the fall of the heathen Empire, described at the opening of the sixth seal: and the visions of this seal continue till after the reign of *Julian* the Apostate, he being a heathen Emperor, and reigning over the whole *Roman* Empire.

The affairs of the Church begin to be considered at the opening of the fifth seal, as was said above. Then she is represented by *a woman* in the Temple of heaven, *clothed with the sun* of righteousness, *and the moon* of *Jewish* ceremonies *under her feet, and upon her head a crown of twelve stars* relating to the twelve Apostles and to the twelve tribes of *Israel*. When she fled from the Temple into the wilderness, she left in the Temple a *remnant of her seed, who kept the commandments of God, and had the testimony of Jesus Christ*; and therefore before her flight she represented the true primitive Church of God, tho afterwards she degenerated like *Aholah* and *Aholibah*. In *Diocesian*'s persecution *she cried, travelling in birth, and pained to be delivered*. And in the end of that persecution, by the victory of

Constantine over *Maxentius* A.C. 312, *she brought forth a man-child*, such a child as *was to rule all nations with a rod of iron*, a *Christian* Empire. *And her child*, by the victory of *Constantine* over *Licinius*, A.C. 323, *was caught up unto God and to his throne. And the woman*, by the division of the *Roman* Empire into the *Greek* and *Latin* Empires, *fled* from the first Temple *into the wilderness*, or spiritually barren Empire of the *Latins*, where she is found afterwards sitting upon the Beast and upon the seven mountains; and is called *the great city which reigneth over the Kings of the earth*, that is, over the ten Kings who give their kingdom to her Beast.

But before her flight there was war in heaven between *Michael* and the Dragon, the *Christian* and the heathen religions; and the Dragon, *that old serpent, called the Devil and Satan, who deceiveth the whole world, was cast out to the earth, and his Angels were cast out with him*. And *John heard a voice in heaven, saying, Now is come salvation and strength, and the kingdom of our God, and the power of his* Christ*: for the accuser of our brethren is cast down. And they overcame him by the blood of the Lamb, and by the word of their testimony. And they loved not their lives unto the death. Therefore rejoice, ye heavens, and ye that dwell in them. Woe be to the inhabiters of the earth and sea*, or people of the *Greek* and *Latin* Empires, *for the devil is come down amongst you, having great wrath, because he knoweth that he hath but a short time*.

And when the Dragon saw that he was cast down from the *Roman* throne, and the man-child caught up thither, he *persecuted the woman which brought forth the man-child; and to her*, by the division of the *Roman* Empire between the cities of *Rome* and *Constantinople* A.C. 330, *were given two wings of a great eagle*, the symbol of the *Roman* Empire, *that she might flee* from the first Temple *into the wilderness* of *Arabia, to her place* at *Babylon* mystically so called. *And the serpent*, by the division of the same Empire between the sons of *Constantine* the great, A.C. 337, *cast out of his mouth water as a flood*, the *Western* Empire, *after the woman; that he might cause her to be carried away by the flood. And the earth*, or *Greek* Empire, *helped the woman, and the earth opened her mouth, and swallowed up the flood*, by the victory of *Constantius* over *Magnentius*, A.C. 353, and thus the Beast was wounded to death with a sword. *And the Dragon was wroth with the woman*, in the reign of *Julian* the Apostate A.C. 361, *and*, by a new division of the Empire between *Valentinian* and *Valens*, A.C. 364,

went from her into the *Eastern* Empire *to make war with the remnant of her seed*, which she left behind her when she fled: and thus the Beast revived. By the next division of the Empire, which was between *Gratian* and *Theodosius* A.C. 379, the *Beast* with ten horns *rose out of the sea*, and the *Beast* with two horns *out of the earth*: and by the last division thereof, which was between the sons of *Theodosius*, A.C. 395, *the Dragon gave the Beast his power and throne, and great authority*. And the ten horns *received power as Kings, the same hour with the Beast*.

At length the woman arrived at her place of temporal as well as spiritual dominion upon the back of the Beast, where she is nourished *a time, and times, and half a time, from the face of the serpent*; not in his kingdom, but at a distance from him. She is nourished by *the merchants of the earth*, three times or years and an half, or 42 months, or 1260 days: and in these Prophecies days are put for years. During all this time the Beast acted, and *she sat upon him*, that is, reigned over him, and over the ten Kings *who gave their power and strength*, that is, their kingdom *to the Beast*; and she was *drunken with the blood of the Saints*. By all these circumstances she is the eleventh horn of *Daniel*'s fourth Beast, who reigned with *a look more stout than his fellows*, and was of a different kind from the rest, and had eyes *and a mouth* like the woman; *and made war with the saints, and prevailed against them*, and *wore them out*, and *thought to change times and laws*, and had them *given into his hand, until a time, and times, and half a time*. These characters of the woman, and little horn of the Beast, agree perfectly: in respect of her temporal dominion, she was a horn of the Beast; in respect of her spiritual dominion, she rode upon him in the form of a woman, and was his Church, and committed fornication with the ten Kings.

The second Beast, which *rose up out of the earth*, was the Church of the *Greek* Empire: for it *had two horns like those of the Lamb*, and therefore was a Church; and it *spake as the Dragon*, and therefore was of his religion; and it *came up out of the earth*, and by consequence in his kingdom. It is called also *the false Prophet* who wrought miracles before the first Beast, by which he deceived them that received his mark, and worshiped his image. When the Dragon went from the woman to make war with the remnant of her seed, this Beast arising out of the earth assisted in that war, and *caused the earth and them which dwell therein to worship* the authority of *the first Beast, whose mortal wound was healed*, and to *make an Image to*

him, that is, to assemble a body of men like him in point of religion. He had also *power to give life* and authority *to the Image*, so that it could *both speak, and* by dictating *cause that all* religious bodies of men, *who would not worship* the authority of *the Image, should be* mystically *killed. And he causeth all men to receive a mark in their right hand or in their forehead, and that no man might buy or sell save he that had the mark, or the name of the Beast, or the number of his name*; all the rest being excommunicated by the Beast with two horns. His mark is, and his name ΛΑΤΕΙΝΟΣ, and the number of his name 666.

Thus the Beast, after he was wounded to death with a sword and revived, was deified, as the heathens used to deify their Kings after death, and had an Image erected to him; and his worshipers were initiated in this new religion, by receiving the mark or name of this new God, or the number of his name. By killing all that will not worship him and his Image, the first Temple, illuminated by the lamps of the seven Churches, is demolished, and a new Temple built for them who will not worship him; and the outward court of this new Temple, or outward form of a Church, is given to the *Gentiles*, who worship the Beast and his Image: while they who will not worship him, are sealed with the name of God in their foreheads, and retire into the inward court of this new Temple. These are the 144000 sealed out of all the twelve tribes of *Israel*, and called the *two Witnesses*, as being derived from the two wings of the woman while she was flying into the wilderness, and represented by two of the seven candlesticks. These appear to *John* in the inward court of the second Temple, standing on mount *Sion* with the Lamb, and as it were on the sea of glass. These are *the Saints of the most High*, and *the host of heaven*, and *the holy people* spoken of by *Daniel*, as worn out and trampled under foot, and destroyed in the latter times by the little horns of his fourth Beast and He-Goat.

While the *Gentiles* tread the holy city under foot, God *gives power to his two Witnesses, and they prophesy a thousand two hundred and threescore days clothed in sackcloth*. They are called *the two Olive-trees*, with relation to the two Olive-trees, which in *Zechary*'s vision, chap. iv. stand on either side of the golden candlestick to supply the lamps with oil: and Olive-trees, according to the Apostle *Paul*, represent Churches, *Rom.* xi. They supply the lamps with oil, by maintaining teachers. They are also called *the two candlesticks*; which in this Prophecy signify Churches, the seven Churches

of *Asia* being represented by seven candlesticks. Five of these Churches were found faulty, and threatned if they did not repent; the other two were without fault, and so their candlesticks were fit to be placed in the second Temple. These were the Churches in *Smyrna* and *Philadelphia*. They were in a state of tribulation and persecution, and the only two of the seven in such a state: and so their candlesticks were fit to represent the Churches in affliction in the times of the second Temple, and the only two of the seven that were fit. The *two Witnesses* are not new Churches: they are the posterity of the primitive Church, the posterity of the two wings of the woman, and so are fitly represented by two of the primitive candlesticks. We may conceive therefore, that when the first Temple was destroyed, and a new one built for them who worship in the inward court, two of the seven candlesticks were placed in this new Temple.

The affairs of the Church are not considered during the opening of the first four seals. They begin to be consider'd at the opening of the fifth seal, as was said above; and are further considered at the opening of the sixth seal; and the seventh seal contains the times of the great Apostacy. And therefore I refer the Epistles to the seven Churches unto the times of the fifth and sixth seals: for they relate to the Church when she began to decline, and contain admonitions against the great Apostacy then approaching.

When *Eusebius* had brought down his *Ecclesiatical History* to the reign of *Dioclesian*, he thus describes the state of the Church: *Qualem quantamque gloriam simul ac libertatem doctrina veræ erga supremum Deum pietatis à Christo primùm hominibus annunciata, apud omnes Græcos pariter & barbaros ante persecutionem nostrâ memoriâ excitatam, consecuta sit, nos certè pro merito explicare non possumus. Argumento esse possit Imperatorum benignitas erga nostros: quibus regendas etiam provincias committebant, omni sacrificandi metu eos liberantes ob singularem, qua in religionem nostram affecti erant, benevolentiam.* And a little after: *Jam vero quis innumerabilem hominum quotidiè ad fidem Christi confugientium turbam, quis numerum ecclesiarum in singulis urbibus, quis illustres populorum concursus in ædibus sacris, cumulatè possit describere? Quo factum est, ut priscis ædificiis jam non contenti, in singulis urbibus spatiosas ab ipsis fundamentis exstruerent ecclesias. Atque hæc progressii temporis increscentia, & quotidiè in majus & melius*

proficiscentia, nec livor ullus atterere, nec malignitas dæmonis fascinare, nec hominum insidiæ prohibere unquam potuerunt, quamdiu omnipotentis Dei dextra populum suum, utpote tali dignum præsidio, texit atque custodiit. Sed cum ex nimia libertate in negligentiam ac desidiam prolapsi essemus; cum alter alteri invidere atque obtrectare cœpisset; cum inter nos quasi bella intestina gereremus, verbis, tanquam armis quibusdam hastisque, nos mutuò vulnerantes; cum Antistites adversus Antistites, populi in populos collisi, jurgia ac tumultus agitarent; denique cum fraus & simulatio ad summum malitiæ culmen adolevisset: tum divina ultio, levi brachio ut solet, integro adhuc ecclesiæ statu, & fidelium turbis liberè convenientibus, sensim ac moderatè in nos cœpit animadvertere; orsà primùm persecutione ab iis qui militabant. Cum verò sensu omni destituti de placando Dei numine ne cogitaremus quidem; quin potius instar impiorum quorundam res humanas nullâ providentiâ gubernari rati, alia quotidiè crimina aliis adjiceremus: cum Pastores nostri spretâ religionis regulâ, mutuis inter se contentionibus decertarent, nihil aliud quam jurgia, minas, æmulationem, odia, ac mutuas inimicitias amplificare studentes; principatum quasi tyrannidem quandam contentissimè sibi vindicantes: tunc demùm juxta dictum Hieremiæ, obscuravit Dominus in ira sua filiam Sion, & dejecit de cælo gloriam Israel*, — per Ecclesiarum scilicet subversionem*, &c. This was the state of the Church just before the subversion of the Churches in the beginning of *Dioclesian*'s persecution: and to this state of the Church agrees the first of the seven Epistles to the Angel of the seven Churches, [1] that to the Church in *Ephesus*. *I have something against thee*, saith *Christ* to the Angel of that Church, *because thou hast left thy first love. Remember therefore from whence thou art fallen, and repent, and do the first works; or else I will come unto thee quickly, and will remove thy candlestick out of its place, except thou repent. But this thou hast, that thou hatest the deeds of the* Nicolaitans*, which I also hate*. The *Nicolaitans* are the *Continentes* above described, who placed religion in abstinence from marriage, abandoning their wives if they had any. They are here called *Nicolaitans*, from *Nicolas* one of the seven deacons of the primitive Church of *Jerusalem*; who having a beautiful wife, and being taxed with uxoriousness, abandoned her, and permitted her to marry whom she pleased, saying that we must disuse the flesh; and

thenceforward lived a single life in continency, as his children also. The *Continentes* afterwards embraced the doctrine of *Æons* and Ghosts male and female, and were avoided by the Churches till the fourth century; and the Church of *Ephesus* is here commended for hating their deeds.

The persecution of *Dioclesian* began in the year of *Christ* 302, and lasted ten years in the *Eastern* Empire and two years in the *Western*. To this state of the Church the second Epistle, to the Church of *Smyrna*, agrees. *I know*, saith [2] *Christ*, *thy works, and tribulation, and poverty, but thou art rich; and I know the blasphemy of them, which say they are* Jews *and are not, but are the synagogue of Satan. Fear none of those things which thou shalt suffer: Behold, the Devil shall call some of you into prison, that ye may be tried; and ye shall have tribulation ten days. Be thou faithful unto death, and I will give thee a crown of life.* The tribulation of ten days can agree to no other persecution than that of *Dioclesian*, it being the only persecution which lasted ten years. By *the blasphemy of them which say they are* Jews *and are not, but are the synagogue of Satan*, I understand the Idolatry of the *Nicolaitans*, who falsly said they were *Christians*.

The *Nicolaitans* are complained of also in [3] the third Epistle, as men that *held the doctrine of* Balaam*, who taught* Balac *to cast a stumbling-block before the children of* Israel*, to eat things sacrificed to Idols, and [4] to commit* spiritual *fornication*. For *Balaam* taught the *Moabites* and *Midianites* to tempt and invite *Israel* by their women to commit fornication, and to feast with them at the sacrifices of their Gods. The Dragon therefore began now to come down among the inhabitants of the earth and sea.

The *Nicolaitans* are also complained of in the fourth Epistle, under the name of the *woman* Jezabel*, who calleth herself a Prophetess, to teach and to seduce the servants of* Christ *to commit fornication, and to eat things sacrificed to Idols*. The woman therefore began now to fly into the wilderness.

The reign of *Constantine* the great from the time of his conquering *Licinius*, was monarchical over the whole *Roman* Empire. Then the Empire became divided between the sons of *Constantine*: and afterwards it was again united under *Constantius*, by his victory over *Magnentius*. To the affairs of the Church in these three successive periods of time, the third, fourth, and fifth Epistles, that is, those to the Angels of the Churches in

Pergamus, *Thyatira*, and *Sardis*, seem to relate. The next Emperor was *Julian* the Apostate.

In the sixth Epistle, [5] to the Angel of the Church in *Philadelphia*, *Christ* saith: *Because* in the reign of the heathen Emperor *Julian*, *thou hast kept the word of my patience, I also will keep thee from the hour of temptation, which* by the woman's flying into the wilderness, and the Dragon's making war with the remnant of her seed, and the killing of all who will not worship the Image of the Beast, *shall come upon all the world, to try them that dwell upon the earth*, and to distinguish them by sealing the one with the name of God in their foreheads, and marking the other with the mark of the Beast. *Him that overcometh, I will make a pillar in the Temple of my God; and he shall go no more out* of it. *And I will write upon him the name of my God* in his forehead. So the *Christians* of the Church of *Philadelphia*, as many of them as overcome, are sealed with the seal of God, and placed in the second Temple, and go no more out. The same is to be understood of the Church in *Smyrna*, which also kept the word of God's patience, and was without fault. These two Churches, with their posterity, are therefore the *two Pillars*, and the *two Candlesticks*, and the *two Witnesses* in the second Temple.

After the reign of the Emperor *Julian,* and his successor *Jovian* who reigned but five months, the Empire became again divided between *Valentinian* and *Valens*. Then the Church Catholick, in the Epistle to the Angel of the Church of *Laodicea*, is reprehended as *lukewarm*, and [6] threatned to be *spewed out of* Christ's *mouth*. She said, that she was *rich and increased with goods, and had need of nothing*, being in outward prosperity; *and knew not that she was* inwardly *wretched, and miserable, and poor, and blind, and naked*. She is therefore *spewed out of* Christ's *mouth* at the opening of the seventh seal: and this puts an end to the times of the first Temple.

About one half of the *Roman* Empire turned *Christians* in the time of *Constantine* the great and his sons. After *Julian* had opened the Temples, and restored the worship of the heathens, the Emperors *Valentinian* and *Valens* tolerated it all their reign; and therefore the Prophecy of the sixth seal was not fully accomplished before the reign of their successor *Gratian*. It was the custom of the heathen Priests, in the beginning of the reign of every sovereign Emperor, to offer him the dignity and habit of the *Pontifex*

Maximus. This dignity all Emperors had hitherto accepted: but *Gratian* rejected it, threw down the idols, interdicted the sacrifices, and took away their revenues with the salaries and authority of the Priests. *Theodosius* the great followed his example; and heathenism afterwards recovered itself no more, but decreased so fast, that *Prudentius*, about ten years after the death of *Theodosius*, called the heathens, *vix pauca ingenia & pars hominum rarissima*. Whence the affairs of the sixth seal ended with the reign of *Valens*, or rather with the beginning of the reign of *Theodosius*, when he, like his predecessor *Gratian*, rejected the dignity of *Pontifex Maximus*. For the *Romans* were very much infested by the invasions of foreign nations in the reign of *Valentinian* and *Valens*: *Hoc tempore*, saith *Ammianus*, *velut per universum orbem Romanum bellicum canentibus buccinis, excitæ gentes sævissimæ limites sibi proximos persultabant: Gallias Rhætiasque simul Alemanni populabantur: Sarmatæ Pannonias & Quadi: Picti, Saxones, & Scoti & Attacotti Britannos ærumnis vexavere continuis: Austoriani, Mauricæque aliæ gentes Africam solito acriùs incursabant: Thracias diripiebant prædatorii globi Gotthorum: Persarum Rex manus Armeniis injectabat*. And whilst the Emperors were busy in repelling these enemies, the *Hunns* and *Alans* and *Goths* came over the *Danube* in two bodies, overcame and slew *Valens*, and made so great a slaughter of the *Roman* army, that *Ammianus* saith: *Nec ulla Annalibus præter Cannensem ita ad internecionem res legitur gesta*. These wars were not fully stopt on all sides till the beginning of the reign of *Theodosius*, A.C. 379 & 380: but thenceforward the Empire remained quiet from foreign armies, till his death, A.C. 395. So long the four winds were held: and so long there was silence in heaven. And the seventh seal was opened when this silence began.

Mr. *Mede* hath explained the Prophecy of the first six trumpets not much amiss: but if he had observed, that the Prophecy of pouring out the vials of wrath is synchronal to that of sounding the trumpets, his explanation would have been yet more complete.

The name of *Woes* is given to the wars to which the three last trumpets sound, to distinguish them from the wars of the four first. The sacrifices on the first four days of the feast of Tabernacles, at which the first four trumpets sound, and the first four vials of wrath are poured out, are slaughters in four great wars; and these wars are represented by four winds

from the four corners of the earth. The first was an east wind, the second a west wind, the third a south wind, and the fourth a north wind, with respect to the city of *Rome*, the metropolis of the old *Roman* Empire. These four plagues fell upon *the third part of the Earth, Sea, Rivers, Sun, Moon and Stars*; that is, upon the Earth, Sea, Rivers, Sun, Moon and Stars of the third part of the whole scene of these Prophecies of *Daniel* and *John*.

The plague of the eastern wind [7] at the sounding of the first trumpet, was to fall upon the *Earth*, that is, upon the nations of the *Greek* Empire. Accordingly, after the death of *Theodosius* the great, the *Goths*, *Sarmatians*, *Hunns*, *Isaurians*, and *Austorian* Moors invaded and miserably wasted *Greece*, *Thrace*, *Asia minor*, *Armenia*, *Syria*, *Egypt*, *Lybia*, and *Illyricum*, for ten or twelve years together.

The plague of the western wind at the sounding of the second trumpet, was to fall upon the *Sea*, or *Western* Empire, by means of *a great mountain burning with fire* cast into it, and *turning it to blood*. Accordingly in the year 407, that Empire began to be invaded by the *Visigoths*, *Vandals*, *Alans*, *Sueves*, *Burgundians*, *Ostrogoths*, *Heruli*, *Quadi*, *Gepides*; and by these wars it was broken into ten kingdoms, and miserably wasted: and *Rome* itself, the burning mountain, was besieged and taken by the *Ostrogoths*, in the beginning of these miseries.

The plague of the southern wind at the sounding of the third trumpet, was to cause *a great star, burning as it were a lamp, to fall from heaven upon the rivers and fountains of waters*, the *Western* Empire now divided into many kingdoms, and to turn them to *wormwood* and *blood*, and make them *bitter*. Accordingly *Genseric*, the King of the *Vandals* and *Alans* in *Spain*, A.C. 427, enter'd *Africa* with an army of eighty thousand men; where he invaded the *Moors*, and made war upon the *Romans*, both there and on the sea-coasts of *Europe*, for fifty years together, almost without intermission, taking *Hippo* A.C. 431, and *Carthage* the capital of *Africa* A.C. 439. In A.C. 455, with a numerous fleet and an army of three hundred thousand *Vandals* and *Moors*, he invaded *Italy*, took and plundered *Rome*, *Naples*, *Capua*, and many other cities; carrying thence their wealth with the flower of the people into *Africa*: and the next year, A.C. 456, he rent all *Africa* from the Empire, totally expelling the *Romans*. Then the *Vandals* invaded and took the Islands of the *Mediterranean*, *Sicily*, *Sardinia*,

Corsica, *Ebusus*, *Majorca*, *Minorca*, &c. and *Ricimer* besieged the Emperer *Anthemius* in *Rome*, took the city, and gave his soldiers the plunder, A.C. 472. The *Visigoths* about the same time drove the *Romans* out of *Spain*: and now the *Western* Emperor, the *great star which fell from heaven, burning as it were a lamp*, having by all these wars gradually lost almost all his dominions, was invaded, and conquered in one year by *Odoacer* King of the *Heruli*, A.C. 476. After this the *Moors* revolted A.C. 477, and weakned the *Vandals* by several wars, and took *Mauritania* from them. These wars continued till the *Vandals* were conquered by *Belisarius*, A.C. 534. and by all these wars *Africa* was almost depopulated, according to *Procopius*, who reckons that above five millions of men perished in them. When the *Vandals* first invaded *Africa*, that country was very populous, consisting of about 700 bishopricks, more than were in all *France*, *Spain* and *Italy* together: but by the wars between the *Vandals*, *Romans* and *Moors*, it was depopulated to that degree, that *Procopius* tells us, it was next to a miracle for a traveller to see a man.

In pouring out the third vial it is [8] said: *Thou art righteous, O Lord, — because thou hast judged thus: for they have shed the blood of thy Saints and Prophets, and thou hast given them blood to drink, for they are worthy*. How they shed the blood of Saints, may be understood by the following Edict of the Emperor *Honorius*, procured by four Bishops sent to him by a Council of *African* Bishops, who met at *Carthage* 14 *June*, A.C. 410.

Impp. Honor. &. Theod. AA. Heracliano Com. Afric.

Oraculo penitus remoto, quo ad ritus suos hæreticæ superstitionis abrepserant, sciant omnes sanctæ legis inimici, plectendos se pœna & proscriptionis & sanguinis, si ultra convenire per publicum, execrandâ sceleris sui temeritate temptaverint. Dat. viii. *Kal. Sept. Varano V.C. Cons.* A.C. 410.

Which Edict was five years after fortified by the following.

Impp. Honor. & Theod. AA. Heracliano Com. Afric.

Sciant cuncti qui ad ritus suos hæresis superstitionibus obrepserant sacrosanctæ legis inimici, plectendos se pœnâ & proscriptionis & sanguinis, si ultra convenire per publicum exercendi sceleris sui temeritate temptaverint: ne quâ vera divinaque reverentia contagione temeretur. Dat. viii. *Kal. Sept. Honorio* x. *& Theod.* vi. *AA. Coss.* A.C. 415.

These Edicts being directed to the governor of *Africa*, extended only to the *Africans*. Before these there were many severe ones against the *Donatists*, but they did not extend to blood. These two were the first which made their meetings, and the meetings of all dissenters, capital: for by *hereticks* in these Edicts are meant all dissenters, as is manifest by the following against *Euresius* a *Luciferan* Bishop.

Impp. Arcad. & Honor. AA. Aureliano Proc. Africæ.

Hæreticorum vocabulo continentur, & latis adversus eos sanctionibus debent succumbere, qui vel levi argumento à judicio Catholicæ religionis & tramite detecti fuerint deviare: ideoque experientia tua Euresium hæreticum esse cognoscat. Dat. iii. *Non. Sept. Constantinop. Olybrio & Probino Coss.* A.C. 395.

The *Greek* Emperor *Zeno* adopted *Theoderic* King of the *Ostrogoths* to be his son, made him master of the horse and *Patricius*, and Consul of *Constantinople*; and recommending to him the *Roman* people and Senate, gave him the *Western* Empire, and sent him into *Italy* against *Odoacer* King of the *Heruli*. *Theoderic* thereupon led his nation into *Italy*, conquered *Odoacer*, and reigned over *Italy*, *Sicily*, *Rhætia*, *Noricum*, *Dalmatia*, *Liburnia*, *Istria*, and part of *Suevia*, *Pannonia* and *Gallia*. Whence *Ennodius* said, in a Panegyric to *Theoderic*: *Ad limitem suum Romana regna remeâsse. Theoderic* reigned with great prudence, moderation and felicity; treated the *Romans* with singular benevolence, governed them by their own laws, and restored their government under their Senate and Consuls, he himself supplying the place of Emperor, without assuming the title. *Ita sibi parentibus præfuit*, saith *Procopius*, *ut vere Imperatori conveniens decus nullum ipsi abesset: Justitiæ magnus ei cultus, legumque diligens custodia: terras à vicinis barbaris servavit intactas*, &c. Whence I do not reckon the reign of this King, amongst the plagues of the four winds.

The plague of the northern wind, at the sounding of the fourth trumpet, was to cause *the Sun, Moon and Stars*, that is, the King, kingdom and Princes of the *Western* Empire, *to be darkned*, and to continue some time in darkness. Accordingly *Belisarius*, having conquered the *Vandals*, invaded *Italy* A.C. 535, and made war upon the *Ostrogoths* in *Dalmatia*, *Liburnia*, *Venetia*, *Lombardy*, *Tuscany*, and other regions northward from *Rome*, twenty years together. In this war many cities were taken and retaken. In retaking *Millain* from the *Romans*, the *Ostrogoths* slew all the males young

and old, amounting, as *Procopius* reckons, to three hundred thousand, and sent the women captives to their allies the *Burgundians*. *Rome* itself was taken and retaken several times, and thereby the people were thinned; the old government by a Senate ceased, the nobles were ruined, and all the glory of the city was extinguish'd: and A.C. 552, after a war of seventeen years, the kingdom of the *Ostrogoths* fell; yet the remainder of the *Ostrogoths*, and an army of *Germans* called in to their assistance, continued the war three or four years longer. Then ensued the war of the *Heruli*, who, as *Anastasius* tells us, *perimebant cunctam Italiam*, slew all *Italy*. This was followed by the war of the *Lombards*, the fiercest of all the *Barbarians*, which began A.C. 568, and lasted for thirty eight years together; *factâ tali clade*, saith *Anastasius*, *qualem à sæculo nullus meminit*; ending at last in the Papacy of *Sabinian*, A.C. 605, by a peace then made with the *Lombards*. Three years before this war ended, *Gregory* the great, then Bishop of *Rome*, thus speaks of it: *Qualiter enim & quotidianis gladiis & quantis Longobardorum incursionibus, ecce jam per triginta quinque annorum longitudinem premimur, nullis explere vocibus suggestionis valemus*: and in one of his Sermons to the people, he thus expresses the great consumption of the *Romans* by these wars: *Ex illa plebe innumerabili quanti remanseritis aspicitis, & tamen adhuc quotidiè flagella urgent, repentini casus opprimunt, novæ res & improvisæ clades affligunt*. In another Sermon he thus describes the desolations: *Destructæ urbes, eversa sunt castra, depopulati agri, in solitudinem terra redacta est. Nullus in agris incola, penè nullus in urbibus habitator remansit. Et tamen ipsæ parvæ generis humani reliquiæ adhuc quotidiè & sine cessatione feriuntur, & finem non habent flagella cœlestis justitiæ. Ipsa autem quæ aliquando mundi Domina esse videbatur, qualis remansit Roma conspicimus innumeris doloribus multipliciter attrita, defolatione civium, impressione hostium, frequentiâ ruinarum. — Ecce jam de illa omnes hujus fœculi potentes ablati sunt. — Ecce populi defecerunt. — Ubi enim Senatus? Ubi jam populus? Contabuerunt ossa, consumptæ sunt carnes. Omnis enim sæcularium dignitatum ordo extinctus est, & tamen ipsos vos paucos qui remansimus, adhuc quotidié gladii, adhuc quotidié innumeræ tribulationes premunt. — Vacua jam ardet Roma. Quid autem ista de hominibus dicimus? Cum ruinis crebrescentibus ipsa quoque destrui ædificia videmus. Postquam defecerunt homines etiam parietes cadunt. Jam ecce desolata, ecce contrita, ecce*

gemitibus oppressa est, &c. All this was spoken by *Gregory* to the people of *Rome*, who were witnesses of the truth of it. Thus by *the plagues of the four winds*, the Empire of the *Greeks* was shaken, and the Empire of the *Latins* fell; and *Rome* remained nothing more than the capital of a poor dukedom, subordinate to *Ravenna*, the seat of the Exarchs.

The fifth trumpet sounded to the wars, which the *King of the* South, as he is called by *Daniel*, made *in the time of the end*, in *pushing at the King who did according to his will*. This plague began with the *opening of the bottomless pit*, which denotes the letting out of a false religion: the *smoke which came out of the pit*, signifying the multitude which embraced that religion; and the *locusts which came out of the smoke*, the armies which came out of that multitude. This pit was opened, to let out smoke and locusts into the regions of the four monarchies, or some of them. *The King of these locusts* was the *Angel of the bottomless pit*, being chief governor as well in religious as civil affairs, such as was the Caliph of the *Saracens*. Swarms of locusts often arise in *Arabia fælix*, and from thence infest the neighbouring nations: and so are a very fit type of the numerous armies of *Arabians* invading the *Romans*. They began to invade them A.C. 634, and to reign at *Damascus* A.C. 637. They built *Bagdad* A.C. 766, and reigned over *Persia*, *Syria*, *Arabia*, *Egypt*, *Africa* and *Spain*. They afterwards lost *Africa* to *Mahades*, A.C. 910; *Media*, *Hircania*, *Chorasan*, and all *Persia*, to the *Dailamites*, between the years 927 and 935; *Mesopotamia* and *Miafarekin* to *Nasiruddaulas*, A.C. 930; *Syria* and *Egypt* to *Achsjid*, A.C. 935, and now being in great distress, the Caliph of *Bagdad*, A.C. 936, surrendred all the rest of his temporal power to *Mahomet* the son of *Rajici*, King of *Wasit* in *Chaldea*, and made him Emperor of Emperors. But *Mahomet* within two years lost *Bagdad* to the *Turks*; and thenceforward *Bagdad* was sometimes in the hands of the *Turks*, and sometimes in the hands of the *Saracens*, till *Togrul-beig*, called also *Togra*, *Dogrissa*, *Tangrolipix*, and *Sadoc*, conquered *Chorasan* and *Persia*; and A.C. 1055, added *Bagdad* to his Empire, making it the seat thereof. His successors *Olub-Arflan* and *Melechschah*, conquered the regions upon *Euphrates*; and these conquests, after the death of *Melechschah*, brake into the kingdoms of *Armenia*, *Mesopotamia*, *Syria*, and *Cappadocia*. The whole time that the Caliphs of the *Saracens* reigned with a temporal dominion at *Damascus* and *Bagdad* together, was 300 years, *viz.* from the year 637 to the year 936 inclusive.

Now locusts live but five months; and therefore, for the decorum of the type, these locusts are said to *hurt men five months and five months*, as if they had lived about five months at *Damascus*, and again about five months at *Bagdad*; in all ten months, or 300 prophetic days, which are years.

The sixth trumpet sounded to the wars, which *Daniel*'s King of the *North* made against the King above-mentioned, *who did according to his will*. In these wars the King of the *North*, according to *Daniel*, conquered the Empire of the *Greeks*, and also *Judea*, *Egypt*, *Lybia*, and *Ethiopia*: and by these conquests the Empire of the *Turks* was set up, as may be known by the extent thereof. These wars commenced A.C. 1258, when the four kingdoms of the *Turks* seated upon *Euphrates*, that of *Armenia major* seated at *Miyapharekin*, *Megarkin* or *Martyropolis*, that of *Mesopotamia* seated at *Mosul*, that of all *Syria* seated at *Aleppo*, and that of *Cappadocia* seated at *Iconium*, were invaded by the *Tartars* under *Hulacu*, and driven into the western parts of *Asia minor*, where they made war upon the *Greeks*, and began to erect the present Empire of the *Turks*. Upon the sounding of the sixth trumpet, [9] *John heard a voice from the four horns of the golden Altar which is before God, saying to the sixth Angel which had the trumpet, Loose the four Angels which are bound at the great river* Euphrates. *And the four Angels were loosed, which were prepared for an hour and a day, and a month and a year, for to slay the third part of men*. By the four horns of the golden Altar, is signified the situation of the head cities of the said four kingdoms, *Miyapharekin*, *Mosul*, *Aleppo*, and *Iconium*, which were in a quadrangle. They slew the third part of men, when they conquered the *Greek* Empire, and took *Constantinople*, A.C. 1453. and they began to be prepared for this purpose, when *Olub-Arslan* began to conquer the nations upon *Euphrates*, A.C. 1063. The interval is called an hour and a day, and a month and a year, or 391 prophetic days, which are years. In the first thirty years, *Olub-Arslan* and *Melechschah* conquered the nations upon *Euphrates*, and reigned over the whole. *Melechschah* died A.C. 1092, and was succeeded by a little child; and then this kingdom broke into the four kingdoms above-mentioned.

Notes to Chap. III.

[1] Apoc. ii. 4, &c.
[2] Apoc. ii. 9, 10.
[3] Ver. 14.
[4] Numb. xxv. 1, 2, 18, & xxi. 16.
[5] Apoc. iii. 10, 12.
[6] Apoc. iii. 16, 17.
[7] Apoc. viii. 7, &c.
[8] Apoc. xvi. 5, 6.
[9] Apoc. ix. 13, &c.

THE END

ADVERTISEMENT.

The last pages of these Observations having been differently drawn up by the Author in another copy of his Work; they are here inserted as they follow in that copy, after the 22d line of the 261st page foregoing.

And none was found worthy to open the book till the Lamb of God appeared; the great High-Priest represented by a lamb slain at the foot of the Altar in the morning-sacrifice. *And he came, and took the book out of the hand of him that sat upon the throne.* For the High-Priest, in the feast of the seventh month, went into the most holy place, and took the book of the law out of the right side of the Ark, to read it to the people: and in order to read it well, he studied it seven days, that is, upon the fourth, fifth, sixth, seventh, eighth, ninth and tenth days, being attended by some of the priests to hear him perform. These seven days are alluded to, by the Lamb's opening the seven seals successively.

Upon the tenth day of the month, a young bullock was offered for a sin-offering for the High-Priest, and a goat for a sin-offering for the people: and lots were cast upon two goats to determine which of them should be God's lot for the sin-offering; and the other goat was called *Azazel*, the scape-goat. The High-Priest in his linen garments, took a censer full of burning coals of fire from the Altar, his hand being full of sweet incense beaten small; and went into the most holy place within the veil, and put the incense upon the fire, and sprinkled the blood of the bullock with his finger upon the mercy-seat and before the mercy-seat seven times; and then he killed the goat which fell to God's lot, for a sin-offering for the people, and brought his blood within the veil, and sprinkled it also seven times upon the mercy-seat and before the mercy-seat. Then he went out to the Altar, and sprinkled it also seven times with the blood of the bullock, and as often with the blood of the goat. After this *he laid both his hands upon the head of the live goat; and confessed over him all the iniquities of the children of* Israel*, and all their transgressions in all their sins, putting them upon the head of the goat;*

and sent him away into the wilderness by the hands of a fit man: and the goat bore upon him all their iniquities into a land not inhabited, Levit. chap. iv. & chap. xvi. While the High-Priest was doing these things in the most holy place and at the Altar, the people continued at their devotion quietly and in silence. Then the High-Priest went into the holy place, put off his linen garments, and put on other garments; then came out, and sent the bullock and the goat of the sin-offering to be burnt without the camp, with fire taken in a censer from the Altar: and as the people returned home from the Temple, they said to one another, *God seal you to a good new year*.

In allusion to all this, *when he had opened the seventh seal, there was silence in heaven about the space of half an hour. And an Angel stood at the Altar having a golden Censer, and there was given unto him much incense, that he should offer it with the prayers of all Saints, upon the golden Altar which was before the throne. And the smoke of the incense with the prayers of the Saints ascended up before God out of the Angel's hand. And the Angel took the Censer, and filled it with fire of the Altar, and cast it to the earth*, suppose without the camp, for sacrificing the goat which fell to God's lot. For the High-Priest being *Christ* himself, the bullock is omitted. At this sacrifice *there were voices and thundrings*, of the musick of the Temple, *and lightnings* of the sacred fire, *and an earthquake*: and synchronal to these things was the sealing of *the 144000 out of all the twelve tribes of the children of* Israel *with the seal of God in their foreheads*, while the rest of the twelve tribes received the mark of the Beast, and the Woman fled from the Temple into the wilderness to her place upon this Beast. For this sealing and marking was represented by casting lots upon the two goats, sacrificing God's lot on mount *Sion*, and sending the scape-goat into the wilderness loaden with the sins of the people.

Upon the fifteenth day of the month, and the six following days, there were very great sacrifices. And in allusion to the sounding of trumpets, and singing with thundring voices, and pouring out drink-offerings at those sacrifices, *seven trumpets are sounded*, and *seven thunders utter their voices*, and *seven vials of wrath are poured out*. Wherefore the sounding of the *seven trumpets*, the voices of the *seven thunders*, and the pouring out of the *seven vials of wrath*, are synchronal, and relate to one and the same division of the time of the seventh seal following the silence, into seven successive parts. The seven days of this feast were called the feast of

Tabernacles; and during these seven days the children of *Israel* dwelt in booths, and rejoiced with palm-branches in their hands. To this alludes *the multitude with palms in their hands*, which appeared after the sealing of the 144000, and *came out of the great tribulation* with triumph at the battle of the great day, to which the seventh trumpet sounds. The visions therefore of the 144000, and of the palm-bearing multitude, extend to the sounding of the seventh trumpet, and therefore are synchronal to the times of the seventh seal.

When the 144000 *are sealed out of all the twelve tribes of* Israel, and the rest receive *the mark of the Beast*, and thereby the first temple is destroyed; *John* is bidden to *measure the temple and altar*, that is, their courts, *and them that worship therein*, that is, the 144000 standing on mount *Sion* and on the sea of glass: *but the court that is without the temple*, that is, the peoples court, to *leave out and measure it not, because it is given to the* Gentiles, those who receive the mark of the Beast; *and the holy city they shall tread under foot forty and two months*, that is, all the time that the Beast acts under the woman *Babylon*: and *the two witnesses prophesy 1260 days*, that is, all the same time, *clothed in sackcloth. These have power*, like *Elijah, to shut heaven that it rain not*, at the sounding of the first trumpet; and, like *Moses, to turn the waters into blood* at the sounding of the second; *and to smite the earth with all plagues*, those of the trumpets, *as often as they will*. These prophesy at the building of the second temple, like *Haggai* and *Zechary*. These are *the two Olive-trees*, or Churches, which *supplied the lamps with oil*, *Zech.* iv. These are *the two candlesticks*, or Churches, *standing before the God of the earth*. Five of the seven Churches of *Asia*, those in prosperity, are found fault with, and exhorted to repent, and threatned to be *removed out of their places*, or *spewed out of* Christ's *mouth*, or *punished with the sword of* Christ's *mouth, except they repent*: the other two, the Churches of *Smyrna* and *Philadelphia*, which were under persecution, remain in a state of persecution, to illuminate the second temple. When the primitive Church catholick, represented by *the woman in heaven*, apostatized, and became divided into two corrupt Churches, represented by the *whore of* Babylon and the *two-horned Beast*, the 144000 *who were sealed out of all the twelve tribes*, became the *two Witnesses*, in opposition to those two false Churches: and the name of *two Witnesses* once

imposed, remains to the true Church of God in all times and places to the end of the Prophecy.

In the interpretation of this Prophecy, *the woman in heaven clothed with the sun*, before she flies into the wilderness, represents the primitive Church catholick, illuminated with the *seven lamps* in the *seven golden candlesticks*, which are the *seven Churches* of *Asia*. The Dragon signifies the same Empire with *Daniel*'s He-goat in the reign of his last horn, that is, the whole *Roman* Empire, until it became divided into the *Greek* and *Latin* Empires; and all the time of that division it signifies the *Greek* Empire alone: and the Beast is *Daniel*'s fourth Beast, that is, the Empire of the *Latins*. Before the division of the *Roman* Empire into the *Greek* and *Latin* Empires, the Beast is included in the body of the Dragon; and from the time of that division, the Beast is the *Latin* Empire only. Hence the Dragon and Beast have the same heads and horns; but the heads are crowned upon the Dragon, and the horns upon the Beast. The horns are ten kingdoms, into which the Beast becomes divided presently after his separation from the Dragon, as hath been described above. The heads are seven successive dynasties, or parts, into which the *Roman* Empire becomes divided by the opening of the seven seals. Before the woman fled into the wilderness, *she being with child* of a Christian Empire, *cried travelling*, *viz.* in the ten years persecution of *Dioclesian*, *and pained to be delivered: and the Dragon*, the heathen *Roman* Empire, *stood before her, to devour her child as soon as it was born. And she brought forth a man child, who* at length *was to rule all nations with a rod of iron. And her child was caught up unto God, and to his throne* in the Temple, by the victory of *Constantine* the great over *Maxentius*: *and the woman fled* from the Temple *into the wilderness* of *Arabia* to *Babylon*, *where she hath a place* of riches and honour and dominion, upon the back of the Beast, *prepared of God, that they should feed her there 1260 days. And there was war in heaven*, between the heathens under *Maximinus* and the new Christian Empire; *and the great Dragon was cast out, that old serpent, which deceiveth the whole world*, the spirit of heathen idolatry; *he was cast out* of the throne *into the earth. And they overcame him by the blood of the Lamb, and by the word of their testimony; and they loved not their lives unto the death*.

And when the Dragon saw that he was cast unto the earth, he persecuted the woman which brought forth the man child, stirring up a new persecution

against her in the reign of *Licinius*. *And to the woman*, by the building of *Constantinople* and equalling it to *Rome*, *were given two wings of a great eagle, that she might flee into the wilderness into her place* upon the back of her Beast, *where she is nourished for a time, and times, and half a time, from the face of the serpent. And the serpent*, upon the death of *Constantine* the great, *cast out of his mouth water as a flood*, *viz.* the *Western* Empire under *Constantine junior* and *Constans*, *after the woman: that he might cause her to be carried away of the flood. And the earth*, the nations of *Asia* now under *Constantinople*, *helped the woman*; and by conquering the *Western* Empire, now under *Magnentius*, *swallowed up the flood which the Dragon cast out of his mouth. And the Dragon was wroth with the woman, and went to make war with the remnant of her seed, which keep the commandments of God, and have the testimony of* Jesus Christ*, which* in that war *were sealed out of all the twelve tribes of* Israel, and remained upon mount *Sion* with the Lamb, being in number 144000, and having their father's name written in their foreheads.

When the earth had swallowed up the flood, and the Dragon was gone to make war with the remnant of the woman's seed, *John stood upon the sand of the sea, and saw a Beast rise out of the sea, having seven heads and ten horns. And the Beast was like unto a Leopard, and his feet were as the feet of a Bear, and his mouth as the mouth of a Lion. John* here names *Daniel*'s four Beasts in order, putting his Beast in the room of *Daniel*'s fourth Beast, to shew that they are the same. *And the Dragon gave* this Beast *his power and his seat and great authority*, by relinquishing the *Western* Empire to him. *And one of his heads*, the sixth, was *as it were wounded to death*, *viz.* by the sword of the earth, which swallowed up the waters cast out of the mouth of the Dragon; *and his deadly wound was healed*, by a new division of the Empire between *Valentinian* and *Valens*, *An.* 364. *John* saw the Beast rise out of the sea, at the division thereof between *Gratian* and *Theodosius*, *An.* 379. The Dragon gave the Beast his power, and his seat and great authority, at the death of *Theodosius*, when *Theodosius* gave the *Western* Empire to his son *Honorius*. After which the two Empires were no more united: but the *Western* Empire became presently divided into ten kingdoms, as above; and these kingdoms at length united in religion under the woman, and reign with her *forty and two months*.

And I beheld, saith *John*, *another Beast coming up out of the earth.* When the woman fled from the Dragon into the kingdom of the Beast, and became his Church, this other Beast rose up out of the earth, to represent the Church of the Dragon. For *he had two horns like the Lamb*, such as were the bishopricks of *Alexandria* and *Antioch*: *and he spake as the Dragon* in matters of religion: *and he causeth the earth*, or nations of the Dragon's kingdom, *to worship the first Beast, whose deadly wound was healed*, that is, to be of his religion. *And he doth great wonders, so that he maketh fire come down from heaven on the earth in the sight of men*; that is, he excommunicateth those who differ from him in point of religion: for in pronouncing their excommunications, they used to swing down a lighted torch from above. *And he said to them that dwell on the earth, that they should make an image to the Beast, which had the wound by a sword, and did live*; that is, that they should call a Council of men of the religion of this Beast. *And he had power to give life unto the image of the Beast, that the image of the Beast should both speak, and cause that as many as would not worship the image of the Beast should be killed*, *viz.* mystically, by dissolving their Churches. *And he causeth all both small and great, rich and poor, free and bond, to receive a mark in their right band or in their foreheads, and that no man might buy or sell, save he that had the mark, or the name of the Beast, or the number of his name*; that is, the mark, or the name ΛΑΤΕΙΝΟΣ, or the number thereof χξς, 666. All others were excommunicated.

When the seven Angels had poured out the seven vials of wrath, and *John* had described them all in the present time, he is called up from the time of the seventh vial to the time of the sixth seal, to take a view of the woman and her Beast, who were to reign in the times of the seventh seal. In respect of the latter part of time of the sixth seal, then considered as present, the Angel tells *John*: *The Beast that thou sawest, was and is not, and shall ascend out of the abyss, and go into perdition*; that is, he was in the reign of *Constans* and *Magnentius*, until *Constantius* conquered *Magnentius*, and re-united the *Western* Empire to the *Eastern*. He is not during the reunion, and he shall ascend out of the abyss or sea at a following division of the Empire. The Angel tells him further: *Here is the mind which hath wisdom: the seven heads are seven mountains, on which the woman sitteth*; *Rome* being built upon seven hills, and thence called the seven-hilled city. *Also there are*

seven Kings: five are fallen, and one is, and the other is not yet come; and when he cometh, he must continue a short space: and the Beast that was and is not, even he is the eighth, and is of the seven, and goeth into perdition. Five are fallen, the times of the five first seals being past; and one is, the time of the sixth seal being considered as present; and another is not yet come, and when he cometh, which will be at the opening of the seventh seal, he must continue a short space: and the Beast that was and is not, even he is the eighth, by means of the division of the *Roman* Empire into two collateral Empires; and is of the seven, being one half of the seventh, and shall go into perdition. The words, *five are fallen, and one is, and the other is not yet come*, are usually referred by interpreters to the time of *John* the Apostle, when the Prophecy was given: but it is to be considered, that in this Prophecy many things are spoken of as present, which were not present when the Prophecy was given, but which would be present with respect to some future time, considered as present in the visions. Thus where it is said upon pouring out the seventh vial of wrath, that *great* Babylon *came in remembrance before God, to give unto her the cup of the wine of the fierceness of his wrath*; this relates not to the time of *John* the Apostle, but to the time of pouring out the seventh vial of wrath. So where it is said, *Babylon is fallen, is fallen*; and *thrust in thy sickle and reap, for the time is come for thee to reap*; and *the time of the dead is come, that they should be judged*; and again, *I saw the dead small and great stand before God*: these sayings relate not to the days of *John* the Apostle, but to the latter times considered as present in the visions. In like manner the words, *five are fallen, and one is, and the other is not yet come*, and *the Beast that was and is not, he is the eighth*, are not to be referred to the age of *John* the Apostle, but relate to the time when the Beast was to be wounded to death with a sword, and shew that this wound was to be given him in his sixth head: and without this reference we are not told in what head the Beast was wounded. *And the ten horns which thou sawest, are ten Kings, which have received no kingdom as yet, but receive power as Kings one hour with the Beast. These have one mind*, being all of the whore's religion, *and shall give their power and strength unto the Beast. These shall make war with the Lamb*, at the sounding of the seventh trumpet; *and the Lamb shall overcome them: for he is Lord of Lords and King of Kings; and they that are with him are called and chosen and faithful. And he saith unto me, the waters which thou*

sawest where the whore sitteth, are peoples and multitudes and nations and tongues, composing her Beast. *And the ten horns which thou sawest upon the Beast, these shall hate the whore, and shall make her desolate and naked, and shall eat her flesh, and burn her with fire*, at the end of the 1260 days. *For God hath put in their hearts to fulfil his will, and to agree and give their kingdom unto the Beast, until the words of God shall be fulfilled. And the woman which thou sawest, is that great city which reigneth over the Kings of the earth*, or the great city of the *Latins*, which reigneth over the ten Kings till the end of those days.

FINIS.

AN HISTORICAL ACCOUNT OF TWO NOTABLE CORRUPTIONS OF SCRIPTURE

This short book (see Figure 1) is actually the full text of a letter to John Locke, sent on 14th November 1690, but not published until 1754 (nearly three decades after Newton's death). It concerns the interpretation of two Biblical passages from the Kings James Version: 1 John 5:7 (For there are three that bear record in heaven, the Father, the Word, and the Holy Ghost: and these three are one.) and 1 Timothy 3:16 (And without controversy great is the mystery of godliness: God was manifest in the flesh, justified in the Spirit, seen of angels, preached unto the Gentiles, believed on in the world, received up into glory.). Newton returned to the earliest Latin and Greek manuscripts to examine the accuracy of these verses. In his own words:

"Since the discourses of some late writers have raised in you a curiosity of knowing the truth of that text of Scripture concerning the testimony of the Three in Heaven, 1 John v. 7, I have here sent you an account of what the reading has been in all ages, and by what steps it has been changed, so far as I can hitherto determine by records. And I have done it the more freely, because to you, who understand the many abuses which they of the Roman church have put upon the world, it will scarce be ungrateful to be convinced of one more than is commonly believed."

It is interesting to note that Newton applied scientific methodology to this theological issue. He ignored received wisdom, went back to, and re-examined, the original experimental data (in this case, the original texts), drew up a hypothesis, and tested it against the current knowledge.

AN

HISTORICAL ACCOUNT

OF

TWO NOTABLE

CORRUPTIONS OF SCRIPTURE:

IN A LETTER TO A FRIEND.

BY

SIR ISAAC NEWTON.

PUBLISHED ENTIRE FROM A MS. IN THE AUTHOR'S HAND-WRITING
IN THE POSSESSION OF THE REV. DR. EKENS,
DEAN OF CARLISLE.

Exactly reprinted from Bishop Horsley's Edition of Sir Isaac Newton's Works, vol. v. 1785.

LONDON:

JOHN GREEN, 121 NEWGATE STREET.

1841.

Figure 1: The title page of the 1841 edition, exactly reprinting the 1785 edition

AN HISTORICAL ACCOUNT OF TWO NOTABLE CORRUPTIONS OF SCRIPTURE

Sir

Since the discourses of some late writers have raised in you a curiosity, of knowing the truth of that text of Scripture concerning the testimony of the three in heaven 1 Iohn 5.7: I have here sent you an account of what the reading has been in all ages, & by [what] steps it has been changed, so far as I can hitherto determine by records. And I have done it the more freely because to you who understand the many abuses which they of the Roman Church have put upon the world, it will scarce be ungratefull to be convinced of one more than is commonly believed. For althô the more learned & [clear] sighted men (as Luther, Erasmus, Bullinger Grotius & some others) could not dissemble their knowledge, yet the generality are fond of the place for its making against heresy. But whilst we exclaim against the pious frauds of the Roman Church, & make it a part of our religion to detect & renounce all things of that kind: we must acknowledge it a greater crime in us to favour such practises, then in the Papists we so much blame on that account. For they act according to their religion but we contrary to ours. In the eastern nations, & for a long time in the western the faith subsisted without this text & it is rather a danger to religion then an advantage to make it now lean upon a bruised reed. There cannot be better service done to the truth then to purge it of things spurious: & therefore knowing your prudence & calmnesse of temper, I am confident I shal not offend you by telling you my mind plainly: especially since ’tis no article of faith, no point of discipline, nothing but a criticism concerning a text of scripture which I am going to write about.

The history of the corruption in short is this. First some of the Latines interpreted the spirit water & blood of the Father, Son & Holy ghost to prove them one. Then Ierome for the same end inserted the Trinity in expres words into his Version. Out of him the Africans [began to allege] it against the Vandals about 64 years after his death. Afterwards the Latines noted his variations in the margins of their books & thence it began at length to creep into the text in transcribing, & that chiefly in the twelft & following Centuries when revived by the Schoolmen. And when printing came it crept out of the Latine into the printed Greek against the authority of all the greek MSS & ancient Versions, & from the Venetian presses it went soon after into Grece. Now the truth of this history will appear by considering the arguments on both sides.

The arguments alleged for the testimony of the three in heaven are the authorities of Cyprian, Athanasius & Ierome, & of many greek manuscripts & almost all the Latine ones.

Cyprians words run thus. a.[1] The Lord saith, I and the Father am one, & again of the Father & Son & Holy Ghost it is written. And these three are one. The Socinians here deale too injuriously with Cyprian while they would have this place corrupted: for Cyprian in another place repeats almost the same thing b[2] If, saith he, [one baptized amongst hereticks] be made the temple of God, tell me I pray of what God? . . . . If of the Holy ghost, since these three are one, how can the Holy ghost be reconciled to him who is the enemy of either the Father or the Son. These places of Cyprian being in my opinion genuine seem so apposite to prove the testimony of the three in heaven, that I should never have suspected a mistake in it could I but have reconciled it with the ignorance I meet with of this reading in the next age amongst the Latines of both Afric & Europe as well as amongst the Greeks. For had it been in Cyprian's Bible, the Latines of the next age when all the world was engaged in disputing about the Trinity & all arguments that could be thought of were diligently sought out & daily brought upon the stage, could never have been ignorant of a text, which in our age now the dispute is over is chiefly insisted upon. In reconciling this difficulty I consider therefore that the only words of the text quoted by Cyprian in both places are, And these three are one: which words may belong to the eighth verse as well as to the seventh. ffor c[3] Eucherius Bishop of Lion in France & contemporary to S. Austin, reading the text without the seventh verse tells us that many then understood the Spirit, the Water & the Blood to signify the Trinity. And d[4] S. Austin is one of those many as you may see in his third book against Maximus, where he tells us that the Spirit is the Father, for God is a spirit, the water the Holy Ghost, for he is the water which Christ gives to them that thirst, & the blood the Son for the Word was made flesh. Now if it was the opinion of many in the western Churches of those times that the spirit, the water & the blood signified the Father, the Son, & the Holy Ghost, its plain that the testimony of the three in heaven in expresse words was not yet crept into their books, [&] even without this testimony it was obvious for Cyprian or any man else of that opinion to say of the Father & Son & Holy Ghost: it is written And these three are one. And that this was Cyprian's meaning, e[5] Facundus, an

African Bishop in the sixt Century is my author. For he tells us expresly that Cyprian in the above mentioned place understood it so, interpreting the water, spirit & blood to be the Father, Son & Holy Ghost & thence affirming that Iohn said of the Father, Son & Holy Ghost, These three are one. This at least may be gathered from this passage of Facundus, that some in those early ages interpreted Cyprian after this manner. Nor do I understand how any of those many who took the spirit water & blood for a type of the Trinity, or any man else who was ignorant of the testimony of the three in heaven (as the Churches in the times of the Arian controversy generally were) could understand him otherwise. And even Cyprian's own words do plainly make for this interpretation. For he does not say, the Father, the Word & the Holy Ghost as 'tis now in the seventh verse, but the Father & Son & Holy Ghost as 'tis in Baptism, the place from whence they used at first to derive the Trinity. If it be pretended that the words cited by Cyprian are taken out of the seventh verse rather then out of the eighth because he reads not Hi tres in unum sunt but hi tres unum sunt I answer that the Latines generally read hi tres unum sunt as well in the eighth verse as in the seventh as you may see in the newly cited places of S. Austin & Facundus, & those of Ambrose, Pope Leo, Beda & Cassiodorus which follow, & in the present Vulgar Latine. So then the testimony of Cyprian respects the eighth, or at least is as applicable to that verse as to the seventh, & therefore is of no force for proving the truth of the seventh: but on the contrary for disproving it we have here the testimonies of Facundus, S. Austin, Eucherius & those many others whom Eucherius mentions. [For] if those of that age had met with it in their books they would never have understood the spirit the water & the blood to be the three persons of the Trinity in order to prove them one God.

And what is said of the testimony of Tertullian & Cyprian may be much more said of that in the feigned disputation of Athanasius with Arius at Nice. For there the words cited are only καὶ ὀι τρεις τοἕν ἐισιν these three are one, & they are taken out of the seventh verse without naming the persons of the Trinity before them. For the Greeks interpreted the spirit water & blood of the Trinity as well as the Latines, as is manifest by the annotations they made on this text in the margins of some of their manuscripts. For a[6] Father Simon informs us that one of the MSS in the Library of the King of ffrance marked Num. 2247 over against these words

[7] Ὅτι ρεις ἐισιν δι μαρτυρουντες ἐν τη γ[ο] τὸ πνευμα καὶ τὸ ὕδωρ καί τὸ ἀιμα For there are three that beare record [in earth] the spirit the water & the blood: there is this remark τουτέστι τὸ πνευμα τὸ ἅγιον καὶ ὁ πατὴρ καὶ ἀυτὸς ἑαντου That is, the holy Ghost & the Father & he of himself. And in the same copy over against these words καί [&] τρεις ἐις τὸ ἕν ἐισι & these three are one this note is added. τουτὲστι μία θεότης ἐις θεός. That is, one Deity one God. This MS is about 500 years old. Also in the margin of one of the MSS in Mons Colberts Library Num. 871, as the same Father tells us there is the like remark. For besides these words ἐις θεος μία θεοτης One God, one Godhead; there are added μαρτυρία του θεου του πατρὸς καὶ του ἁγίου πνεύματος The testimony of God the father & of the Holy Ghost. These marginal notes sufficiently shew how the Greeks used to apply this text to the Trinity & by consequence how the author of that disputation is to be understood. But I should tell you also that that Disputation was not writ by Athanasius but by a later Author & therefore as a spurious piece uses not to be insisted upon. And besides, this disputation was not writ by Athanasius but by a later Author, & therfore as a spurious piece uses not to be much insisted upon.

Now this mystical application of the spirit water & blood to signify the Trinity, seems to me to have given occasion to some body either fraudulently to insert the testimony of the three in heaven in expresse words into the text for proving the Trinity, or else to note it in the margin of his book by way of interpretation, whence it might afterwards creep into the text in transcribing. And the first upon record that inserted it is Ierome, if the f[8] Preface to the Canonical Epistles which pass under his name are his. For whilst he composed not a new Translation of the new Testament but only corrected the ancient Vulgar Latine (as learned men think) & amongst his emendations (writen perhaps at first in the margin of his book) he inserted this testimony [and complains] in the said Preface how he was thereupon accused by some of the Latines for falsifying the scripture, & makes answer that former Latine Translators had much erred from the faith in putting only the spirit water & blood in their edition & omitting the testimony of the three in heaven whereby the Catholick faith is established by this defense he seems to say that he corrected the vulgar latine Translation by the original Greek, & this is the great testimony which the Text relies upon.

But whilst he confesses it was not in the Latine before, & accuses former Translators of falsifying the scriptures in omitting it, he satisfies us that it has crept into the Latine since his time, & so cuts off all the authority of the present Vulgar Latine for justifying it. And whilst he was accused by his contemporaries of falsifying the scriptures in inserting it, this accusation also confirms that he altered the public reading. For had the reading been dubious before he made it so, no man would have charged him with falsification for following either part. Also whilst upon this accusation he recommends the alteration by its usefulnesse for establishing the catholic faith, this renders it the more suspected by discovering both the designe of his making it, & the ground of his hoping for successe. However seing he was thus accused by his contemporaries, it gives us just occasion to examin the businesse between him & his accusers. And so he being called to the barr, we are not to lay stresse upon his own testimony for himself, (for no man is a witnesse in his own cause,) but laying aside all prejudice we ought according to the ordinary rules of justice to examin the businesse between him & his accusers by other witnesses.

They that have been conversant in his writings observe a strange liberty he takes in asserting things. Many notable instances of this he has left us in composing those very fabulous lives of Paul & Hilarion, not to mention what he has written upon other occasions. Whence Erasmus said of him that he was in affirming things g[9] frequently violent & impudent & often contrary to himself. But I accuse him not. It's possible he might be sometimes imposed upon or through inadvertency commit a mistake. Yet since his contemporaries accused him, it's just we should lay aside the prejudice of his great name & hear the cause impartially between them

Now the witnesses between them are partly the ancient Translators of the scriptures into various languages, partly the writers of his own age & of the ages next before & after him & partly the scribes who have copied out the greek Manuscripts of the scriptures in all ages. And all three are against him. For by the unanimous evidence of all these, it will appear that the testimony of the three in heaven was wanting in the Greek Manuscripts from whence Ierome, or whoever was the author of that Preface to the Canonical Epistles, pretends to have borrowed it.

The ancient Interpreters which I cite as witnesses against him are chiefly the Authors of the ancient Vulgar Latin of the Syriac & of the Ethiopic

versions. For as he tells us that the Latines omitted the testimony of the three in heaven in their version before his time, so in the Syriac & Ethiopic Versions (both which by Walton's account of them are much ancienter then Ierome's time, being the Versions which the oriental & Ethiopic nations received from the beginning & generally used as the Latines did the vulgar Latine) that testimony is wanting to this day: & the authors of these three most ancient most famous & most received versions by omitting it are concurrent witnesses that they found it wanting in the original greek Manuscripts of their times. Tis wanting also in other ancient versions, as in the Egyptian Arabic published in Walton's Polyglott, in k[10] the Armenian used ever since Chrysostom's age by the Armenian nations & in the Illyrican of Cyrillus used in Rascia, Bul garia Moldavia Ruscia Muscovy & other countries which use the Sclavonick tongue. In a l[11] copy of this version printed at Ostrobe in Volkinia in the year 1581, I have seen it wanting, & one m[12] Camillus relates the same thing out of ancient manuscripts of this Version seen by him. Father Simon n[13] notes it wanting also in a certain Version of the French Church, which (saith he) is at least a thousand years old & which was published by F. [Mabillon] a Benedictine Monck. Nor do I know of any Version wherein it's extant except the modern vulgar Latin & such modern versions of the western nations as have been influenced by it. So then by the unanimous consent of all the ancient & faithful Interpreters we have hitherto met with (who doubtless made use of the best Manuscripts they could get) the testimony of the three in heaven was not anciently in the Greek.

And that it was neither in the ancient Versions nor in the Greek but was wholy unknown to the first Churches is most certain by an argument hinted above, namely that in all that vehement universal & lasting controversy about the Trinity in Ieromes time & both before & long enough after it: this text of the three in heaven was never thought of. Tis now in every bodies mouth & acccounted the main text for the business & would have been so then had it been in their books & yet it is not once to be met with in all the Disputes, Epistles, Orations & other writings of the Greeks & Latines (Alexander of Alexandria, Athanasius the Council of Sardica, Basil, Nazianzen, Nyssen, Epiphanius, Chrysostom, Cyril, Theodoret, Hilary, Ambrose, Austin, Victorinus Afer, Philastrius Brixiensis, Phæbadius Agennensis, Gregorius Bæticus, Faustinus Diaconus, Paschasius, Arnobius

junior, Cerealis & others) in the times of those controversies; no not in Ierome himself if his version & Preface to the Canonical epistles be excepted. The writings of those times were very many & copious & there is no argument or text of scripture to this purpose which they do not urge again & again. That of Iohn's Gospel, I & the father am one is every where inculcated but this of the three in heaven & their being one is no where to be met with till at length when the ignorant ages came on it began by degrees to creep into the Latine copies out of Ierome's Version. So far are they from citing the testimony of the three in heaven, that on the contrary as often as they have occasion to mention the place they omit it, & that as well after Ierome's age as in & before it. For Hesychius cites the place thus. [14] Audi Ioannem dicentem tria sunt qui testimonium præbent & tres unum sunt, spiritus et sanguis et aqua. The words in terra he omits, which is never done but in copies where the testimony of the three in heaven is wanting. Cassiodorus, or who ever was the author of the latin Version of the discourse of Clemens Alexandrinus on these Epistles of St Iohn, reads it thus. [15] Quia tres sunt qui testificantur spiritus et aqua et sanguis et hi tres unum sunt. Beda in his commentary on the place reads it thus: Et spiritus est qui testificatur quoniam Christus est veritas. Quoniam tres sunt qui testimonium dant in terra spiritus aqua et sanguis & tres unum sunt. Si testimonium. &c But here the words in terra so far as I can gather by his commentary on this text have been inserted by some later hand. The author of the first Epistle ascribed to Pope Eusebius reads it as Beda doth, omitting only the words in terra. And if the authority of Popes be valuable, Pope Leo the great, in his tenth Epistle thus cites the place. Et spiritus est qui testificatur, quoniam spiritus est veritas. Quia tres sunt qui testimonium dant, spiritus et aqua et sanguis et hi tres unum sunt. Ambrose in the sixt Chapter of his first book de spiritu sancto disputing for the unity of the three persons, saith, Hi tres unum sunt Ioannes dixit, Aqua sanguis et spiritus. Vnum in mysterio non in natura. This is all he could find of the text while he was disputing about the Trinity, & therefore he proves the unity of the persons by the mystical unity of the spirit water & blood, interpreting these of the Trinity with Cyprian & others. Yea in the 11th chapter of his third book, he fully recites the Text thus. [16]Per aquam et sanguinem venit Christus Iesus non solum in aqua sed in aqua et sanguine: et spiritus testimonium quoniam spiritus est veritas. Quia tres sunt testes spiritus aqua

et sanguis, et hi tres unum sunt in Christo Iesu. The like readings of ffacundus, Eucherius & S. Austin you have in the places cited above. These are the Latines as late or later then Ierome. ffor Ierome did not prevail with the Churches of his own times to receive the testimony of the three in heaven. And for them to know his Version & not receive this testimony was in effect to condemn it.

And as for the Greeks, Cyril of Alexandria reads the text without this testimony in the 14th book of his The saurus cha, & again in his first book de fide ad Reginas a little after the middle. And so doth Oecumenius a later Greek in his commentary on this place of S. Iohn's Epistle. Also Didymus Alexandrinus in his commentary on the same place reads the spirit water & blood without mentioning the three in heaven, & so he doth in his book of the Holy Ghost where he seems to omit nothing that he could find for his purpose: & so doth Gregory Nazianzen in his 37th Oration concerning the Holy Ghost, & also Nicetas in his Commentary on Gregory Nazianzen's 44th Oration. And here it is further observable that the Eusebians contended that the Father Son & Holy Ghost were not to be connumerated because things of a different kind, & Nazianzen & Nicetas answer that they might be connumerated because St Iohn connumerates three things not consubstantial, the spirit the water & the blood. By the objection of the Eusebians it appears that the testimony of the three in heaven was not in their books, & by the answer of the Catholicks it is as evident that it was not in theirs. ffor while they answer by instancing in the spirit water & blood they could not have missed of the ffather Word & Holy Ghost had they been connumerated & called one in the words immediately before; & to answer by instancing in these would have been far more to the purpose because the very thing in question. In like manner the Eunomians in disputing against the Catholicks objected that the Holy Ghost is no where in scripture conjoyned with the ffather & Son except in baptism, which is as much as to say that the testimony of the three in heaven was not in their books: & S. Basil[17] whilst he is very diligent in returning an answer to them, & perplexes himself in citing places which are nothing to the purpose, does not produce this text of the three in heaven, thô the most obvious & only proper place had it been then in the scriptures, & therefore he knew nothing of it. The Objection of the Eunomians & answer of the Catholicks sufficiently shews that it was in the books of neither party. Besides all this,

the 10th Epistle * * Insert this at the bottom of the next page. epistle * of Pope Leo mentioned above, was that very famous Epistle to Flavian Patriarch of Constantinople against Eutyches, which went about through all the Churches both Eastern & western, being translated into Greek & sent about in the East by Flavian. It was generally applauded in the West, & read in the Councel of Chalcedon, & there solemnly approved & subscribed by all the Bishops. And in this Epistle the text was thus cited. Et spiritus est qui testificatur quoniam Christus est veritas: Quia tres sunt qui testimonium dant, spiritus et aqua et sanguis et hi tres unum sunt. And by putting πνευμα (according to the greek reading) for Christus which is still the vulgar Latine, it was thus translated by the Greeks. Καὶ τὸ πνευμά ἐστιν τὸ μαρτυρουν ἐπειδὴ τὸ πνευμά ἐστιν ἡ ἀλήθεια. Τρεις γαρ ἐισιν ὀι μαρτυρουντες τὸ πνευμα καὶ τὸ ὕδωρ καὶ τὸ ἀιμα καὶ ὀι τρεις τὸ ἓν ἐισι. So then we have this reading quoted by the Pope, owned in the West & solemnly subscribed in the East by the fourth general Council. & therefore it continued the public received reading in both east & west till after the age of that Council.

So then the testimony of the three in heaven, which in the times of those controversies would have been in every bodies mouth had it been in their books, was wholy unknown to the Churches of those ages. All that they could find in their books was the testimony of the water the spirit & the blood. Will you now say that the testimony of the three in heaven was rased out of their books by the prevailing Arians? Yes truly those Arians were crafty Knaves that could conspire so cunningly & slyly all the world over at once (as at the word of Mithridates) in the latter end of the reign of the Emperor Constantius to get all men's books into their hands & correct them without being perceived: Ay & Conjurers too, to do it without leaving any blot or chasm in the books, whereby the knavery might be suspected & discovered; & to wipe even the memory of it out of all men's brains, so that neither Athanasius nor any body else could afterwards remember that they had ever seen it in their books before, & out of their own too so that when they turned to the consubstantial faith, as they generally did in the West soon after the death of Constantius, they could remember no more of it then any body else. Well then it was out of their books in Ierom's age when he pretends it was in which is the point we were to prove; & when any body can shew that it was in before, it may be pertinent to consider that point also: but till then we are only to enquire how since it was out, it came into

the copies now extant. For they that without proof accuse hereticks of corrupting books, & upon that pretense correct them at their pleasure without the authority of ancient manuscripts, (as some learned men in the fourth & fift Centuries used to do,) are ffalsaries by their own confession, & need no other confutation. And therefore if this reading was once out, we are bound in justice to beleive it was out from the beginning, unlesse the rasing of it out can be proved by some better argument then that of pretense & clamour.

Will you now say that Ierome followed some Copy different from what the Greeks were acquainted with? This is to overthrow the authority of his Version by making him depart from the received Greek: & besides it is contrary to what he himself seems to represent. ffor in blaming, not the vulgar greek copies, but the Latine Interpreters which were before him as if they had varied from the received Greek, he represents that he followed it. He does not excuse & justify himself for receding from the received Greek to follow a private copy, but accuses former Interpreters as if in leaving out the testimony of the three in heaven they had not followed the received Greek as he did. And therefore since the Greeks knew nothing of this testimony, the authority of his Version sinks: & that the rather because he was then accused of corrupting the text & could not perswade either the Greeks or Latines of those times to receive his reading. For the Latines received it not till many years after his death, & the Greeks not till this present age when the Venetians sent it amongst them in printed books: & their not receiving it was to approve the accusation.

The authority of this Version being thus far discust, it remains that we consider the authority of the Manuscripts wherein we now read the testimony of the three in heaven. And by the best enquiry that I have been able to make it is wanting in the manuscripts of all Languages but the Latine. ffor as we have shewed that the Ethiopic, Syriac, Arabic, Armenian & Sclavonian Versions still in use in the several eastern nations Ethiopia, Egypt, Syria, Mesopotamia, Armenia, Moscovy & some others are strangers to this reading & that it was anciently wanting also in the French : so I am told by those who have been in Turkey that it is wanting to this day in the Greek manuscripts of those parts as well as in the manuscripts which have been brought from thence into the west; & that the Greeks now they have got it in print from the Venetians, when their manuscripts are objected

against it, pretend that the Arians rased it out. A reading to be found in no manuscripts but the Latine, & not in the Latine before Ierome's age as Ierome himself confesses, can be but of little authority, & this authority sinks because we have already proved the reading spurious by shewing that it was heretofore unknown both to the western & eastern churches in the times of the great controversies about the Trinity. But however for further satisfaction we shall now give you an account of the Latin & Greek manuscripts, & shew first how in the dark ages it crept into the Latine manuscripts out of Ierome's Version & then how it lately crept out of the Latine into the printed Greek without the authority of MSS.: those who first published it in Greek having never yet so much as seen it in any Greek manuscript.

That the Vulgar Latin now in use is mixed of the old Vulgar Latine & of Ierome's Version together is the received opinion. Few of these Manuscripts are above 400 or 500 years old. The latest generally have the testimony of the three in heaven; the oldest of all usually want it: which shews that it has crept in by degrees. Erasmus notes it wanting in three very ancient ones, one of which was in the Popes Library at Rome, the other two at Bruges, & adds that in another MS belonging to the bishop of the Minorites in Antwerp the testimony of the three in heaven was [noted] in the margin in [a newer] hand. Peter Cholinus notes in the margin of his Latine Edition of the scriptures printed A.C. 1543 & 1544 that it was wanting in the most ancient manuscript of the Tigurine Library. Dr Burnet has lately in the first Letter of his Travells noted it wanting in five other ancient ones kept at [one] of [illeg.] about a 1000 years [old] & the other four about 800. Fr Simon has noted it wanting in five others in the Libraries of the King of Fr[ance] Monr Colbert & the Benedictines of the Abby of St Germans. An ancient & diligent collator of manuscripts cited by Lucas Brugensis by the name of Epanorthotes notes in general that it was wanting in the ancient latine manuscripts. Lucas himself collating many Latine ones notes it wanting in only five, that is in the few old ones he had, his manuscripts being almost all of them new ones. [18]ffor he praises the Codex Lobiensis written A.C. 1084 & the Codex Tornacensis written A.C. 1105, as most ancient & venerable for antiquity, & used others much more new, of which a great number was easily had, such as was the Codex Buslidianus written A.C. 1432, that is but eight years before the invention of printing. The

Lateran Council collected under Innocent the third. A.C. 1215 can. 2, mentions Ioachim the Abbot quoting the text in these words Quoniam In canonica Ioannis Epistola legitur Quia tres sunt qui testimonium dant in cælo Pater et Verbum et Spiritus, et hi tres unum sunt; statimque subjungitur, et tres sunt qui testimonium dant in terra spiritus aqua et sanguis, et tres unum sunt: sicut in codicibus quibusdam invenitur. This was writ by Ioachim a[19] in the Papacy of Alexander the 3d that is in or before the year 1180 & therefore this reading was then got but into some books. ffor the words sicut in codicibus quibusdam invenitur refer as well to the first words of Ioachim Quoniam in canonica Ioannis epistola legitur as to the next statimque subjungitur, & more to the first then to the next, because the first part of the citation was then but in some books as appears by ancient manuscripts, but the second part was in almost all, the words tres unum sunt being in all the books which wanted the testimony of the three in heaven & in most of those which had it, thô afterwards left out in many when branded by the schoolmen for Arian.

But to go to the original of the corruption, ✝[20] Gregory the great writes that Ierome's version was in use in his time, & therefore no wonder if the testimony of the three in heaven began to be cited out of it before. Eugenius Bishop of Carthage in the seventh year of Hunneric King of the Vandals A.C. 484, in the summary of his faith exhibited to that King, cited it the first of any man so far as I can find. A while after ffulgentius, another African Bishop disputing against the same Vandals cited it again, & backt it with the forementioned place of Cyprian applied to the testimony of the three in heaven. And so its probable that by that abused authority of Cyprian it began first in Afric in the disputes with the ignorant Vandals to get some credit, & thence at length crept into Europe. It occurs also frequently in Vigilius Tapsensis another African Bishop contemporary to Fulgentius. In its defense some allege earlier writers, namely the first Epistle of Pope Hyginus, the first Epistle of Pope Iohn II, the book of Idacius Clarus against Varimadus & the book de unita Deitate Trinitatis ascribed to Athanasius. But Chiffletius who published the works of Victor Vitensis & Vigilius Tapsensis, sufficiently proves the book against Varimadus to be this Vigilius's & erroneously ascribed to Idacius. To the same Vigilius he asserts also the book de unita Deitate Trinitatis. Certainly Athanasius was not its

Author. All the Epistle of Hyginus except the beginning & end, & the first part of the Epistle of Pope Iohn wherein the testimony of the three in heaven is cited, are nothing else then fragments of the book against Varimadus described word for word by some forger of Decretal Epistles, as may appear by comparing them. So then Eugenius is the first upon record that quotes it.

But thô he set it on foot among the Africans, yet I cannot find that it became of authority in Europe before the revival of learning in the 12th and 13th Centuries. In those ages S. Bernard, the Schoolmen, Ioachim & the Lateran Council spread it abroad & Scribes began generally to insert it into the text: but in such Latine manuscripts & European writers as are ancienter then those times, it is seldome to be met with.

Now that it was inserted into the Vulgar Latin out of Ierom's Version is manifest by the manner how the Vulgar Latin & that Version came to be mixed. For 'tis agreed that the Latines, after Ierome's Version began to be in use, noted out of it his corrections of the Vulgar Latine in the Margins of their books & these the transcribers afterwards inserted into the text. By this means the old Latine has been so generally corrected that it is no where to be found sincere. Tis Ierome that we now read & not the old Vulgar Latine, & what wonder if in Ierome we read the testimony of the three in heaven? For who that inserted the rest of Ierome into the text would leave out such a passage for the Trinity as this has been taken to be?

But to put the question out of dispute there are footsteps of the insertion still remaining. For in some old Manuscripts it has been found noted in the margin, in others the various readings are such as ought to arise by transcribing it out of the margin into the text. I shall only mention the three following varieties. Of the MSS which have not the testimony of the three in heaven some have the words in terra in the eighth verse but the most want it. Which seems to proceed from hence that some before they allowed so great an addition to the text as the testimony of the three in heaven, noted only in terra in the margins of their books to be inserted into the testimony of the spirit, water & blood. Of the MSS which have the testimony of the three in heaven some in the eighth verse have hi tres unum sunt others not. The reason of which seems to be that of those who noted this testimony in the margin, some blotted out et hi tres unum sunt in the eighth verse according to Ierome & others did not. And lastly the testimony of the three

in heaven is in most books set before the testimony of the three in earth, in some set after. So Erasmus notes two old books in which it is set after, Lucas Brugensis a third & Hesselius (if I misremember not) a fourth: & so Vigilius Tapsensis lib. adv. Varimadum c. 5, sets it after. Which seems to proceed from hence that it was sometimes so noted in the margin that the Reader or transcriber knew not whether it were to come before or after. Now these discords in the Latine manuscripts as they detract from the authority of the manuscripts, so they confirm to us that the old vulgar latin has in these things been tampered with, & corrected by Ieromes version.

In the next place I am to shew how & when the testimony of the three in heaven crept out of the Latine into the Greek. Those who first printed the greek Testament did generally in following their manuscripts omit the testimony of the three in heaven except in Spain. For it was omitted in the first & second editions of Erasmus A.C. 1516, & 1519; in the a[21] Edition of ffrancis Asulan printed at Venice by Aldus A.C. 1518; in that of Nich. Gerbelius printed at Haganau 1521, & a little after in that of Wolfius Cephalius printed at Strasburge A.C. 1524, & again 1526; in the Badian edition, as Erasmus notes, & in that of Simon Cholinæus at Paris A.C. 1534. At the same time it was omitted in some editions of other western languages as in the Saxon & German editions of Luther & the Latine Tigurine editions of Peter Cholins A.C. 1543 & 1544. The first edition in greek which has the testimony of the three in heaven was that of Cardinal Ximenes printed at Complutum in Spain A.C. 1515, but not published before the year 1521. The Cardinal in his edition used the assistance of several Divines which he called together to Complutum, there founding an Vniversity A.C. 1517, or a little before. Two of those Divines were Antonius Nebrissensis & Stunica. For Stunica then resided at Complutum, & b[22] in the Preface to a treatise he wrote against Erasmus gives this testimony of himself, that he had spent some years in reading the holy scriptures in Hebrew Greek & Latin & had diligently collated the Hebrew & Greek exemplars with the Latine copies. This book displeasing the Cardinal was not printed till after his death, & then it came forth at Complutum, A.C. 1521. The year before one Lee an Englishman writ also against Erasmus, & both Stunica & Lee amongst other things reprehended him for omitting the testimony of the three in heaven. Afterwards Erasmus finding the Spaniards & some others of the Roman Church in a heat against him printed this testimony in his third edition A.C.

1522, representing that in his former editions he had printed the text as he found it in his Manuscripts, but [now] there being found in England one Manuscript which had the testimony of the three in heaven, he had inserted it according to that manuscript for avoiding the calumnies raised against him. And so it continued in his two following editions: And at length Robert Stephens A.C. 1550 reprinted Erasmus's edition with some few alterations & various lections taken out of the Complutensian edition & 15 greek Manuscripts which he named after the numeral letters α, β, γ, δ, ε &c putting α for the Complutensian edition & β, γ, δ, ε &c for the Manuscripts in order & noting in the margin that the testimony of the three in heaven was wanting in the seven Manuscripts δ, ε, ζ, θ, ι, ια, ιγ. Whence Beza[23] tells us that he had read it in the rest. His words are: Legit Hieronymus, legit Erasmus in Britannico codice et in Complutensi editione. Legimus et nos in nonnullis Roberti nostri veteribus libris. And this is the original & authority of the printed editions. For these are the editions ever since followed by all the West & of late years propagated by the Venetian Presses into Grece: & nothing further that I know of has been discovered in any manuscript in favour of these editions.

[24] Now to pull off the vizzard, I cannot but in the first place extreamly complain of Beza's want of modesty & caution in expressing himself. In the Preface to his annotations describing what helps he had in composing his first edition, he tells us that he had the Annotations of Valla, Stapulensis & Erasmus, & the writings of the ancients & moderns collated by himself, & out of Stephen's library the exemplar which Stephens had collated with about 25 manuscripts almost all of which were printed. He should have said 17: for that number he puts in other places & in his Annotations cites no more. So then he had the collations of two more Manuscripts then Stephens has given us in print. And this was all his furniture. The original manuscripts he does not here pretend to have, nor could he have them. ffor they were not Stephen's manuscripts but belonged to several Libraries in France & Italy. The Manuscript β Stephens himself never saw but had only various lections collected out of it by his friends in Italy. The manuscripts γ, δ, ε, στ, ζ, η, ι, ιε were not Stephens's but belonged to the Library of the King of France to whom Stephens was Printer. The other six books θ, ια, ιβ, ιγ, ιδ, ιστ Stephens had not out of his own Library but borrowed them for a time from several places to collate, his friends studying to furnish the

designe of his edition. And yet Beza in his Annotations when he would favour any Text takes the collations of Stephens in such a manner as if he had the very original manuscripts at Geneva before his eyes. And were Stephens does not cite various lections there he reccons that in the text of Stephens collated book he read all the Manuscripts. So in Marc. 6.11 when Stephens notes a certain period to be wanting in the manuscript copies β and η Beza saith, Hæc periodus in omnibus exemplaribus græcis legitur exceptis secundo et octavo In Act. 13.33 because Stephens had noted no various lection Beza affirms of the greek text, Ita scriptum invenimus in omnibus vetustis codicibus. In 1 Iohn. 4.3. where Stephens is silent Beza speaks: sic legitur in omnibus Græcis exemplaribus, quæ quidem mihi inspicere licuit. In Iames 1.2 where Stephens is again silent Beza tells us of the word μόνον Ego in omnibus nostris vetustis libris inveni. And so where Stephens in the margin had noted the testimony of the three in heaven to be wanting in seven manuscripts he thinks that in reading the text of Stephens's collated book he reads it in the rest & so tells us. Legimus et nos in nonnullis Roberti Stephani codicibus. Thus he did in the first edition of his Annotations. Afterwards when he had got two real manuscripts, the Claromontan & that which at length he presented to the Vniversity of Cambridge, (in both which the Canonical Epistles are wanting) in the epistle to his fourth edition in recconing up the books he then used, he puts only these two & the 17 of Stephens, & in his fift edition he writes summarily that he used nineteen manuscripts, joyning with those two real ones the collations of Stephens as if in those he had 17 others: which sufficiently explains his way of speaking in his Annotations. But whilst he had not the manuscripts themselves to read with his own eyes, it was too hard & unwarrantable a way of speaking to tell us, Legimus et nos in nonnullis Roberti Stephani codicibus & therefore in his later editions he corrects himself & tells us only that the reading doth extare in nonnullis Stephani veteribus libris. Thus Beza argues from Stephens book of collations: And the same inference has been made by Lucas Brugensis & others ever since from Stephens's forementioned edition of that book. ffor say they Stephens' had fifteen manuscripts in all & found the testimony of the three in heaven wanting but in seven, & therefore it was in the other eight, & so being found in the greater part of his manuscripts has the

authority of manuscripts on its side. Thus they argue & this is the great argument by which the printed Greek has hitherto been justified.

But if they please to consider the business a little better they will find themselves very much mistaken. ffor thô Stephens had fifteen manuscripts in all, yet all of them did not contein all the Greek Testament. Four of them noted γ, στ, ιβ, ιδ had each of them the four Gospels only. Two noted β, η conteined only the Gospels & Acts of the Apostles. One noted ιστ conteined the Apocalyps only. One noted ιε had only the Apocalyps with St Pauls epistles to the Corinthians Galathians Ephesians Philippians & Colossians. The other seven noted δ, ε, ζ, θ, ι, ια, ιγ conteined both St Pauls Epistles & the Canonical ones besides some other books: namely the Manuscript ζ conteined the Epistles & Gospels, the manuscript ι, ια ιγ the Epistles & Acts of the Apostles & the manuscripts δ, ε, θ the Epistles Gospels & Acts. And this any one may gather by noting what manuscripts the various lections are cited out of in every book of the new Testament. ffor in the various lections of the canonical Epistles & those to the Thessalonians Timothy Titus & the Hebrews are found these seven manuscripts, δ, ε, ζ, θ, ι, ια, ιγ every where cited, & no more then these. The same also & no more are cited in the Epistles to the Thessalonians Timothy Titus & the Hebrews, one numeral error (whether of the scribe or Typographer) excepted. Stephens therefore did collect various Lections of the Epistles out of only these seven manuscripts δ, ε, ζ, θ, ι, ια ιγ & in all these seven he found the testimony of the three in heaven to be wanting as you may see noted in the margin of his edition.

And that this testimony was wanting † † And that this testimony was wanting in all Stephen's Manuscripts is apparent also by its being generally wanting in the MSS which are now extant in France. For Father Simon c[25] tells us that after diligent search in the Library of the King of France & in that also of Monsieur Colbert, he could not find it in any one manuscript tho he consulted seven MSS in the Kings Library & one in Colbert's. And because Stephen had some of his various lections from Italy I will add that a Gentleman who in his travells had consulted twelve MSS in several Libraries in Italy, assured me that he found it wanting in them all. One of the twelve was that most ancient & most famous MS in the Popes library written in Capital letters.

So then the authority of the printed books rests only upon the authority of the editions of Erasmus & Cardinal Ximenes. But seing Erasmus omitted it in his two first editions & inserted it unwillingly against the authority of his manuscripts in his three last, the authority of these three can be none at all. When Lee upon Erasmus's putting forth his second edition fell foule upon him for leaving out the testimony of the three in heaven, a[26] Erasmus answered that he had consulted more then seven Greek Manuscripts & found it wanting in them all, & that if he could have found it but in any one manuscript he would have followed that in favour of the Latine. Hence notice was sent to Erasmus out of England that it was in a manuscript there; & thereupon b[27] to avoyd their calumnies (as he saith,) he printed it in his following editions notwithstanding that he suspected that manuscript to be a new one corrected by the latine. But since upon enquiry c[28] I cannot learn that they in England ever heard of any such manuscript but from Erasmus, & since he was only told of such a manuscript in the time of the controversy between him & Lee & never saw it himself: I cannot forbear to suspect that it was nothing but a trick put upon him by some of the Popish Clergy, to try if he would make good what he had offered of printing the testimony of the three in heaven by the authority of any one greek copy, & thereby to get it into his edition. Greek manuscripts of the scriptures are things of value & do not use to be thrown away, & such a manuscript for the testimony of the three in heaven would have made a greater noise then the rest have done against it. Let those who have such a manuscript at length tell us where it is.

So also let them who insist upon the edition of Cardinal Ximenes tell us by what Manuscript he printed this testimony, or at least where any such manuscript of good note is to be seen. ffor till then I must take the liberty to beleive that he printed nothing else then a translation out of the Latine, & that for these reasons.

First because in the Preface to his edition of the new Testament we are told that this Testament was printed after Manuscripts taken out of the Popes Library, & these the Cardinal only a[29] borrowed thence & therefore returned them back so soon as his edition was finished: & Caryophilus some time after by the Popes command collating the Vatican manuscripts found the testimony of the three in heaven wanting in them all. I do not say but that the Cardinal had other manuscripts, but these were the chief & the only ones he thought worth the while to tell his Reader of.

Secondly I startle at the marginal note in this place of the Cardinals edition. ffor it is besides the use of this edition to put notes in the margin of the greek text. I have not found it done above thrice in all this edition of the new Testament, & therefore there must be something extraordinary in it; & that in respect of the Greek because tis in the margin of this text. In 1 Cor. 15 there is noted in this margin a notable variation in the greek reading. In Matt. 6.13 where they in their edition recede from the greek copies & correct it by the Latine, they make a marginal note to justify their doing so. And so here where the testimony of the three in heaven is generally wanting in the greek copies, they make a third marginal note to secure themselves from being blamed for printing it. Now in such a case as this is there is no question but that they would make the best defense they could, & yet they do not tell of any various lections in their greek manuscripts nor produce any one greek manuscript on their side, but run to the authority of Thomas Aquinas. The greek manuscripts have the text thus: For there are three that bear record, the spirit the water & the blood, & these three are one. In many of the latine manuscripts the words these three are one are here omitted & put only at the end of the testimony of the three in heaven before that of the spirit water & blood: in others they are put after both testimonies. In the Complutensian edition they follow the former copies & justify their doing so by the authority of Thomas Aquinas. a[30] Thomas, say they, "in treating of the three which bear witness in heaven teaches that the words these three are one are subjoyned for insinuating the unity of the essence of the three persons: And whereas one Ioachim interpreted this unity to be only in love & consent, it being thus said of the spirit water & blood in some copies that these three are one; Thomas replied that this last clause is not extant in the true copies but was added by the Arians for perverting the sense." Thus far this Annotation. Now this plainly respects the latine copies (for Thomas understood not Greek) & therefore part of the designe of this annotation is to set right the Latine reading. But this is not the main designe, for so the annotation should have been set in the margin of the Latin Version. It's being set in the margin of the Greek text shews that it's main designe is to justify the greek by the Latine thus rectified & confirmed. Now to make Thomas thus in a few words do all the work was very artificial, & in Spain where Thomas is of Apostolic authority might pass for a very judicious &

substantial defense of the printed Greek: but to us Thomas Aquinas is no Apostle; we are seeking for the authority of greek manuscripts.

A third reason why I conceive the Complutensian Greek to have been in this place a translation from the Latine is because Stunica, who, as I told you, was one of the Divines employed by the Cardinal in this Edition & at that very time wrote against Erasmus, when in his Objections he comes to this text of the testimony of the three in heaven, he cites not one Greek Manuscript for it against Erasmus, but argues wholy from the authority of the Latine. On the contrary he sets down by way of concession, the common reading of the greek Manuscripts (his own & others,) in these words Ὅτι τρεις ἐισιν ὀι μαρτυρουντες τὸ πνευμα καὶ τὸ ὑδωρ καὶ τὸ ἁιμα καὶ ὀι τρεις ἐις τὸ ἕν ἐισι, & then he condemns them all together without exception & justifies the Latine against them by the authority of Ierom. b[31] Know, saith he, that in this place the greek Manuscripts are most evidently corrupted, but ours (that is the Latin ones) contein the truth it self as they are translated from the first original. Which is manifest by the Prologue of S. Ierome upon the Epistles, &c And this Prologue (which he goes on to cite at length & of which we gave you an account above) is all he urges in favour of the testimony of the three in heaven. In other places of scripture where he had greek Manuscripts on his side, he produces them readily. So in 1 Thes. 2.7. Ita quidem legitur, saith he, in græcis codicibus quos ego viderim. In Iames 1.1 he saith, Sciendum in omnibus græcis codicibus πορείας hic legi per ei dipthongum. In 1 Thes. 5.23. he saith, cùm in græcis exemplaribus quotquot sunt ὁλόκληρον et in Latinis integet hic legatur per nemine discrepante, nescio cur Erasmus dixerit &c. In Phil 4.9 Siquidem in omnibus, saith he, græcis codicibus ταυτα λογίζεσθε hic legitur – neque græci sunt libri qui πραττέτε hoc loco neque latini qui agite, nisi mendosos utriusque linguæ codices cùm hæc commentaretur Erasmus perlegit. After this manner does Stunica produce the manuscripts used in the Complutensian edition when they make for him & here he produces them too but ’tis for Erasmus against himself. Know, saith he, that in this place the greek manuscripts are most evidently corrupted. In other places if he hath but one manuscript on his side, he produces it magnificently enough, as the Codex Rhodiensis in his discourse upon 2 Cor. 2.3 Iames 1.22. 2 Pet. 2.2. & other texts: here he produces all the Manuscripts against himself without excepting so much as one. And hence Erasmus in his answer to

Stunica gloried in the consent of the Spanish manuscripts with his own, & Sanctus Caranza (another of the Complutensian Divines) in his defense of Stunica written presently after, had nothing to reply in this point. Neither could Sepulueda or the Spanish Moncks who next undertook the controversy find any one greek manuscript which here made against Erasmus. Nor had Marchio Velesius better successe, thô on that occasion he collated 16 greek manuscripts, eight whereof belonged to the King of Spain's library & the other eight to other libraries in Spain, & did it on purpose to collect out of them whatever he could meet with in favour of the present vulgar Latine. Neither did the reprinting of the Complutensian Bible by Arias Montanus, produce the notice of any such manuscript, tho on that occasion many Manuscripts as well greek as latine fetcht from Complutum & other places were collated by Arias, Lucas Brugensis, Canter & others. So then to summe up the argument, the Complutensian Divines did sometimes correct the greek by the Latine without the authority of any one greek Manuscript, as appears by their practise in Mat. 6.13, & therefore their printing the testimony of the three in heaven is no evidence that they did it by a manuscript. But on the contrary for want of one they contented themselves with the authority of Thomas Aquinas, & Stunica confest they had none. Nor has all the zeal for this text been able since to discover one either in Spain or any where else.

And now you may understand whence it is that the Complutensian edition & the reading of the pretended English manuscript set down by Erasmus in his Annotations, differ so much from one another. ffor the Complutensian has the text thus Ὅτι τρεις ἐισιν ὀι μαρτυρουν τες ἐν τωι ὀυρανωι, ὁ παττὴρ ὁ λόγος καὶ τὸ ἅγιον πνευμα καὶ ὀι τρεις εις τὸ ἕν ἐισι καὶ τρεις ἐισιν ὀι μαρτυρουντες ἐπὶ της γης τὸ πνευμα καὶ τὸ ὕδωρ καὶ τὸ αἰμα. The pretended English Manuscript thus Ὅτι τρεις ἐισὶν ὀι μαρτυρουντες ἐν τωι ὀυρανωι, πατὴρ, λόγος καὶ πνευμα, καὶ ὀυτοι ὀι τρεις ἕν ἐισιν. Καὶ τρεις ἐισὶν μαρτυρουντες ἐν τηι γηι πνευμα καὶ ὕδωρ καὶ ἀιμα. The differences are too great to spring from the bare errors of scribes & arise rather from the various translation of the place out of Latin into Greek by two several persons.

But whilst these two readings by their discord confute one another, the readings of the real Greek manuscripts by their agreement confirm one another as much. For Caryophilus who by the command of Pope Vrban the

8th collated the Vatican & other manuscripts borrowed out of the principal Libraries in Rome, found one common reading in them all without the testimony of the three in heaven as you may see in those his Collations printed anno 1673 by Peter Possinus in the end of his Catena of the Greek Fathers upon Mark. He met with eight manuscripts in all upon the Epistles & notes their reading thus. 1 Ioan. 5.7 MSS octo (omnes nempe) legunt, Ὅτι τρεις ἐισιν ὀι μαρτυρουντες, τὸ πνευμα καὶ τὸ ὕδωρ καὶ τὸ ἁιμα, καὶ ὀι τρεις ἐις τὸ ἕν ἐισι: Porro totus septimus versus hujus capitis desideratur in octo MSS codd græcis &c. Thus Caryophilus.

The very same reading Erasmus in his Annotations on this place gives us of all his manuscripts which were more then seven & so doth Stephens of all his seven without noting any various lections in them. Only the comma which in Stephen's Edition is (surely by mistake) set after οὐρανωι, is to be put in it's right place. The very same reading does Stunica also in his book against Erasmus note out of the Manuscripts he had seen in Spain, as was shewed above: nor does Velesius in his collation of the sixteen Spanish manuscripts note any various lections in this text. The same reading exactly have also the manuscripts in England, namely that most ancient & most famous one in the Kings Library which was conveyed thither from Egypt through Greece & published in Walton's Polyglott Bible & the four at Oxford, vizt that in New College, & that in Magdalen College (both very old) & two in Lincoln College, & five other ancient ones lately brought out of Turkey by Mr Covel & collated by Dr Mills. The very same reading have also the three Manuscripts of Monsieur Petavius Gachon a Senator of Paris, whose various lections collected by his son Iohn Gachon, were printed in the Oxford edition of the new Testament A.C. 1675. The same reading without any variation is published by Francis Asulan in his edition printed A.C. 1518 by Aldus at Venice out of the Manuscripts of those parts. The same reading Oecumenius six hundred years ago found in the Manuscripts of Greece as you may see in the text of his Commentary on this Epistle of Iohn. The same reading also Cyril of Alexandria met with in the manuscripts of Egypt above eleven hundred years ago, as you may see in his citations of the text, both in his Thesaurus lib. 14 c. 5, & in his first book de fide ad Reginas: excepting that in the latter of these two citations the particle ἐις is omitted & μαρτυρουσι written for ὀι μαρτυρουντες. And that

the very same reading was also in the manuscripts of the first ages may be gathered from the conformity of this reading to all the ancient Versions.

It may seem by what has been hitherto said that this Testimony is not to be found in Greek Manuscripts. a[32] Epanorthotes whom Lucas Brugensis describes to be an ancient accurate full & industrious Collator of Manuscripts, found it wanting in all those he met with. Epanorthotes, saith Lucas, deesse hæc eadem Græcis libris et antiquis Latinis annotat. Nor have other collators made a further discovery to this day. Lee, Stunica & the rest in England, Spain, fflanders, ffrance & Italy who conspired against Erasmus could find nothing in the manuscripts of those parts against him If [those] be excepted which once appeared to [certain men here] in England but could never since be seen. After the disputes of those times, c[34] Hesselius about the year 1565 Professor of Divinity at Lovain, in his Commentary on this place ingeniously confesses it wanting in all the greek manuscripts then known except two, the one in Spain the other in England, meaning those by which the Complutensian Divines & Erasmus printed it: which two we have shewed to be none at all, unlesse some Annius dug up one in England.. Since that time nothing further has been produced besides the imaginary books of the dreaming Beza. And yet I will not say but that it may be hereafter found in some Greek copies. For in the times of the holy war the Latines had much to do in the East. They were long united to the Greek Church: They made Latine Patriarchs of Ierusalem & Antioch; they reigned at Constantinople over the Greeks from the year 1204 for above 50 years together, & during this their Kingdom in the year 1215 was assembled the Lateran Council consisting of 415 Bishops Greeks & Latines together, & therein the testimony of the three in heaven was quoted out of some of the Latine manuscripts as we told you above. All which might occasion some Greeks as well as Latines to note it in the Margins of their books & thence insert it into the text in transcribing. For this is most certain that some greek manuscripts have been corrected by the Latine ones. Such a book d[35] Erasmus tells us he once met with, & that there was such another in the Popes Library. He suspected also that Boook in England out of which he printed the testimony of the three in heaven to be of the same kind, tho I rather think ’twas none at all unless some Italians of that age were at the pains to transcribe one or two of St Paul’s Epistles. Such another book was one of those out of which Velesius collected his various lections. Whence

Mariana into whose hands the manuscript boook of those Lections fell, tells us that for that reason in his annotations on the new Testament he used those lections but sparingly & cautiously. And that Velesius did meet with such a corrected manuscript appears by the Lections themselves. For in Apoc. 18.17, where the Greek reads ἐπὶ τόπον & the Latine translates in locum & by the error of one letter in lacum, as the books now have it: some Grecian here has corrected his book by the Latine & written ἐπὶ λίμνην as tis in the lections of Velesius taken out of this manuscript. Again in Apoc 9.11 where the Latine translator in expounding the names Abaddon & Apollyon adds, Et latine habens nomen exterminans, Velesius notes the reading in his Greek Copy to be ρώμαιστὶ ἔχων ὄνομα ἐξτέρμινανς: which certainly is a translation of the Latine. Again in Apoc. 21.12 where the Greek has ἀγγέλους, and some ancient Latine copies angelos, but the far greater part of the Latine copies at present angulos Velesius [in] his MS reads γωνίας. So in Apoc 19.6 where the Greek is ὄχλου πολλου & the Latine turbæ magnæ & in later copies tubæ magnæ, Velesius in his MS reads σάλπιγγος μεγάλης. In Heb. 13.2 for ἔλαθον latuerunt & in later copies placuerunt Velesius reads ἤρεσαν: & in 1 Pet. 3.8, for τὸ δὲ τέλος In fine & by error In fide Velesius reads ἐν τη πίστει δὲ. These & such like instances put the thing out of dispute. Now tho Velesius found not the testimony of the three in heaven in this Manuscript, & Erasmus tells us he never saw it in any greek manuscript, & by consequence not in that corrected one which fell into his hands: yet it may have crept out of the Latine into some other books not yet taken notice of, & even in some MSS which in other places have not been corrected by the Latine, it may possibly have been inserted by some of the Greek Bishops of the Lateran Council where the testimony of the three in heaven was read. And therefore he that shall hereafter meet with it in any book, ought first before he insists upon the authority of that book, to examin whether it hath not been corrected by the Latine, & whether it be ancienter then the Lateran Councel & empire of the Latines in Greece. ffor if it be liable to either of those two exceptions it can signify nothing to produce it.

Having given you the history of the controversy, I shal now confirm all that I have said from the sense of the text it self. ffor without the testimony of the three in heaven the sense is good & easy, as you may see by the following paraphrase inserted into the text in a different character.

[36]Who is he that overcometh the world but he that beleiveth that Iesus Christ is the Son of God, that son spoken of in the Psalmes where he saith Thou art my son this day have I begotten thee. This is he that after the Iews had long expected him, came first in a mortal body by baptism of water and then in an immortal one by shedding his blood upon the crosse & rising again from the dead: not by water only but by water & blood: being the son of God as well a[37] by his resurrection from the dead as b[38] by his supernatural birth of the Virgin: and it is the spirit also that together with the water & blood beareth witnesse of the truth of his coming, because the spirit is truth, & so a fit & unexceptionable witnesse. For there are three that bear record of his coming, the Spirit which he promised to send, & which was since shed forth upon us in the form of cloven tongues & in various gifts, the baptism of water wherein God testified this is my beloved son, and the shedding of his blood accompanied with his resurrection whereby he became the most faithful martyr or witnesse of this truth. And these three, the Spirit, the baptism & the passion of Christ agree in witnessing one & the same thing (namely that the Son of God is come,) & therefore their evidence is strong. For the Law requires but two consenting witnesses, & here we have three. And if wee receive the witness of men the threefold witnesse of God which he bare of his Son, by declaring at his baptism This is my beloved Son, by raising him from the dead, & by pouring out his spirit on us, is greater & therefore ought to be more readily received.

Thus is the sense plain & natural & the argument full & strong, but if you insert the testimony of the three in heaven you interrupt & spoil it. ffor the whole designe of the Apostle being here to prove to men by witnesses the truth of Christs coming, I would ask how the testimony of the three in heaven makes to this purpose. If their testimony be not given to men how does it prove to them the truth of Christs coming? If it be, how is the testimony in heaven distinguished from that in earth? Tis the same Spirit which witnesses in heaven & in earth. If in both cases it witnesses to us men, wherein lies the difference between its witnessing in heaven & its witnessing in earth? If in the first case it does not witnesse to men, to whom does it witnesse, & to what purpose? & how does its witnessing make to the designe of Iohn's discourse? Let them make good sense of it who are able: for my part I can make none. If it be said that we are not to determin what's scripture & what not by our private judgments, I confesse it in places not

controverted: but in disputable places I love to take up with what I can best understand. Tis the temper of the hot & superstitious part of mankind in matters of religion ever to be fond of mysteries, & for that reason to like best what they understand least. Such men may use the Apostle Iohn as they please: but I have that honour for him as to beleive he wrote good sense, & therefore take that sense to be his which is the best: especially since I am defended in it by so great authority. For I have on my side the authority of the fourth generall Council, & (so far as I know) of all the Churches in all ages except the modern Latines & such others as have lately been influenced by them, & that also of all the old Versions & greek manuscripts & ancient Latine ones; & nothing against me but the authority of Ierome, & the credulity & heat of his followers. For to tell us of other manuscripts without ever letting us know in what Libraries they were to be seen; to pretend MSS which since their first discovery could never be heard of, nor were then seen by persons whose names & credit we know, is plainly to impose upon the learned world, & ought not to passe any longer for fair dealing. The Spaniards tell us plainly that they followed the Latine, & by the authority of Thomas left out the clause and these three are one in the 8th verse as inserted by the Arians: & yet S. Ambrose, S. Austin, Eucherius & other Latines in the Arian age gathered the unity of the Deity from this clause, & the omission of it is now by printing it acknowledged to be b[39] an erroneous correction. The pretended Manuscript in England wanted the same clause & therefore if there was any such MS it was a corrected one like the Spanish Edition & the manuscript of Velesius. Erasmus who printed the triple testimony in heaven by that English MS, never saw it, d[40] tells us it was a new one, suspected its sincerity & accused it publickly in his writings on several occasions for several years together: & yet his adversaries in England never answered his accusation, never endeavoured to satisfy him & the world about it, did not so much as let us know where the record might be consulted for confuting him: but on the contrary when they had got the Trinity into his Edition, threw by their MS (if they had one) as an Almanack out of date. And can such shuffling dealings satisfy considering men? Let Manuscripts at length be produced, & freely exposed to the sight of the learned world, but let such MSS be produced as are of authority; or else let it be confest that whilst Ierome pretended to correct the

Latin by the Greek, the Latines have corrected both the Latin & the Greek by the sole authority of Ierome.

What the Latines have done to this text the Greeks have done to that of S. Paul 1 Tim. 3.16. For by changing O in OΣ & both into ΘΣ (the abbreviation of Θεὸς) they now read Great is the mystery of godlinesse God manifested in the flesh: whereas all the Churches for the first four or five hundred years, & the authors of all the ancient Versions, Ierome as well as the rest, read, Great is the mystery of godliness which was manifested in the flesh. For this is the common reading of the Ethiopic, Syriac & Latine Versions to this day, Ierome's manuscripts having given him no occasion to correct the old Vulgar Latine in this place. Grotius adds the Arabic, but the Egyptian Arabic Version has Θεὸς, & so has the above mentioned Sclavonian Version of Cyrillus. For these two Versions were made long after the sixt Century wherein the corruption began. With the ancienter Versions agree the writers of the first five Centuries both Greeks & Latines. For they in all their discourses to prove the Deity of the Son, never allege this text (that I can find,) as they would all have done, & some of them frequently, had they read God manifested in the flesh, & therefore they read ὅΟ. Tertullian adversus Praxeam & Cyprian adversus Iudæos industriously cite all the places where Christ is called God, but have nothing of this. Alexander of Alexandria, Athanasius, the Bishops of the Council of Sardica, Epiphanius, Basil, Gregory Nazianzen, Gregory Nyssen, Chrysostom, Cyril of Ierusalem, Cyril of Alexandria, Cassian; Also Hilary, Lucifer, Ierome, Ambrose, Austin, Phœbadius, Victorinus Afer, Faustinus Diaconus, Pope Leo the great, Arnobius junior, Cereatis, Vigilius Tapsensis, Fulgentius wrote all of them in the fourth & fift Centuries for the Deity of the Son & incarnation of God, & some of them largely & in several Tracts; & yet I cannot find that they ever allege this text to prove it excepting that a[41] G. Nyssen once urges it, if the passage crept not into him out of some marginal [annotation]. In all the times of the hot & lasting Arian controversy it never came into play, thô now those disputes are over they that read God manifested in the flesh think it one of the most obvious & pertinent texts for the businesse.

The Churches therefore of those ages were all strangers to this reading: for on the contrary their writers as often as they have any occasion to cite the reading then in use discover that it was ὅΟ. For thô they cite it not to

prove the Deity of the Son, yet in their Commentaries & sometimes in other discourses they produce it. And particularly Hilary lib 11 de Trinitate & Ambrose, or whoever of his contemporaries was the author of the Commentary on the Epistles, reads Ὅ; & so doth S. Austin in Genesin ad litteram lib 5, & Beda in his commentary on this text where he cites the reading of S. Austin, & the Author of the Commentary on the Epistles ascribed to Ierome. So also do Primasius & Sedulius in their Commentaries on this text, & Victorinus Afer lib 1 adversus Arium, & Idacius Clarus or rather Vigilius Tapsensis lib. 3. adversus Varimadum ca. & Fulgentius ca de incarnatione. And so did Pope Leo the great Epist 20 ad Flavianum & Pope Gregory the great lib 34 Moral. cap 7 . These ancient Latines all cite the text after this manner Great is the mystery of godlinesse which was manifested in the flesh, as the latine MSS of S. Pauls Epistles generally have it to this day; & therefore it cannot be doubted but that this hath been the constant public reading of the Latine Churches from the beginning. So also one of the Arians in a Homily printed in Fulgentius's works reads Ὅ & interprets it of the son of God who was born of the Father ante sæcula & of the Virgin in novissimo tempore: & Fulgentius in his answer to this Homily found no fault with the citation, but on the contrary in his first book ad Trasimundum, cha, seems to have read & understood the text after the same manner with other Latines.

Now for the Greeks, I find indeed that they have changed the ancient reading of the text not only in the MSS of S. Pauls Epistles but also in other authors, & yet there are still remaining sufficient instances among them of what the reading was at first. So in Chrysostom's Commentary on this Epistle they have now gotten θεὸς into the text & yet by considering the Commentary it self I am satisfied that he read ὃ. For he neither in this Commentary nor any where else infers the Deity of Christ from this text nor expounds it as they do who read θεὸς, but with the Latines & others who read ὃ understands by it Christ incarnate, or as he expresses it Man made God & God made man, & so leaves it at liberty to be taken for either God or Man. And accordingly in one place of his commentary he saith ἐφανερώθη ἐν σαρκὶ ὁ δημιουργὸς, in another place Ἄνθρωπος ὤφθη ἀναμάρτητος, ἄνθρωπος ἀναλήφθη, ἐκηρύχθη ἐν κόσμωι, μεθ' ἡμων ειδον ἀυτὸν ὁι ἄγγελοι. Man appeared without sin. Man was received up, was preached in the world, was seen amongst us by Angels. Instead of ὃ ἐφανηρώθη ἐν

σαρκι, εδικαιώθη ἐν πνέυματι, he saith Man appeared without sin, making man the nominative case to these & all the verbs which follow: which certainly he would not have done had θεὸς been their nominative case expresly in his text. He might properly put man for ὃ but not for θεὸς Neither could he have put ἀναμάρτητος for ἐδικαιώθη if he had read in his text ἐδικαιώθη: for what man of common sense would say that God was made sinlesse in or through the spirit. But what I have said of Chrysostom will be more evident when I shall have shewed you how afterwards in the time of the Nestorian controversy, all parties read ὃ or ὃς without any dispute raised about the reading, & how the Greeks have since corrupted the text in Cyrills writings, & changed ὃ & ὃς into θεὸς as they have done in Chrysostom's.

And first that the Nestorians read ὃ is evident by some fragments of the Orations or Homilies of Nestorius sent by him to the Pope & cited by Arnobius junior in the second book of the Conflict with Serapion. For there to shew what was the opinion of Nestorius & how he defended it, he cites two of his Orations in these words. Non peperit sanctissima Maria Deitatem, nam quod natum est de carne caro est. Non peperit creatura creatorem sed peperit hominem Deitatis ministrum. Non ædificavit Deum Verbum Spiritus sanctus: quod ex ipsa natum est de spiritu sancto est. Deo itaque Verbo templum ex Virgine ædificavit. Et paulo post. Qui per se natus est Deus in utero [scil. ante Luciferum] Deus est. Et paulo post. Θεοτόκου formam in Deo honoramus. Et in alia prædicatione: Spiritum divina separat natura qui humanitatem ejus creavit. Quicquid ex Maria natum est de spiritu sancto est, qui et secundum justiciam replevit quod creatum est, hoc quod manifestatum est in carne justificatum est in spiritu. Which last words in the language wherein Nestorius wrote those Homilies are ὃ ἐφανερώθη ἐν σαρκὶ, ἐδικαιώθη ἐν πνεύματι.. Here you see Nestorius reads ὃ expresly, & not only so but absolutely excludes God from being understood by it: arguing that the Virgin was not θεοτόκος because that thing which was manifested in the flesh, was justified in the spirit, or (as he expounds it) replenished by the spirit in righteousnes; & calling that thing which was manifested in the flesh a creature. Spiritus, saith he, secundum justiciam replevit [hoc] quod creatum est, [nempe] hoc quod manifestatum est in carne, justificatum est in spiritu.

And now whilst he read the text after this manner & urged it thus against the Deity of Christ, one would expect that if this had not been the received public reading in the greek churches his adversaries would have fallen foul upon him & exclaimed against him for falsifying the text & blasphemously saying it was a created thing which the scripture calls God manifested in the flesh. And such an accusation as this would surely have made as great a noise as any thing else in the controversy. And yet I meet with nothing of this kind in history. His adversaries do not so much as tell him that Θεὸς was in the text. They were so far from raising any controversy about the reading that they do not in the least correct him for it but on the contrary they themselves in their answers to his writings read ὃ as he did & only laboured by various disputations to put another sense upon the text: as I find by Cassian & Cyril the two principal who at that time wrote against him.

Iohn Cassian was Chrysostom's scholar & his Deacon & Legate to the Pope & after the banishment of Chrysostome retired from Constantinople into Syria & Egypt where he lived a monastic life for some time & then ended his days in France. At that time therefore when Nestorius, who was Patriarch of Constantinople broached his opinion & Cyril the Patriarch of Alexandria opposed him, Nestorius sent a Legacy to Rome with copies of his Orations to let the Pope understand the controversy: & thereupon Leo the great, who was then Archdeacon of the Church of Rome & afterwards Pope, put Cassian (then in France) upon writing his book De incarnatione Domini against Nestorius. He wrote it therefore in the year 430, as Baronius also reccons: for he wrote it before the condemnation of Nestorius in the Council of Ephesus, as appears by the book it self. This book is now extant only in latine: but considering that his designe in writing was to stir up the greek Church against Nestorius, & that for making the greater impression upon them he quotes greek Fathers at the end of his book, & concludes with an exhortation to the Citizens of Constantinople, telling them that what he wrote for, he had received from his master Chrysostom, I am satisfied that he wrote it originally in greek. His other books were in both languages, for Photius saw them in eloquent Greek; & its more likely that they had their Authors eloquent language from their Author & the Latine from one of the Latines where he lived, then that the contrary should be true. Now in this treatise lib 7 c 18, when he comes to consider the passage of Nestorius about this text, of which we gave you an account above out of Arnobius: he

returns this answer to it. Iamprimum enim hoc ais [Nestorj] quia justicia repleverit quod creatum est; et hoc Apostolico vis testimonio comprobare quod dicat, Apparuit in carne justificatus est in spiritu: utrumque falso sensu et furioso spiritu loqueris. Quia ut hoc quod a spiritu vis eum repletum esse justicia, ideo ponis ut ostendas ejus vacuitatem cui præstitam esse asseris justiciæ ad impletionem. Et hoc quod super hac re Apostolico testimonio uteris divini testimonij ordinem rationemque furoris. Non enim ita ab Apostolo positum est ut tu id truncatum vitiatumque posuisti. Quid enim Apostolus ait? Et manifestè magnum est pietatis sacramentum quod manifestatum est in carne justificatum est in spiritu. Vides ergo quod mysterium pietatis vel sacramentum justificatum Apostolus prædicavit. Thus far Cassian, not only reading Ὅ but confuting Nestorius by that reading. For whereas Nestorius said it was a creature which was justified, Cassian tells him that if he had read the whole text he would have found that it was the mystery of godlinesse. Vides ergo, saith he, quod mysterium pietatis justificatum Apostolus prædicavit. He does not say Deum justificatum Apostolus prædificavit, (as he would certainly have done had that been in his Bible,) but mysterium, & so makes mysterium or, which is all one, it's relative quod the nominative case to the verbs which follow. In another part of this Treatise lib 5. c 12 Cassian cites & interprets this text as follows. Et manifestè magnum est pietatis sacramentum quod manifestatum est in carne &c. Quid ergo magnum est illud sacramentum quod manifestatum est in carne? Deus scilicet natus in carne, Deus visus in corpore, qui utique sicut palam est assumptus est in gloria. So you see, Nestorius & Cassian agree in reading ὃ but differ in interpreting it; the one restraining it to a creature by reason of its being justified, the other restraining it to God by reason of its being a great mystery & assumed in glory.

In like manner Cyril the grand adversary of Nestorius in his three books de fide ad Imperatorem et Reginas written against him in the beginning of that contro versy, did not reprehend him as if he had cited the text falsly, but only complained of his misinterpreting it; telling him that he did not understand the great mystery of godlinesse, & that it was (not a created thing as he thought) but the word or son of God, & arguing for this interpretation from the circumstances of the text. And first in his book de fide ad Imperatorem sect. 7, he has this passage πλανασθε μὴ ἐιδότες τὰς

γραφάς μήτε μὴν τὸ μέγα της ἐυσεβείας μυστήριον, τουτέστι Χριστόν ὃς ἐφανερωθη ἐν σαρκὶ ἐδικαιώθη ἐν πνεύματι &c. Ye erre, saith he, not knowing the scriptures nor the great mystery of godlinesse, that is Christ, who was manifested in the flesh, justified in the spirit. By this citation its plain that he read Ὅ, using one of those MSS which by understanding Χριστὸν for μυστήριον turned Ὅ into ὃς, & by way of interpretation [insert]ing τουτέστι Χριστὸν which in those MSS was to be understood: unless you will say that he turned Θεὸς into ὅς, which is very hard. For had Θεὸς been in his text he would not have said μυστήριον τουτέστι Χριστόν ὃς ἐφανερώθη, but μυστήριον Θεὸς, τουτέστι Χριστὸς, ἐφανερώθη, putting Χριστὸς not for μυστήριον but for θεὸς. For Χριστὸς & Θεὸς are more plainly equipollent then Χριστος & μυστήριον, & in making Χριστὸς & μστήριον equipollent he makes μυστήριον the nominative case to εφανερώθη & therefore reads them joyned in his text by the article ὃς. Had he read Θεὸς he would never have left out that authentic & demonstrative word & by way of interpretation for μυτήριον θεὸς written Χριστόν ὃς; for this was not to argue against Nestorius but to spoile the argument which lay before him. Neither would he have gone on as he does within a few lines after to recite the same text, putting λογὸς by way of interpretation for μστήριόν & to propound it as his bare opinion that the Word or son of God was here to be understood by this mystery, & to dispute for this his opinion (as needing proof) out of other texts of scripture, as he does after this manner.[42] Moreover, saith he, in my opinion, that mystery of godlines is nothing else then he that came to us from the Father, the Word, who was manifested in the flesh. ffor in taking the form of a servant, he was born of the holy God-bearing Virgin &c. And then after many other things he at length in sect 23 & 24 concludes that this divine mystery is above our understanding, & that the only begotten who is God & according to the scriptures the Lord of all things, appeared to us was seen on earth & became a man. This he makes not the text it self, but the interpretation thereof & from the preceding disputation concludes it to be genuine. And all this is further confirmed by Photius who in his Commentary [upon] the Epistles (not yet published) relates that Cyril in the 12 chapt of his Scholiums, read ὃς ἐφανερώθη &c. And consonant to this reading is Cyrills commentary upon the text in his explanation of the second of [the] twelve anathematas, where he puts the question Quid est igitur quod dicit. Apparuit in carne?

And explains it by saying hoc est, Dei Patris Verbum caro factum est, & concludes that it is hence that we call him God & man. Whereas had Θεὸς been in the text it would have needed no interpretation, nor would he have put λογὸς for θεὸς in order to prove that God was manifested in the flesh.]

Again in the first of his two treatises de fide ad Reginas neare the end he cites the text & argues thus against the interpretation of Nestorius. Who is it, saith he, that is manifested in the flesh? Is it not fully evident that it is the Word of God the ffather? ffor so will that be a great mystery of godliness [a[43] which was] manifested in the flesh. He was seen of Angels ascending into heaven: he was preached to the Gentiles by the holy Apostles: he was believed on in the world: but this not as a mere man but as God born in the flesh & after our manner.

So also in his second book de fide ad Reginas, sect. 33 he cites the place again & then argues upon it against the opinion of Nestorius after this manner. If the Word being God be said to become a man & yet continue what he was before without losing his Deity, the mystery of godlinesse is without doubt a very great one: but if Christ be a mere man joyned with God only in the parity of dignity & power (for this is maintained by some unlearned men) how is he manifested in the flesh? Is it not plain that every man is in the flesh & cannot otherwise bee seen by any body? How then was he said to be seen of the holy Angels? For do they not also see us? What was there therefore new or extraordinary in Christ if the Angels saw him such a man as we are & nothing more? &c Thus Cyril goes on to give his reasons why that which was manifested in the flesh was not a mere created man, as Nestorius interpreted but the eternal Word or Son of God: all which would have been very superfluous & impertinent if God had then been expresly in the Text.

Seing therefore Nestorius alleged the text to prove that it was a created thing which was manifested in the flesh, & Cyril in confuting him did not answer that it was God expresly in the text nor raise any debate about the reading, but only put another interpretation upon the text then Nestorius had done: arguing with Cassian that in the text it was not a mere man as Nestorius contended, but the great mystery of godliness, & by consequence Christ or God, the Son, which was manifested in the flesh, & labouring by divers other arguments to prove this interpretation: its evident beyond all

cavil that Cyril was a stranger to θεὸς now got into the text & read ὃ or ὃς as Nestorius & Cassian did.

And yet in his books ad Reginas & his other writings, wherever he quotes this text the Greeks have since corrected it by their corrected MSS of S. Pauls Epistles & written Θεὸς instead of ὃ. Whence if you would truly understand the Nestorian [history] you must read ὃ or ὃς for θεὸς in all Cyrills citations of this text.

Now [if] Cyril read ὃ or ὃς , & in his explanation of the twelve Chapters or Articles quoted this text in the second Article & this explanation was recited by him in the Council of Ephesus[44] & approved by the Council with an anathema at the end of every Article: it's manifest that this Council allowed the reading ὃς or ὃ & by consequence that ὃς or ὃ was the authentic public uncontroverted reading till after the times of this Council. For if Nestorius & Cyril the Patriarchs of Constantinople & Alexandria & heads of the two parties in this controversy read ὃς or ὃ & their writings went about amongst the eastern Churches & were canvased by the Bishops & Clergy without any dispute raised about the reading, & if Cyril read ὃς by the approbation of the Council it self: I think the conclusion we make of its being then the general uncontroverted reading must needs be granted us. And if the authority of one of the four first general Councils make any thing for the truth of the reading, we have that into the bargain.

Yet whilst the Nestorian controversy brought the text into play, & the two parties ran the interpretation into extremes, the one disputing that ὃ or ὃς was a creature, the other that it was the word of God: the prevalence of the latter party made it passe for the orthodox opinion that ὃ or ὃς was God, & so gave occasion to the Greeks henceforward to change the language of Christ into that of God, & say in their expositions of the text that God was manifested in the flesh (as I find Theodoret doth,) & at length to write God in the text it self, the easy change of O or OΣ into ΘΣ inviting them to do it; and after this was become the orthodox authentic reading, to set right the text in Chrysostom, Cyril, Theodoret & wherever else they found it (in their opinion) corrupted by hereticks.

And the man that first began thus to alter the sacred text was Macedonius the Patriarch of Constantinople in the beginning of the sixt Century. For the Emperor Anastasius banished him for corrupting it. At that time the Greek Church had been long divided about the Council of Chalcedon; many who

allowed the condemnation of Eutyches rejecting the Councel by reason of its decreeing by the influence of the Bishop of Rome's letter against Eutyches, that Christ subsisted not only ex duabus naturis which Eutyches allowed but also in duabus naturis which language was new to the Greeks & by a great part of that Church taken for Nestorianism. For they understood that as the body & soul made the nature of man so God & Man made the nature of Christ, assigning a nature to the Person of Christ as well as to all other things, & not considering that in all compounds the several parts have also their several natures. Hence each party endeavoured to render the other suspected of heresy, as if they that were for the Council secretly favoured the Nestorians & they that were against it the Eutychians. ffor one party in maintaining two distinct natures in Christ were thought to deny the nature of one person with Nestorius, & the other party in opposing two distinct natures in him were thought to deny the truth of one of the natures with Eutyches. Both parties therefore to cleare themselves of those imputations anathematized both those heresies & therefore whilst they thus differed in their modes of speaking they agreed in their sence as Evagrius well observes. But the Bishops of Rome & Alexandria being engaged against one another & for a long time distracting the East by these disputes: at length the Emperor Zeno to quiet his Empire & perhaps to secure it from the encroachment of the Bishop of Rome a[45] who by this verbal contest aspired to the name & authority of universal Bishop, sent about an Henoticum or pacificatory Decree wherein he anathematized both Nestorius & Eutyches with their followers on the one hand & abrogated the Popes letter & the Councell on the other: & his successor Anastasius for the same end laboured to have this Decree signed by all the Bishops. And Macedonius at first subscribed it, but afterwards heading those who stood up for the Councel, b[46] was for corrupting the scriptures in favour of his opinion & such other things as were laid to his charge deposed & c[47] banished A.C. 512. But his own party (which at length prevailed) defended him as if opprest by calumnies & so received that reading for genuine which he had put about among them. For how ready all parties are to receive what they reccon on their side, Ierome well knew, when he recommended the testimony of the three in heaven by its usefulnesse, & we have a notable instance of it in the last age when the churches both eastern & western received this testimony in a moment in their greek Testaments, &

still continue with great zeal & passion to defend it for the ancient reading against the authority of all the greek Manuscripts.

But now I have told you the original of the corruption I must tell you my Author, & he is Liberatus Archdeacon of the Church of Carthage who lived in that very age. For in his Breviary. which he wrote in the year 535 or soon after & collected (as he saith in his Preface) out of greek records, a[48] he delivers it in these words. Hoc tempore Macedonius Constantinopolitanus Episcopus ab Imperatore Anastasio dicitur expulsus tanquam Evangelia falsaret et maxime illud Apostoli dictum: Quia apparuit in carne, justificatum est in spiritu. Hunc enim mutasse ubi habet Qui …. hoc est …….. monosyllabum græcum, litera mutata in …… vertisse et fecisse ……. id est, Vt esset Deus, apparuit per carnem. Tanquam Nestorianus ergo culpatus expellitur per Saverum Monachum.[49] The greek letters here omitted are in the second edition of Surius & in those of the Councels thus inserted: ubi habet οσ hoc est qui monosyllabum græcum littera mutata o in ω vertisse et fecisse ὡς, id est Vt esset Deus, apparuit per carnem. But this interpolation was surely made by conjecture. ffor if Θεὸς was in the sacred text before the corruption, then ὸς or ὃ was not in & so could not be changed into ὡς: but if Θεὸς was not in it could not be brought in by this change. The interpolation therefore is inconsistent & spurious & seems to have been occasioned by straining to make out Nestorianism here: the scribes for that end d[50] referring the words ut esset to the sacred text & then the Interpolator writing ὡς for ut whereas they should have referred ut esset to the words of Liberatus thus distinguished from the sacred text. id est ut esset, Deus apparuit per carnem: I had rather therefore wave the conjecture of this Interpolator & fill up the lacunæ by the authority of an ancient Author Hincmarus – who above 800 years ago c[51] related the fact out of Liberatus after this manner. Quidam ipsas scripturas verbis illicitis imposturaverunt, sicut Macedonius Constantinopolitanus episcopus. Qui ab Anastasio Imperatore ideo a civitate expulsus legitur quoniam falsavit Evangelia, et illum Apostoli locum ubi dicit Quod apparuit in carne justificatum est in spiritu per cognationem græcarum literarum O et Θ hoc modo mutando falsavit. Vbi enim habuit Qui hoc est OΣ, monosyllabum græcum littera mutata O in Θ mutavit & fecit ΘΣ, id est ut esset, Deus apparuit per carnem. Quapropter tanquam Nestorianus fuit expulsus. He was banished therefore for changing the ancient reading (which in some

MSS was OΣ as these authors have it, & in others O,) into ΘΣ. But whereas he is here represented a Nestorian for doing this, the meaning is that he was banished for corrupting the text in favour of the doctrine of two natures in Christ, which his enemies accounted Nestorianism tho it was not really so. Nestorius held only a humane nature in Christ & that God the Word dwelt in this nature as the spirit [illeg.] & therefore interpreted it of the [illeg.] This [illeg.] Macedonius anathematized & [maintained two] natures in Christ, & for proving this corrupted the text [illeg.] Christ into two [illeg.] Macedonius accounted Nestorianism [illeg.] respect the Nestorian faith that they banished him [as a] Nestorian for corrupting the text tho he was not really [illeg.].

But whilst he is said to be banished as a Nestorian for this, without explaining what is there meant by a Nestorian, it looks like a trickish way of speaking used by his friends to ridicule the proceedings against him as inconsistent, & perhaps to invert the crime of falsation as if a Nestorian would rather change ΘΣ into O. For they that read history with judgment will too often meet with such trickish reports & even in the very story of Macedonius I meet with some other reports of the same kind. For Macedonius having in his keeping the original Acts of the Council of Chalcedon signed by that Emperor under whom it was called & refusing to deliver this book to the Emperor Anastasius: some to make this Emperor perjured distorted the story as if at his coming to the crown he had promised under his hand & oath that he would not act against the Council of Chalcedon, & represented his subscribed promise to be the book which Macedonius refused to deliver back to him. Macedonius had got his Bishopric by being against the Council of Chalcedon, & a[52] had subscribed the Henoticum of Zeno in which that Council was anathematized: & this being objected against him, his friends to stifle the accusation make a contrary story of the Emperor as if when he came to the crown he had done as much in behalf of the Council. Another & & Another report was d[53] that the people of Alexandria & all Egypt great & small, free & bond, Priests & Monks excepting only strangers, became about this time possessed with evil spirits & being deprived of humane speech barked day & night like doggs so that they were afterward bound with iron chains & drawn to church that they might recover their health. For they all eat their hands and arms. And then an Angel appeared to some of the people saying

that this happened to them because they anathematized the Council of Chalcedon, & threatning that they should do so no more. Again we are told in b[54] history that the adversaries of Macedonius produced certain boys in judgment to accuse both him & themselves of Sodomy: but when they found his genitals were cut off, they betook themselves to other arts for deposing him. If you can beleive that an Eunuch had the beard & voice of another man & that in a solemn Council the great Patriarch of the East was thus accused & thus acquitted & yet deposed: you must acknowledge that there were many Bishops among the Greeks who would not stick at as ill & shamelesse things as corrupting the scriptures. But if all this be a sham invented to discredit the Council: the need of such shams adds credit to their proceedings in condemning him for a falsary.

This Council (if I mistake not)set first [illeg.] being that Council which Theodorus calls a company of [illeg.] wretches & Nicephorus a convention of Hereticks assembled [against] Macedonius [illeg.] d[55] [illeg.] adding to the thrice holy this [illeg.] Who art crucified for us the people fell into a [illeg.] & afterward when Macedonius came to be accused they fell into a greater tumult crying out. The time of persecution is at hand, let no man desert the Father, meaning Macedonius. In this tumult (which was said to be stirred up by the Clergy of Constantinople) many parts of the City were burnt & the nobles & Emperor brought unto the greatest danger, insomuch that the Emperor was forced to profer the resignation of his Empire before he could quiet the multitude. Then seing that if Macedonius were judged the people would defend him he caused him to be carried by force in the night to Chalcedon & thence into banishment, as Theodorus writes. Whence I gather that the Council removed also to Chalcedon to avoyd the tumult & finish their proceedings there. For the story of his being accused in judgment by boys Nicephorus places after this tumult & all agree that he was condemned, & the Monks of Palestine in an Epistle recorded by Evagrius say that Xeraias & Dioscorus joyned with many Bishops banished him. When his condemnation was sent him signed by the Emperor he asked whether they that condemned him received the Council of Chalcedon, & when they that brought him the sentence denyed it he replied, If Arians & Macedonians had sent me a book of condemnation could I receive it? So that it seems he stood upon the illegality of the Council. The next day one Timothy was made Bishop of Constantinople & he e[56] sent about the

condemnation of Macedonius to all the absent Bishops to be subscribed. Whence I think it will easily be granted that he was condemned as a falsary by the greatest part of the eastern Empire & by consequence that the genuine reading was till then by the Churches of that Empire accounted ὃ. For had not the public reading then been ὃ there could have been no colour for pretending that he changed it into θΣ.

About six years after Anastasius dyed & his successors Iustin & Iustinian set up the authority of the Council of Chalcedon again together with that of the Pope over the eastern Churches as universal Bishop. And from that time the friends of Macedonius prevailing, its probable that in opposition to the Hereticks which condemned him & for promoting & establishing the doctrine of two natures in Christ they received & spread the reading ΘΣ. But as for the authority of the Pope, that fell again with Rome in the Gothick wars & slept till Phocas revived it.

I told you in – – [illeg.] men & idiots [illeg.] written amisse. For this I gather from an [illeg.]ical report of this [illeg.]nd put about in the West & thus recorded by Victor Tunnensis in his Chronicle. Messala V. [Cons.] Consantinopoli jubente Anastasio Imperatore sancta Evangelia tanquam ab idiotis Evangelistis composita reprehenduntur et [illeg.]endantur . That is In the Consulship of Messala the holy Gospels by this command of the Emperor Anastasius were censured & [condemned] at Constantinople as if written by Evangelists which [illeg.] Here Victor errs in the year. For Messala was [Consul in] 506 that is six years before the banishment of Macedonius. But victor is very uncertain in the years: for he places the banishment of Macedonius in the Consulship of Avisanus A.C. 502 & the abovementioned tumult about the trisagium in the Consulship of Protus A.C. 513: whereas all these things happened in a year For it's plain by this Chronicle that the scriptures were examined & corrected about this time by a Council at Constantinople by the order of Anastasius & I meet with no other Council to which this character can [illeg.] besides that which deposed Macedonius. Now that they should censure & correct the Gospels as if written by Idiots is too plainly ironical to be true history & therefore must be an [abusive] report invented & put about to ridicule & shame the Council & to propagate the corruptions of Macedonius as the gen[neral] [& Apo]stolick reading of the scripture which the Council had rashly corrected.

So then the falsation was set on foot in the beginning of the sixt Century & is now of about 1200 years standing & therefore since it lay but in a lettter & so was more easily spread in the greek MSS then the testimony of the three in heaven in the Latine ones, we need not wonder if the old reading be scarce to be met with in any greek MSS now extant: & yet it is in some. For thô Beza tells us that all the greek MSS read Θεὸς yet I must tell Beza's Readers that all his MSS read ὃ. For he had no other MSS on the Epistles besides the Claromontan, & in this MS, as Morinus by ocular inspection a[57] has since informed us, the ancient reading was O, but yet in another hand & with other ink, the letter Θ has been written out of the line & the letter O thickened to make a Σ appear. Which instance shews sufficiently by whom the ancient reading has been changed. Velesius also read ὃ in one of the Spanish MSS, & so did the author of the Oxford edition of the new Testament A.C. 1675 in the MS of Lincoln College library which is the oldest of the Oxford MSS. The b[58] Alexandria MS & one of Colberts & Cyril c. 12 scholiorum (teste Photio MS com. in epistolas) read OΣ. So then there are some ancient greek MSS which read ὃ & others ος: but I do not hear of any Latine ones either ancient or modern which read Θεὸς.

And besides to read Θεὸς makes the sense obscure & difficult. For how can it properly be said that God was justified in the spirit? But to read ὃ, & interpret it of Christ as the ancient Christians did without restraining it to his divinity, makes the sense very easy. For the promised & long expected Messias, the hope of Israel is to us the great mystery of godlinesse, & this mystery was at length manifested to the Iews from the time of his baptism, & justified to be the person whom they expected.

I have now given you an account of the corruption of the text, the summ of which is this. The difference between the greek & the ancient Versions puts it past dispute that either the Greeks have corrupted their MSS or the Latines Syrians & Ethiopians their Versions, & it's more reasonable to lay the fault upon the Greeks then upon the other three for these considerations. It was easier for one nation to do it then for three to conspire. It was easier to change a letter or two in the Greek then six words in the latine. In the Greek the sense is obscure in the Versions clear. It was agreable to the interest of the Greeks to make the change but against the interest of the three nations to do it, & men are never false to their interests. The greek reading was unknown in the times of the Arian controversy, but that of the

Versions then in use amongst both Greeks & Latines. Some greek MSS render the greek reading dubious: but those of the Versions hitherto collated agree. There are no signes of corruption in the Versions hitherto discovered but in the Greek we have shewed you particularly when, on what occasion & by whome the text was corrupted.

I know not whether it be worth the while to tell you that in the printed works of Athanasius there is an Epistle De incarnatione Verbi which reads Θεὸς. For this Epistle relates to the Nestorian heresy & so was written by a much later author then Athanasius, & may also possibly have been since corrected (like the works of Chrysostom & Cyril) by the corrected text of S. Paul's Epistles. I have had so short a time to run my eye over Authors, that I cannot tell whether upon further search, more passages about this falsation may not hereafter occur pertinent to the argument. But if there should I presume it will not be difficult now the falsation is thus far laid open, to know what construction to put upon them & how to apply them.

You see what freedome I have used in this discourse, & I hope you will interpret it candidly. ffor if the ancient Churches in debating & deciding the greatest mysteries of religion, knew nothing of these two texts: I understand not why we should be so fond of them now the debates are over. And whilst it's the character of an honest man to be pleased, & of a man of interest to be troubled at the detection of frauds, & of both to run most into those passions when the detection is made plainest: I hope this letter will to one of your integrity prove so much the more acceptable, as it makes a further discovery then you have hitherto met with in Commentators.

After the fourth Paragraph ending with these words – ——[in order to prove them one God,] add this Paragraph

These passages in Cyprian may receive further light by a like passage in Tertullian, from whence Cyprian seems to have borrowed them. For tis well known that Cyprian (tho otherwise a prudent man) was a great admirer of Tertullians writings & read them frequently, calling Tertullian his Master. The passage is this. a[59] The connexion of the Father in the Son & of the Son in the Paraclete makes three cohering one from another, which three are one (one thing, not one person:) as it is said, I & the Father are one; denoting the unity of substance, not the singularity of number. Here you see Tertullian says not the father word & holy spirit as the text now has it, but the Father Son & Paraclete, nor cites any thing more of the text then these

words; which three are one. Tho this his treatise against Praxeas be wholy spent in discoursing about the Trinity & all texts of scripture are cited to prove it, & this text of Iohn as we now read it would have been one of the most obvious & apposite to have been cited at large, yet Tertullian could find no more words in it for his purpose then These three are one. These therefore he interprets – – These he interprets of the Trinity & enforces the interpretation by that other text I and the Father are one, as if the phrase was of the same importance in both places. So then this interpretation seems to have been invented by the Montanists for giving countenance to their Trinity. ffor Tertullian was a Montanist when he wrote this: & its most likely that so corrupt & forct an interpretation had it's rise amongst a sect of men accustomed to make bold with the scriptures. Cyprian being used to it in his Master's writings, it seems from thence to have dropt into his. For this may be gathered from the likeness between their citations. And by the disciples of these two great men it seems to have been propagated amongst those many Latines who (as Eucherius tells us) received it in the next age, understanding the Trinity by the spirit, water & blood. For how without the countenance of some such author an in terpretation so corrupt & strained should come to be received in that age so generally, I do not understand.

In the last Paragraph but four, after the words [& two in Lincoln College] strike out the words [& five other ancient ones lately brought out of Turkey by Mr Covel & collated by Dr Mills] & instead thereof write [& four or five other ancient ones lately collated at Oxford in order to a new impression of the Greek Testament as I am informed

Sir

Since the discourses of some late writers have raised in you a curiosity of knowing the truth of that text of Scripture concerning the testimony of the three in Heaven 1 Iohn V.7, I have here sent you an account of what the reading has been in all ages, & by what steps it has been changed, so far as I can hitherto determine by records. And I have done it the more freely, because to You, who understand the many abuses which they of the Roman Church have put upon the world, it will scarce be ungratefull, to be convinced of one more than is commonly believed. For altho' the more learned & quicksighted men, as Luther, Erasmus, Bullinger, Grotius & some others, could not dissemble their knowledge, yet the generality are fond of the place for its making against Heresy. But whilst we exclaim against the pious frauds of the Roman Church, & make it a part of our religion to detect & renounce all things of that kind; we must acknowledge it a greater crime in us to favour such practises than in the Papists we so much blame on that account. For they act according to their religion but we contrary to ours. In the Eastern Nations, & for a long time in the Western, the Faith subsisted without this text, & it is rather a danger to religion than an advantage to make it now lean upon a bruised reed. There can not be better service done to the truth, than to purge it of things spurious. And therefore knowing your prudence & calmness of temper, I am confident I shall not offend you by telling you my mind plainly: especially since 'tis no article of Faith, no point of discipline, nothing but a criticism concerning a text of Scripture, which I am going to write about.

The History of the Corruption in short is this. First some of the Latines interpreted the Spirit, water, & blood of the Father, Son & Holy Ghost to prove them one. Then Ierome for the same end inserted the Trinity in express words in his Version. Out of him the Africans began to allege it against the Vandals about 64 years after his death. Afterwards the Latins noted his variations in the margins of their books, & thence it began at length to creep in to the text in transcribing, & that chiefly in the twelfth & following centuries, when disputing was revived by the Schoolmen. And when printing came up, it crept out of the Latin into the printed Greek, against the authority of all the greek MSS & ancient versions, & from the Venetian presses it went soon after into Greece. Now the truth of this history will appear by considering the arguments on both sides.

The Arguments alleged for the testimony of the three in heaven are the authorities of Cyprian, Athanasius & Ierome, & of many Greek manuscripts & almost all the Latin ones.

Cyprians words run thus. (a)[1] "The Lord saith I & the Father are one, & again of the Father & son & Holy Ghost it is written; And these three are one." The Socinians here deal too injuriously with Cyprian, while they would have this place corrupted. For Cyprian in another place repeats almost the same thing (b)[2] "If, saith he, [one baptized amongst heretics] be made the Temple of God, tell me I pray of what God: – If of the Holy Ghost; since these three are one, how can the Holy Ghost be reconciled to him who is the enemy of either the Father or the Son." These places of Cyprian, being in my opinion genuine, seem so apposite to prove the testimony of the three in heaven, that I should never have sus pected a mistake in it, could I but have reconciled it, with the ignorance I meet with of this reading in the next age amongst the Latins of both Afric & Europe, as well as amongst the Greeks. For had it been in Cyprians Bible, the Latins of the next age, when all the world was engaged in disputing about the Trinity, & all arguments that could be thought of were diligently sought out & daily brought upon the stage, could never have been ignorant of a text, which in our age, now the dispute is over, is chiefly insisted upon. In reconciling this difficulty, I consider therefore that the only words of the text quoted, by Cyprian in both places are, And these three are one; which words may belong to the eighth verse as well as to the seventh. For (c)[3] Eucherius Bishop of Lion in France, & contemporary to St. Austin, reading the text without the seventh verse, tells us that many then understood the Spirit, the Water & the Blood to signify the Trinity. And (d)[4] S. Austin is one of those many, as you may see in his third book against Maximus: where he tells us that the Spirit is the Father, for God is a spirit; the Water, the Holy Ghost, for he is the Water which Christ gives to them that thirst, & the Blood the Son, for the word was made Flesh. Now if it was the opinion of many in the western Churches of those times that the Spirit, the Water & the Blood signified the Father, the Son & the Holy Ghost, its plain that the Testimony of the three in Heaven in expresse words was not yet crept into their books. And even without this testimony it was obvious for Cyprian, or any man else of that opinion, to say the Father & Son & Holy Ghost, it is written And these three are one. And that this was Cyprians meaning, (e)[5]

Facundus, an African Bishop in the sixth century is my author. For he tells us expressly that Cyprian in the abovementioned place understood it so; interpreting the water, spirit & blood to be the Father, Son, & Holy Ghost, & thence affirming that Iohn said of the Father, Son, & Holy Ghost, These Three are one. This at least [may] be gathered from this passage of Facundus, that some in those early ages interpreted Cyprian after that manner. Nor do I understand how any of those many who took the Spirit Water & Blood for a type of the Trinity, or any man else who was ignorant of the testimony of the Three in Heaven (as the Churches in the time of the Arian controversy generally were) could understand him otherwise. And even Cyprians own words do plainly make for this interpretation. For he does not say, The Father The Word & the Holy Ghost, as 'tis now in the seventh verse, but the Father & Son & Holy Ghost as 'tis in Baptism, the place from whence they used at first to derive the Trinity. If it be pretended that the words cited by Cyprian are taken out of the seventh verse rather than out of the eighth, because he reads not Hi tres in unum sunt, but Hi tres unum sunt; I answer, that the Latines generally read Hi tres unum sunt as well in the eighth verse as in the seventh, as you may see in the newly cited places of Austin & Facundus, & those of Ambrose, Pope Leo, Beda & Cassiodorus which follow, & in the present Vulgar Latin. So then the testimony of Cyprian respects the eighth, or at least is as applicable to that verse as to the seventh, & therefore it is of no force for proving the truth of the seventh. But on the contrary, for disproving it, we have here the testimonies of Facundus, S. Austin, Eucherius & those many others whom Eucherius mentions. For if those of that age had met with it in their books, they would never have understood the Spirit the Water & the Blood to be the three Persons of the Trinity in order to prove them One God.

I have now given you an account of the corruption of the text: the sum of which is this. The difference between the Greek of the Ancient Versions puts it past dispute, that either the Greeks have corrupted their MSS, or the Latins Syrians & Ethiopians their Versions. And its more reasonable to lay the fault upon the Greeks than upon the other three, for these considerations. It was easier for one nation to do it than for three to conspire. It was easier to change a Letter or two in the Greek than six words in the Latin. In the Greek the sense is obscure, in the Versions clear. It was agreeable to the Interest of the Greeks to make the change; but against the

Interest of the three nations to do it: and men are never false to their interest. The greek reading was unknown in the times of the Arian controversy; but that of the Versions, then in use amongst both Greeks & Latins. Some Greek MSS render the Greek reading dubious; but those of the Versions hitherto collated agree. There are no signs of corruption in the versions hitherto discovered: but in the Greek we have shewed you particularly when, on what occasion, & by whom, the text was corrupted.

I know not whether it be worth the while to tell you, that in the printed works of Athanasius there is an Epistle, De Incarnatione Verbi, which reads Θεὸς. For this Epistle relates to the Nestorian heresy, & so was written by a much later author than Athanasius, & may also possibly have been since corrected, like the works of Chrysostom & Cyrill, by the corrected text of St. Pauls Epistles. I have had so short a time to run my eye over Authors, that I can not tell whether upon further search, more passages about this falsation may not hereafter occurr pertinent to the argument. But if there should, I presume it will not be difficult, now the falsation is thus far laid open, to know what construction to put upon them, & how to apply them.

You see what freedom I have used in this discourse, & I hope you will interpret it candidly. For if the ancient Churches in debating & deciding the greatest mysteries of religion, knew nothing of these two texts; I understand not, why we should be so fond of them, now the debates are over. And whilst its the character of an honest man to be pleased, & of a man of interest to be troubled at the detection of frauds, & of both to run most in to those passions when the detection is made plainest: I hope this letter will to one of your integrity prove so much the more acceptable, as it makes a further discovery than you have hitherto met with in Commentators.

The Biographies

Sir Isaac Newton by Sir James Thornhill, 1712

MEMOIRS OF SIR ISAAC NEWTON'S LIFE by William Stukeley

CONTENTS

Preface.
Allegorical portrait of Isaac Newton
Life of Newton

35 St Martin's Street, a narrow, paved street to the south of Leicester Square, London — Newton's home from 1710 to 1725

The bust of Newton in Leicester Square, commemorating his residence in St Martin's Street

Preface.

The following Memoirs of this great man by some may be accounted trivial. imperfect they are own'd to be, & drawn up with a purpose only of assisting, toward a compleat life. The scituation I was then in, gave me no further opportunity of inquiry, than what I have here done. & by cooler minds it is thought not wholly unworthy of being communicated to the publick.

whoever writes a life, never fails to give what they can learn of the partys family, education, and the junior part of it. Such is chiefly the present work. but in that especially of so great a man, every reader burns with a desire of knowing somewhat of the primordia, the preparation and presages of his extraordinary abilitys; of the height to which he carryed; and the foundation on which he built, a new philosophy.

I succeeded so far as to gather these materials in the critical time when they were only to be had. the candid reader will accept of this Xtestimony of my respect to the memory of this incomparable person.

I have waited for this life to be done, as it deserves; & have not been overhasty, in printing, what was wrote 27 years ago.

there is this use in it likewise. for whilst we see how a great genius will early break out, & dawn, ag^{t} any obstacle; will show in miniature, what its ripening talents will adorn: so to a less pregnant one, such objects may be presented, & such measures taken, as will insensibly lead them to very considerable heights; when done with proper art, & judgment; by those that have the care of the education of youth. human nre like a plant must have the vital principle in its self: but it requires watering & proper culture to bring it to its destin'd perfection. So a botanist that has †got a rare flower or shrub, views with pleasure & attention its gradual advances in growth, & how it unfolds its beautiful foliages, & the cases of its flowers, till at length they arrive at the full blaze of their perfect ſtate. I have need enough of an apology, who dare to take in hand the present subject. biography is a thing wh I have no claim to, and has only been well executed by the masterly pen of a Plutarch. a candid reader will make great allowances in the case; in confidence of wh I undertook it. nor shall I easily be excusd from a share of

vanity, where I have so often brought my self upon the carpet. but when tis consider'd; it will be found very necessary, to an intelligent reader. I think I need say no more in justification of it, than that what I say is strictly true $^{\Theta}$as far as my memory will serve me & as none of my countrymen have hitherto thought fit to give this important life to the publick, I flatter my self that what I have here done, tho' it cannot do justice to the subject, yet will give us a satisfaction in many particulars worth knowing; by no means to be thrown into oblivion. & the very name of Newton is able to wipe out all faults; and indeed that was the sole incentive, that made me think of publishing it. and in regard to him, it is judg^{d} by some friends of mine especially of my native county, a debt due to the publick, as well as to his memory. that part of these papers which relates to his younger days, is not now to be recoverd. & tho' it must be accounted no otherwise than puerile: yet there is somewhat therein as much above the common level, as he himself was, in his more advanced years.

I have endevor'd to discharge somewhat of the debt, and it is all, that in my scituation, was in my power to do. & my scituation only c^{d} enable me to do the most valuable part of what is here done.

for a professed account of his works I refer the learned ^{X}to Mr. Maclaurin & Dr. Pemberton. What I have to say on his life is divided into 3 parts. I. What I knew of him personally, whilst I resided in London, in the flourishing part of my life.

II. What I gatherd of his family & education at Grantham, after I went to live there.

III. Of his character.

a good part of what I write is from matters of my own knowledg; nor can I well seperate my self from it without writing absurdly. Nor need I be asham'd to own the little degree of friendship, he honor'd me withal. tis no mean satisfaction to me that I pass'd the most flourishing part of my life in an age, when there were a number of great men coeval with S$^{r.}$ Isaac Newton, more than are mention'd in these memoirs, with most of whom I was well acquainted: men of great eminence & station, in all the literary societys then among us. If matters are now somewhat changed, tis owing to the natural revolutions incident to mundane affairs. men & sciences have

their seasone, thir rise, thir height, and thir declension. nor is the best of things, religion excluded from this predicament. nought remains immutable but the sovereign author of the whole.

^*X* Insertion from page ii

^*†* Insertion from the same page.

^*θ* Insertion from page ii

^*X* Insertion from the same page.

1728. the life of S^r. Isaac in octavo, short but well done. The following memoirs will be reckon'd only as telling of storys: be it so. ^θI have endevor'd to render them not tedious, nor too many: having suppressed some, that I might give no more than is to the purpose, to show the signs of a rising genius. & what would have been trifling of any other persons, by no means will be apply'd to him who is the subject of this discourse.

the world has now been sufficiently acquainted with Sir Isaac's great acquirements, from his writings. & as now most of those that personally knew him, are gone; I flatter my self the rest, & succeeding generations will be pleasd to know somewhat of his origin, & education, & private life: & that he himself would be the only one of mankind displeased, had it been done in his life time. I know that foreigners have long expected somewhat of this kind, more than has been communicated to the public, & wonderd at our remissness in doing it. I have therefore herein contributed my endevors to satisfy their eager curiosity: till some abler hand dos more adequate justice to it. & for that purpose these papers may administer some help, and they are judg'd not inconsiderable enough to be suppressd. may the reader find a pleasure in perusing, as I did in writing them.

^*θ* Insertion from page iii

Allegorical portrait of Isaac Newton

W. Stukeley ad viva f.
Allegorical portrait of Isaac Newton

Life of Newton

To the right honorable
George Earl of Macclesfield,
FRS. &c.

presuming upon that early acquaintance that has been between us; but more, on that candor so eminent in your Lordships character; I make bold to address the following paper to you. I drew it up for the entertainment of the members of the Royal Society; to which your Lordship is so conspicuous an ornament. to the Royal Society, every, even the least, account of Sr. Isaac Newton cannot fail of being acceptable.

to recount the history of such as have deserv'd well of mankind is always lookd upon as a commendable thing. ^{X}tis generally a species of writing, favorable enough to the author: tis an entertainment in reading, without the attention of study.

I shal recite: – I. What I knew of him in the earlier part of my own life.

II. What I learned of his family & the earlier part of his life.

III. What I knew of the latt^{r} part of his life. the reader's mind is too much ingag'd, to discern the imperfections of the writer. & whilst we are paying a just debt to their memory, we throw in an incitement to others, to merit in their turn. but the illustrious personage here in some sort again presented to the publick view, of all others commands a particular regard & veneration.

tho' my abilitys are much too inconsiderable to make any elogium on so great a name, yet I have this ample excuse in my favor, that it can need none. I only pretend to tell chiefly some private storys of his life, as they fell under my own cognizance; or what I learn'd from report of credit. but even these have dignity enough to merit a remembrance. & I cannot but account it a very particular felicity in my own life, that it was connected with some part of his: & in having the opportunity of conversing with him on many familiar occasions.

but what I chiefly aim at in this paper, is to recount somewhat of the juvenile part of his life. for which I had a fitting opportunity offerd me by my going to live at Grantham, just before he dy'd; & just before some of the oldest people in that neighborhood dy'd, who were his cotemporarys; some his schoolfellows: from whom I obtain'd such relations as their memorys supply'd me with. I shall likewise add, what occurs to me of my own knowledg. ^{X}the nre of what I propose to doe, is such as forbids me being

over sollicitous about an exact method. this is not a perfect life of Sir Isaac Newton. it is impossible that I sh^{d} do it, not having the materials, nor any opportunity of obtaining them: nothing more than that little knowledg I c^{d} obtain, either of my self, or the informations I took, near his native place. I lived in country obssurity, for above 20 years after his death; which was the fit season to gather all the notices of the most flourishing part of his time. after I have all this while in vain expected justice to be done to his memory, I thought what I c^{d} say on the great subject would not be wholly unacceptable. some are celebrated after death, for their learning, some for their vertue, & piety, & charity, some for acquirements in arts and sciences; but he claims it, upon all these accounts.

In April 1705 Sir Isaac came to Cambridg, to offer himself a candidate to represent the University, in parliament. on the 16th of that month Queen Ann was pleasd to visit the University, from Newmarket: whither a deputation of the heads of the Colleges had been, to invite her. I was then student in Corpus Christi College, in what we call there junior Sophs year, being the 3d after admission. the whole University lined both sides of the way from Emanuel college, where the Queen enter'd the town, to the public schools. her Majesty dined at Trinity college; where she knighted Sir Isaac. & afterward, went to evening service at king's college chapel; which I always lookd upon, as the most magnificent building in the world. the provost made a speech to her Majesty, & presented her with a bible richly ornamented. Then she returned, amid the repeated acclamations of the scholars & townsmen. It was talked among us, that one purpose of the Queens, was to recommend Sir Isaac Newton to the choice of the University: ^{X}by her powerful presence, & chiefly projected by the Earl of Hallifax, minded, that great man should receive from, & give honor to the world, in a more public life.

We had then in our college, under the instruction of Dr Robert Dannye, (who dy'd in the month of March 1730, rector of Spofforth in Yorkshire) gone thro' an excellent course of lectures in mathematics, & philosophy, particularly the Newtonian. & I own, upon this Royal Visit, my curiosity was mostly excited, & delighted, in the beholding Sir Isaac; who remain'd some time with us. & no joy could equal that which I took, in seeing the great man, of whom we had imbibed so high an idea, from being conversant

in his works. We †always took care on Sundays to place our selves before him, as he sat with heads of the colleges; we gaz'd on him, never enough satisfy'd, as on somewhat divine. the University was well sensible of the proposed honor, & readily chose him thir representative; who was thir greatest boast & ornament.

Then was the glory of Brittain at its acme, & the glory of a Brittish parliament, & the glory of a wise, & able ministry; which inabled the great Duke of Marlborough, to carry the glory of the Brittish arms & councils, to the highest pitch. then were the two nations united into one great Brittain. At the same time, learning was equally incourag'd, & flourishd: and Religion then kept pace with it. witness the Act of Parliament for founding and endowing 50 new churches in the city of London: & the seasonable gift of this pious queen, for the augmentation of the small Livings of the parochial clergy.

Such was then the felicity of Brittain. But as afterwards, Religion, by being divided into many streams, has weaken'd its power & influence upon the morals of the people: we feel that deluge of impiety which now oreflows us, altogether unknown to former ages; which threatens a solution of the bands of Society, & government. that the state of our public affairs has ever since been upon the decline, is but the natural consequence.

this was the most flourishing age of Brittain, when we had this extraordinary man among us, in the most flourishing part of his life. Sir Isaac was at this time, about 63 years of age current; & had now for above 20 years been known, & celebrated for the greatest genius of human nature. by the Earl of Halifax his means, he had been drawn forth into light before, as to his person, from his belov'd privacy in the walls of a college. where at 40 years of age he published his Principia, that prodigious and immortal work. †& this year, as it was the grand climacteric of his life: so it was that crisis to him, & to the world reciprocal; that he might receive the publick honors & lucrative reward, due to his consummate merit, for the remainder of his days. & now all the great men in Europe had the opportunity, by making a voyage to England, of satisfying thir eager curiosity in seeing him preside in, & adorn, the Royal Society; whose glory too was then at the highest.

On the 20 March 1717-8 whilst I practised physick in London, I was admitted a fellow by Sir Isaac, at the recommendation of Dr. Mead, the preceding november

being Sir Isaac's countryman of Lincolnshire [X]& pretty constant in attendance at the weekly meetings of the Royal Society, from that time, I was well receiv'd by him, & enjoyd a good deal of his familiarity, & friendship: [θ]I often visited him, sometime with Dr. Mead, Dr. Halley, or Dr. Brook Taylor, Mr W. Jones or Mr Folkes & others. sometime alone; and we discoursd upon divers curious matters, as well as on country news: I being acquainted with many of his friends & relations there: & my brother being at that time apprentice to his old intimate friend & school fellow, Mr Chrichloe of Grantham. being generally of the Council of the Royal Society. & upon the casual absence of a secretary, I was sometime order'd by him, to take his seat, for that sitting. Several times, I was proposd by him, & elected an auditor of the yearly accounts of the Society, at the same time we din'd with him at, his house by Leicester fields.

in the year 1720 Sir Isaac's picture was painted by Sir Godfry Kneller to be sent to Abbè Bignon in France; who sent his picture to Sir Isaac. Both Sir Isaac & Sir Godfry desired me to be present at all the sittings. it was no little entertainment , to hear the discourse that passd between these two first men [Ж]in their way. tho' it was Sir Isaac's temper to say little, yet it was one of Sir Godfrys arts to keep up a perpetual discourse, to preserve the lines, & spirit of a face. I was delighted to observe, Sir Godfry, who was not famous for sentiments of religion, sifting Sir Isaac, to find out his notions on that head; who answerd him, with his usual modesty, & caution.

in August that year, Sir Isaac went to Oxford, in company of Dr John Kiel; he having not been there before.

the same year 1720 the South Sea year, I was in the Council of the Royal Society: which by subscribing, lost £600. Sir Isaac very readily offerd to add to his large donations before made, in the most genteel manner, [X]in order to repair the loss but the Society would not permit it.

Sir Isaac was of a generous disposition, & particularly fond of his native country of Lincolnshire. & loved to frequent their annual feasts; & contribute to any of their charitable schemes [θ]usual at such meetings.

20 feb. 1720-1 a Lincolnshire feast was held at the Ship tavern, Temple bar. when I went into the dining room above stairs, where the better sort of company was; it was talkd, that there was an old gentleman belowstairs whom they fancied to be Sr. Isaac Newton. I instantly went down, & finding it to be so, sat down with him. they above sent to desire us to walk up into the chief room. I answerd, the *chief room* was where Sir Isaac Newton sat. upon which the upper room was immediately left to the ordinary company, and the better sort came to us.

Sr. Isaac enjoy'd himself extremely in this society of his countrymen; & talkd much, & pleasantly. particularly I remember one part of the conversation turn'd upon musick, of which Sir Isaac was fond; & of the *opera's* then beginning to be in vogue among us. it was no wonder, his soul should be delighted with harmony. Sr. Isaac said they were very fine entertainments; but that "there was too much of a good thing; it was like a surfiet at dinner. I went to the last *opera*," says he "The first act gave me the greatest pleasure. The second quite tired me: at the third I ran away." He left 5 guineas, & desired the stewards to call upon him for every subscription relating to his countrymen.

about this time $^{\theta}$upon the request of my frd. Mr Maurice Johnson, he readily enterd himself a member of the literary society at Spalding, which still subsists. he made them a present of books: desirous of incouraging every laudable attempt to promote learning, in any branch.

he carryed me with him in his chariot to see the coinage at the Mint, in the Tower: their method of weighing to an extreeme nicety, & the rest of thir operations.

23 feb. 1721, I breakfasted with him in company of Dr. Halley. Sr. Isaac among other discourse, mentiond the poverty of the materials he had, for making his theory of the moon's motion. he said Mr Flamsted would not communicate his observations to him. so that what he did, was from 3 or 4 observations only of Mr Flamsteds, for which he owed him no thanks; as not design'd for him. but he said, *now* he could finish that theory, if he would set about it; but he rather chose to leave it for others.

Sr. Isaac at that time, show'd us the famous Hugenian glass of 170 foot *radius*; which he had lately bought, from Italy. afterward he presented it to the Royal Society. he complain'd of the custom house officers who made

him pay £20 for the duty, too honestly declaring the value θor price he paid for it. Others wd. have paid only the simple value of the glass. he bought soon after the great maypole in the Strand, & had it carryed, & set up at Wansted; for Dr Pound, to make astronomical observations.

about this time I was publishing my *Itinerarium Curiosum*. I had been a course of travels, from 13 august 1721 with Mr Roger Gale, thro' Berkshire Wiltshire, Glocestershire, Worcestershire. Herefordshire. Staffordshire., Derbyshire., Nottinghamshire., returning home on 13 october I visited Wulsthorp, which parishes to Colsterworth, 6 mile on this side Grantham, in the great road leading from London into the north. I had the curiosity to visit the place where Sir Isaac was born. Wulsthorp is a Mannor which was Sir Isaac's, & his ancestors. it stands in a pleasant little hollow, or *convallis* on the west side of the valley of the river Witham, which rises near there: one spring thereof in this hamlet of Wulsthorp. it has a good prospect eastward, & sees the Roman road, the Hermen Street going over the fields, to the east of Colsterworth. there cannot be a finer country than this. the house is a pretty good one, built of white stone, which abounds all over this country. they carryed me up stairs, & show'd me Sir Isaac's study, in which he used to sit, when he came home from Cambridg, to see his mother. the shelves were of his own making, being pieces of deal boxes. There were some years ago 2 or 300 books in it chiefly of divinity, & old editions of the fathers the library of his father in law, Mr Smith, rector of North Witham. these books Sir Isaac gave to his relation Dr. Newton of Grantham. *Dr. Newton gave some of them to me, when I went to live there.

I took a drawing of the place, & of Colsterworth church: & on my return to London, etchd that of Colsterworth church my self. I carryd a print of it to Sir Isaac, with which he was highly pleasd, and at the same time gave me a book of the new edition of his admirable treatise on opticks: & read over to me, that passage additional which he had inserted.

in november 1721 I was induced by Sir Hans Sloan, Lord Pembroke, Mr Roger Gale, Lord Paisley, Percivale, and very many more of the principal members of the Royal Society, to offer my self for Secretary in the room of Dr. Halley, who resigned. Some persons influenced Sir Isaac against his inclination, to take to the opposite party, and I lost it by a very small majority. Sr. Isaac show'd a coolness toward me for 2 or 3 years, but as I

did not alter in my carriage and respect toward him, after that, he began to be friendly to me again.

in novr. 1725 I was again auditor of the accounts of the Royal Society. we dined with Sr. Isaac. & after dinner we desired him to recommend the Council to be elected on Saint Andrews day approaching; which he did. I have now, the paper of his own hand writing, & *that* without spectacles, the names of the Council for the ensuing year: among which he put down mine. he wrote in a fair small hand.

in christmas 1725. upon a visit I made him, we had some discourse about Solomons temple; a matter which I had studyed with attention, & made very many drawings about it, which I had communicated to my Lord Thomas, earl of pembroke, to Mr. Martin Folkes, & some more of my friends. I found, Sr. Isaac had made some drawings of it, & had consider'd the thing: indeed he had studyed every thing. We did not enter into any very particular detail about it. but we both agreed in this, that the architecture was not like any designs, or descriptions yet publick. no authors have an adequate notion of antient, & original architecture. Sir Isaac rightly judged, that it was older than any other of the great temples mentioned in history; & was indeed the original model which they followed. he added, that Sesostris in Rehoboams time, took the workmen, from Jerusalem, who built his Egyptian temples, in imitation of it; one in every *Nomos*. & that from thence the greeks borrow'd thir architecture; as they had a good deal of thir religious rites, thir sculpture, & other arts.

Sir Isaac thought, the Greeks, according to thir usual ingenuity, improv'd architecture into a higher delicacy; as they did sculpture and other arts. I confirmed his sentiments by adding, that I could demonstrate (as I apprehended) that the architecture of Solomons temple was what we now call Doric. then, says he, the greeks advanced it into the Ionic, & the Corinthian, as the Latins into the composite.

this winter I had a severe fitt of the gout, as I generally had every year, by hereditary right. I found, they grew upon me worse & worse every year. & this among other considerations, determined me to leave the Town.

on 15 April 1726 I paid a visit to Sr. Isaac, at his lodgings in Orbels buildings, Kensington: din'd with him, & spent the whole day with him, alone. I acquainted him with my intentions of retiring into the country; & had pitchd on Grantham. I had a brother there in business, who had a

family. he had been apprentice to Mr Chrichloe apothecary there, a great acquaintance, & schoolfellow of Sir Isaacs.

Sr. Isaac expressed an approbation of my purpose: & especially for Grantham, which is near the place of his nativity: & where he went to the grammar school. he said, he had frequently thought of spending the last of his days, in that very place: and charg'd me, if that house to the east of the church, cd. now be purchasd at any reasonable price, that I should do it immediately in his name, & he wd. answer the demand. that house had belong'd to the family of the Skipwith's. he said his old acquaintance Mrs Vincent lived there & a few more, whom he knew.

after dinner, the weather being warm, we went into the garden, & drank thea under the shade of some appletrees, only he, & myself. amidst other discourse, he told me, he was just in the same situation, as when formerly, the notion of gravitation came into his mind. "why should that apple always descend perpendicularly to the ground," thought he to him self: occasion'd by the fall of an apple, as he sat in a comtemplative mood: "why should it not go sideways, or upwards? but constantly to the earths centre? assuredly, the reason is, that the earth draws it. there must be a drawing power in matter. & the sum of the drawing power in the matter of the earth must be in the earths center, not in any side of the earth. therefore dos this apple fall perpendicularly, or toward the center. if matter thus draws matter; it must be in proportion of its quantity. therefore the apple draws the earth, as well as the earth draws the apple."

‡that there is a power like that we here call gravity wh extends its self thro' the universe& thus by degrees, he began to apply this property of gravitation to the motion of the earth, & of the heavenly bodys: to consider thir distances, their magnitudes, thir periodical revolutions: to find out, that this property, conjointly with a progressive motion impressed on them in the beginning, perfectly solv'd thir circular courses; kept the planets from falling upon one another, or dropping all together into one center. & thus he unfolded the Universe. this was the birth of those amazing discoverys, whereby he built philosophy on a solid foundation, to the astonishment of all Europe.

at another time, when I visited him, we had some discourse about the first plantation of these western parts of the world, especially our island,

from Phœnicia. I had the satisfaction to find, that I had fallen into the same sentiments, with him, and indeed I cd. not but observe with surprize that he was master of every part of curious learning: & in each branch, equal to those that had studyd it alone. whence one would be apt to draw this conclusion; that a man must be well skilld in most parts of learning, who wd. excell even in one.

13 May 1726 Sr. Isaac appointed according to custom,[X]& direction of the Government, a Committee of the Royal Society to visit Dr. Halley, astronomer Royal, at the observatory Greenwich: Mr Martin Folkes, Dr. Brook Taylor, my self, Mr. Machen, Mr Graham. we were to examin into the astronomical instruments, for which the board of Ordnance had issued £500. before dinner, Dr Halley entertain'd us with a transit over the meridian, of the largest of all the fixt stars, Sirius. I observ'd, it ran along the horizontal thread of the telescope with an undulatory or jogging motion which I attributed to the *nisus* betw. the *axis* of the earth, & obliquity of the ecliptic; in which the earths motion is perform'd: which must in some degree oppose one another, bec. the *axis* of the earth is not parallel to the plain, in which it moves. & this seemed to me, to be the cause, that the heavenly bodys view'd in telescopes, do not proceed in a swimming, even motion; but by jirks.

the 6 june following, I left the Town, being at that time, one of the Censors of the College of Physicians; one of the Council of the Royal Society; & secretary to the antiquarian society . but I found, I was moved by a secret impulse of Providence, which saw further than my views extended. [†]& what my frds. very much wonder'd at. some of the fruits of my recess was the opportunity I had of drawing up these Memoirs. another was, that I fortunately found out the method of subduing that hitherto unconquerable malady, the gout; so as to [X]extend, as well as render my future life comfortable: which was one reason that induc'd me to enter into holy Orders: & therein I was much incourag'd by my great friend, Archbishop Wake, who ordaind me. I had purchasd a very agreable house at Grantham, where I then fixed my self; hoping, by riding & exercise, to alleviate the fitts of the gout. but the house that Sr. Isaac desired to buy at that time in possession of Mr Seckar, who lived in it, was not then to be had. on which head I wrote to him. & this prov'd to be the last act of my correspondence

with him. he dy'd the beginning of the next year. Sr. Michael Newton, a relation of Sr. Isaacs lived now at Hather, near Grantham. he stood candidate at a election for members of parliament. Mr Conduit who marryed Sr. Isaac's niece, wrote to me to give my interest to Sr. Michael[†]I gladly accepted of the injunction, wh I had before projected in my mind.. & a correspondence now commencing between us, he desired me to give him all the informations I cd. collect, relating to Sir Isaac. for he was preparing to draw up an account of his life[X]I gladly accepted of the injunction, wh I had before projected in my mind.. had he lived to have done it, it would assuredly have superseded this publication. but as we have no hope of that, I was willing to contribute my endeavors toward that end, by the present work.

it was a misfortune that Mr Chrichloe apothecary there, with whom my brother had been apprentice, dy'd but a little before I fix'd my abode at the place. he was 84 years of age, somewhat older than Sir Isaac, when they were alive together. he was Sr. Isaac's schoolfellow, & great friend during thir whole lives: & could have given me informations relating to him, to full satisfaction. Sr. Isaac had a particular esteem for him, always inquired after his health, when he knew, I had been at Grantham: & desired his service to him, when he knew, I went that way; saying, he was the chief acquaintance left in the place, except Mrs. Vincent.

I found two or three very old people, at & about Colsterworth, where he was born. & but 3 or 4 years before, several more dyed, who were about Sr. Isaac's age. however, by this means our Memoirs will be very much shortned: yet I omitted no opportunity remaining, to gather all I cd. any wise to our purpose.

Perhaps it will be necessary to be a little circumstantial & bordering somewhat on puerility. This is excusable from the nature of the inquiry. it will be better understood, what sort of evidence I build upon. how mean soever these papers may be, I should hold my self inexcusable, not to have done it; & even unjust to the world, as well as to the memory of so great a man; the glory of our country our age, & of the human race.

accordingly june 2 1727 I began to commit to

Notes

^*X* (p2) Insertion from reverse of page 1

^*X* (p3) Insertion from reverse of page 2

^*X* (p4) Insertion from reverse of page 3

^† (p4) Insertion from reverse of page 3

^† (p6) Insertion from reverse of page 5

^*X* (p6) Insertion from reverse of page 5

^*θ* (p6) Insertion from reverse of page 5

writing the accounts I was gathering on that head, & sent them in letters to Dr. Mead, to be transmitted to Mr Conduit. His daughter was marryed to [X]the honorable John Wallop esqr. eldest son of Lord Lymington; into whose hands all Sir Isaacs papers & manuscripts came, along with Mr Conduits: & also the letters that I wrote. as these & Mr Conduit's cannot now be obtain'd, I thought it advisable to recover as well as I cd. what I had wrote, from the original draughts left by me. & tis my happyness that whatever relates to him, requires no ornament of speech; & tis sufficient if I can but imitate his own plain way of writing. [†]this year Mr Conduit publishd Sr. Isaac's admirable book *de mundi systemate*, & sent me a copy of it. likewise Sr. Isaacs own third edition of his *Principia*. In 1729 Ld Chancellor King presented me to the Living of all saints, Stamford. when I removed thither, he sent me Sr. Isaac's chronological treatise, wh he put out, & that on Daniel, & the Apocalypse in 1733.

Mr Ralf Clark, apothecary at Grantham (with whose grandfar. Sr. Isaac had lodged when a schoolboy) & I, were busy at Mr Mason's rector of Colsterworth, in our inquirys; when the Express came by post, [θ]going to Scotland, of the death of King George I . I made diligent search for the Registers of the parish, of births, buryals, & marriages: especially the older ones, which generally have been very ill kept. nor can we say much in commendation of those of more modern date. they commonly give us the bare name of persons, without far., mor., or such other marks, as ascertain the identity of person. the old ones for the most part are lost, destroyd, or obliterated; for want of care, & due preservation.

thus are the national records, of all others most important, the most neglected! on this occasion, I cannot help observing, that tis too much the case thro'out the kingdom. frequently the task of keeping a Register book is committed to a parish clark, illiterate, that can scarcely write, sottish, or indolent. a task on which the fortunes, & emoluments of the whole kingdom, in a great measure depends. the setling descents, births, buryals, marriages, titles to estates, & matters of highest consequence, both civil & religious, are thus left at random, without any reasonable proof, or certainty, adequate to the weight of matters depending thereon.

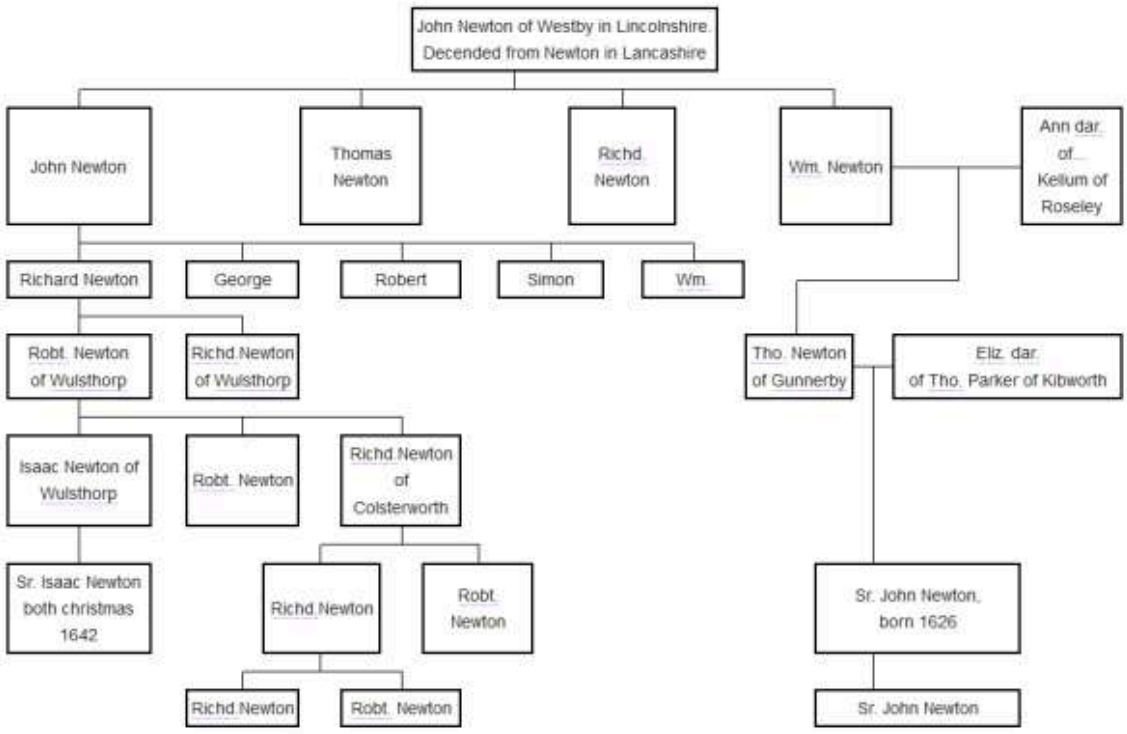
Is it to be wondered at, when the publick, always penurious toward the parochial clergy, have provided no stipend, much less a proportionable one, to its necessity, & use. is it to be wonder'd at, when the public tamely suffers the solemnization of matrimony, the very foundation of all Society, & government, to be done at the Fleet, & in obscure, private rooms, by obscure private persons, with impunity, & in open defiance of the Laws.

Mr Mason, at my request, searching into some old Town chests, at length met with a few vellum leaves, being the parish register from anno 1571 to 1642 inclusive; the very year Sr. Isaac was born. but there is intermitted, not lost, from anno 1630 to 1640 inclusive. which is a space of time in which his fathers marriage happen'd, & probably other circumstances in his family, or among his relations, which wd. have assisted us in our present inquiry. however very luckily upon the last leaf, which has been miserably abusd, is this memorable account, under the title baptiz'd anno 1642.

Isaac sonne of Isaac & Hanna Newton jan 1.

tis probable, that the civil wars then beginning, was the reason, why it ends in this leaf. from those leaves I extracted all of the name of Newton, wh are numerous. but for the reason aforemention'd, of being generally bare names only, without mention of fathers, mothers, husband, wife, & the like, they were of no great service in drawing out his genealogy, as was my purpose to doe. Sr. Isaac himself had been inquisitive in this way, sometime ago. for at Colsterworth, in possion of John Newton his heir at law, I saw a half sheet of paper of Sr. Isaac's own hand writing; being a draught thereof, as far as he knew it, with orders for searching Registers, to make it more perfect. But I believe, his request was never fully answerd; & that Sr. Isaac never saw the leaves aforemention'd, of the old Register.

I took an exact copy of this writing. thus,

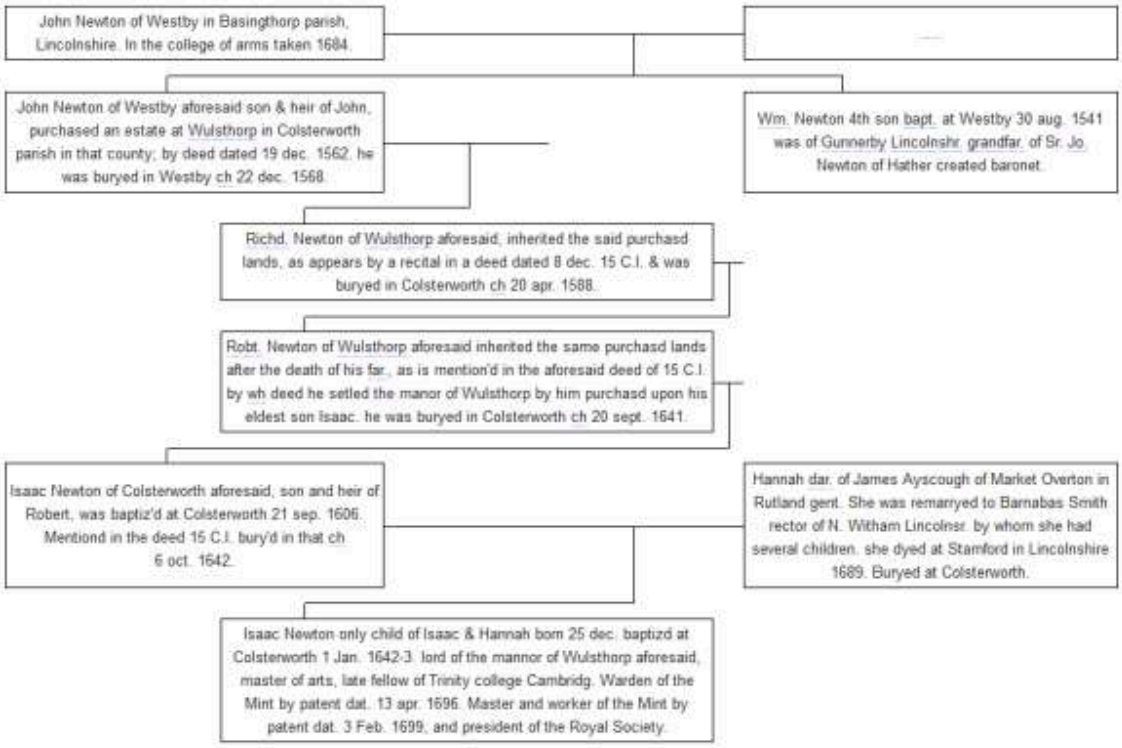


Let the Registers of Westby, & Bichfield be searched, from the beginning to the year 1650; & extracts be taken of whatever marriages, births, & buryals have been in the family of the Newtons. & if the old Register of Colsterworth can be found, let the like extract be taken out of that. & let the extracts be taken, by copying out of the Registers, whatever can be met with, about the family of the Newtons, in words at length, without omitting any of the words.

Direct your letter to Sr. Isaac Newton, at his house in Jermyn Street, in Saint James's parish, in Westminster, London.

Thus far Sr. Isaac. & in it we have a *specimen* of his great, & scrupulous accuracy, in every thing he did, or wrote.

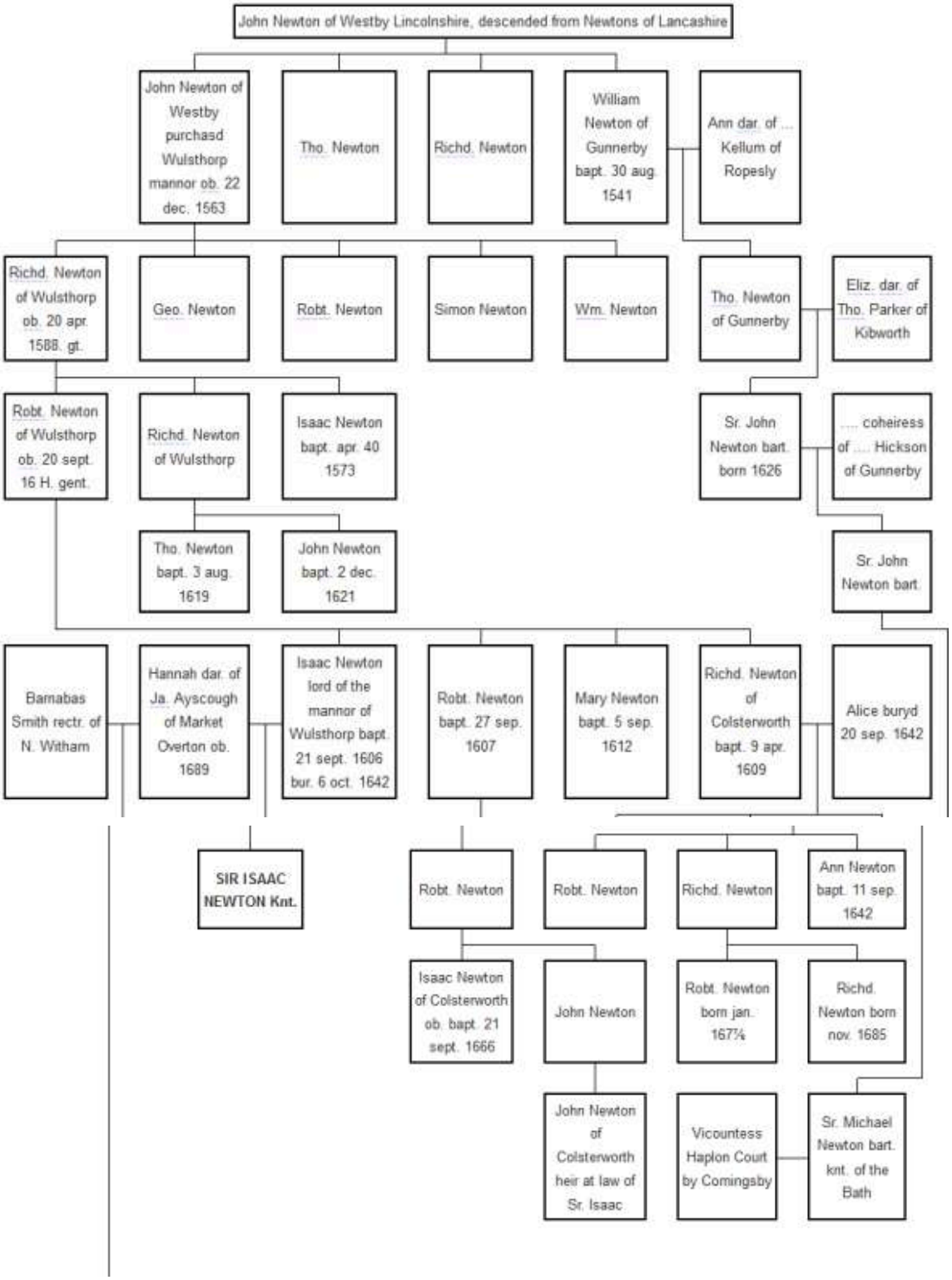
when Sr. Isaac was knighted, he made this inquiry

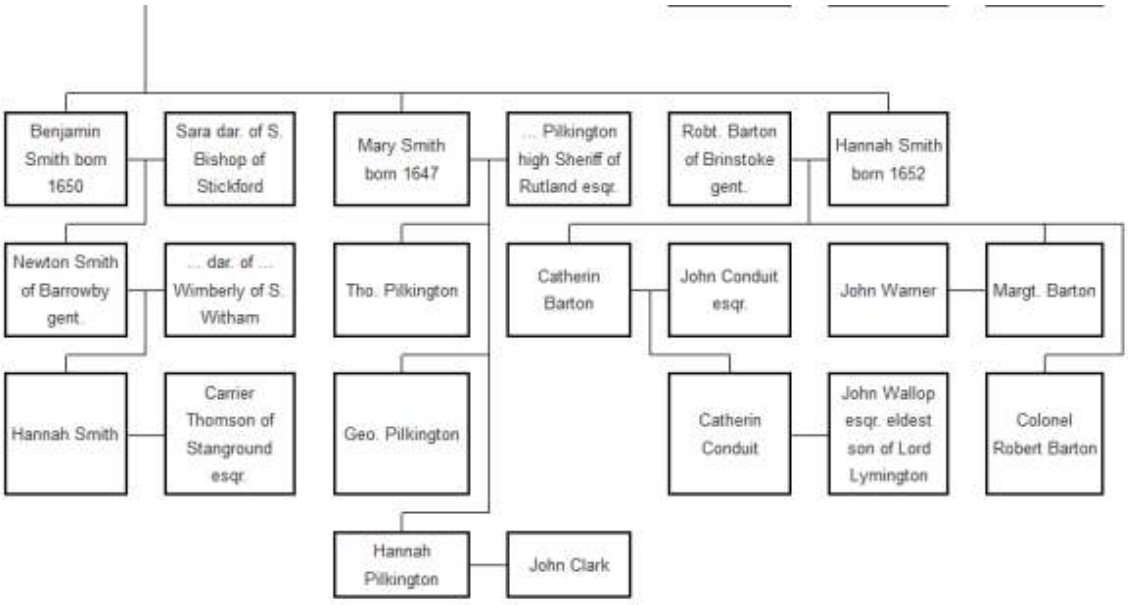

John Newton of Westby in Basingthorp parish, Lincolnshire. In the college of arms taken 1684.
John Newton of Westby aforesaid son & heir of John, purchased an estate at Wulsthorp in Colsterworth parish in that county; by deed dated 19 dec. 1562. he was buryed in Westby ch 22 dec. 1568.
Wm. Newton 4th son bapt. at Westby 30 aug. 1541 was of Gunnerby Lincolnshr. grandfar. of Sr. Jo. Newton of Hather created baronet.
Richd. Newton of Wulsthorp aforesaid, inherited the said purchasd lands, as appears by a recital in a deed dated 8 dec. 15 C.I. & was buryed in Colsterworth ch 20 apr. 1588.
Robt. Newton of Wulsthorp aforesaid inherited the same purchasd lands after the death of his far., as is mention'd in the aforesaid deed of 15 C.I. by wh deed he setled the manor of Wulsthorp by him purchasd upon his eldest son Isaac. he was buryed in Colsterworth ch 20 sept. 1641.
Isaac Newton of Colsterworth aforesaid, son and heir of Robert, was baptiz'd at Colsterworth 21 sep. 1606. Mentiond in the deed 15 C.I. bury'd in that ch 6 oct. 1642.
Hannah dar. of James Ayscough of Market Overton in Rutland gent. She was remarryed to Barnabas Smith rector of N. Witham Lincolnsr. by whom she had several children. she dyed at Stamford in Lincolnshire 1689. Buryed at Colsterworth.
Isaac Newton only child of Isaac & Hannah born 25 dec. baptizd at Colsterworth 1 Jan. 1642-3. lord of the mannor of Wulsthorp aforesaid, master of arts, late fellow of Trinity college Cambridg. Warden of the Mint by patent dat. 13 apr. 1696. Master and worker of the Mint by patent dat. 3 Feb. 1699. and president of the Royal Society.

following; & caused an entry ^of it to be made in the books at the heralds office. a copy of wh my frd. Mr Le neve Norroy, sent to me, on my request. thus far Sr. Isaac's entry at the Heralds office.

my frd. the late revd. Mr John Fisher rector of Westby & Basinthorp, gave me extracts of all of the name of Newton, appearing in his Register; from wh, & other helps, I improv'd the genealogy in the form following.

Colsterworth Church Lincolnshire
Magno NEUTONO
Ecclesiam Paro-
chiæ Ipsius Na-
talibus celebrē
Summa Obser-
vantia Monumē-
tum quam pusil-
lum humillime
consecrat Conter-
raneus suus
W. Stukeley, 1720.


John Newton of Westby Lincolnshire, descended from Newtons of Lancashire
John Newton of Westby purchasd Wulsthorp mannor ob. 22 dec. 1563
Tho. Newton
Richd. Newton
William Newton of Gunnerby bapt. 30 aug. 1541
Ann dar. of ... Kellum of Ropesly
Richd. Newton of Wulsthorp ob. 20 apr. 1588. gt.
Geo. Newton
Robt. Newton
Simon Newton
Wm. Newton
Tho. Newton of Gunnerby
Eliz. dar. of Tho. Parker of Kibworth
Robt. Newton of Wulsthorp ob. 20 sept. 16 H. gent.
Richd. Newton of Wulsthorp
Isaac Newton bapt. apr. 40 1573
Sr. John Newton bart. born 1626
.... coheiress of .... Hickson of Gunnerby
Tho. Newton bapt. 3 aug. 1619
John Newton bapt. 2 dec. 1621
Sr. John Newton bart.
Barnabas Smith rectr. of N. Witham
Hannah dar. of Ja. Ayscough of Market Overton ob. 1689
Isaac Newton lord of the mannor of Wulsthorp bapt. 21 sept. 1606 bur. 6 oct. 1642
Robt. Newton bapt. 27 sep. 1607
Mary Newton bapt. 5 sep. 1612
Richd. Newton of Colsterworth bapt. 9 apr. 1609
Alice buryd 20 sep. 1642
SIR ISAAC NEWTON Knt.
Robt. Newton
Robt. Newton
Richd. Newton
Ann Newton bapt. 11 sep. 1642
Isaac Newton of Colsterworth ob. bapt. 21 sept. 1666
John Newton
Robt. Newton born jan. 167¼
Richd. Newton born nov. 1685
John Newton of Colsterworth heir at law of Sr. Isaac
Vicountess Haplon Court by Comingsby
Sr. Michael Newton bart. knt. of the Bath



this family had its name from Newton, a Boroughtown in Lancashire. Isaac was a common name in this family. one dyd at Colsterworth about 30 years ago, whose family ended in a daughter.[X]In the Colsterworth Register I found an Isaac Newton, son of Robt. baptized 21 Sept. 1606.

the ayscoughs were a very antient, & wealthy family in Lincolnshire, from a hamlet of that name, near Bedal yorkshire. one of ours built that elegant tower steeple at great Paunton, as some say. some of them still remain at Cathorp. James Ayscough, surgeon and apothecary in my native town Holbech, came from Sustern near Colsterworth, was cozen to Sr. Isaac's mor.. an ingenious man. he usd to take me, when a lad, along with him a simpling in Fleetwoods, wh' gave me an early inclination to the study of physick.

Sr. Michael Newtons family came from the younger branch, & was rais'd by ^marriage with with the coheiress of Hickson; who was very rich. the other sister revivd the luster of the antient family of the Welbys near Grantham; wh is a younger branch to the Welbys of Gedney in Lincolnshire Holland, to wh elder branch I am related.

the country about Colsterworth, where Sr. Isaac Newton was born, I that have seen most part of England, think, to be exceeded by none; for a fine air, & for pleasantness; being most agreably diversify'd with open heaths, rich meadow, & inclosure, woods, & parks: the most beautiful cornfields, springs, brooks, & rivers. underneath tis a white stone rock, fit for building.

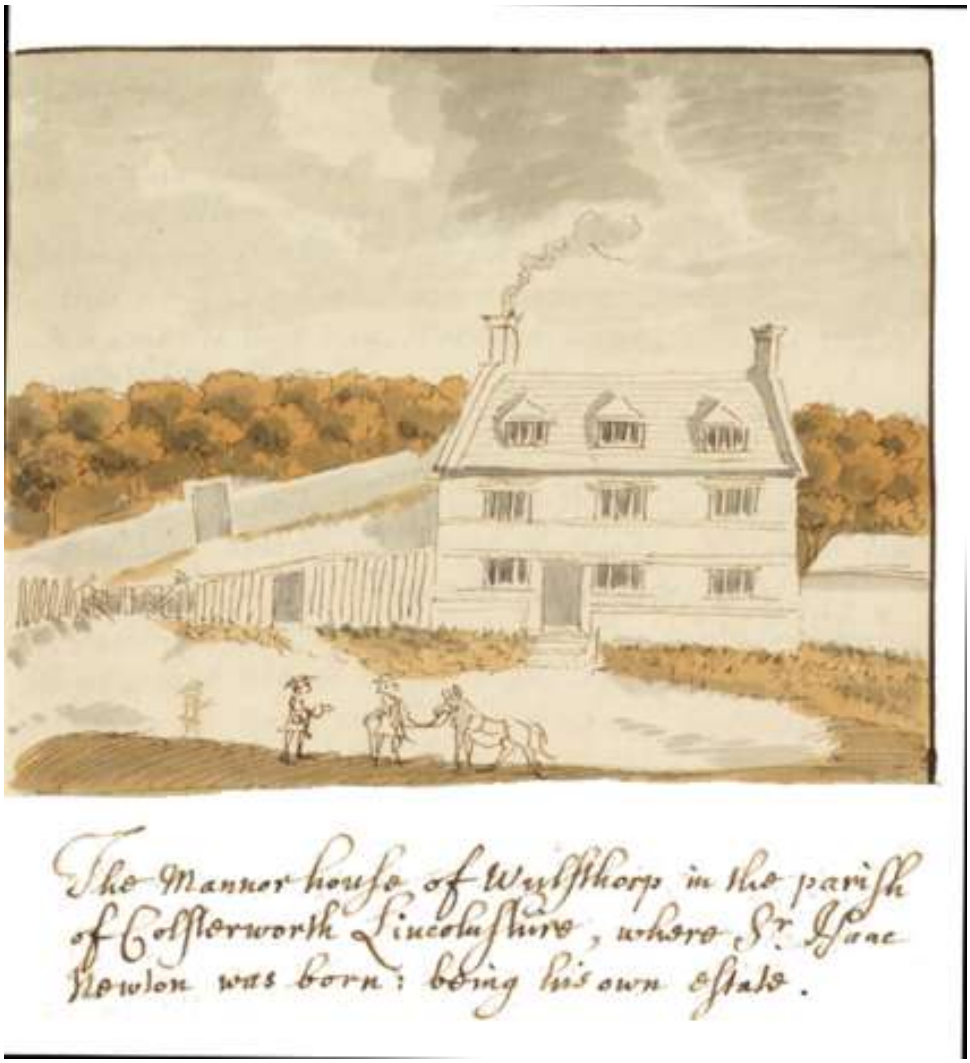
this place produc'd the greatest *genius* of human kind. He was born in the Mannor house, wh was the family estate, where they hold a Court leet, & a Court baron. the old copys, & records of the Court are lost. But it has been in the Newton family, ever since Queen Elizabeths time. We see in the genealogy, John Newton purchasd it; who lived at Westby, & dy'd 1563. the report is, that it was bought of the great Cecil, to whom Q. Elizabeth gave it, or of his son. this, & otherlands hereabouts, fell to the crown; when the Lord Rochford was beheaded by H. VIII. wh Lord is buryed at Stoke Rochford, hard by: which estate is now Mr Turners. a place remarkable for a fine spring. there was a Roman *Villa* there. I have seen the remains of it, & Roman coyns there found.

this Mannor of Wulsthorp probably belong'd to Ulfus and took its name from him. he was 4th son of k. Harold slain by Wm. Conqr.. his mor. was Agatha sister to Edwin, & Morcar, earls; & sons of Algar, the great Mercian Duke, the remain of the royal blood of the Mercian kings; who sprung from Stamford, & the Marsh country of Holland, whence the name of Mercian, & who had a very great estate in this country.

Earl Morcar own'd Colsterworth, Skillington, Basingham, Stoke beforemention'd, & Strawston, all in this neighbourhood. a wood near Horn Lane retains his name to this day, Morcar's wood; near it Ulfsoaks, corruptly Wulfox.

King Harold, Ulfs father, had likewise a great estate in this country; both Stamford, & Grantham, all that the conqueror gave to his favorite, Robert de Todenei, lord of Belvoir, now the Duke of Rutlands. he ownd Uffington, Talington, Ropesly, Denton, Gretford, Braceborough, Sempringham, [X]Greetham, Burley on the hill. and many more townships. but Ulf as being a son of Harolds was kept prisoner in Normandy by the conqueror together with all his relations, & Duncan son to the King of Scotland. he thought, they might have some pretence to the crown.

king William Rufus set our Ulf at liberty: being a quiet honest man, he gave him his estate, & honor'd him with knighthood. & here at Wulsthorp in all probability he spent the remainder of his days, in great honor, & contentment. I suppose he like-[†] wise own'd Wulsthorp by Belvoir, & Wulsthorp by Stamford.



The Manner house of Wulsthorp in the parish of Colsterworth Lincolnshire, where Sr. Isaac Newton was born: being his own estate.

this mannor of Wulsthorp, which was Sr. Isaac's paternal estate, is about £30 *p* ann. but he had another estate at Sustern adjacent, which came by his mor. The whole is about £80 *p* ann. & descended to his next heir John Newton, who is deriv'd from his fars. 2d bror.. this idle fellow I knew very well, whilst I lived at Grantham. he soon spent it, by cocking, horseracing, drinking, & folly.

Sr. Isaac was a posthumous, & only child. his mor. was marryed again to a neighboring clergyman, Mr Barnabas Smith, minister of North witham near Colsterworth jan. 27 1645. She had three children by him.

Isaac was sent at a proper age to Grantham School, wh was built, founded, & well endow'd by Richard Fox, bishop of Winchester, born at Ropesly near here. The same prelate founded Corpus Christi College in Oxford. I have an old picture of him, painted on wood, which I bought at

Stamford. he was blind in the latter part of his life. He was one of H. VIIIths godfars.

the people of Grantham have a common notion, that the learned Mr Walker, author of the book of latin particles, was Sr. Isaac's master. & they led me into that mistake in my Itinerary, pa. 49. but since, I have learned, that Mr John Stokes was

schoolmr. at that time; who was succeeded by Mr Sisson, & he by Mr Walker. Mr Walker was an intimate acquaintance of Sir Isaac's; being minister of Colsterworth, where he dyed, & was buryed in the choir, 1684, with that famous inscription, which is thought to have been made by Sr. Isaac:

Heic jacent Walkeri particulæ

Mr. Stokes was accounted a very good scholar, & an excellent schoolmaster.

whilst Sr. Isaac was at Grantham School, he boarded at Mr Clarks house, an apothecary, gd. far. to the present Mr Clark, now living. 'twas the next house to the George inn northward, in highstreet: which was rebuilt about anno 1700. Dr Clark MD, bror. to Mr Clark, with whom the lad boarded, was usher to the school, at that time. he had been pupil to the famous Dr. Henry Moor, of Christs college, Cambridg; who was born in the great old house, almost over against mine, but more southward; being the first house on the left hand, coming from London, adjoining to the road leading toward Harlaxton. the house has been lately pulled down & a lesser built in its place. Some lime trees grow before the door.

Dr. Clark left the school, & practisd physick in Grantham, with success. but every one that knew Sr. Isaac, or have heard speak of him, when he was here at school, recount with admiration the many instances of the extraordinary of his genius, whilst a boy; his strange inventions, uncommon skill & industry in mechanical works. they tell us, that insted of playing among the other boys, when from school, he always busyed himself at home, in making knicknacks of divers sorts, & models in wood, of whatever his fancy led him to. For which purpose he furnished himself with little saws, hatchets, hammers, chizels, & a whole shop of tools; which he would use with as much dexterity, as if he had been brought up to the trade, & all the money, his mother gave him, went in the purchase of 'em. [X]I shall

not recite all the storys of this kind I heard, wh suited well enough the taste of those that related ‘em. but some few, tis necessary to mention.

they remember particularly, that a new windmill, about that time, was set up in the way to Gunnerby; which is now demolished. a windmill is a sort of rarity in this country, abounding so much with rivers, & brooks: for which reason they chiefly use watermills. a walk to this new windmil was the usual amusement of the town of Grantham. the multitude return’d with some satisfaction to thir curiosity, but little improvement in thir understanding, & it was the comon rendezvous of the schoolboys. Newton’s innate fire was soon excited, he penetrated beyond the superficial view of the thing. he was daily with the workmen, carefully observed the progress, the manner of every part of it, & the connexion of the whole. he obtain’d so exact a notion of the mechanism of it, that he made a true, & perfect model of it, in wood. & it was said to be as clean a piece of workmanship, as the original.

this sometime he would fasten upon the housetop, where he lodged: & clothing it with bits of cloth, for sails, the wind would readily take it. but Isaac was not content with this bare imitation: his spirit prompted him to goe beyond his prototype. & he added an extraordinary composition to it. he could put a mouse into it, which work’d it as naturally as the wind. this he used to style his mouse-miller. & complain’d jokingly, what a thief he was; for he eat up all the corn put into the mill.

I made inquiry, what they knew concerning the art, & contrivance of it. Xsome said, he ty’d a string to the mouse, & pulling by it, made the mouse turn the mill. some said, the mouse ran round a wheel like that of a turnspit: and that the hopper emptyed it self with the ground corn in his sight; therefore it always endevord to come to it, & then turn’d the wheel. however it was a piece of diversion, to not a little part of the town & country, to pay a visit to Isaac’s mouse miller, & the farmers readily supplyd him with handfuls of corn, on market days.

he likewise made a good wooden clock, that went by weights, in the usual manner: this being a bare imitation, as before, was not sufficiently pleasing to him. but he made another clock which is much talked of still, on quite a new principle. it went by water dropping into a cistern: & was famous for its exactness. he constructed this out of a firdeal box which he

beg'd of Mrs. Clarks bror. it was in shape much like other clocks; a case about 4 foot high, a dyal plate, painted by himself with figures: a wooden *index* that show'd the hour. this *index* was turn'd by a perpendicular piece of wood, rising, as the water filled the cistern: I suppose either by rack-work, as they call it, or by a string winding its self round an axis.

this clock always stood in his own garret where he lay. & he took care every morning to supply it with a proper quantity of water. & the family upon occasion, went up thither, to be well informd upon the time of day. & it was left in the house long after he went to the University: destroyed, probably, when the house was pulled down, & rebuilt. he lov'd to vary his operations, & to bring them by tryal, to a greater simplicity. I was informed that he made another waterclock, which performed by dropping out of a cistern. the rod with the hours on it, descending. I remember very well, I have heard him speak of this himself, & at the Royal Society. particularly that time aforemention'd, when I was Dr. Halley's deputy; on account of some paper read on water clocks. Sr. Isaac spoke to it, & observ'd "the exactness and usefulness of that kind of machine". he said "the chief inconvenience attending it was this. the hole thro' which the water drops, must necessarily be extremely small. therefore it was subject to be furr'd up, by impuritys in the water. So hour-glasses made with sand will wear the hole thro' which it is transmitted, bigger. these inconveniences in time spoil the use of both instruments."

the lad was observ'd to indulge his fancy so much this way, that it broke in upon his time, and improvement at School, & was prejudicial to his learning. so that the consequence was, dull boys were sometime put over him, in form. but this always excited him to redouble his pains, to overtake them. & such was his capacity, that he could soon do it, & goe beyond them when he pleasd.

this was not unheeded by his master Stokes; & gentle remonstrances accordingly made. Still nothing cd. induce him to lay aside, his mechanic experiments. but on holydays, & all the time, the boys had allow'd for play, he spent it in cutting, sawing, & knocking in his lodging room: pursuing that strong bent of his inclination. & this not only in things serious, but sometime ludicrous too; inventing such things as the rest of the schoolboys took part in the pleasure.

he was particularly ingenious at improving all thir usual diversions. for instance, in the fabrick of thir paper kites; in finding out thir proportions, figure, the best point of fastning the string, in how many places, the length of the tail, & the like. & as an *omen* of the sublimity of his discoverys, he invented the trick of a paper lanthorn with a candle in it, ty'd to the tail of a kite. this wonderfully affrighted all the neighboring inhabitants for some time, & causd not a little discourse on market days, among the country people, when over thir mugs of ale.

the paper lanthorn too was an invention of his own, made of crimpled paper, which he used to light himself with, to school in dark winter mornings: then flattening it, so as that he could put it into his pocket. but the affair of fastning this lighted lanthorn to the tail of a kite, gave a handle for that famous episode in Hudibras, of Sydrophel & his comet.

Mr. Clark, aforementioned now apothecary, & surgeon in Grantham, tells me, that he himself likewise lodg'd, whilst a youth, in that same garret in the old house where Sr. Isaac had done. he says, the walls, & ceelings were full of drawings, which he had made with charcole. there were birds, beasts, men, ships, plants, mathematical figures, circles, & triangles. that the drawings were very well done. & scarce a board in the partitions about the room, without Isaac Newton cut upon it.

I have heard likewise at Grantham School, that before the present seats, & desks were set up, he had cut his name in the old ones, upon all the places where he had sat; with the date of the year, in his several removes.

those clocks of Sr. Isaac's fabricating, put him upon a still higher, & more noble inquiry into the nature of the suns motion; his great ideas beginning to sprout forth, which at last surmounted the whole planetary system. he spent a good deal of time, & art, in satisfying his curiosity this way; by making sun-dyals of divers forms, & constructions; every where about the house in every room, window; in his own bed chamber especially, in the yard, & entrys, whenever the sun came. he did not do it in a little manner, as minute sciolists wd. do, by making small sun-dyals: but show'd the greatness, & extent of his thought, by drawing long lines, tying long strings with running balls upon them; driving pegs into the walls, to mark hours, half hours & quarters. many contriveances he used, to find out the periods, conversions, & elevations of that great luminary. he made a sort of almanac of these lines, knowing the day of the month by them; the suns

entry into signs, the equinoxes, & solstices. So that Sr. Isaac's dyals, when the sun shined, were the common guide to the family, & neighborhood. thus early did that fruitful, that sagacious, that immense genius show its self; which since has fill'd, rather comprehended the universe!

Sr. Isaac when a lad here at School, was not only expert at his mechanical tools, but equally so with his pen. for he busyed himself very much in drawing, which he took from his own inclination; & as in every thing else, improv'd it by a careful observation of nature. he learn'd to write of one old Barley, as he was commonly calld; who was writing master to the school. he lived, where now is the milstone alehouse, not far from my house in castle street. by this means our young artist furnishd his apartment with pictures of his own making. some he invented, some copyed from prints: some he did from the life, by memory chiefly, as that of his master Stokes. I have one of them, which happen'd to be preserv'd.

he drew several heads of k. C. I., of Dr. Donne, & others. He made a picture of k. C. I., & wrote these verses underneath, as Mrs. Vincent of this town repeated them to me, by memory.

A secret art my soul prepares to try,
If prayers can give me, what the wars deny.
three crowns distinguishd here in order, doe
present thir objects, to my doubtful view.
Earths crown thats at my feet, I can disdain:
which heavy is, & at the best but vain.
but now a crown of thorns I gladly greet,
sharp is this crown, but not so sharp as sweet.
the radiant crown, which I above me see,
is that of glory, & eternity.

she fancyed, & aver'd it, that he composd 'em himself. I rather suppose, he copyed the print from the frontispiece of *Eikon Basilice*.

these pictures, & drawings he made frames for, them himself, & color'd them over workman like. nothing was too difficult for his invention, & execution. Mrs. Vincent is a widow gentlewoman living now at Grantham (1727) aged 82. her maiden name was Storey, sister to Dr. Storey, a physician at Buckminster, near Colsterworth. her mother, who was a handsom woman, was second wife to Mr Clark the apothecary, where Sir Isaac lodg'd. so that she lived in the same house with him, all the time of

his being at Grantham School; which was 7 years. further, her mother & Sir Isaac's mother were great intimates, which was one reason of his lodging at Mr Clarks.

Mrs. Vincent gave me much of the foregoing account, & confirm'd the relations of others. She says, Sir Isaac was always, a sober, silent, thinking lad; never was known scarce to play abroad among the boys; but would rather chuse to be at home, even among the girls. & would frequently employ himself very willingly, in making for them, little tables, nests of drawers, cubbords & other utensils, for her, & her playfellows; to set thir babys, & trinkets on.

she mentions likewise a chair, which he made with 4 wheels, wherein he could sit, & move him self with great agility; wherever he pleasd. She told me likewise, he was very curious in gathering herbs, which we call simpling. probably he might learn this from the prentices of the shop, where he lodg'd. tho' doubtless, he had inclination enough of his own, for every branch of natural knowledg.

Sr. Isaac & she being thus brought up together, it is said that he entertain'd a passion for her, when they grew up: nor dos she deny it. tis certain, he always had a great kindness for her. he visited her, whenever in the country, in both her husbands days: & gave her a sum of money, at a time when it was useful to her.

she is a woman but of a midle stature, of a brisk eye; & without difficulty, we may discern, she has been very handsom.

one reason why Sr. Isaac did not play much with his schoolfellows, was, that generally, they were not very affectionate toward him. he was commonly too cunning for them in every thing. they were sensible, that he had more ingenuity than they. & 'tis an old observation, that in all Societys, even of men, he who has most understanding, is least regarded.

one instance of Sr. Isaac's craft was this. on the day that Oliver Cromwell dyed, there was a very great wind, or tempest over the whole kingdom. that day, as the boys were playing, a sett of them went to leaping. Sr. Isaac, tho' he was little practis'd in the exercise, & at other times outdone by many; yet this day was surprizingly superior to them all. which they much wondered at, but could not discover the reason; which was this. Sr. Isaac observed the gusts of wind, & took so proper an advantage of them, as to carry him far beyond the rest of the boys.

*1654 when Sir Isaac had been about 7 years at school at Grantham, his father in law, Mr Smith, dyed. His mother lived all this while at north witham, in her husbands rectory house. but now she went back to her own house, at Wulsthorp. this house being the present one, was built by Mr. Smith but not of so large a form as the old one, which was become very runious; that wherein Sr. Isaac was born. she was left with three children by Mr Smith, all very young. she thought fit to recall her son Isaac Newton from school, intending to make him serviceable to her, in management of farming & country business, at Wulsthorp. accordingly we must suppose him attending the tillage, & grazing; following the plow, dungcart & the like works; or driving sheep to markets, & fairs. thus were we in danger of losing this prodigious man!

but these employments ill suited Sr. Isaac's taste. when he was orderd into the field to tend on the herds, & flocks; sitting under a hedg with a book in his hand, or busying himself with his knife, in models & inventions in wood work, he little regarded the business of the cattle. at other times, he would get to a spring head, or running stream, which this charming country abounds with; There he made little wheels, such as they use in water mills, some overshot, as they call 'em, some undershot, with proper dams, sluices, & the whole *apparatus* belonging to those engines. together with many other hydrostatic experiments. at those he sat gazing in serious contemplation, while the sheep, & the cows under his care, were strayd into the inclosures, & cornfields: which occasiond great outcry, & damage, to be repaid by his mother nor would he so much as remember dinner time: philosophy absorbed all his thoughts.

how often has he sat upon a bank admiring the beautiful pasque flower, growing plentifully in the spring, upon the fine heaths hereabouts. Being a rare plant one year whilst I lived at Stamford, coming up to Town after Easter, I took up a number of these roots, each with a square bit of the turf round 'em, the flowers just opening. these were packd close, side by side, so as to fill a box. a lid naild over it, it was sent to London, by the carrier. I set out at the same time, on my journy. on the Thursday I opend the box at the meeting of the Royal Society: & presented it with all the flowers blooming in perfect beauty, to the admiration of the whole company. Sir Hans Sloan then president declar'd, it to be the most splendid sight ever

there exhibited; and orderd ‘em to be carefully convey’d to Chelsea physic garden, & set in the ground. [X]I often transplanted these flowers into my garden at Stamford, where they grew to an extraordinary bulk, & beauty.

Sir Isaac who was so fond of plants, undoubtedly has often contemplated thir delicate purple, with yellow pointils. nor has the golden asphodel here growing escap’d his notice; nor the magic *lunaria* [†]*minor* moonwort, both very rare. the flower of bean trefoil, that extraordinary beauty, growing in bogs here, by the side of springs: nor the noble crimson berry of *solanum lethale*: the ripe juice of which I found to give an excellent blue color on paper. *digitalis* fox gloves loves a sandy soil, the delight of the Druids. This & vervain, flowring at midsummer time, they used with their great, & public midsummer sacrifice. the latter is called *hierobotane* the sacred plant for that reason; & *columbaria* pigeon herb. but the botanists are ignorant of the true reason. it was not that pigeons are fond of it, but that it was thus used in thir midsummer festival, when pigeons were the accustomed sacrifice. So the Foxgloves has not its name from *fox*, but *folkes*, *popelli*, meaning in old language what we now call fairies: notions deriv’d from the Druids using it at that time; as they did the fam’d mistletoe at their midwinter sacrifice.

on Saturdays, being market day at Grantham, Isaac was often sent, sitting on a horse laden with sacks of corn, & other commoditys to sell: a servant accompanying on the like business. when they had finished thir markets, they were to buy such things as the family wanted at home, to be had only in Towns; & so return. thir inn was at the Saracens head in westgate. Sr. Isaac would often bribe the man to drop him in going, at a hedg corner; & take him up again on his return. the time he spent in his favorite amusements, a book, simpling, & his mechanical experiments.

at other times, when Isaac went as far as Grantham, no sooner were they come to the inn, but he left man, & horses and ran up to the garret at Mr Clarks, where he had formerly lodg’d. The room was then filld with a great parcel of books, which belong’d to Dr. Clark deceased; consisting of physic, botany, anatomy, philosophy, mathematics, astronomy, & the like. this was a feast to him exclusive of any thought of dinner, any regard to market business. there he staid till, the servant calld upon him to goe home.

another story I have heard told of him. south of Grantham is Spittlegate hill pretty steep, & high. tis usual to lead a horse up it. Sr. Isaac has been so intent in thought, that he has never minded remounting his horse at the top of the hill; & so has led his horse home all the way, being 5 miles.

once, they say, as he went home in this contemplative manner, the horse, by chance, slipt his bridle & went home. but Sr. Isaac walked on with the bridle in his hand, never missing the horse.

his mor., as well as the servants, complained how little serviceable he was to them, in any of their branches of business; & were not a little offended at his bookishness. the servants said, he was a silly boy, & would never be good for any thing. but his old master, Mr Stokes, who was now become rector of Colsterworth, judg'd much better: he saw the uncommon capacity of the lad, & admir'd his surprising inventions, the dexterity of his hand, as well as his wonderful penetration, far beyond his years. he never ceasd remonstrating to his mother what a loss it was to mankind, as well as a vain attempt, to bury so uncommon a talent, in rustic business. he was sufficiently satisfy'd that he would become a very extraordinary man. at length, he prevailed with his mother to send him back to school; that he might perfect his learning & fit him for the University. he added, that he would make a compliment to her of the 40s. per annum paid to the schoolmaster by all foreign lads. He took him home to the school house, to board with him; and soon compleated him in the learned languages.

thus the world is intirely indebted to Mr Stokes, for Sr. Isaac Newton. to his memory, true philosophy pays its grateful resentiments, which otherwise would have lost its far. & founder of its great glory.

upon sending him away from school, we are told, his master was very confident of his prognostic concerning him; having set him in a conspicuous place in the school, tho' not agreable to the lads modesty, he made a speech to the boys, in praise of him, so moving, as to set them a crying. nor did he himself refrain a tear of love. however his mothers servants rejoic'd at parting with him, declaring, he was fit for nothing but the 'Versity. but it will ever be rememberd for the honor of Grantham school, to have given erudition to one of so exalted a capacity.

at this time Dr. Babington was senior fellow of Trinity college, Cambridg; a person of worth &

learning. he was uncle to Mrs. Vincent i.e. bro^{r}. to her mo^{r}. Mr Clarks wife, where Isaac had lodgd at Grantham. this seems to be the reason of his going to that college. the Dr. had a particular kindness for him & gave him all the incouragemt. imaginable, sensible of the lads great merit. ^{X}the D^{r}. was bred at Grantham school, & was rector of Boothby pannel hard by.

I have very little to say about S^{r}. Isaacs life, whilst he was resident in the University. I left that part of his history intirely to Mr Conduit: having no opportunity of inquiry concerning it, whilst I lived at Grantham. at that time it might have been done to purpose. D^{r}. Bentley knew a good deal of it. & I believe D^{r}. Colbach.*D^{r}. Cotes had wrote somewhat on S^{r}. Isaac It were to be wished still, that some person of that University would pick up the remembrances of this important life, whilst they possibly are to be had. D^{r}. Halley had wrote a considerable quantity of papers relating to this subject. but he w^{d}. not communicate them to Mr Conduit.

I have heard it as a tradition, whilst I was student at Cambridg, that when S^{r}. Isaac stood for bachelor of arts degree, he was put to second posing, or lost his groats, as they term it; wh is lookd upon as disgraceful. I can't tell whether it be true or not; but it seems no strange thing at that time of day, notwithstanding S^{r}. Isaac's great parts. for he was too busy in the solid track of learning, & the sublime pursuits of mathematical philosophy, to allow of time enough, to be master of words only; or the trifling nicetys of logical & school subtletys, wh then was the chief test of proficiency in Academic learning, & qualification for a degree.

the famous Dr. Barrow, afterward master of Trinity college was Sr. Isaac's tutor. if he did not take a byass in favor of mathematical studys from him, at least he confirm'd it thereby.

now we are to consider this divine *genius* like a spring let loose, fully at liberty to follow the bent, & the pursuit of his own inclination. under no restraint, ^{X}no care, in the intimate bosom of the seat of learning, his time wholly his own, had all assistances, & incoragement $^{+}$here he might satiate to the full that immoderate thirst of science, wh knew no bounds, & indeed he made such advances, that he soon outstrip'd his tutor, tho' so considerable a man. for Sr. Isaac learn'd mathematics, as by intuition; rather it was connate to his understanding. little need had he of definitions, steps,

& first principles, & rudiments of science. such were natural, easy & familiar to his vast mind, pregnant with the most difficult, & important theorems: wanted only a little time to maturate, & deliver them.

his tutor saw all this, very plainly, conceiv'd the highest opinion, & early prognostic of his excellence; would frequently say, that truly he himself knew something of the mathematics: still he reckond himself but a child in comparison of his pupil Newton. He faild not upon all occasions, to give a just *encomium* of him. & whenever a difficult problem was brought to him to solve, he refer'd 'em immediately to Newton.

*S^{r}. Isaac had all the qualifications for a philosopher the *acumen*, the patience, & the judgm^{t}. necessary: at the same time, he had a natural geometry able to surmount all difficultys. he neither began with Euclid, or such like introductions but c^{d}. demonstrate on sight. & at 24 yrs of age had laid the foundation of his two great discoverys, the principia philos. mathemat. & of his optics: & then had invented the wonderful method of infinite series, or fluxions.

it seems to me, likely enough, that Sr. Isaac's early use, & expertness at his mechanical tools, & his faculty of drawing, & designing, were of service to him, in his experimental way of philosophy: & prepar'd for him, a solid foundation to exercise his strong reasoning facultys upon; his sagacious discernment of causes, and effects, his most penetrating investigation of methods to come at his intended purpose; his profound judgment; his invincible constancy, & persevereance in finding out his solutions, & demonstrations, & in his experiments; his vast strength of mind, in protracting his reasonings, his chain of deductions; his indefatigable attachment to calculations; his incomparable skill in algebraic, & the like methods of notation; all these united in one man, & that in an extraordinary degree, were the architects that raisd a building upon the experimental foundation, wh must stand coeval with material creation.

a mechanical knack, & skill in drawing assists much in making experiments. such as possess it take thir ideas of things incomparably stronger & more perfect than others. it inlarges thir view, they see deeper, & farther. It ripens, & quickens thir invention. for want of this handycraft, how many philosophers quietly sit down in thir studys, & invent an hypothesis?

but S^{r}. Isaac's way was, by dint of experiment to find out, *quid Natura faciat aut feret*?

philosophers, like great conquerors, or politic ministers of state, must take into thir assistance arts, & helps low, & sordid. as success in war depends on the arm of the scum of mankind, as well as on the head of the General.

children are always imitators. & perhaps his being brought up in an apothecarys house might give him a turn to the study of nature. no doubt it gave him a love for herbarizing. X at least accelerated it. but he was in reality born a philosopher. learning, & accident, & industry pointed out to his discerning eye some few, simple & universal truths. these by time, & reflexion, he gradually extended one from another, one beyond another, till he unfolded the œconomy of the macrocosm. S^{r}. Isaac was elected a fellow of the college; & also made Lucasian professor of mathematics; X in 1669 wherein he succeeded his tutor Dr. Barrow. then he put out a new edition of that curious piece, Varenius's geography. the method of that author pleasd him; it is like his own. his chambers in Trinity college were those in the great court, on the north side, between the masters lodg, & the chapel.

* in 1687 he showd himself to the world indeed, in publishing that amazing production *principia philosophiæ mathematica*. & the world was truly astonishd at it, almost afraid to look on so divine a work.

the same year k. James hanging over the priveleges of the University, he had spirit enough to oppose all violences of that sort, & was nominated one of their Delegates to the high Commission Court. he was also a Member of Parliament the next year, the great Convention on k. James deserting the k.dom. 1688.

D^{r}. Newton of Grantham aforemention'd was sizor to S^{r}. Isaac; lived under his tuition 5 years: was assistant to him particularly in his chymical operations, wh he pursu'd many years. he often admir'd S^{r}. Isaac's patience in his experiments, & operations; & his extreme accuracy; how scrupulously nice he was in weighing his materials: & that his fires were almost perpetual. in the year 1705 & 6, when I was at CC College, I went a course of chymical lectures with Seignior Vigani, in S^{r}. Isaac's room, where he made his chymical operations, being backward, towards the masters lodg.

D[r]. Newton says, that all the time, he was with him, she scarce ever observ'd him to laugh; but once: he remembers, it was on this occasion. he askd a fr[d] to whom he had lent an Euclid to read, what progress he had made in that author? & how he liked it? he answerd by desiring to know what use, & benefit in life, that kind of study would be to him? upon which S[r]. Isaac was very merry. according to my own observation, tho'. S[r]. Isaac was of a very serious, & compos'd [+]frame of mind,, yet I have often seen him laugh, & that upon moderate occasions. he had in his disposition, a natural pleasantness of temper, & much good nature, very distant from moroseness, attended neither with gayety nor levity. he usd a good many sayings, bordering on joke, and wit. in company he behavd very agreably; courteous, affable, he was easily made to smile, if not to laugh.

beside his severe studys, [X]while he lived at Trinity college, he frequently diverted himself with his tools in mechanical works. he made speaking trumpets, he ground, & polishd glasses, for microscopes, telescopes, prisms, spectacles, & all kind of optical purposes. He would work very hard upon these. & his constancy, & persevereance at it, was great. that wonderful invention of the reflecting telescope is his. he made that famous reflecting telescope, now in the repository of the Royal Society: & likewise that concave speculum, or burning glass of many lesser, all respecting one common focus, now in the same repository. they are all instances of his curious hand in workmanship; as well as of his wonderful penetration, into the nature of vision.

when we read his book of optics [[*]Optics published 1704.], we are astonishd at his indefatigable attention to that nice, & abstruse subject; & the long course of his observations, & experiments; the vast acumen necessary to produce so stupendous a work. who can sufficiently admire his unraveling the mysterious nature of light, or the sun beams, consisting of different, & all kinds of colors, specific to each ray, & the analogy of thir proportions to that of the number, & nature of the notes in musick! so harmonious are the works of the divine creator! but sure of all things that ever were committed to writing, this book of optics deserves our most grateful praise, & acknowledgment of his surprizing capacity.

I have heard, that he had gone considerable lengths in his experiments on sounds, which doubtless he would have brought to as great perfection as his

optics. but they say, he left it off, when he came to live in London; as well as his intense study in general. we may discern without difficulty, that nothing was too difficult for his enterprizing genius, his application, his quicksighted apprehension. we are sure of this, from what he has done. while we admire at that, we at the same time admire, that he has done so much; at his strength of nature, as well as strength of parts. [X] & this leads us to recite a story, that gave him a character he sought not for, that of a prophet.

in the year 1667 when the Dutch beat our fleet at the mouth of the Thames in a perfidious manner: whilst our indolent monarch was treating with them without stipulating a cessation of arms, they came up the river with a great fleet & burnt many of our ships: and did us great damage. their guns were heard as far as Cambridg, and the cause was well known, but the event was only cognisable to Sir Isaac's sagacity, who boldly pronounc'd that they had beaten us. the news soon confirm'd it. & the curious would not be easy whilst S[r]. Isaac satisfy'd them of the mode of his intelligence, which was this. by carefully attending to the sound, he found it grew louder & louder, consequently came nearer. from whence he rightly infer'd that the Dutch were victors.

whilst he lived at Cambridg, his mother dyed at Stamford in 1689. She went thither on a visit to her son Benjamin Smith. her body was brought to Colsterworth, & buryed in the north isle of the church, where this family were generally interr'd.

[*]he has left in MSS a Lexicon propheticum; a discourse on the form of the Tabernacle & of the sacred cubit. he wrote likewise an intire work on chymistry, explaining the principles of matter, & elementary components, from that abstruse art; on experimental, & mathematical proof. he had himself a good opinion of this work. but the manuscript was unluckily burnt in the laboratory, which casually took fire. he never could undertake it again, a loss not to be sufficiently regretted. D[r]. Friend endevord at a thing of this sort, which is not unworthy of commendation; his purpose was some attempt to supply our want of it.

as to chymistry in general, we may very well presume, Sir Isaac, from his long, & constant application to that pyrotechnical amusement, had made very important discoverys, in this branch of philosophy. which had need

enough of his masterly skill, to rescue it from superstition, from vanity, & imposture; and from the fond inquiry of alchymy, & transmutation. *by this means Sir Isaac carryed his inquiry very far downwards into the ultimate component parts of matter: as well as upwards towards the boundless regions of space: he has taken in to our knowledg a large province of universal nature: and put us in the way of acquiring more: if we have proper qualifications for it.

D^{r}. Newton tells me, that several sheets of his optics were burn't, by a candle left in his room. but these I suppose he was able, by a little pains, to recover again. or if there be any imperfection in that work, we may reasonably suspect, it was owing to this accident.

he says, Sir Isaac constantly went to church on Sundays, to Saint Marys: tho' not always to the college chapel; in mornings he was up at study. he seldom went to the hall to dinner, but had his victuals brought to his chamber; & then very often, so deeply intent was he, that he never thought of it, till supper time. +when he was busy in study, he never minded his meal times. & when he took a turn in the fellows gardens, if some new gravel happen'd to be laid on the walks, it was sure to be drawn over, & over, with a bit of stick, in Sir Isaac's diagrams; which the fellows would cautiously spare, by walking beside them. & there they would sometime remain for a good while.

At Cambridg I often heard storys of his absence of mind, from common things of life. as when he has been in the hall at dinner, he has quite neglected to help himself; and the cloth has been taken away before he has eaten any thing. that sometime, when on surplice days; he would goe toward Saint Mary's church, insted of college chapel. Xor perhaps has gone in his surplice to dinner, in the hall. that when he had friends to entertain at his chamber, if he stept in to his study for a bottle of wine, & a thought came into his head, he would sit down to paper, & forget his friends. θthus the human mind wholly taken up in abstract reasonings, & long concatenation of causes & consequences, was apt, as it were, to desert the body: assume its essential & true life. & enjoy those superlative pleasures arising from contemplations of the most worthy sort, nearly approaching to angelical. tis an anticipation of part of those divine joys, in our future state of being.

I have heard him say, that during his closest application, he never forgot going to bed about 12. this he learn'd by experience. for if he exceeded that hour, it did him more mischief in his health, the next day, than a whole days study, at regular times.

he often amusd himself in reading, & writing on lighter matters, as an alleviation of his deeper researches. for in short he had study'd every thing. he had very good knowledg in physick, as we commonly understand the word. & to that probably is owing the good state of health he enjoy'd; & his long life. he knew anatomy very well. he was indeed a master of every science.

he had studyed every thing. his chronology has somewhat very particular, & likewise solid. but whilst he has justly shortend the years of the world; he appears to me, to have done it a little too much. further, if I may be permitted to differ from so great an author, I would venture to assert, that he has assign'd too late an epoch for the origin of the celestial catasterisms, in dating them from the argonautic expedition. I have very good reasons to think them, at least most of them, of a much antienter date, & some of them antediluvian. This I could show amply, & trace them to their several beginnings, were it feasible for a writer to publish his ~labors without expence to himself, or for any profit. XI have reduced the whole heavens into a number of drawings, on that account, elegantly painted with the azure tincture, which I mentiond, from the *solanum lethale.*

he had a good notion of Xthe prophetic writings, & likewise of the Apocalypse, especially in one important light; that the Divine lays his mysterious plan of future things, in the scenes of the Jewish temple, & service. but Sir Isaac's scheme of the Saints' festivals, as in the church liturgy, I take to be ill founded. +these kind of works & many more which he had by him, were the effect of his Sunday exercitations. when he turn'd over the sacred volumes, with great diligence, and full conviction of the divine Spirit that dictated them.

he left the University in 1696, as I have heard him say, being calld to Town in k. William's time, by means of his great patron the Earl of Halifax, +chancellor of the Exchequer; who sensible of his merit, was resolv'd, he sh^{d}. no longer be immur'd in a college. the Earl, together with Lord Somers, undertook the great affair of the recoynage. & judg'd rightly, that S^{r}. Isaac

was the fittest man in the kingdom, to assist them. [r]. Isaac therefore was made master of the mint. in 1699, he was made master, & worker of the mint. [*]Sir Isaac's political notions on the affair of money, are thought to be extremely judicious.[ħ]in 1701 he resign'd his professorship at Cambridg, & M[r]. Whiston succeeded, by his recommendation.

at length, in the forepart of the present century, he was elected president of the Royal Society 1703. there we view him in his proper dignity. that chair which had held so many great men, his predecessors, was now filled indeed! [x]there he sat at rest, in the intellectual center: as the great solar orb shining with its own light, & diffusing his beamy influence, thro' the whole system of arts, & sciences. to him gravitated all the lesser lights, both regular planets, & extravagant comets of erudition, both at home, & abroad. [y]as the moon always turns the face to her principal, the earth. from him they borrowd a ray, & sip'd from his common fountain. & now was that illustrious body truly so; & at its height of glory: the prototype of these literary Societys in Europe, with the great Newton at their head, as an object almost ador'd. [+]and that great Mecænas of the learned world, Lewis XIV of France, thought himself honor'd by inlisting Sir Isaac into the number of his beneficiarys. & our countrymen at that time could not have a greater recommendation in foreign countrys parts, nor a freer introduction to the great, & the learned, than in quality of that of a member of the Royal Society: & especially if they had a title to any degree of intimacy, with the president.[☉]witness the honors paid to Mr. Martin Folkes when he travelld into Italy, tho' after Sir Isaac's death. nor did foreigners, when in England value themselves a little, if they could pay a visit to Sir Isaac: many of whom the most considerable men in all parts of the globe, came hither for that very purpose. & thought the hazards of thir voyage overpaid, in enjoying that privelege.

for eight years I was a constant attendant there, which may be reckon'd a lucid part of one's life.

S[r]. Isaac was gray headed when under 40; owing, perhaps, to the infinite expence of spirits from severe studys; yet he had great strength of nature, & a good constitution. tho' not tall in stature, yet strong, sinewy, & well made. thro' this, and his temperance, & mild disposition, he lived to a great age. the last time I was with him, he told me, his breakfast was commonly an

infusion of orange peel in boiling water, as thea, sweetned a little; with bread & butter. he drank then more water, than formerly, vizt. morning, & night. wine he uses only, & but little, at dinner.

My great friend Thomas Earl of pembroke, & he were well acquainted: from whom I have heard, that Sir Isaac always cured a cold, by lying in bed for 2 or 3 days, which carry'd it off, by perspiration.

on the other hand, in discourse on lord pembrokes busts, statues &c. Sir Isaac would pleasantly call them, my Lords old fashion'd babys.

Sir Isaac's eyes were very full, & protuberant, which renderd him near sighted, in youth, & manhood. & was the reason of his seeing so well in age; the eye being betterd, by growing somewhat flatter: whereby the visual rays unite at a convenient distance, neither too near, nor too far off the eyes. *never used spectacles. in the year 1725 I saw him cast up Mr. Treasurer Pitfields accounts of the Royal Society; being a whole sheet of paper; without pen & ink, without spectacles: an indication of the strength of his memory, as well as eyesight. but I have heard very extraordinary things of the strength of his memory, in arithmetical operations, & calculations by numbers, & letters, which he has done, when in bed, by night.

D^{r}. Harwood of the Commons told me, he was present once at the Royal Society, when a learned foreigner was admitted; who made (as customarily abroad) a studyed harangue in latin, to thank the Society for that honor. S^{r}. Isaac answer'd it readily in the same language, with a good grace, & fluency.

when D^{r}. Woodward quarreld with S^{r}. Hans Sloan, at a Council of the Royal Society; & was so troublesom that they were oblig'd to expell him, S^{r}. Isaac told the D^{r}. "we allow you to have natural philosophy, but turn you out for want of moral".

& this will naturally bring us to say somewhat of S^{r}. Isaac's moral character; which was eminently good, & never impeachd in any one instance. somewhat of it depends on the good state of the body & repose of the mind, & a government over passions. S^{r}. Isaac by his great prudence, & naturally a good constitution, had preserv'd his health to old age, far beyond what one could have expected in one so intirely for the better part of his life, immersd in solitude, inactivity, meditation & study: in an incredible expence of mind; and that thro' a long series of years.

but his natural disposition was of a chearful turn, when not actually engag'd in thought. he could be very agreable in company, & even sometime talkative. his voice was of a deep tone, but pleasant enough, having a large chest, for one of his stature. a spirit of beneficence [x]& philanthropy was, as it were, the basis of his composition. infinite instances might be given of the extensiveness of his charitys. not those of a little, & low kind, [+]forcd out of a weak mind, a false pity; but what show'd the noble spirit, that gave prudently, as well as profusely.

M[r] Clark of Grantham says, he gave £100 bank bill into his hands, for one of the Pilkingtons, his half niece: as a portion on her marriage. Dr. Newton says, S[r]. Isaac Maintain'd her, & her mother when they were both widows. not long before his death, he bought land of about £30 a year value & gave to John Newton, his heir at law. For Robert Newton another relation he bought land of somewhat less value. he hoped it would not be so easily spent, as money. To one Ayscough a relation by his mother, who was clark to M[r] Calcraft of Grantham an attorney, he gave £100 to set him up withal, & other benefactions: he was his godson. but all relations, who were numerous enough, largely partook of his bounty.

to the Royal Society he frequently gave money, & to all subscriptions of publick utility, literary, political, charitable, religious. he was generally present at the marriages of his relations, when conveniently he could be. He would on those occasions, lay aside gravity, be free, pleasant, & unbended. he generally made a present of £100 to the females, and set up the men to trade, & business. he showd his good sense in this, as in every other affair; seeing that matrimony, trade, & industry is the foundation, & the strength of a common weal: & ought by all methods to be incourag'd in a wise government.

S[r]. Isaac had likewise a natural dignity, & politeness in his manner, in common life, unusual in so hard a student. I heard from captain Short, of Keal, in Lincolnshire, who was related to him, that when he, & the family visited S[r]. Isaac at the tower, to see the coynage; he entertaind them very splendidly, & gave to each a gold medal. & this he often did to such as visited him, out of curiosity, at the tower.

M[r] Mason says, he gave the parish of Colsterworth a handsom sum of money toward the repairs of the church; & promised them more, when they

wanted it. for his religion; he was a man of real piety, & strict attendance on the sabbatical duty; knowing the necessity, as well as expediency of the public profession of religion. he could not excuse himself from the weekly solemn adoration of the supreme being; both out of principle, & a regard to his influence, & example: & he was sensible, that many persons were attentive to his conduct, in that respect. surely those of all mankind are the weakest, that fancy, Society can be maintain'd, without the influence of religion. & the example of the upper part of mankind is absolutely necessary, for that good purpose; had we no further view than this present life.

but alas even in the latter end of S^{r}. Isaac's time, we began to see the deplorable consequence of the neglect of it. half philosophers, half scholars are too often apt to be tinctur'd with scepticism. but S^{r}. Isaac was an intire christian, upon fundamental principles. he knew the evidences of it were as strict demonstrations in thir way as his principia. no man in England read the Bible more carefully than he did; none study'd it more, as appears by his printed works, by many pieces he left, which are not printed; & even by the Bible, which he commonly used, thumbd over, as they call it, in an extraordinary degree, with frequency of use.

he who was so well acquainted with the laws of our material system, by which the sovereign architect governs, & preserves the whole frame; he knew that the same allgood, & allwise being did not leave the moral world without rule, & law; which law we call religion. but religion is nothing, without practise; & that practise must be public, vizt the sabbatical duty, which is the very basis of all the good we enjoy in this world, either as to the community or to private persons: as well as of the claim it gives us of a future happiness.

S^{r}. Isaac's great, & extensive mind, to which Providence had given so vast, so intimate a view of his works, must needs tast the most divine pleasure in the public acts of adoration of the omnipotent fountain of all things: especially in the service of the Church of England, which of all others most certainly, & most strongly affects, & influences a rational person, one of learning, & solid piety. ^{X}this is the genuin effect of true philosophy; which disdains meager scepticism, anti-christian infidelity, &

impious atheism: which excludes blind fatalism, & the hideous train of fruitless, & hopeless absurditys of that sort.

S^{r}. Isaac was sensible, that the material, & the animal world were govern'd by infallible canons, never deviating; by the great principles of gravitation, & impulse, and by that which we call instinct. but the rational world being perfectly free, must still have a law; which tho' it dos force voluntary agents, yet it presents its self to a considering eye, in so amiable a light, that it allures us; offers present, as well as future rewards: and fully acquaints us with the mischiefs of a refusal. we are left to our own will, because that only can intitle us to merit. & if we be sincere, it affords us sufficient help to conduct us rightly.

several people of heretical, & unsettled notions, particularly those of Arian principles, have taken great pains to inlist S^{r}. Isaac into their party. but that with as little justice, as the anti christians. the church of England intirely claims him as her son, in faith, & in practise.

I can not better conclude this article, than in reciting the subject of a conversation, I once had with him, toward the beginning of our acquaintance.

I proposed to him a thought I had entertain'd, how to account for that great luminous circle incompassing us, which we look upon with so much wonder, in a clear starry night, called the milky way. we all readily suppose it to be owing to the suns of separate systems there placed, one beyond another, ^{X}one by the side of another, in the boundless extent of space, whose united rays cause that luminous appearance. $^{+}$for light is the only thing that dos not diminish in proportion to its distance. we suppose with probability enough, that every star is a sun of a separate system; some perhaps bigger, some lesser, $^{\theta}$one by the side of another, in the boundless extent of space, some further distant from others, ſome nearer. that they all have this concomitant planets as our ſun. & in order to have a juſt idea of God's power, we may conceive every globe is perfectly different in its elf as to its inhabitants, & furniture, & attendants.

but still the question remains, whence the origin of the milky way: notoriouſly a great circle including the whole of the creation to us viſible? my thought concerning it is this. we mortals, ſaid I, are pleaſd with new works, new advances in our knowledg, now writing, wh is a ſort of creation,

new building, new plantation, wh test, we look with pleasure on what we have already done, wh we approve of. yet we are more eager in purſuing ſomewhat further, than in ſurveying what we have already done, what we are in poſsion of; like alexander ſighing for new worlds to conquer. & this is the conſtant bout of our minds as long as our facultys will permit us.

S^{r}. Iſaac thought the notion to be very juſt, & agreable to his own experience. I continued my diſcourse. this deſire in us of new creations of any ſort in our little way, may be a divine particle deriv'd from our maker. with wiſdom is it implanted in us, for good purpoſes: that we may be active, & buſy. this same principle, seperated from all imperfection, $^{+}$incompatible with the divine nature, always will create new worlds the antients had some notion of this sort, for Democritus affirmed infinite worlds may give us a good notion of the agency of the supreme mind, & solve our problem. I suppose therefore, God almighty, tho' in the Mosaic cosmogony he is said to rest from all his works which he had created & made; yet this I take to be spoken only in regard to our present system. For why sh^{d}. we not think, that God always created new worlds, new systems, to multiply the infinitude of his beneficiarys, *& extend happiness beyond all compass & imagination. I must needs affirm, this is exactly consonant to the idea we ought to have of God. I mean, since he thought fit to begin creation, for that creation certainly, & necessarily must commence in time, is a truth the $^{+}$most certain in the world;$^{+}$for by the definition, tis bringing that into being which was not in being before. therefore there was a time before it. therefore an eternal creation a parte ante is the greatest absurdity. but the continuing it a parte post is the greatest glory of the divine nature.

we see here, God has given a power, in all things partaking of any degree of life, to continue thir own kind, in an endless chain. it suits the notion we have of Gods goodness, that he still made new worlds, for the creatures thereof to do the like. ^{X}that the fountain of his bounty may flow for ever; & all the streams of it, may not only flow, but increase eternally, both in number, & quantity.

"when we indevor to form in our minds an apt idea of God almighty we are to stretch our imagination to the utmost pitch, that we may view somewhat of the largest scope of infinite wisdom, power, & goodness, which we can possibly reach to.

“But bec^{n} G. alm. always practises order, method, regularity in all his works; I suppose, he places these new worlds, & systems of worlds, in a certain great, & broad line; not made of single systems in breadth, but of many, like a vast meridian, or plane of worlds; not filling infinite space quaquaversum, but dividing infinite space into two great parts, one on each side, this great mundane meridian. & that this is the occasion of the appearance, which we call the milky way. ^{x}being a very distant view of that luminous plain, like the ring of Saturn, extending all around & beyond us.

for this notion we have a considerable confirmation, from considering our own world, that the plane of all the circles of the primary, & of the secondary planets, is nearly in one line, $^{+}$the plane of Saturns ring the same. G. observes a great analogy in all his works. so that our system in that respect is but a sort of picture of the universe. & that meridional plane of our solar system may be called our milky way. & hence the milky way in the heavens is the aggregate of what we can discern of the meridional plane of the macrocosm. $^{+}$& thus we may be said to have before our eyes an actual view of God’s infinite wisdom, power, & goodness: not a mental idea only, but real prospect; and that of the largest scope. & tis to be consider’d withal that God’s infinite wisdom shines forth in highest lustre, in this particular construction of the universe. what would have been the consequence had infinite space quaquaversum been disseminated with worlds? we see every night, the inconvenience of it. The whole hemisphere would have had the appearance of that luminous gloom of the milky way. we should have lost the present sight of the beauty & the glory of the starry firmament. & therefore we may well conclude the great architect has herein truly united infinite wisdom, power, & goodness; in thus planning out the worlds; without robbing us of that most magnificent view we enjoy, and no less $^{+}$useful on many accounts, the starry canopy.

and this perhaps may give us some $^{+}$obscure notion of the reason of the odd formation of the planet Saturn. that it is as a miniature picture, or model of the το παν. for we must conceive that the plane of suns and systems of planets concomitant, which make the lacteal circle, have a vast space left between it & the several stars which we behold in a clear night. Therefore these stars which we behold in a clear night we may liken taken altogether to the globe of Saturn: the plane of those stars beyond, which appear to us

like the lacteal circle, may be assimilated, taken all together, to the ring of Saturn."

S^{r}. Isaac seem'd to listen to this kind of discourse, with some approbation. & we discus'd an objection or two. as 1. whether tis not better to suppose the worlds infinitely extended quaquaversum than in a sort of plane. this would provide better for thir stability; that mutual attraction acting on all sides, hinder'd the systems from falling together. this objection is overruled, by supposing the several systems set respectively, at such distances, as that attraction from any side, sh^{d}. be infnitely small, which therefore w^{d}. operate nothing in the case. a second objection is merely theological. some are inclined to think our religion not founded sufficiently on philosophy. because it supposes the globe of our earth to be the whole world. that it is unworthy, that a divine Mediation sh^{d}. be allotted to so small, so inconsiderable a portion, in comparison of the whole.

but this objection is as easily vacated by the single consideration of the nature, & the value of our souls. an immortal principle that cannot cease to be. therefore in a few words it must be asserted, to be of infinitely more value, than the whole material globe, which must perish: than the whole mundane system.

in conclusion S^{r}. Isaac intimated, that the thought was worthy of Gods power, & goodness; that it solv'd the appearance of the galaxy; if it was fact. $^{+}$the bredth of the angle, which the galaxy makes, shows its inconceivable distance, in this view: & that beyond all number. that it was not easy to say whether is the greater idea of G. alm. that he creates infinite worlds now, ^{X}& that to all eternity, to multiply the objects of his benignity: or that he created them all at once. I mean, says he, in the hexaemeron. For I take it to be agreable to philosophy. $^{\theta}$but as to Sir Isaac's problem proposed, whether it be more consentaneous to the nature & the glory of the deity, that he should create new worlds infinitely, in succession: or have done it all in the hexaemeron, we may leave it to be solv'd when we are in his present scituation.

I shall only propose another problem, which tho' numbers can scarce reach the solution, yet they may possibly give us some little idea of the matter. the apparent bredth of the galaxy is generally about 23 degrees; sometime it is nearly double. about 21½ equal to our obliquity of the

ecliptic on Mr Senex's planiſpheres. quære ſupposing my hypothesis to be fact how far distant is it? I try'd it after a rude^{o}manner & found the interval double the diameter of the whole view of the fixt stars which we behold. thus as in pa. 57

however this discourse put me upon studying the Mosaic cosmogony seriously, which I did, when I lived in Ormon ſtreet, I write a large book upon it; convinced that it was conſontaneous to the Newtonian philoſophy.

S^{r}. Iſaac left many written tracts behind him. ſome have been publiſhed ſince his death. great numbers of papers ſtill preſerv'd, by the executors of M^{rs}. Wallop. ſome few people have been fanciful enough, to think, they c overthrow S^{r}. Iſaacs philoſophy, both in the mathematical, & in the optical part. M^{r} Green of Catherin hall began early. M^{r} Huchinſon pretended to do it from Cabaliſtic principles. a modern frenchman w^{d} fain demonſtrate some part of S^{r}. Iſaacs optics, to be erroneous. with many more of that ſort, ſeeking to make themſelves a kind of name, by leſsening his: a conduct very diſsonant to his own. but S^{r}. Isaac, ſetting aſide, that he was a man, was too cantelous to be found tripping: his foundations are laid too deep to be ſhaken: his ſuperſtructure too compact to be overturn'd.

he himſelf was a perſon of a great deal of modeſty, in every reſpect: & always turn'd a deaf ear, to any ſort of praiſes of his juſt merit. Whilst he presided in the Royal Society, he executed that office, with a ^{x}singular prudence, with grace, & dignity; conscious of what was due to so noble an Institution; what was expected from his character. when any paper was read, or experiment exhibited, wherein he had any knowledg & it was very rarely otherwise; he never faild to speak to it, with a just commendation; or to point out its defects, where it might be improv'd, where any experiment might be better directed. He would give a concise history of the advances of the subject, very much to its illustration; & to the emolument of the members present.

I remember particularly, that time I officiated for D^{r}. Halley, a paper was read of the pernicious effects of rooms fresh plaisterd o'er with lime, before dry. S^{r}. Isaac told us of a terrible catastrophe of that sort, of his own knowledg. a man, his wife, child, & servant-maid, they al lay in one room, when he was a lad at Grantham, which had been newly drawn with fresh

lime. & to dry it the sooner, they made a fire, & shut the doors, to prevent them catching cold, as they thought. in the morning they were every one found in the cold arms of death. After I went to live at Grantham, I often heard speak of this tragedy. it happend in a house in westgate.

S[r]. Isaac was very careful of giving any sort of incoragement to attempts of improvement in natural knowledg. there were no [+]whispering, talking, nor loud laughters, if dissensions arose in any sort, he said, they tended to find out truth, but ought not to arise to any personality. [θ]the transactions were publishd by the secretarys, with proper care, & judgment, & were accordingly esteem'd. he was very sollicitous of keeping up a correspondence both at home, & abroad; & that letters should be answer'd, offers of exchange of literary news cultivated: and every thing done that tended to the order, the honor & advancement of the Society, & the harmony of the members.

he said, correspondence was the life of these Societys: never grudgd paying any necessary charge, or that might be expedient. he gave money largely, to assist deserving persons: & where it was wanted.

the Council was provided out of the older part of the Society, & such as had been most serviceable in entertaining them with written discourses, or experiments: or constant attendance. & this was done, with a reasonable rotation. [x]that every member in time might become acquainted with the state, & revenue, & the management thereof: without keeping in members as of form, who cannot possibly attend: or recent ones, wholly strangers to their affairs. he regarded the choice of useful members, more than the number, so that it was a real honor. nor did any presume to ask it, without a genuine recommendation; & having given some proofs of thir abilities. they were then previously to be approved of by the Council; where thir qualifications were freely canvased: therefore less lyable to be balloted for, with partiality, or prejudice.

every thing was transacted with great attention, & solemnity, & decency. nor were any papers which seemed to border on religion, treated without proper respect. indeed his presence created a natural awe in the assembly; they appear'd truly as a venerable consessus Naturæ Consiliariorum, without any levity, or indecorum.

the very title was justly rever'd, both at home & abroad. the Government, the great Council of the nation, paid a distinguishd regard to their judgment in all matters of public utility: which sometime were refer'd, & recommended to thir examination. as particularly the instruments for time-keeping, for astronomical uses, & the publications of the Royal observatory at Greenwich: & what regarded the improvement of navigation, and other national concerns.

infinite were the encomiums they received from foreign countrys; in a great mesure owing to the superior capacity, & unbounded merit of so illustrious a president. nor is it to be forgotten, that at the same time S^{r}. Hans Sloan & D^{r}. Halley were secretarys; a triumvirate of the greatest names in the commonwealth of philosophy.

then were distinguishd ornaments of the Society the noble Thomas Earl of Pembroke, who had been president, S^{r}. Christopher Wren, who had been president, Dr. Keils, monsieur de Moivre, D^{r}. Cotes, D^{r}. Tancred Robinson, D^{r}. Mead, D^{r}. Friend, D^{r}. Sherard, who founded the botanic salary at Oxford, D^{r}. Woodward who founded that of natural philosophy at Cambridg, D^{r}. Flamsted, M^{r}. Roger Gale, D^{r}. Pound, M^{r}. Derham, D^{r}. Brook Taylor. D^{r}. Desaguliers, M^{r} Graham, ^{x}Dr Bentley, Dr Stephen Hales, Mr Hadley, Mr Rand, &c., a galaxy of shining genius's, each in their several branches of knowledg illuminating the whole hemisphere of arts, & sciences!

$^{+}$at that time indeed England was the center of learning & curiosity. all the literary Societys the College of Physicians, the Royal Society, the Antiquarian Society, the Surgeons company, the Apothecarys were at the height of glory, & reputation. hither were imported the treasures of antiquity curiosity, & found a ready entertainment. Lord Pembroke made his immense collection of coins, Antient marbles, pictures, books. Lord Oxford, Lord Sunderland collected librarys of books and MSS not less than princely: Sir Hans Sloan, & Dr Mead purchased all that nature or art, antient or modern produc'd: Mr John Bridges, Mr Thomas Rawlinson & many other made very great librarys. Dr. Woodward began the taste of collecting fossils, shells, & all natural productions. Sir Hans Sloan made a noble foundation of the physick garden at Chelsea. The learned Heneage

earl of Winchelsea, had made a very great collection of greek coyns; [x] S[r] Andrew Fountain, M[r] Thomas Sadler & many more Vertuoso's, in all kinds of antient coyns.

S[r]. Isaac, in the latter part of his days, thro' age, & a sedentary life, had somewhat of a relaxation of the sphincter of the bladder: so that he was oblig'd to make water frequently. a year or two before this laſt, he had a fitt of the gout: upon wh his friends congratulated him, as an inſurance of long life. but I had different ſentiments: & this event verify'd my preſage.

his laſt illneſs was an inflammation on the neck of his bladder, with the moſt excrutiating pain, that can be imagined; & that for ſeveral days continuance.[x]I have no scruple in judging it to be gouty. Some thought it, the stone. it roſe to ſuch a height, that the bed under him, & the very room ſhook with his agonys, to the wonder of thoſe that were preſent. ſuch a ſtruggle had his great ſoul to quit its earthly tabernacle! all this he bore with a moſt exemplary, & remarkable patience, truly philosophical, truly chriſtian; & a reſignation to the divine will, equal to his other vertues; expiring with ſoft, & ſilent groans: his ſpirit taking its flight thro the well known ſtarry orbs: whilſt his name lives on earth, till attraction in the planetary bodys exceeds thir impulsive motion; & the ſun abſorbs them, in the laſt conflagration.

[*]he read the journal of Saturday 18 March in the morning & talkd a good deal with Dr. Mead who attended him. he was in perfect senses till that evening: but then lost them irrecoverably.

he dy'd about 2 a clock in the morning, of the 20 march 1726-7. in the 85[th]. year of his age current. [^]he lay in state in Jerusalem chamber he was bury'd with decent ſolemnity, in wesminster abby, S[r] Michael Newlon chief mourner.

his good works follow him. his learned works remain, to eternize his memory, the admiration of all mankind. Europe sighd at the loss of so incomparable a perſon. Science mourn'd its light. its glory extinct!

he thought fit to make no Will, but loſt his fortune, wh was pretty conſiderable, as the Law directed; wh his relations ſhared among them, he

had given a great part of his money, to M^{rs} Catherin Barton his favorite niece, upon her marriage with M^{r} Conduit. his eſtate fell to his next heir John Newton as before said, who is deriv'd from his fa.^{rs} 2^{d}. bro^{r}. he wholly unworthy of the name of Newton ſoon spent it. his perſonal estate came to the smiths, & Bartons, pretty many in number, deſcendants from his fa^{r}. in law, by his mo^{r}. it amounted to about £3500 each, but all ſoon found a period. as if to ſhow the fleeting vanity of riches, family, & ſecular acquirements, in competition with the more durable, & ſubſtantial glorys of vertue, & the ſplendors of the mind. & tho its in the power of a very few, to arrivd at a high degree of excellence in this way; yet its happy for us, that we may all ſo trim our lamps, as hereafter to shine; tho not as ſtars of the first magnitude. for the future ſtate, as well as this, will be an allotment of different degrees of glory, as the most learned apoſtle argues, in that admirable piece of religious philoſophy I.Cor.XV.41. let its copy after S^{r}. Iſaacs moral, & religious character; it will inſure us of a bliſful immortality; when the wiſdom of this world will be no more.

this ſmall offering, & grateful tribute I make to the shrine of this illuſtrious perſon, an offering not quite inconſiderable enough to be forgotten. & it may be ſome what helpful to thoſe that can add to it, & perfect it.

there are a good many pictures of him, beſide that by S^{r}. Godfry Knoller. and painted by Vanderbank in his own hair, wh is now in the Royal Society room. a print of it by M^{r} Vertue. M^{r} Smith had before made a metzo tinto from that of S^{r}. Godfrys. in the Royal Society room is a very fine marble buste of him. monſiour Marchand an excellent artiſt in ivory, made a very good likeneſs of him: wh I ſaw afterward, at Stamford, in possion of one of his heirs, Mr. Ben Smith. I made several drawings of him from the life; chiefly in the antique way of profile; & very like. whereof that here prefixed is one. Mr Conduit caused a very good medal of him to be struck. he gave me one of them. he had a countenance pleasing, & good humor'd; but sufficiently indicative of vast penetration. the marble statue of him on his monument is very well done. I painted his profile, as big as the life, in a niche in one of the wings of the garden front of my house at Grantham, facing the fine prospect of Harrowby hill; underneath inscribed GENIO LOCI.

the inscription on his monument is a very handsom, & concise enumeration of his works, & of his qualitys, & vertues. Dr Bentley, Mr Pope & all the wits of that time, made epitaphs on this occasion. & Monsieur Fontanelle pronounc'd a handsom *elogium* before the Academy of Sciences at Paris.

H. S. E.

Isaacus Newton Eques auratus,
Qui animi vi prope divinâ,
Planetarum motus, figuras,
Cometarum semitas, Oceanique aestus,
sua mathesi facem praeferente,
primus demonstravit;
Radiorum lucis dissimilitudines,
Colorumque inde nascentium proprietates,
quas nemo anteá vel suspicatus erat, pervestigavit.
Naturæ, Antiquitatis, S. Scripturæ.,
sedulus, sagax, fidus Interpres.
Dei O.M. majestatem philosophia asseruit;
Evangelii simplicitatem moribus expressit.

Sibi gratulentur mortales

Tale tantumque extitisse
Humani Generis Decus.
nat. XXV Dec. AD. MDCXLII. obiit XX mar. MDCCXXVI

FINIS

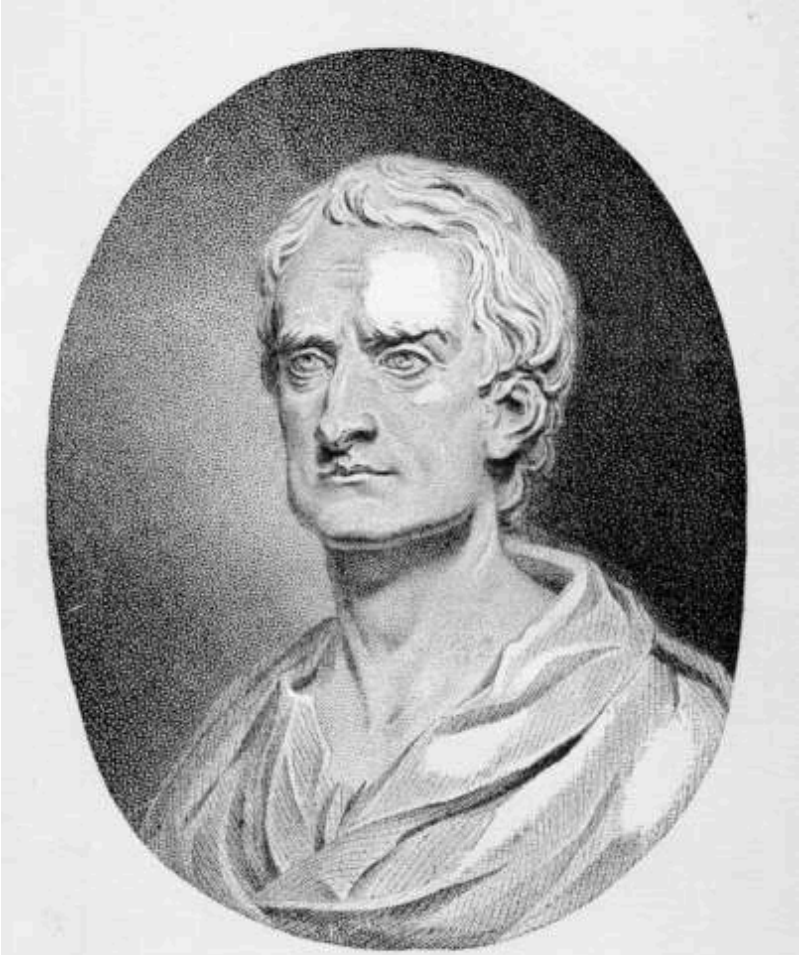
SIR ISAAC NEWTON by Sarah K. Bolton

In the same year, 1642, in which Galileo, sad and blind, went away from the earth, Sir Isaac Newton came to make his home upon it.

He was born December 25, the only child of Isaac Newton and Hannah Ayscough. The father died at thirty-seven, a few months after his marriage, and the young wife, after the birth of her child, was both father and mother to the helpless infant. He was so frail that there seemed little probability that he could live to manhood, or even boyhood. Naturally, between mother and son there grew a most ardent affection, which neither time nor death could change.

The manor-house of Woolsthorpe in Colsterworth, Lincoln county, was a two-story stone building, owned for a century by the Newton family, and bringing a limited income from the little farm in connection with it. Here Isaac passed his childhood, going to the schools near by, and learning to read, write, and cipher.

At twelve, he was sent to the public school at Grantham, where he showed little taste for study, and managed easily to stand at the foot of his class. When he was the last in the lowermost form but one, the boy next above him, as they were going to school, gave Isaac a kick, which occasioned severe pain. Stirred with wrath, Isaac challenged the other boy to a fight. For this purpose, they repaired to a neighboring churchyard, where young Newton, though much the smaller and weaker of the two, pounded his antagonist till he was glad to come to any terms of submission.



SIR ISAAC NEWTON.

He resolved now that this boy should no longer stand above him in scholarship, and with a new ambition and energy born of his insult, he soon rose to the highest place in the school. It was not idleness, probably, that made Newton a poor scholar, but his mind was absorbed with making saws, hammers, hatchets, and other tools.

He made a windmill and placed it on the top of his home, the wind putting it in motion. When there was no wind, a novel expedient was resorted to. A mouse, which was called “the miller,” was trained to turn the windmill by walking on a tread wheel, with some corn just beyond his reach! All through life, he was exceedingly kind to animals, and could never tolerate shooting or hunting for sport. He objected to one of his nephews, when praised in his presence, “that he loved killing of birds,” and this was sufficient to win his disesteem. It is probable, therefore, that the little mouse was kindly cared for by the young experimenter.

He also made a water clock, about four feet high, with a dial-plate at the top, with figures of the hours. The index was turned by a piece of wood, which either fell or rose by water dropping. Every morning the lad supplied his clock with the proper amount of water.

Besides these, he invented a four-wheeled carriage, which was moved with a handle by the person who sat in it. For his boy friends, he made lanterns of "crimpled paper" with a candle inside, to light them to school in the dark winter mornings, and paper kites of the best form and proportion. In dark nights he tied the lanterns to the tails of his kites, and ignorant people sometimes mistook them for comets!

On the manor-house at Woolsthorpe he carved sun-dials, which were visible a century later. He was a "sober, silent, and thinking lad," who was always hammering in his room, or making drawings with his pen and pencil, designing with charcoal on his walls, birds, animals, ships, and mathematical diagrams.

Mrs. Newton, the mother, had married again, after a singular courtship. "Mr. Smith, a neighboring clergyman, who had a very good estate, had lived a bachelor till he was pretty old, and, one of his parishioners advising him to marry, he said he did not know where to meet with a good wife. The man answered, 'The widow Newton is an extraordinary good woman.' 'But,' said Mr. Smith, 'how do I know she will have me, and I don't care to ask and be denied; but if you will go and ask her, I will pay you for your day's work.'

"He went accordingly. Her answer was, she would be advised by her brother Ayscough, upon which Mr. Smith sent the same person to Mr. Ayscough on the same errand, who, upon consulting with his sister, treated with Mr. Smith, who gave her son Isaac a parcel of land, one of the terms insisted upon by the widow if she married him."

Though for a time she was thus removed from Isaac, leaving him with his grandmother, on the death of Rev. Mr. Smith, she returned to the manor-house.

When Isaac had reached his fifteenth year, his mother, not seeming to think of any profession for her mechanical son, decided to make of him a farmer and grazier. On Saturdays, the market day at Grantham, she would send him with grain and other agricultural produce, in the care of an old and trusty servant. The boy had no taste for selling produce, and would hasten to

the attic in the house of Mr. Clark, an apothecary, with whom he had boarded while at school, and there spend his hours in reading old books, till the time came for him to go home, the servant meantime having sold the vegetables.

Sometimes, however, the lad would not go as far as Grantham, but, seating himself beside a hedge along the road, would read some favorite author till the servant returned. When his mother sent him to watch the cattle, they enjoyed a neighbor's corn-field, while he enjoyed a book or whittled out water-wheels. It did not seem intentional disobedience toward a mother of whom he was very fond, but complete absorption in some other pursuit.

When he was sixteen he was greatly interested in finding the proper form of a body which would offer the least resistance when moving in a fluid. In a severe storm, to test the force of the gale, he jumped first in the direction in which the wind blew, and then in opposition to the wind, and after measuring the length of the leap in both directions, and comparing it with the length to which he could jump in a perfectly calm day, he was enabled to compute the force of the storm.

His mother soon found that her boy would not make a successful farmer, and sent him back to school at Grantham, to prepare for Trinity College, Cambridge, which he entered when he was nineteen.

It is probable that the time spent at Grantham was a happy time; for young Newton there met and, it is said, loved Miss Storey, sister of Dr. Storey, a physician near Colsterworth, and daughter of the apothecary's second wife. She was two or three years younger than Newton, a girl of attractive face and unusual talents. As his income as a Fellow was small, after leaving college, they did not marry, though his interest in her continued unabated through life. Though she was twice married, he never paid a visit to Woolsthorpe without going to see her, and liberally relieved her from little pecuniary embarrassments, when his own circumstances had become easy. How the world loves constancy; an affection which knows no change! That he would have been happier in those quiet years of study, even in his poverty, had he married, is probable; but that the world gained by his undivided devotion to science, is equally probable.

On July 8, 1661, Newton entered college, and soon, through the study of Descartes' Geometry, showed his skill in higher mathematics. And now

began an almost unexampled development of mind.

At twenty-two, he was studying a comet so closely, and the circles and halo round the moon, that he impaired his health by sitting up late at night. In 1665, May 20, when he was twenty-three, he committed to writing his first discovery of fluxions— "the infinitely small increase or decrease of a variable or flowing quantity in a certain infinitely small and constant period of time."

The same year, when the college had been dismissed on account of the plague in Cambridge, Newton made his immortal discovery of the Attraction of Gravitation. While sitting alone in his garden at Woolsthorpe, and observing an apple fall to the ground, it occurred to him that as the same power by which the apple fell was not sensibly diminished at the summits of the loftiest spires, nor on the tops of the highest mountains, it might extend to the moon, about which he had been studying, and retain her in her orbit. If to the moon, why not to the planets?

The tree from which the apple fell was so much decayed in 1820, that it was cut down, but the wood was carefully preserved by Mr. Turnor of Stoke Rocheford.

In the beginning of the following year, 1666, when Newton was twenty-four, he purchased a prism, in order to make some experiments on Descartes' theory of colors. He made a hole in his window shutter, darkened the room, and admitted a ray of the sunlight. On the opposite wall he saw the solar or prismatic spectrum, an elongated image of the sun, about five times as long as it was broad, and consisting of *seven* different colors; red, orange, yellow, green, blue, indigo, and violet. White light was thus discovered to be of a compound nature; a mixture of all the colors. He said, "Whiteness is the usual color of light; for light is a confused aggregate of rays endued with all sorts of colors, as they are promiscuously darted from the various parts of luminous bodies." If any one color predominates, the light will incline to that color, as the yellow flame of a candle. Heretofore, there had been all sorts of conjectures about the nature and origin of colors. Descartes believed them to be a modification of light, depending on the direct or rotary motion of its particles. But Newton showed by many experiments that color is a property of light, or innate in light itself. We speak of a thing as red because it reflects red, and absorbs all the other

colors. The green leaf stops or absorbs the red, blue, and violet rays of the white light, and reflects and transmits only those which compose its green.

He also found that the red rays are refracted or turned out of their course least of all the colors, and violet most, thereby discovering the different refrangibility of the rays of light; “a discovery which has had the most extensive applications to every branch of science, and, what is very rare in the history of inventions, one to which no other person has made the slightest claim.”

His beautiful experiments with rings resulted in his Scale of Colors, of great value in optical research.

In 1668, when Newton was twenty-six, he constructed a small reflecting telescope, and soon a larger one, which he sent to the Royal Society; and was made a member of that body, in 1671. Two years previously he had been appointed to the Lucasian professorship of mathematics at Cambridge.

He was now, at twenty-seven, spoken of as a man of “unparalleled genius.” He had discovered the compound nature of white light, the attraction of gravity, fluxions, and made the first reflecting telescope ever directed toward the heavens, though one had been invented previously, by James Gregory, of Aberdeen. The boy who had thought of a mouse to turn his windmill had thought out some of the sublimest things in nature, and was henceforward to rank as one of the few masterminds of science. Newton’s doctrine of colors met with the most bitter opposition. At last, he became so tired of the controversy, that he wrote Leibnitz, “I was so persecuted with discussions arising out of my theory of light, that I blamed my own imprudence for parting with so substantial a blessing as my quiet to run after a shadow.” To another he wrote, “I see I have made myself a slave to philosophy; but if I get free of Mr. Linus’s business, I will resolutely bid adieu to it eternally, excepting what I do for my private satisfaction, or leave to come out after me; for I see a man must either resolve to put out nothing new, or to become a slave to defend it.”

Newton was also troubled pecuniarily at this time, and asked to be excused from the weekly payments to the Royal Society, thereby resigning his membership. He even meditated the study of law, as his income was so limited. Strange that so many of the great things of this life are wrought out by those who are in sorrow or privation.

But amid all the opposition to his discoveries and his poverty, the unparalleled devotion to study was continued. When he was weary of other branches, he said "he refreshed himself with history and chronology." Years afterward he published the "Chronology of Ancient Kingdoms amended, to which is prefixed a short chronicle, from the first memory of things in Europe, to the Conquest of Persia, by Alexander the Great." Says a gentleman who was with him for years, "I never knew him to take any recreation or pastime, either in riding out to take the air, walking, boating, or any other exercise whatever, thinking all hours lost that were not spent in his studies, to which he kept so close that he seldom left his chamber except at term time, when he read in the schools, as being Lucasianus Professor, where so few went to hear him, and fewer that understood him, that oftentimes he did in a manner, for want of hearers, read to the walls....

"So intent, so serious upon his studies that he ate very sparingly, nay, ofttimes he has forgot to eat at all, so that, going into his chamber, I have found his mess untouched, of which when I have reminded him he would reply, 'Have I?' and then making to the table, would eat a bit or two standing, for I cannot say I ever saw him sit at table by himself. At some seldom entertainments the masters of colleges were chiefly his guests.

"He very rarely went to bed till two or three of the clock, sometimes not till five or six, lying about four or five hours, especially at spring and fall of the leaf, at which times he used to employ about six weeks in his elaboratory, the fire scarcely going out either night or day, he sitting up one night, and I another, till he had finished his chemical experiments, in the performances of which he was the most accurate, strict, exact...."

When his most intense studies were carried on, "he learned to go to bed at twelve, finding by experience that if he exceeded that hour but a little, it did him more harm in his health than a whole day's study."

"He very rarely went to dine in the hall, except on some public days, and then if he has not been minded, would go very carelessly, with shoes down at heels, stockings untied, surplice on, and his head scarcely combed.... At some seldom times when he designed to dine in the hall, he would turn to the left hand and go out into the street, when making a stop when he found his mistake, would hastily turn back, and then sometimes, instead of going into the hall, would return to his chamber again.... In his chamber he walked

so very much that you might have thought him to be educated at Athens, among the Aristotelian sect."

So absent-minded was he, the story is told of him, that going home to Colsterworth, he led his horse up a hill. When he designed to remount, the animal had slipped the bridle and gone away unperceived, though Newton held the bridle in his hand all the time. He would often sit down on his bedside after he rose, and remain there for hours without dressing, so completely absorbed was he in his thought. How few in all this world have been so devoted to science! And yet how many expect success without this devotion!

The same gentleman writes of Newton, "His carriage was very meek, sedate, and humble, never seemingly angry, of profound thought, his countenance mild, pleasant, and comely. I cannot say I ever saw him laugh but once."

In 1687, when Newton was forty-five, his *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* was published. "The *Principia* consists of three books. The First Book, besides the definition and axioms, or laws of motion, with which it begins, consists of fourteen sections, in the first of which the author explains the method of prime and ultimate ratios used in his investigations, and which is similar to the method of fluxions. The other sections treat of centripetal forces, and motions in fixed and movable orbits.

"The Second Book consists of nine sections, and treats of bodies moving in resisting media, or oscillating as pendulums.

"The Third Book consists of five sections, on the Causes of the System of the World, on the Quantity of Lunar Errors, on the Quantity of the Tides, on the Precession of the Equinoxes, and on Comets."

The great principle of the *Principia* is universal gravitation, "That every particle of matter in the universe is attracted by or gravitates to every other particle of matter, with a force inversely proportional to the squares of their distances." By the laws of gravity, Newton was enabled to calculate the quantity of matter in the sun, and in all the planets, and even to determine their density, results which Adam Smith said "were above the reach of human reason and experience." He ascertained that the weight of the same body would be twenty-three times greater at the surface of the sun than at the surface of the earth, and that the density of the earth was four times

greater than that of the sun. He found the true figure of the earth; he explained the phenomena of the tides.

Of the "Principia," Sir David Brewster says, in his able life of Sir Isaac Newton, it is "a work which will be memorable not only in the annals of one science or of one country, but which will form an epoch in the history of the world, and will ever be regarded as the brightest page in the records of human reason, — a work, may we not add, which would be read with delight in every planet of our system, — in every system of the universe. What a glorious privilege was it to have been the author of the 'Principia'!

"There was but one earth upon whose form, and tides, and movements, the philosopher could exercise his genius, — one moon whose perturbations and inequalities and actions he could study, — one sun whose controlling force and apparent motions he could calculate and determine, — one system of planets whose mutual disturbances could tax his highest reason, — one system of comets whose eccentric paths he could explore and rectify, — and one universe of stars to whose binary and multiple combinations he could extend the law of terrestrial gravity.

"To have been the chosen sage summoned to the study of that earth, these systems, and that universe, the favored lawgiver to worlds unnumbered, the high priest in the temple of boundless space, — was a privilege that could be granted but one member of the human family; — and to have executed the last was an achievement which, in its magnitude, can be measured only by the infinite in space, and in the duration of its triumphs by the infinite in time. That sage, — that lawgiver, — that high priest was Newton."

The "Principia" created the greatest interest throughout Europe, but met with violent opposition. While Laplace said it would take "pre-eminence above all the other productions of human genius," the majority could not believe that great planets were suspended in empty space, and retained in their orbits by an invisible power in the sun.

When Newton presented copies to the heads of colleges, some of them, Dr. Babington of Trinity among the number, said, "they might study seven years before they understood anything of it."

In 1687, Newton's method of fluxions was first published, twenty years after its invention, and then because the friends of Leibnitz, the author of the "Differential Calculus," claimed priority of discovery. The quarrel

aroused the scientific world, embittered the silent mathematician, and impaired his health.

In 1689, when he was forty-seven, he was chosen member of parliament, and represented Cambridge University in the House of Commons for thirteen months. He took no active part in the debates, but was of course respected for his wonderful mind.

This same year, his beloved mother died. Anxiously he had watched through whole nights by her bedside, seeking in all ways to keep her from leaving him alone in the world.

He was now nearly fifty. His life had been laborious, with an insufficient income. His friends, John Locke among the number, tried to obtain various positions for him, but failed. They recommended him for provost of King's College, but the position could not be obtained because he had not taken priest's orders.

Seemingly unappreciated, worn with his incessant brain work, his appetite failing, and unable to sleep, with neither mother nor wife to comfort him, the sensitive organization of the great man became overstrained, and mind and body were unfitted for work. It is stated that his ill health was in part consequent upon the burning of some manuscripts on optics, by a lighted candle on the table among his papers.

When he was fifty-three, the long hard road of poverty turned into a highway of plenty, through the influence of a friend. Charles Montague, an associate of Newton at the university and also in parliament, though nineteen years his junior, — intellectual affinities are uninfluenced by age, — had been made Commissioner of the Treasury, then Privy Councillor, then Chancellor of the Exchequer, and later still, Baron of Halifax.

Lord Halifax appointed Newton to be Warden of the Mint, and then Master, with an income of between six thousand and seven thousand five hundred dollars annually, which position he held for the remainder of his life. His home in London, where he kept six servants, with his brilliant niece, Miss Catherine Barton, for his companion, became a place of rest and comfort to the tired philosopher. Lord Halifax was a great admirer of Newton's niece, Miss Catherine Barton, to whom he left, at his death, a beautiful home and twenty-five thousand dollars, "as a token of the sincere love, affection, and esteem I have long had for her person, and as a small recompense for the pleasure and happiness I have had in her conversation."

The days of privation were over, and Newton had earned this rest and prosperity. Great people often came to dine with him. At one of his dinners, Newton proposed to drink, not to the health of kings and princes, but to all honest persons, to whatever country they belonged. “We are all friends,” he added, “because we unanimously aim at the only object worthy of man, which is the knowledge of truth. We are also of the same religion, because, leading a simple life, we conform ourselves to what is right, and we endeavor sincerely to give to the Supreme Being that worship which, according to our feeble lights, we are persuaded will please him most.”

Other honors now come to Newton. In 1703, he was elected President of the Royal Society, and was annually reëlected during the remaining twenty-five years of his life. On April 16, 1705, when he was sixty-three, Queen Anne conferred the honor of knighthood upon her most illustrious subject, Sir Isaac Newton, before a distinguished company at Cambridge University. In 1704, the year previous, his great work on optics had been published, written over twenty years before.

About this time, it seems that the great philosopher would have liked to marry Lady Norris, the widow of Sir William Norris, Baronet of Speke, and Member of Parliament. Sent to Delhi as ambassador to the Great Mogul, he died in 1702, between Mauritius and St. Helena, on his homeward passage. He was the third husband to Lady Norris, and Sir Isaac, now over sixty, desired to be the fourth, as appears from the following letter: —

“Madam, — Your ladyship’s great grief at the loss of Sir William shows that if he had returned safe home, your ladyship could have been glad to have lived still with a husband, and therefore your aversion at present from marrying again can proceed from nothing else than the memory of him whom you have lost. To be always thinking on the dead, is to live a melancholy life among sepulchres, and how much grief is an enemy to your health, is very manifest by the sickness it brought when you received the first news of your widowhood. And can your ladyship resolve to spend the rest of your days in grief and sickness?

“Can you resolve to wear a widow’s habit perpetually, — a habit which is less acceptable to company, a habit which will be always putting you in

mind of your lost husband, and thereby promote you grief and indisposition till you leave it off? The proper remedy for all these mischiefs is a new husband, and whether your ladyship should admit of a proper remedy for such maladies, is a question which I hope will not need much time to consider of.

"Whether your ladyship should go constantly in the melancholy dress of a widow, or flourish once more among the ladies; whether you should spend the rest of your days cheerfully or in sadness, in health or in sickness, are questions which need not much consideration to decide them. Besides that your ladyship will be better able to live according to your quality by the assistance of a husband than upon your own estate alone; and, therefore, since your ladyship likes the person proposed, I doubt not but in a little time to have notice of your ladyship's inclinations to marry, at least, that you will give him leave to discourse with you about it.

"I am, madam, your ladyship's most humble and most obedient servant."

If Lady Norris "liked the person proposed," as Sir Isaac imagined, a marriage was not the result. It is just possible that he was like Leibnitz, who proposed to a lady when he was fifty. The lady asked for time to take the matter into consideration, and as Leibnitz thus obtained leisure to consider the matter again, he was never married.

For thirteen years Sir Isaac lived on Jermyn Street, London; then moved to Chelsea, a place dear to those who love George Eliot or admire Carlyle; and then to Martin Street, near Leicester Fields.

In his latter years he wrote much on theological subjects, especially to prove the existence of a Deity. When he was eighty-three he published a third edition of the "Principia." At eighty-five he read manuscript without spectacles. He reasoned as acutely as ever, his memory alone failing.

On March 2, 1727, he presided at a meeting of the Royal Society. He was taken ill on the following day, and, although a great sufferer for several days, never uttered a complaint. He died on Monday, March 20, and his body was laid in the Jerusalem Chamber, and thence conveyed to Westminster Abbey for burial. The pall was supported by the Lord High Chancellor and several Dukes and Earls.

On the front of his monument are sculptured youths, bearing in their hands emblematic designs of Newton's principal discoveries. One carries a prism, another a reflecting telescope, a third is weighing the sun and planets with a steelyard, a fourth is employed about a furnace, and two others are loaded with money newly coined. The monument bears this inscription.

Here Lies
SIR ISAAC NEWTON, KNIGHT,
Who by a vigor of mind, almost supernatural,
First demonstrated
The motions and figures of the Planets,
The Paths of the Comets, and the
Tides of the Ocean.
He diligently investigated
The different refrangibilities of the Rays of Light,
And the properties of the Colors to which
they give rise.
An Assiduous, Sagacious, and Faithful Interpreter
of Nature, Antiquity, and the Holy Scriptures,
He asserted in his Philosophy the Majesty of
God, and exhibited in his Conduct the
simplicity of the Gospel.
Let Mortals rejoice that there has existed
such and so great
An ornament of the human race.

Born 25 Dec., 1642; Died 20 March, 1727.

A beautiful full-length, white marble statue of Sir Isaac was erected in the ante-chapel of Trinity College, where he had done his wonderful work, when scarcely more than a boy.

While he gave generously during his life, he said, "they who give nothing till they die, never give at all," — he left a personal estate of one hundred and sixty thousand dollars, to be divided among his nephews and nieces.

The world honored him at last, and has through all the years. Bishop Burnet said, "Newton had the *whitest* soul he ever knew." His habits were

of the best. When asked to take snuff or tobacco, he declined, saying, “he would make no necessities to himself.”

He was modest to the last, saying, “that whatever service he had done the public was not owing to any extraordinary sagacity, but solely to industry and patient thought.” He said, a short time before his death: “I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.”

SIR ISAAC NEWTON by Henry Martyn Taylor

From Encyclopædia Britannica, 1911

SIR ISAAC NEWTON (1642-1727), English natural philosopher, was born on the 25th of December 1642 (o.s.), at Woolsthorpe, a hamlet in the parish of Colsterworth, Lincolnshire, about 6 m. from Grantham. His father (also Isaac Newton) who farmed a small freehold property of his own, died before his son's birth, a few months after his marriage to Hannah Ayscough, a daughter of James Ayscough of Market-Overton. When Newton was little more than two years old his mother married Barnabas Smith, rector of North Witham. Of this marriage there was issue, Benjamin, Mary and Hannah Smith, and to their children Sir Isaac Newton subsequently left the greater part of his property. After having acquired the rudiments of education at two small schools in hamlets close to Woolsthorpe, Newton was sent at the age of twelve to the grammar school of Grantham. While attending Grantham school Newton lived in the house of Mr Clark, an apothecary of that town. According to his own confession he was far from industrious, and stood very low in his class. An unprovoked attack from the boy next above him led to a fight, in which Newton's pluck gave him the victory. This success seems to have led him to greater exertions, and he rose to be the head boy of the school. He displayed very early a taste and an aptitude for mechanical contrivances. He made windmills, water-clocks, kites and dials, and he is said to have invented a four-wheeled carriage which was to be moved by the rider. In 1656 Mr Smith died, and Newton's mother came back with her three children to Woolsthorpe. Newton was then in his fifteenth year, and, as his mother in all probability intended him to be a farmer, he was taken away from school. He was frequently sent on market days to Grantham with an old and trusty servant, who made all the purchases, while Newton spent his time among the books in Mr Clark's house. It soon became apparent to Newton's relatives that they were making a great mistake in attempting to turn him into a farmer, and he was therefore

sent back again to school at Grantham. His mother's brother, William Ayscough, the rector of Burton Coggles, the next parish, was a graduate of Trinity College, Cambridge, and when he found that Newton's mind was wholly devoted to mechanical and mathematical problems, he urged upon Mrs Smith the desirability of sending her son to his own college. He was accordingly admitted a member of Trinity College on the 5th of June 1661, as a subsizar, and was matriculated on the 8th of July. We have scarcely any information as to his attainments when he commenced residence, and very little as to his studies as an undergraduate. It is known that while still at Woolsthorpe Sanderson's *Logic* had been read by him to such purpose that his tutor at Trinity College excused his attendance at a course of lectures on that subject. Newton tells us himself that, when he had purchased a book on astrology at Stourbridge fair, a fair held close to Cambridge, he was unable, on account of his ignorance of trigonometry, to understand a figure of the heavens which was drawn in this book. He therefore bought an English edition of Euclid with an index of propositions at the end of it, and, having turned to two or three which he thought likely to remove his difficulties, he found them so self-evident that he put aside Euclid "as a trifling book," and applied himself to the study of Descartes's *Geometry*. It is reported that in his examination for a scholarship at Trinity, to which he was elected on the 28th of April 1664, he was examined in Euclid by Dr Isaac Barrow, who formed a poor opinion of his knowledge, and that in consequence Newton was led to read the *Elements* again with care, and thereby to form a more favourable estimate of Euclid's merits.

The study of Descartes's *Geometry* seems to have inspired Newton with a love of the subject, and to have introduced him to the higher mathematics. In a small commonplace book, bearing on the seventh page the date of January 1663/1664, there are several articles on angular sections, and the squaring of curves and "crooked lines that may be squared," several calculations about musical notes, geometrical propositions from Francis Vieta and Frans van Schooten, annotations out of Wallis's *Arithmetic of Infinities*, together with observations on refraction, on the grinding of "spherical optic glasses," on the errors of lenses and the method of rectifying them, and on the extraction of all kinds of roots, particularly those "in affected powers." And in this same commonplace book the following entry made by Newton himself, many years afterwards, gives a

further account of the nature of his work during the period when he was an undergraduate: — "July 4, 1699. — By consulting an account of my expenses at Cambridge, in the years 1663 and 1664, I find that in the year 1664 a little before Christmas, I, being then Senior Sophister, bought Schooten's *Miscellanies* and Cartes' *Geometry* (having read this *Geometry* and Oughtred's *Clavis* clean over half a year before), and borrowed Wallis's works, and by consequence made these annotations out of Schooten and Wallis, in winter between the years 1664 and 1665. At such time I found the method of Infinite Series; and in summer 1665, being forced from Cambridge by the plague, I computed the area of the Hyperbola at Boothby, in Lincolnshire, to two and fifty figures by the same method."

That Newton must have begun early to make careful observations of natural phenomena is sufficiently testified by the following remarks about halos, which appear in his *Optics*, book ii. part iv. obs. 13: — "The like Crowns appear sometimes about the moon; for in the beginning of the Year 1664, February 19th, at night, I saw two such Crowns about her. The Diameter of the first or innermost was about three Degrees, and that of the second about five Degrees and an half. Next about the moon was a Circle of white, and next about that the inner Crown, which was of a bluish green within next the white, and of a yellow and red without, and next about these Colours were blue and green on the inside of the Outward Crown, and red on the outside of it. At the same time there appear'd a Halo about 22 Degrees 35' distant from the center of the moon. It was elliptical, and its long Diameter was perpendicular to the Horizon, verging below farthest from the moon."

In January 1665 Newton took the degree of B.A. The persons appointed (in conjunction with the proctors, John Slade of Catharine Hall, and Benjamin Pulleyn of Trinity College, Newton's tutor) to examine the questionists were John Eachard of Catharine Hall and Thomas Gipps of Trinity College. It is a curious accident that we have no information about the respective merits of the candidates for a degree in this year, as the "ordo senioritatis" of the bachelors of arts for the year is omitted in the "Grace Book."

It is supposed that it was in 1665 that the method of fluxions first occurred to Newton's mind. There are several papers still existing in Newton's handwriting bearing dates 1665 and 1666 in which the method is

described, in some of which dotted or dashed letters are used to represent fluxions, and in some of which the method is explained without the use of dotted letters.

Both in 1665 and in 1666 Trinity College was dismissed on account of the plague. On each occasion it was agreed, as appears by entries in the "Conclusion Book" of the college, bearing dates August 7th, 1665, and June 22nd, 1666, and signed by the master of the college, Dr Pearson, that all fellows and scholars who were dismissed on account of the pestilence be allowed one month's commons. Newton must have left college before August 1665, as his name does not appear in the list of those who received extra commons on that occasion, and he tells us himself in the extract from his commonplace book already quoted that he was "forced from Cambridge by the plague" in the summer of that year. He was elected a fellow of his college on the 1st of October 1667. There were nine vacancies, one of which was caused by the death of Abraham Cowley in the previous summer, and the nine successful candidates were all of the same academical standing. A few weeks after his election to a fellowship Newton went to Lincolnshire, and did not return to Cambridge till the February following. On the 16th of March 1668 he took his degree of M.A.

During the years 1666 to 1669 Newton's studies were of a very varied kind. It is known that he purchased prisms and lenses on two or three several occasions, and also chemicals and a furnace, apparently for chemical experiments; but he also employed part of his time on the theory of fluxions and other branches of pure mathematics. He wrote a paper *Analysis per Equationes Numero Terminorum Infinitas*, which he put, probably in June 1669, into the hands of Isaac Barrow (then Lucasian professor of mathematics), at the same time giving him permission to communicate the contents to their common friend John Collins (1624-1683), a mathematician of no mean order. Barrow did this on the 31st of July 1669, but kept the name of the author a secret, and merely told Collins that he was a friend staying at Cambridge, who had a powerful genius for such matters. In a subsequent letter on the 20th of August, Barrow expressed his pleasure at hearing the favourable opinion which Collins had formed of the paper, and added, "the name of the author is Newton, a fellow of our college, and a young man, who is only in his second year since he took the degree of master of arts, and who, with an unparalleled genius

(*eximio quo est acumine*), has made very great progress in this branch of mathematics." Shortly afterwards Barrow resigned his chair, and was instrumental in securing Newton's election as his successor. Newton was elected Lucasian professor on the 29th of October 1669. It was his duty as professor to lecture at least once a week in term time on some portion of geometry, arithmetic, astronomy, geography, optics, statics, or some other mathematical subject, and also for two hours in the week to allow an audience to any student who might come to consult with the professor on any difficulties he had met with. The subject which Newton chose for his lectures was optics. The success which attended his researches in optics must have been great, although the results were known only through his own oral lectures, until he presented an account of them to the Royal Society in the spring of 1672. On the 21st of December 1671 he was proposed as a candidate for admission into the Royal Society by Dr Seth Ward, bishop of Salisbury, and on the 11th of January 1672 he was elected a fellow of the Society. At the meeting at which Newton was elected a description of a reflecting telescope which he had invented was read, and "it was ordered that a letter should be written by the secretary to Mr Newton to acquaint him of his election into the Society, and to thank him for the communication of his telescope, and to assure him that the Society would take care that all right should be done him with respect to this invention."

In his reply to the secretary on the 18th of January 1672, Newton writes: — "I desire that in your next letter you would inform me for what time the society continue their weekly meetings; because, if they continue them for any time, I am purposing them to be considered of and examined an account of a philosophical discovery, which induced me to the making of the said telescope, and which I doubt not but will prove much more grateful than the communication of that instrument being in my judgment the oddest if not the most considerable detection which hath hitherto been made into the operations of nature."

The promise here made was fulfilled in a communication which Newton addressed to Henry Oldenburg, the secretary of the Royal Society, on the 6th of February 1672, and which was read before the society two days afterwards. The whole is printed in No. 80 of the *Philosophical Transactions*.

After explaining his discovery of the composition of white light, he proceeds: — "When I understood this, I left off my aforesaid Glass works; for I saw, that the perfection of Telescopes was hitherto limited, not so much for want of glasses truly figured according to the prescriptions of Optick Authors (which all men have hitherto imagined), as because that Light itself is a *Heterogeneous mixture of differently refrangible Rays.* So that, were a glass so exactly figured as to collect any one sort of rays into one point, it could not collect those also into the same point, which having the same Incidence upon the same Medium are apt to suffer a different refraction. Nay, I wondered, that seeing the difference of refrangibility was so great, as I found it, Telescopes should arrive to that perfection they are now at."

He then points out why "the object-glass of any Telescope cannot collect all the rays which come from one point of an object, so as to make them convene at *focus* in less room than in a circular space, whose diameter is the 50th part of the Diameter of its Aperture: which is an irregularity some hundreds of times greater, than a circularly figured *Lens*, of so small a section as the Object-glasses of long Telescopes are, would cause by the unfitness of its figure, were Light *uniform*." He adds: "This made me take reflections into consideration, and finding them regular, so that the Angle of *Reflection* of all sorts of Rays was equal to their Angle of Incidence; I understood, that by their mediation Optick instruments might be brought to any degree of perfection imaginable, provided a Reflecting substance could be found, which would polish as finely as Glass, and *reflect* as much light, as glass transmits, and the art of communicating to it a Parabolick figure be also attained. But these seemed very great difficulties, and I have almost thought them insuperable, when I further considered, that every irregularity in a reflecting superficies makes the rays stray 5 or 6 times more out of their due course, than the like irregularities in a refracting one; so that a much greater curiosity would be here requisite, than in figuring glasses for Refraction.

"Amidst these thoughts I was forced from *Cambridge* by the Intervening Plague, and it was more than two years before I proceeded further. But then having thought on a tender way of polishing, proper for metall, whereby, as I imagined, the figure also would be corrected to the last; I began to try, what might be effected in this kind, and by degrees so far perfected an

Instrument (in the essential parts of it like that I sent to *London*), by which I could discern Jupiters 4 Concomitants, and shewed them divers times to two others of my acquaintance. I could also discern the Moon-like phase of *Venus*, but not very distinctly, nor without some niceness in disposing the Instrument.

"From that time I was interrupted till this last Autumn, when I made the other. And as that was sensibly better than the first (especially for Day-Objects), so I doubt not, but they will be still brought to a much greater perfection by their endeavours, who, as you inform me, are taking care about it at *London*."

After a remark that microscopes seem as capable of improvement as telescopes, he adds: "I shall now proceed to acquaint you with another more notable difformity in its Rays, wherein the *Origin of Colour* is unfolded: Concerning which I shall lay down the *Doctrine* first, and then, for its examination, give you an instance or two of the Experiments, as a specimen of the rest. The Doctrine you will find comprehended and illustrated in the following propositions: "1. As the Rays of light differ in degrees of Refrangibility, so they also differ in their disposition to exhibit this or that particular colour. Colours are not *Qualifications of Light*, derived from Refractions, or Reflections of natural Bodies (as 'tis generally believed), but *original and connate properties*, which in divers Rays are divers. Some Rays are disposed to exhibit a red colour and no other; some a yellow and no other, some a green and no other, and so of the rest. Nor are there only Rays proper and particular to the more eminent colours, but even to all their intermediate gradations.

"2. To the same degree of Refrangibility ever belongs the same colour, and to the same colour ever belongs the same degree of Refrangibility. The *least Refrangible* Rays are all disposed to exhibit a *Red* colour, and contrarily those Rays, which are disposed to exhibit a *Red* colour, are all the least Refrangible: So the *most refrangible* Rays are all disposed to exhibit a deep *Violet Colour*, and contrarily those which are apt to exhibit such a violet colour are all the most Refrangible.

"And so to all the intermediate colours in a continued series belong intermediate degrees of refrangibility. And this Analogy 'twixt colours, and refrangibility is very precise and strict; the Rays always either exactly agreeing in both, or proportionally disagreeing in both.

“3. The species of colour, and degree of Refrangibility proper to any particular sort of Rays, is not mutable by Refraction, nor by Reflection from natural bodies, nor by any other cause, that I could yet observe. When any one sort of Rays hath been well parted from those of other kinds, it hath afterwards obstinately retained its colour, notwithstanding my utmost endeavours to change it. I have refracted it with Prismes, and reflected it with Bodies, which in Day-light were of other colours; I have intercepted it with the coloured film of Air interceding two compressed plates of glass, transmitted it through coloured Mediums, and through Mediums irradiated with other sorts of Rays, and diversly terminated it; and yet could never produce any new colour out of it. It would by contracting or dilating become more brisk, or faint, and by the loss of many Rays, in some cases very obscure and dark; but I could never see it changed *in specie*.

“Yet seeming transmutations of Colours may be made, where there is any mixture of divers sorts of Rays. For in such mixtures, the component colours appear not, but, by their mutual allaying each other constitute a midling colour.”

Further on, after some remarks on the subject of compound colours, be says: “I might add more instances of this nature, but I shall conclude with this general one, that the Colours of all natural Bodies have no other origin than this, that they are variously qualified to reflect one sort of light in greater plenty then another. And this I have experimented in a dark Room by illuminating those bodies with uncompounded light of divers colours. For by that means any body may be made to appear of any colour. They have there no appropriate colour, but ever appear of the colour of the light cast upon them, but yet with this difference, that they are most brisk and vivid in the light of their own day-light colour. Minium appeareth there of any colour indifferently, with which ’tis illustrated, jut yet most luminous in red, and so *Bise* appeareth indifferently of any colour with which ’tis illustrated, but yet most luminous in blew. And therefore *minium* reflecteth Rays of any colour, but most copiously those indued with red; and consequently when illustrated with day-light, that is with all sorts of Rays promiscuously blended, those qualified with red shall abound most in the reflected light, and by their prevalence cause it to appear of that colour. And for the same reason *Bise*, reflecting blew most copiously, shall appear blew by the excess of those Rays in its reflected light; and the like of other

bodies. And that this is the intire and adequate cause of their colours, is manifest, because they have no power to change or alter the colours of any sort of Rays incident apart, but put on all colours indifferently, with which they are inlightened.

* * * * *

"Reviewing what I have written, I see the discourse it self will lead to divers Experiments sufficient for its examination: And therefore I shall not trouble you further, than to describe one of those, which I have already insinuated.

"In a darkened Room make a hole in the shut of a window whose diameter may conveniently be about a third part of an inch, to admit a convenient quantity of the Suns light: And there place a clear and colourless Prisme, to refract the entring light towards the further part of the Room, which, as I said, will thereby be diffused into an oblong coloured Image. Then place a Lens of about three foot radius (suppose a broad Object-glass of a three foot Telescope), at the distance of about four or five foot from thence, through which all those colours may at once be transmitted, and made by its Refraction to convene at a further distance of about ten or twelve feet. If at that distance you intercept this light with a sheet of white paper, you will see the colours converted into whiteness again by being mingled.

"But it is requisite, that the *Prisme* and *Lens* be placed steddy, and that the paper, on which the colours are cast be moved to and fro; for, by such motion, you will not only find, at what distance the whiteness is most perfect but also see, how the colours gradually convene, and vanish into whiteness, and afterwards having crossed one another in that place where they compound Whiteness, are again dissipated and severed, and in an inverted order retain the same colours, which they had before they entered the composition. You may also see, that, if any of the Colours at the Lens be intercepted, the Whiteness will be changed into the other colours. And therefore, that the composition of whiteness be perfect, care must be taken, that none of the colours fall besides the *Lens*."

He concludes his communication with the words: "This, I conceive, is enough for an Introduction to Experiments of this kind: which if any of the

R. Society shall be so curious as to prosecute, I should be very glad to be informed with what success: That, if any thing seem to be defective, or to thwart this relation, I may have an opportunity of giving further direction about it, or of acknowledging my errors, if I have committed any."

The publication of these discoveries led to a series of controversies which lasted for several years, in which Newton had to contend with the eminent English natural philosopher Robert Hooke; Lucas, mathematical professor at Liége; Linus, a physician in Liége, and many others. Some of his opponents denied the truth of his experiments, refusing to believe in the existence of the spectrum. Others criticized the experiments, saying that the length of the spectrum was never more than three and a half times the breadth, whereas Newton found it to be five times the breadth. It appears that Newton made the mistake of supposing that all prisms would give a spectrum of exactly the same length; the objections of his opponents led him to measure carefully the lengths of spectra formed by prisms of different angles and of different refractive indices; and it seems strange that he was not led thereby to the discovery of the different dispersive powers of different refractive substances.

Newton carried on the discussion with the objectors with great courtesy and patience, but the amount of pain which these perpetual discussions gave to his sensitive mind may be estimated from the fact of his writing on the 18th of November 1676 to Oldenburg: — "I promised to send you an answer to Mr Lucas this next Tuesday, but I find I shall scarce finish what I have designed, so as to get a copy taken of it by that time, and therefore I beg your patience a week longer. I see I have made myself a slave to philosophy, but if I get free of Mr Lucas's business, I will resolutely bid adieu to it eternally, excepting what I do for my private satisfaction, or leave to come out after me; for I see a man must either resolve to put out nothing new, or to become a slave to defend it."

It was a fortunate circumstance that these disputes did not so thoroughly damp Newton's ardour as he at the time felt they would. He subsequently published many papers in the *Philosophical Transactions* on various parts of the science of optics, and, although some of his views have been found to be erroneous, and are now almost universally rejected, his investigations led to discoveries which are of permanent value. He succeeded in explaining the colour of thin and of thick plates, and the inflexion of light, and he

wrote on double refraction, polarization and binocular vision. He also invented a reflecting sextant for observing the distance between the moon and the fixed stars, — the same in every essential as the instrument which is still in everyday use at sea under the name of Hadley's quadrant. This discovery was communicated by him to Edmund Halley in 1700, but was not published, or communicated to the Royal Society, till after Newton's death, when a description of it was found among his papers.

In March 1673 Newton took a prominent part in a dispute in the university. The public oratorship fell vacant, and a contest arose between the heads of the colleges and the members of the senate as to the mode of electing to the office. The heads claimed the right of nominating two persons, one of whom was to be elected by the senate. The senate insisted that the proper mode was by an open election. The duke of Buckingham, who was the chancellor of the university, endeavoured to effect a compromise which, he says, "I hope may for the present satisfy both sides. I propose that the heads may for this time nominate and the body comply, yet interposing (if they think fit) a protestation concerning their plea that this election may not hereafter pass for a decisive precedent in prejudice of their claim," and, "whereas I understand that the whole university has chiefly consideration for Dr Henry Paman of St John's and Mr Craven of Trinity College, I do recommend them both to be nominated." The heads, however, nominated Dr Paman and Ralph Sanderson of St John's, and the next day one hundred and twenty-one members of the senate recorded their votes for Craven and ninety-eight for Paman. On the morning of the election a protest in which Newton's name appeared was read, and entered in the Regent House. But the vice-chancellor admitted Paman the same morning, and so ended the first contest of a non-scientific character in which Newton took part.

On the 8th of March 1673 Newton wrote to Oldenburg, the secretary of the Royal Society: "Sir, I desire that you will procure that I may be put out from being any longer Fellow of the Royal Society: for though I honour that body, yet since I see I shall neither profit them, nor (by reason of this distance) can partake of the advantage of their assemblies, I desire to withdraw."

Oldenburg must have replied to this by an offer to apply to the Society to excuse Newton the weekly payments, as in a letter of Newton's to

Oldenburg, dated the 23rd of June 1673, he says, “For your proffer about my quarterly payments, I thank you, but I would not have you trouble yourself to get them excused, if you have not done it already.” Nothing further seems to have been done in the matter until the 28th of January 1675, when Oldenburg informed “the Society that Mr Newton is now in such circumstances that he desires to be excused from the weekly payments.” Upon this “it was agreed to by the council that he be dispensed with, as several others are.” On the 18th of February 1675 Newton was formally admitted into the Society. The most probable explanation of the cause why Newton wished to be excused from these payments is to be found in the fact that, as he was not in holy orders, his fellowship at Trinity College would lapse in the autumn of 1675. It is true that the loss to his income which this would have caused was obviated by a patent from the crown in April 1675, allowing him as Lucasian professor to retain his fellowship without the obligation of taking holy orders. This must have relieved Newton’s mind from a great deal of anxiety about pecuniary matters, as we find him in November 1676 subscribing £40 towards the building of the new library of Trinity College.

It is supposed that it was at Woolsthorpe in the summer of 1666 that Newton’s thoughts were directed to the subject of gravity. Voltaire is the authority for the well-known anecdote about the apple. He had his information from Newton’s favourite niece Catharine Barton, who married Conduitt, a fellow of the Royal Society, and one of Newton’s intimate friends. How much truth there is in what is a plausible and a favourite story can never be known, but it is certain that tradition marked a tree as that from which the apple fell, till 1820, when, owing to decay, the tree was cut down and its wood carefully preserved. Johann Kepler had proved by an elaborate series of measurements that each planet revolves in an elliptical orbit round the sun, whose centre occupies one of the foci of the orbit, that the radius vector of each planet drawn from the sun describes equal areas in equal times, and that the squares of the periodic times of the planets are in the same proportion as the cubes of their mean distances from the sun. The fact that heavy bodies have always a tendency to fall to the earth, no matter at what height they are placed above the earth’s surface, seems to have led Newton to conjecture that it was possible that the same tendency to fall to the earth was the cause by which the moon was retained in its orbit round

the earth. Newton, by calculating from Kepler's laws, and supposing the orbits of the planets to be circles round the sun in the centre, had already proved that the force of the sun acting upon the different planets must vary as the inverse square of the distances of the planets from the sun. He therefore was led to inquire whether, if the earth's attraction extended to the moon, the force at that distance would be of the exact magnitude necessary to retain the moon in its orbit. He found that the moon by her motion in her orbit was deflected from the tangent in every minute of time through a space of thirteen feet. But by observing the distance through which a body would fall in one second of time at the earth's surface, and by calculating from that on the supposition of the force diminishing in the ratio of the inverse square of the distance, he found that the earth's attraction at the distance of the moon would draw a body through 15 ft. in 1 min. Newton regarded the discrepancy between the results as a proof of the inaccuracy of his conjecture, and "laid aside at that time any further thoughts of this matter." But in 1679 a controversy between Hooke and Newton, about the form of the path of a body falling from a height, taking the motion of the earth round its axis into consideration, led Newton again to revert to his former conjectures on the moon. The measure of the earth, which had hitherto been accepted by geographers and navigators, was based on the very rough estimate that the length of a degree of latitude of the earth's surface measured along a meridian was 60 m. More accurate estimates had been made by R. Norwood and W. Snell, and more recently by P. Picard. At a meeting of the Royal Society on the 11th of January 1672, Oldenburg the secretary read a letter from Paris describing the method followed by Picard in measuring a degree, and specifically stating the precise length that he calculated it to be. It is probable that Newton had become acquainted with this measurement of Picard's, and that he was therefore led to make use of it when his thoughts were redirected to the subject. This estimate of the earth's magnitude, giving 69.1 m. to 1°, made the two results, the discrepancy between which Newton had regarded as a disproof of his conjecture, to agree so exactly that he now regarded his conjecture as fully established.

In January 1684 Sir Christopher Wren, Halley and Hooke were led to discuss the law of gravity, and, although probably they all agreed in the truth of the law of the inverse square, yet this truth was not looked upon as

established. It appears that Hooke professed to have a solution of the problem of the path of a body moving round a centre of force attracting as the inverse square of the distance; but Halley, finding, after a delay of some months, that Hooke "had not been so good as his word" in showing his solution to Wren, started in the month of August 1684 for Cambridge to consult Newton on the subject. Without mentioning the speculations which had been made, he asked Newton what would be the curve described by a planet round the sun on the assumption that the sun's force diminished as the square of the distance. Newton replied promptly, "an ellipse," and on being questioned by Halley as to the reason for his answer he replied, "Why, I have calculated it." He could not, however, put his hand upon his calculation, but he promised to send it to Halley. After the latter had left Cambridge, Newton set to work to reproduce the calculation. After making a mistake and producing a different result he corrected his work and obtained his former result.

In the following November Newton redeemed his promise to Halley by sending him, by the hand of Mr Paget, one of the fellows of his own college, and at that time mathematical master of Christ's Hospital, a copy of his demonstration; and very soon afterwards Halley paid another visit to Cambridge to confer with Newton about the problem; and on his return to London on the 10th of December 1684, he informed the Royal Society "that he had lately seen Mr Newton at Cambridge, who had showed him a curious treatise *De Motu*," which at Halley's desire he promised to send to the Society to be entered upon their register. "Mr Halley was desired to put Mr Newton in mind of his promise for the securing this invention to himself, till such time as he could be at leisure to publish it," and Paget was desired to join with Halley in urging Newton to do so. By the middle of February Newton had sent his paper to Aston, one of the secretaries of the Society, and in a letter to Aston dated the 23rd of February 1685, we find Newton thanking him for "having entered on the register his notions about motion." This treatise *De Motu* was the germ of the *Principia*, and was obviously meant to be a short account of what that work was intended to embrace. It occupies twenty-four octavo pages, and consists of four theorems and seven problems, some of which are identical with some of the most important propositions of the second and third sections of the first book of the *Principia*.

The years 1685 and 1686 will ever be memorable in the history of science. It was in them that Newton composed almost the whole of his great work. During this period Newton had a very extensive correspondence with John Flamsteed, who was then the astronomer-royal. Many of the letters are lost, but it is clear from one of Newton's, dated the 19th of September 1685, that he had received many useful communications from Flamsteed, and especially regarding Saturn, "whose orbit, as defined by Kepler," Newton "found too little for the sesquialterate proportions." In the other letters written in 1685 and 1686 he applies to Flamsteed for information respecting the orbits of the satellites of Jupiter and Saturn, respecting the rise and fall of the spring and neap tides at the solstices and the equinoxes, respecting the flattening of Jupiter at the poles (which, if certain, he says, would conduce much to the stating the reasons of the precession of the equinoxes), and respecting the difference between the observed places of Saturn and those computed from Kepler's tables about the time of his conjunction with Jupiter. On this last point the information supplied by Flamsteed was peculiarly gratifying to Newton; and it is obvious from the language of this part of his letter that he had still doubts of the universal application of the sesquialteral proportion. "Your information," he says, "about the errors of Kepler's tables for Jupiter and Saturn has eased me of several scruples. I was apt to suspect there might be some cause or other unknown to me which might disturb the sesquialteral proportions, for the influences of the planets one upon another seemed not great enough, though I imagined Jupiter's influence greater than your numbers determine it. It would add to my satisfaction if you would be pleased to let me know the long diameters of the orbits of Jupiter and Saturn, assigned by yourself and Mr Halley in your new tables, that I may see how the sesquialteral proportion fills the heavens, together with another small proportion which must be allowed for."

Upon Newton's return from Lincolnshire in the beginning of April 1685, he seems to have devoted himself to the preparation of his work. In the spring he had determined the attractions of masses, and thus completed the law of universal gravitation. In the summer he had finished the second book of the *Principia*, the first book being the treatise *De Motu*, which he had enlarged and completed. Excepting in the correspondence with Flamsteed we hear nothing more of the preparation of the *Principia* until the 21st of

April 1686, when Halley read to the Royal Society his *Discourse concerning Gravity and its Properties*, in which he states "that his worthy countryman Mr Isaac Newton has an incomparable treatise of motion almost ready for the press," and that the law of the inverse square "is the principle on which Mr Newton has made out all the phenomena of the celestial motions so easily and naturally, that its truth is past dispute." At the next meeting of the Society, on the 28th of April, "Dr Vincent presented to the Society a manuscript treatise entitled *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, and dedicated to the Society by Mr Isaac Newton." Although this manuscript contained only the first book, yet such was the confidence the Society placed in the author that an order was given "that a letter of thanks be written to Mr Newton; and that the printing of his book be referred to the consideration of the council; and that in the meantime the book be put into the hands of Mr Halley, to make a report thereof to the council." Although there could be no doubt as to the intention of this report, yet no step was taken towards the publication of the work. At the next meeting of the Society, on the 19th of May, some dissatisfaction seems to have been expressed at the delay, as it was ordered "that Mr Newton's work should be printed forthwith in quarto, and that a letter should be written to him to signify the Society's resolutions, and to desire his opinion as to the print, volume, cuts and so forth." Three days afterwards Halley communicated the resolution to Newton, and stated to him that the printing was to be at the charge of the Society. At the next meeting of the council, on the 2nd of June, it was again ordered "that Mr Newton's book be printed," but, instead of sanctioning the resolution of the general meeting to print it at their charge, they added "that Mr Halley undertake the business of looking after it, and printing it at his own charge, which he engaged to do."

In order to explain to Newton the cause of the delay, Halley in his letter of the 22nd of May alleges that it arose from "the president's attendance on the king, and the absence of the vice-presidents, whom the good weather had drawn out of town"; but there is reason to believe that this was not the true cause, and that the unwillingness of the council to undertake the publication arose from the state of the finances of the Society. Halley certainly deserves the gratitude of posterity for undertaking the publication of the work at a very considerable pecuniary risk to himself. In the same letter Halley found it necessary to inform Newton of Hooke's conduct when

the manuscript of the *Principia* was presented to the Society. Sir John Hoskyns was in the chair when Dr Vincent presented the manuscript, and passed a high encomium on the novelty and dignity of the subject. Hooke was offended because Sir John did not mention what he had told him of his own discovery. Halley only communicated to Newton the fact "that Hooke had some pretensions to the invention of the rule for the decrease of gravity being reciprocally as the squares of the distances from the centre," acknowledging at the same time that, though Newton had the notion from him, "yet the demonstration of the curves generated thereby belonged wholly to Newton." "How much of this," Halley adds, "is so, you know best, so likewise what you have to do in this matter; only Mr Hooke seems to expect you should make some mention of him in the preface, which 'tis possible you may see reason to prefix. I must beg your pardon that 'tis I that send you this ungrateful account; but I thought it my duty to let you know it, so that you might act accordingly, being in myself fully satisfied that nothing but the greatest candour imaginable is to be expected from a person who has of all men the least need to borrow reputation."

In thus appealing to Newton's candour, Halley obviously wished that some acknowledgment of Hooke should be made. He knew indeed that before Newton had announced the inverse law Hooke and Wren and himself had spoken of it and discussed it, and therefore justice demanded that, though none of them had given a demonstration of the law, Hooke especially should receive credit for having maintained it as a truth of which he was seeking the demonstration. On the 20th of June 1686 Newton wrote to Halley the following letter: — "Sir, — In order to let you know the case between Mr Hooke and me, I give you an account of what passed between us in our letters, so far as I could remember; for 'tis long since they were writ, and I do not know that I have seen them since. I am almost confident by circumstances, that Sir Chr. Wren knew the duplicate proportion when I gave him a visit; and then Mr Hooke (by his book *Cometa* written afterwards) will prove the last of us three that knew it. I intended in this letter to let you understand the case fully; but it being a frivolous business, I shall content myself to give you the heads of it in short, viz. that I never extended the duplicate proportion lower than to the superficies of the earth, and before a certain demonstration I found the last year, have suspected it did not reach accurately enough down so low; and therefore in the doctrine

of projectiles never used it nor considered the motions of the heavens; and consequently Mr Hooke could not from my letters, which were about projectiles and the regions descending hence to the centre, conclude me ignorant of the theory of the heavens. That what he told me of the duplicate proportion was erroneous, namely, that it reached down from hence to the centre of the earth.

"That it is not candid to require me now to confess myself, in print, then ignorant of the duplicate proportion in the heavens; for no other reason, but because he had told it me in the case of projectiles, and so upon mistaken grounds accused me of that ignorance. That in my answer to his first letter I refused his correspondence, told him I had laid philosophy aside, sent him only the experiment of projectiles (rather shortly hinted than carefully described), in compliment to sweeten my answer, expected to hear no further from him; could scarce persuade myself to answer his second letter; did not answer his third, was upon other things; thought no further of philosophical matters than his letters put me upon it, and therefore may be allowed not to have had my thoughts of that kind about me so well at that time. That by the same reason he concludes me then ignorant of the rest of the duplicate proportion, he may as well conclude me ignorant of the rest of that theory I had read before in his books. That in one of my papers writ (I cannot say in what year, but I am sure some time before I had any correspondence with Mr Oldenburg, and that's above fifteen years ago), the proportion of the forces of the planets from the sun, reciprocally duplicate of their distances from him, is expressed, and the proportion of our gravity to the moon's *conatus recedendi a centro terrae* is calculated, though not accurately enough. That when Hugenius put out his *Horol. Oscil.*, a copy being presented to me, in my letter of thanks to him I gave those rules in the end thereof a particular commendation for their usefulness in Philosophy, and added out of my aforesaid paper an instance of their usefulness, in comparing the forces of the moon from the earth, and earth from the sun; in determining a problem about the moon's phase, and putting a limit to the sun's parallax, which shews that I had then my eye upon comparing the forces of the planets arising from their circular motion, and understood it; so that a while after, when Mr Hooke propounded the problem solemnly, in the end of his attempt to prove the motion of the earth, if I had not known the duplicate proportion before, I could not but have found it now. Between

ten and eleven years ago there was an hypothesis of mine registered in your books, wherein I hinted a cause of gravity towards the earth, sun and planets, with the dependence of the celestial motions thereon; in which the proportion of the decrease of gravity from the superficies of the planet (though for brevity's sake not there expressed) can be no other than reciprocally duplicate of the distance from the centre. And I hope I shall not be urged to declare, in print, that I understood not the obvious mathematical condition of my own hypothesis. But, grant I received it afterwards from Mr Hooke, yet have I as great a right to it as to the ellipsis. For as Kepler knew the orb to be not circular but oval, and guessed it to be elliptical, so Mr Hooke, without knowing what I have found out since his letters to me, can know no more, but that the proportion was duplicate *quam proxime* at great distances from the centre, and only guessed it to be so accurately, and guessed amiss in extending that proportion down to the very centre, whereas Kepler guessed right at the ellipsis. And so Mr Hooke found less of the proportion than Kepler of the ellipsis.

"There is so strong an objection against the accurateness of this proportion, that without my demonstrations, to which Mr Hooke is yet a stranger, it cannot be believed by a judicious philosopher to be any where accurate. And so, in stating this business, I do pretend to have done as much for the proportion as for the ellipsis, and to have as much right to the one from Mr Hooke and all men, as to the other from Kepler; and therefore on this account also he must at least moderate his pretences.

"The proof you sent me I like very well. I designed the whole to consist of three books; the second was finished last summer being short, and only wants transcribing, and drawing the cuts fairly. Some new propositions I have since thought on, which I can as well let alone. The third wants the theory of comets. In autumn last I spent two months in calculations to no purpose for want of a good method, which made me afterwards return to the first book, and enlarge it with divers propositions, some relating to comets, others to other things, found put last winter. The third I now design to suppress. Philosophy is such an impertinently litigious lady, that a man has as good be engaged in lawsuits, as have to do with her. I found it so formerly, and now I am no sooner come near her again, but she gives me warning. The two first books, without the third, will not so well bear the title of *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*; and therefore I had

altered it to this, *De Motu Corporum libri duo*. “But, upon second thoughts, I retain the former title. ‘Twill help the sale of the book, which I ought not to diminish now ’tis yours. The articles are, with the largest, to be called by that name; if you please you may change the word to sections, though it be not material. In the first page, I have struck out the words ‘uti posthoc docebitur,’ as referring to the third book; which is all at present, from your affectionate friend, and humble servant, “Is. Newton.”

On the 29th of June 1686 Halley wrote to Newton:— “I am heartily sorry that in this matter, wherein all mankind ought to acknowledge their obligations to you, you should meet with anything that should give you unquiet”; and then, after an account of Hooke’s claim to the discovery as made at a meeting of the Royal Society, he concludes: — “But I found that they were all of opinion that nothing thereof appearing in print, nor on the books of the Society, you ought to be considered as the inventor. And if in truth he knew it before you, he ought not to blame any but himself for having taken no more care to secure a discovery, which he puts so much value on. What application he has made in private, I know not; but I am sure that the Society have a very great satisfaction, in the honour you do them, by the dedication of so worthy a treatise. Sir, I must now again beg you, not to let your resentments run so high, as to deprive us of your third book, wherein the application of your mathematical doctrine to the theory of comets and several curious experiments, which, as I guess by what you write, ought to compose it, will undoubtedly render it acceptable to those, who will call themselves Philosophers without Mathematics, which are much the greater number. Now you approve of the character and paper, I will push on the edition vigorously. I have sometimes had thoughts of having the cuts neatly done in wood, so as to stand in the page with the demonstrations. It will be more convenient, and not much more charge. If it please you to have it so, I will try how well it can be done; otherwise I will have them in somewhat a larger size than those you have sent up. — I am, Sir, your most affectionate humble servant.

E. Halley.”

On the 30th of June 1686 the president was desired by the council to license Newton’s book, entitled *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

On the 14th of July 1686 Newton wrote to Halley approving of his proposal to introduce woodcuts among the letterpress, stating clearly the different things which he had from Hooke, and adding, “And now having sincerely told you the case between Mr Hooke and me, I hope I shall be free for the future from the prejudice of his letters. I have considered how best to compose the present dispute, and I think it may be done by the inclosed scholium to the fourth proposition.” This scholium was— “The inverse law of gravity holds in all the celestial motions, as was discovered also independently by my countrymen Wren, Hooke and Halley.” After this letter of Newton’s the printing of the *Principia* was begun. The second book, though ready for the press in the autumn of 1686, was not sent to the printers until March 1687. The third book was presented to the Society on the 6th of April 1687, and the whole work published about midsummer in that year. It was dedicated to the Royal Society, and to it was prefixed a set of Latin hexameters addressed by Halley to the author. The work, as might have been expected, caused a great deal of excitement throughout Europe, and the whole of the impression was very soon sold. In 1691 a copy of the *Principia* was hardly to be procured.

While Newton was writing the second and third books of the *Principia*, a very important event occurred at Cambridge which had the effect of bringing him before the public in a new light. James II. had already, in 1686, in open violation of the law, conferred the deanery of Christ Church at Oxford on John Massey, a person whose sole qualification was that he was a member of the Church of Rome; and the king had boasted to the pope’s legate that “what he had done at Oxford would very soon be done at Cambridge.” In accordance with this boast, in February 1687 he issued a mandate directing that Father Alban Francis, a Benedictine monk, should be admitted a master of arts of the university of Cambridge, without taking the oaths of allegiance and supremacy. Upon receiving the mandamus Dr Pechell, the master of Magdalene College, who was vice-chancellor, sent a messenger to the duke of Albemarle, the chancellor, to request him to get the mandamus recalled; and the registrary and the bedells waited upon Francis to offer him instant admission to the degree if only he would take the necessary oaths. Both the king and the monk were inexorable. The court and the university were thus placed in open collision. A menacing letter was despatched by Sunderland to shake the firmness of the university; but,

though humble and respectful explanations were returned, the university showed no sign of compliance, nor even of a desire to suggest a compromise. In consequence the vice-chancellor and deputies from the senate were summoned to appear before the High Commission Court at Westminster. Newton was one of the eight deputies appointed by the senate for this purpose. The deputies, before starting for London, held a meeting to prepare their case for the court. A compromise which was put forward by one of them was stoutly and successfully resisted by Newton, and on the 21st of April the deputation, with their case carefully prepared, appeared before the court. Lord Jeffreys presided at the board. The deputation appeared as a matter of course before the commissioners, and were dismissed. On the 27th of April they gave in their plea. On the 7th of May it was discussed, and feebly defended by the vice-chancellor. The deputies maintained that in the late reign several royal mandates had been withdrawn, and that no degree had ever been conferred without the oaths having been previously taken. Jeffreys spoke with his accustomed insolence to the vice-chancellor, silenced the other deputies when they offered to speak, and ordered them out of court. When recalled the deputies were reprimanded, and Pechell was deprived of his office as vice-chancellor, and of his emoluments as master of Magdalene. Newton returned to Trinity College to complete the *Principia*. While thus occupied he had an extensive correspondence with Halley, a very great part of which is extant. The following letter from Halley, dated London, July 5th, 1687, announcing the completion of the *Principia*, is of peculiar interest: — “I have at length brought your book to an end, and hope it will please you. The last errata came just in time to be inserted. I will present from you the book you desire to the Royal Society, Mr Boyle, Mr Paget, Mr Flamsteed, and if there be any else in town that you design to gratify that way; and I have sent you to bestow on your friends in the University 20 copies, which I entreat you to accept. In the same parcel you will receive 40 more, which having no acquaintance in Cambridge, I must entreat you to put into the hands of one or more of your ablest booksellers to dispose of them. I intend the price of them, bound in calves’ leather, and lettered, to be 9 shillings here. Those I send you I value in quires at 6 shillings, to take my money as they are sold, or at 5$^{sh.}$ for ready, or else at some short time; for I am satisfied there is no

dealing in books without interesting the booksellers; and I am contented to let them go halves with me, rather than have your excellent work smothered by their combinations. I hope you will not repent you of the pains you have taken in so laudable a piece, so much to your own and the nation's credit, but rather, after you shall have a little diverted yourself with other studies, that you will resume those contemplations wherein you had so great success, and attempt the perfection of the lunar theory, which will be of prodigious use in navigation, as well as of profound and public speculation. . . . You will receive a box from me on Thursday next by the waggon, that starts from town to-morrow."

In 1692 and 1693 Newton seems to have had a serious illness, the nature of which has given rise to very considerable dispute. In a letter dated the 13th of September 1693, addressed to Samuel Pepys, he writes: — "Some time after Mr Millington had delivered your message, he pressed me to see you the next time I went to London. I was averse, but upon his pressing consented, before I considered what I did, for I am extremely troubled at the embroilment I am in, and have neither ate nor slept well this twelvemonth, nor have my former consistency of mind. I never designed to get any thing by your interest, nor by King James's favour, but am now sensible that I must withdraw from your acquaintance, and see neither you nor the rest of my friends any more, if I may but have them quietly. I beg your pardon for saying I would see you again, and rest your most humble and obedient servant."

And in a letter written to John Locke in reply to one of his about the second edition of his book, and dated the 15th of October 1693, Newton wrote: — "The last winter, by sleeping too often by my fire, I got an ill habit of sleeping; and a distemper, which this summer has been epidemical, put me farther out of order, so that when I wrote to you, I had not slept an hour a night for a fortnight together, and for five days together not a wink. I remember I wrote to you, but what I said of your book I remember not. If you please to send me a transcript of that passage, I will give you an account of it if I can."

The loss of sleep to a person of Newton's temperament, whose mind was never at rest, and at times so wholly engrossed in his scientific pursuits that he even neglected to take food, must necessarily have led to a very great deal of nervous excitability. It is not astonishing that rumours got abroad

that there was a danger of his mind giving way, or, according to a report which was believed at the time, that it had actually done so. Pepys must have heard such rumours, as in a letter to his friend Millington, the tutor of Magdalene College at Cambridge, dated the 26th of September 1693, he wrote: — "I must acknowledge myself not at the ease I would be glad to be at in reference to excellent Mr Newton; concerning whom (methinks) your answer labours under the same kind of restraint which (to tell you the truth) my asking did. For I was loth at first dash to tell you that I had lately received a letter from him so surprising to me for the inconsistency of every part of it, as to be put into great disorder by it, from the concernment I have for him, lest it should arise from that which of all mankind I should least dread from him and most lament for — I mean a discomposure in head, or mind, or both. Let me, therefore, beg you, Sir, having now told you the true ground of the trouble I lately gave you, to let me know the very truth of the matter, as far at least as comes within your knowledge."

On the 30th of September 1693 Millington wrote to Pepys that he had been to look for Newton some time before, but that "he was out of town, and since," he says, "I have not seen him, till upon the 28th I met him at Huntingdon, where, upon his own accord, and before I had time to ask him any question, he told me that he had writt to you a very odd letter, at which he was much concerned; added, that it was in a distemper that much seized his head, and that kept him awake for above five nights together, which upon occasion he desired I would represent to you, and beg your pardon, he being very much ashamed he should be so rude to a person for whom he hath so great an honour. He is now very well, and though I fear he is under some small degree of melancholy, yet I think there is no reason to suspect it hath at all touched his understanding, and I hope never will; and so I am sure all ought to wish that love learning or the honour of our nation, which it is a sign how much it is looked after, when such a person as Mr Newton lyes so neglected by those in power."

The illness of Newton was very much exaggerated by foreign contemporary writers. In a manuscript journal of Huygens is to be found an entry: — "29 Maj. 1694. — Narravit mihi D. Colm Scotus virum celeberrimum ac summum geometram Is. Neutonum in phrenesin incidisse abhinc anno et sex mensibus. An ex nimia studii assiduitate, an dolore infortunii, quod incendio laboratorium chymicum et scripta quaedam

amiserat? Cum ad Archiepiscopum Cantabrigiensem venisset, ea locutum, quae alienationem mentis indicarent. Deinde ab amicis curam ejus susceptam, domoque clauso remedia volenti nolenti adhibita, quibus jam sanitatem recuperavit ut jam rursus librum suum Principiorum Philosophiae Mathematicorum intelligere incipiat."

Huygens, in a letter dated the 8th of June 1694, wrote to Leibnitz, "I do not know if you are acquainted with the accident which has happened to the good Mr Newton, namely, that he has had an attack of phrenitis, which lasted eighteen months, and of which they say his friends have cured him by means of remedies, and keeping him shut up." To which Leibnitz, in a letter dated the 22nd of June, replied, "I am very glad that I received information of the cure of Mr Newton at the same time that I first heard of his illness, which doubtless must have been very alarming."

The active part which Newton had taken in defending the legal privileges of the university against the encroachments of the crown had probably at least equal weight with his scientific reputation when his friends chose him as a candidate for a seat in parliament as one of the representatives of the university. The other candidates were Sir Robert Sawyer and Mr Finch. Sir Robert stood at the head of the poll with 125 votes, Newton next with 122 and Mr Finch was last with 117 votes. Newton retained his seat only about a year, from January 1689 till the dissolution of the Convention Parliament in February 1690. During this time Newton does not appear to have taken part in any of the debates in the House; but he was not neglectful of his duties as a member. On the 30th of April 1689 he moved for leave to bring in a bill to settle the charters and privileges of the university of Cambridge, just as Sir Thomas Clarges did for Oxford at the same time, and he wrote a series of letters to Dr Lovel, the vice-chancellor of the university, on points which affected the interests of the university and its members.

Some of the members of the university who had lately sworn allegiance to James had some difficulty in swearing allegiance to his successor. On the 12th of February 1689, the day of the coronation of William and Mary, Newton intimated to the vice-chancellor that he would soon receive an order to proclaim them at Cambridge. He enclosed a form of the proclamation, and expressed a hearty "wish that the university would so compose themselves as to perform the solemnity with a reasonable decorum."

During his residence in London Newton had made the acquaintance of John Locke. Locke had taken a very great interest in the new theories of the *Principia*. He was one of a number of Newton's friends who began to be uneasy and dissatisfied at seeing the most eminent scientific man of his age left to depend upon the meagre emoluments of a college fellowship and a professorship.

At one time Newton's friends had nearly succeeded in getting him appointed provost of King's College, Cambridge, but the college offered a successful resistance on the ground that the appointment would be illegal, as the statutes required that the provost should be in priest's orders. Charles Montague, who was afterwards earl of Halifax, was a fellow of Trinity College, and was a very intimate friend of Newton; and it was on his influence that Newton relied in the main for promotion to some post of honour and emolument. His hopes, however, were blighted by long delay. In one of his letters to Locke at the beginning of 1692, when Montague, Lord Monmouth and Locke were exerting themselves to obtain some appointment for him, Newton wrote that he was "fully convinced that Mr Montague, upon an old grudge which he thought had been worn out, was false to him." Newton was now in his fifty-fifth year, and whilst those of his own standing at the university had been appointed to high posts in church or state, he still remained without any mark of national gratitude. But this blot upon the English name was at last removed by Montague in 1694, when he was appointed chancellor of the exchequer. He had previously consulted Newton upon the subject of the recoinage, and on the opportunity occurring he appointed Newton to the post of warden of the mint. In a letter to Newton announcing the news, Montague writes: "I am very glad that at last I can give you a good proof of my friendship, and the esteem the king has of your merits. Mr Overton, the warden of the mint, is made one of the Commissioners of Customs, and the king has promised me to make Mr Newton warden of the mint. The office is the most proper for you. Tis the chief office in the mint: 'tis worth five or six hundred pounds per annum, and has not too much business to require more attendance than you can spare."

This letter must have convinced Newton of the sincerity of Montague's good intentions towards him; we find them living as friends on the most intimate terms until Halifax's death in 1715.

Newton's chemical and mathematical knowledge proved of great use in carrying out the recoinage. This was completed in about two years. In 1697 Newton was appointed to the mastership of the mint, a post worth between £1200 and £1500 per annum. While he held this office, Newton drew up a very extensive table of assays of foreign coins, and composed an official report on the coinage.

Up to the time of the publication of the *Principia* in 1687 the method of fluxions which had been invented by Newton, and had been of great assistance to him in his mathematical investigations, was still, except to Newton and his friends, a secret. One of the most important rules of the method forms the second lemma of the second book of the *Principia*. Though this new and powerful method was of great help to Newton in his work, he did not exhibit it in the results. He was aware that the well-known geometrical methods of the ancients would clothe his new creations in a garb which would appear less strange and uncouth to those not familiar with the new method. The *Principia* gives no information on the subject of the notation adopted in the new calculus, and it was not until 1693 that it was communicated to the scientific world in the second volume of Dr Wallis's works.

Newton's admirers in Holland had informed Dr Wallis that Newton's method of fluxions passed there under the name of Leibnitz's *Calculus Differentialis*. It was therefore thought necessary that an early opportunity should be taken of asserting Newton's claim to be the inventor of the method of fluxions, and this was the reason for this method first appearing in Wallis's works. A further account of the method was given in the first edition of Newton's *Optics*, which appeared in 1704. To this work were added two treatises, entitled *Tractatus duo de speciebus et magnitudine figurarum curvilinearum*, the one bearing the title *Tractatus de Quadratura Curvarum*, and the other *Enumeratio linearum tertii ordinis*. The first contains an explanation of the doctrine of fluxions, and of its application to the quadrature of curves; the second, a classification of seventy-two curves of the third order, with an account of their properties. The reason for publishing these two tracts in his *Optics*, from the subsequent editions of which they were omitted, is thus stated in the advertisement: — "In a letter written to M Leibnitz in the year 1679, and published by Dr Wallis, I mentioned a method by which I had found some general theorems about

squaring curvilinear figures on comparing them with the conic sections, or other the simplest figures with which they might be compared. And some years ago I lent out a manuscript containing such theorems; and having since met with some things copied out of it, I have on this occasion made it public, prefixing to it an introduction, and joining a Scholium concerning that method. And I have joined with it another small tract concerning the curvilineal figures of the second kind, which was also written many years ago, and made known to some friends, who have solicited the making it public."

In 1707 William Whiston published the algebraical lectures which Newton had delivered at Cambridge, under the title of *Arithmetica Universalis, sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*. We are not accurately informed how Whiston obtained possession of this work; but it is stated by one of the editors of the English edition "that Mr Whiston, thinking it a pity that so noble and useful a work should be doomed to a college confinement, obtained leave to make it public." It was soon afterwards translated into English by Raphson; and a second edition of it, with improvements by the author, was published at London in 1712, by Dr Machin, secretary to the Royal Society. With the view of stimulating mathematicians to write annotations on this admirable work, the celebrated 's Gravesande published a tract, entitled *Specimen Commentarii in Arithmeticam Universalem*; and Maclaurin's *Algebra* seems to have been drawn up in consequence of this appeal.

Newton's solution of the celebrated problems proposed by John Bernoulli and Leibnitz deserves mention among his mathematical works. In June 1696 Bernoulli addressed a letter to the mathematicians of Europe challenging them to solve two problems — (1) to determine the brachistochrone between two given points not in the same vertical line, (2) to determine a curve such that, if a straight line drawn through a fixed point A meet it in two points P_1, P_2, then $AP_1^m + AP_2^m$ will be constant. This challenge was first made in the *Acta Lipsiensia* for June 1696. Six months were allowed by Bernoulli for the solution of the problem, and in the event of none being sent to him he promised to publish his own. The six months elapsed without any solution being produced; but he received a letter from Leibnitz, stating that he had "cut the knot of the most beautiful of these

problems," and requesting that the period for their solution should be extended to Christmas next, that the French and Italian mathematicians might have no reason to complain of the shortness of the period. Bernoulli adopted the suggestion, and publicly announced the prorogation for the information of those who might not see the *Acta Lipsiensia*.

On the 29th of January 1696/7 Newton received from France two copies of the printed paper containing the problems, and on the following day he transmitted a solution of them to Montague, then president of the Royal Society. He announced that the curve required in the first problem must be a cycloid, and he gave a method of determining it. He solved also the second problem, and he showed that by the same method other curves might be found which shall cut off three or more segments having the like properties. Solutions were also obtained from Leibnitz and the Marquis de L'Hôpital; and, although that of Newton was anonymous, yet Bernoulli recognized the author in his disguise; "tanquam," says he, "ex ungue leonem."

In 1699 Newton's position as a mathematician and natural philosopher was recognized by the French Academy of Sciences. In that year the Academy was remodelled, and eight foreign associates were created. Leibnitz, Domenico Guglielmini (1655-1710), Hartsoeker, and E. W. Tschirnhausen were appointed on the 4th of February, James Bernoulli and John Bernoulli on the 14th of February, and Newton and Olaus Roemer on the 21st of February.

While Newton held the office of warden of the mint, he retained his chair of mathematics at Cambridge, and discharged the duties of the post, but shortly after he was promoted to be master of the mint he appointed Whiston his deputy with "the full profits of the place." Whiston began his astronomical lectures as Newton's deputy in January 1701. On the 10th of December 1701 Newton resigned his professorship, thereby at the same time resigning his fellowship at Trinity, which he had held with the Lucasian professorship since 1675 by virtue of the royal mandate. Whiston 's claims to succeed Newton in the Lucasian chair were successfully supported by Newton himself.

On the 26th of November 1701 Newton was again elected one of the representatives of the university in parliament, but he retained his seat only until the dissolution in the following July. Newton does not seem to have been a candidate at this election, but at the next dissolution in 1705 he was

again a candidate for the representation of the university. He was warmly supported by the residents, but being a Whig in politics he was opposed by the non-residents, and beaten by a large majority.

In the autumn of 1703 Lord Somers retired from the presidency of the Royal Society, and Newton on the 30th of November 1703 was elected to succeed him. Newton was annually re-elected to this honourable post during the remainder of his life. He held the office in all twenty-five years, a period in which he has been exceeded by but one other president of the Royal Society, Sir Joseph Banks. As president Newton was brought into close connexion with Prince George of Denmark, the queen's husband, who had been elected a fellow of the Royal Society. The prince had offered, on Newton's recommendation, to be at the expense of printing Flamsteed's observations, and especially his catalogue of the stars. It was natural that the queen should form a high opinion of one whose merits had made such a deep impression on her husband. In April 1705, when the queen, the prince and the court were staying at the royal residence at Newmarket, they paid a visit to Cambridge, where they were the guests of Dr Bentley, the master of Trinity. Her Majesty went in state to the Regent House, where a congregation of the senate was held, and a number of honorary degrees conferred. Afterwards the queen held a court at Trinity Lodge, where (16th of April 1705) she conferred the order of knighthood upon Sir Isaac Newton.

As soon as the first edition of the *Principia* was published Newton began to prepare for a second edition. He was anxious to improve the work by additions to the theory of the motion of the moon and the planets. Dr Edleston, in his preface to Newton's correspondence with Cotes, justly remarks: — "If Flamsteed the Astronomer-Royal had cordially co-operated with him in the humble capacity of an observer in the way that Newton pointed out and requested of him . . . the lunar theory would, if its creator did not overrate his own powers, have been completely investigated, so far as he could do it, in the first few months of 1695, and a second edition of the *Principia* would probably have followed the execution of the task at no long interval."

Newton, however, could not get the information he wanted from Flamsteed, and after the spring of 1696 his time was much occupied by his duties at the mint. Rumours, however, of his work, and of a new edition,

were heard from time to time. In February 1700 Leibnitz writes of Newton, “J’ai appris aussi (je ne sçai où) qu’il donnera encore quelque chose sur le mouvement de la lune: et on m’a dit aussi qu’il y aura une nouvelle édition de ses principes de la nature.”

Dr Bentley, the master of Trinity College, had for a long time urged Newton to give his consent to the republication of the *Principia*. In the middle of 1708 Newton’s consent was obtained, but it was not till the spring of 1709 that he was prevailed upon to entrust the superintendence of it to a young mathematician of great promise, Roger Cotes, fellow of Trinity College, who had been recently appointed the first Plumian professor of astronomy and experimental philosophy. On the 21st of May 1709, after having been that day with Newton, Bentley announced this arrangement to Cotes:— “Sir Isaac Newton,” he said, “will be glad to see you in June, and then put into your hands one part of his book corrected for the press.” About the middle of July Cotes went to London, in the expectation doubtless to bring down with him to Cambridge the corrected portion of the *Principia*. Although Cotes was impatient to begin his work, it was nearly the end of September before the corrected copy was put into his hands.

During the printing of this edition a correspondence went on continuously between Newton and Cotes. On the 31st of March 1713, when the edition was nearly ready for publication, Newton wrote to Cotes: — “I heare that Mr Bernoulli has sent a Paper of 40 pages to be published in the *Acta Leipsica* relating to what I have written upon the curve Lines described by Projectiles in resisting Mediums. And therein he partly makes Observations upon what I have written & partly improves it. To prevent being blamed by him or others for any disingenuity in not acknowledging my oversights or slips in the first edition, I believe it will not be amiss to print next after the old *Praefatio ad Lectorem*, the following account of this new Edition.

“‘In hac secunda Principiorum Editione, multa sparsim emendantur & nonnulla adjiciuntur. In Libri primi Sect. ii. Inventio virium quibus corpora in Orbibus datis revolvi possint, facilior redditur et amplior. In Libri secundi Sect. vii. Theoria resistentiae fluidorum accuratius investigatur & novis experimentis confirmatur. In Libro tertio Theoria Lunae &amp Praecessio Aequinoctiorum ex Principiis suis plenius deducuntur, et Theoria Cometarum pluribus et accuratius computatis Orbium exemplis confirmatur.

"'28 Mar. 1713. I. N.'

"If you write any further Preface, I must not see it, for I find that I shall be examined about it. The cuts for y^{e} Comet of 1680 & 1681 are printed off and will be sent to Dr Bently this week by the Carrier."

Newton's desire to have no hand in writing the preface seems to have proceeded from a knowledge that Cotes was proposing to allude to the dispute about the invention of fluxions. At last, about midsummer 1713, was published the long and impatiently expected second edition of the *Principia*, and, on the 27th of July, Newton waited on the queen to present her with a copy of the new edition.

In 1714 the question of finding the longitude at sea, which had been looked upon as an important one for several years, was brought into prominence by a petition presented to the House of Commons by a number of captains of Her Majesty's ships and merchant ships and of London merchants. The petition was referred to a committee of the House, who called witnesses. Newton appeared before them and gave evidence. He stated that for determining the longitude at sea there had been several projects, true in theory but difficult to execute. He mentioned four: (1) by a watch to keep time exactly, (2) by the eclipses of Jupiter's satellites, (3) by the place of the moon, (4) by a new method proposed by Mr Ditton. Newton criticized all the methods, pointing out their weak points, and it is due mainly to his evidence that the committee brought in the report which was accepted by the House, and shortly afterwards was converted into a Bill, passed both Houses, and received the royal assent. The report ran "that it is the opinion of this committee that a reward be settled by parliament upon such person or persons as shall discover a more certain and practicable method of ascertaining the longitude than any yet in practice; and the said reward be proportioned to the degree of exactness to which the said method shall reach."

Sir Isaac Newton was a very popular visitor at the court of George I. The princess of Wales, afterwards Queen Caroline, wife of George II., took every opportunity of conversing with him. Having one day been told by Sir Isaac that he had composed a new system of chronology while he was still resident at Cambridge, she requested him to give her a copy. He accordingly drew up an abstract of the system from his papers, and sent it to the princess

for her own private use; but he afterwards allowed a copy to be made for the Abbé Conti on the express understanding that it should not be communicated to any other person. The abbé, however, lent his copy to M Fréret, an antiquary at Paris, who translated it, and endeavoured to refute it. The translation was printed under the title *Abrégé de chronologie de M le Chevallier Newton, fait par lui-même et traduit sur le manuscrit anglais*. Upon receiving a copy of this work, Sir Isaac Newton printed, in the *Philosophical Transactions* for 1725, a paper entitled "Remarks on the observations made on a Chronological Index of Sir Isaac Newton, translated into French by the observator, and published at Paris." In these remarks Sir Isaac charged the abbé with a breach of promise, and gave a triumphant answer to the objections which Fréret had urged against his system. Father Souciet entered the field in defence of Fréret; and in consequence of this controversy Sir Isaac was induced to prepare his larger work, which was published in 1728, after his death, and entitled *The Chronology of Ancient Kingdoms amended, to which is prefixed a short Chronicle from the First Memory of Kings in Europe to the Conquest of Persia by Alexander the Great.*

From an early period of his life Newton had paid great attention to theological studies, and it is well known that he had begun to study the subject of the prophecies before the year 1690. M Biot, with a view of showing that his theological writings were the productions of bis dotage, has fixed their date between 1712 and 1719. That Newton's mind was even then quite clear and powerful is sufficiently proved by his ability to attack the most difficult mathematical problems with success. For it was in 1716 that Leibnitz, in a letter to the Abbé Conti, proposed a problem for solution "for the purpose of feeling the pulse of the English analysts." The problem was to find the orthogonal trajectories of a series of curves represented by a single equation. Newton received this problem about 5 o'clock in the afternoon as he was returning from the mint, but, though he was fatigued with business, he solved the problem the same evening.

One of the most remarkable of Sir Isaac's theological productions is his *Historical Account of Two Notable Corruptions of the Scripture*, in a letter to a friend. This friend was Locke, who received the letter in November 1690. Sir Isaac seems to have been then anxious for its publication; but, as the effect of his argument was to deprive the Trinitarians of two passages in

favour of the Trinity, he became alarmed at the probable consequences of such a step. He therefore requested Locke, who was then going to Holland, to get it translated into French, and published on the continent. Being prevented from going to Holland, Locke copied the manuscript, and sent it, without Newton's name, to Le Clerc, who received it before the 11th of April 1691. On the 20th of January 1692 Le Clerc announced to Locke his intention to publish the pamphlet in Latin; and, upon the intimation of this to Sir Isaac, he entreated him "to stop the translation and impression as soon as he could, for he designed to suppress them." This was accordingly done; but Le Clerc sent the manuscript to the library of the Remonstrants, and it was afterwards published at London in 1754, under the title of *Two Letters from Sir Isaac Newton to M le Clerc*. This edition is imperfect, and in many places erroneous. Dr Horsley therefore published a genuine one, which is in the form of a single letter to a friend, and was taken from a manuscript in Sir Isaac's own hand.

Sir Isaac Newton left behind him in manuscript a work entitled *Observations on the Prophecies of Daniel and the Apocalypse of St John*, which was published in London in 1733, in one volume 410; another work, entitled *Lexicon Propheticum*, with a dissertation on the sacred cubit of the Jews, which was printed in 1737; and four letters addressed to Bentley, containing some arguments in proof of a Deity, which were published by Cumberland, a nephew of Bentley, in 1756. Sir Isaac also left a *Church History* complete, a *History of the Creation*, *Paradoxical Questions regarding Athanasius*, and many divinity tracts.

Newton devoted much of his time to the study of chemistry; but the greater number of his experiments still remain in manuscript. His *Tabula Quantitatum el Graduum Caloris* contains a comparative scale of temperature from that of melting ice to that of a small kitchen fire. He wrote also another chemical paper *De Natura Acidorum*, which has been published by Dr Horsley. Sir Isaac spent much time in the study of the works of the alchemists. He had diligently studied the works of Jacob Boehme, and there were found amongst his manuscripts copious abstracts from them in his own handwriting. In the earlier part of his life he and his relation Dr Newton of Grantham had put up furnaces, and had wrought for several months in quest of the philosopher's tincture. Among the manuscripts in the possession of the earl of Portsmouth there are many

sheets in Sir Isaac's hand of Flamsteed's *Explication of Hieroglyphic Figures*, and in another hand many sheets of William Yworth's *Processus Mysterii Magni Philosophicus*.

In the last few years of his life Newton was troubled with incontinence of urine, which was supposed to be due to stone; but with care he kept the disease under control. In January 1725 he was seized with a violent cough and inflammation of the lungs, which induced him to reside at Kensington; and in the following month he had a severe attack of gout, which produced a decided improvement in his general health. His duties at the mint were discharged by John Conduitt, and he therefore seldom went from home. On the 28th of February 1727, feeling well, he went to London to preside at a meeting of the Royal Society; but the fatigue which attended this duty brought on a violent return of his former complaint, and he returned to Kensington on the 4th of March, when Dr Mead and Dr Chesselden pronounced his disease to be stone. He endured the sufferings of this complaint with wonderful patience. He seemed a little better on the 15th of March, and on the 18th he read the newspapers and conversed with Dr Mead; but at 6 o'clock in the evening he became insensible, and continued in that state till Monday the 20th of March 1727, when he expired without pain between one and two o'clock in the morning. His body was removed to London, and on Tuesday the 28th of March it lay in state in the Jerusalem Chamber, and was thence conveyed to Westminster Abbey, where it was buried.

Authorities. — *Commercium Epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analyst promota: jussu Societatis Regiae in lucent editum*, &c. (1712; 2nd ed., 1722); H. Pemberton, *A View of Sir Isaac Newton's Philosophy* (1728); Colin Maclaurin, *Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries* (1775); F. Baily, *An Account of the Rev. John Flamsteed, the First Astronomer-Royal*, &c. (1835); W. Whewell's *History of the Inductive Sciences* (1837); S. P. Rigaud, *Historical Essay on the First Publication of Sir Isaac Newton's Principia* (1838); Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes*, &c. (1850); Sir D. Brewster, *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton* (1855; new ed. 1893); Lord Brougham and Routh's *Analytical View of Sir Isaac Newton's Principia* (1855); S. P. Rigaud, *Correspondence of Scientific Men of the 17th Century, &c., from the Originals in the Collection of the Earl of*

Macclesfield (1841); J. Raphson, *History of Fluxions, showing in a compendious manner the First Rise of and Various Improvements made in that Incomparable Method* (1715); W. W. R. Ball, *Essay on Newton's Principia* (1893). A complete bibliography of Newton's writings has been given by G. J. Gray (Cambridge, 1880). The collected works of Newton were published in 1779-1785 by Dr Samuel Horsley, F.R.S., under the title *Isaaci Newtoni Opera quae exstant Omnia*.

(H. M. T.)

Westminster Abbey, London — Newton's final resting place

Newton's grave